Laurent schwartz (1915-2002) et la vie collective des mathématiques

Anne-Sandrine Paumier

Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale Sciences Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Anne-Sandrine Paumier

Laurent Schwartz (1915-2002) et la vie collective des mathématiques

---

dirigée par David Aubin

Soutenue le 30 juin 2014 devant le jury composé de :

M. David Aubin	Université Pierre et Marie Curie, Paris	directeur
M. Frédéric Brechenmacher	Université d'Artois et École polytechnique	examinateur
Mme Amy Dahan-Dalmedico	Centre Alexandre Koyré	examinateur
Mme Hélène Gispert	Université Paris Sud	rapporteur
M. Gilles Godefroy	Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG	examinateur
Mme Catherine Goldstein	Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG	examinateur
M. Jesper Lützen	Université de Copenhague	rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
Case postale 247

École Doctorale Sciences Mathématiques de Paris Centre
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
Boîte courrier 290

Remerciements

L'histoire des mathématiques a elle aussi une vie collective. Je vais essayer ici de retracer la diversité des lieux dans lesquels j'ai pu découvrir cette discipline, ainsi que la richesse des échanges, des rencontres et des discussions qui la constituent. J'ai croisé de nombreuses personnes dans ce parcours, que je souhaite remercier ici, en m'excusant pour les oublis involontaires. Traditionnellement, en France, les mathématiciens se sont intéressés à l'histoire de leur discipline, ce qui a permis l'existence d'équipes d'historiens des mathématiques au sein de laboratoires de mathématiques, comme c'est le cas à l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

C'est pour ma part en tant que mathématicienne que j'ai découvert l'histoire des mathématiques. Entrée à l'École normale supérieure de Lyon en 2005, j'y ai suivi tout un parcours de mathématiques mais aussi découvert comment organiser un gala, créer et animer une association de soutien scolaire, participer au BDE, partager et cuisiner (vive les choc'potes) ou encore les richesses de la bibliothèque pendant l'agreg (merci à tous mes collègues et surtout à Bzi et Bzette). Merci à tous ceux qui ont contribué à bien remplir ces années ! La dernière partie de ma formation mathématique s'est déroulée à Paris 6. Je remercie Nicolas Lerner pour son passionnant cours sur les inégalités, et pour avoir attiré mon attention sur le théorème des noyaux dans le livre d'Hörmander. Je remercie aussi Isabelle Gallagher pour m'avoir initiée aux subtilités de l'équation de Navier-Stokes.

Durant ces quatre années principalement mathématiciennes, j'ai eu la chance de pouvoir effectuer des petits stages d'initiation à la recherche. Je n'oublierai pas ma rencontre avec l'équipe Histoire des Sciences Mathématiques de l'IMJ à l'été 2006. J'ai été accueillie de manière très chaleureuse et dynamique par Christian Gilain, Catherine Goldstein et David Aubin, qui m'avaient tous les trois proposé des sujets de recherche. J'y ai aussi rencontré Sébastien, Juliette, et Jim.

C'est ici l'occasion de remercier David Aubin, vers qui je suis revenue trois ans plus tard pour mon mémoire de master 2 et ma thèse. La passion avec laquelle il m'avait présenté ses travaux autour de l'Observatoire restent mon premier souvenir de recherche en histoire des mathématiques. Les nombreuses discussions que nous avons eues, toujours très stimulantes et exigeantes, m'ont appris à formuler mes idées et à en extraire l'essentiel. Son enthousiasme lors de nos discussions a toujours été accompagné d'une grande liberté et confiance dans mes choix. Je le remercie de m'avoir ainsi initiée à la recherche, à l'expression de mes idées et à la production de mes propres résultats.

C'est au sein de l'équipe HSM que j'ai fait mes premiers pas dans la recherche, et je tiens à remercier chacun de ses membres. Je remercie Catherine Goldstein pour son enthousiasme et sa curiosité pour la recherche, pour ses conseils concrets et attentionnés, pour sa disponibilité et pour ses batailles toujours gagnées. Je remercie Jim pour m'avoir à plusieurs reprises demandé ce que j'avais trouvé d'"exciting" et permis ainsi de partager mes découvertes. Je remercie Alexandre, qui a même encadré un petit mémoire de recherche en M1, pour sa bonne humeur, sa présence et ses encouragements. Je remercie aussi les autres membres de l'équipe pour les nombreuses discussions autour du séminaire de l'équipe ou de déjeuners sympathiques. Les discussions sur le fond et la forme, ainsi que tout le reste, avec d'autres doctorants ou jeunes chercheurs en histoire des mathématiques sont essentielles. Alors merci à Jenny et François pour tout cela, et pour leur amitié. Et bonne chance aux nouveaux !

Ce sont les archives qui m'ont donné le goût de la recherche. Mes premières expériences aux archives de Vincennes ou à l'Académie des Sciences m'en avaient donné un aperçu ; les nombreuses heures passées aux archives de l'École polytechnique m'en ont convaincue ! Je remercie d'ailleurs Olivier Azzola qui a sorti et rangé des dizaines de cartons et m'a obligé à sortir déjeuner de temps en temps : aux archives, le temps est suspendu ! Les conservateurs qui m'ont accueilli dans les différentes centres d'archives visités ont toujours été d'une grande aide : à Nancy, je remercie Liliane Beaulieu et Gérard Egether, ainsi que les archives départementales ; au CNRS, je remercie Isabelle Dujonc qui a trié de nombreux dossiers et a fait des dizaines de photocopies ; je remercie enfin la conservatrice des archives de l'Académie des Sciences, ainsi que le personnel des nombreuses bibliothèques visitées, notamment MIR.

De chacun des entretiens que j'ai effectué est ressorti la passion des mathématiciens pour la vie mathématique. Je remercie chacun d'entre eux, Michel Broué (qui m'a ouvert sa cave et prêté les archives du Comité des Mathématiciens), Pierre Cartier (dont les souvenirs sur la période sont précieux et inépuisables), Pierre Dolbeault (dont le sourire traduit l'heureuse vie mathématique vécue), Alain Guichardet (qui m'a aussi introduite aux archives Schwartz), François Laudenbach (qui raconte cette période avec émotion et passion), Bernard Malgrange (témoin privilégié des années nancéiennes), Gilles Pisier, Pierre Schapira... de m'avoir fait partager leurs souvenirs et, ainsi que Claudine Schwartz, de m'avoir écoutée avec bienveillance raconter mon projet.

Ma formation en histoire des mathématiques s'est faite en plusieurs étapes. Le premier événement marquant est sans doute ma lecture du livre de Catherine Goldstein, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, dont le point de vue et l'ambition m'ont passionnée. J'ai aussi suivi les enseignements de Laurent Mazliak et Catherine Goldstein, le cours de Koyré, où j'ai lu de nombreux textes classiques et essentiels de l'histoire des sciences, dans lequel m'a accueillie Amy Dahan. Pendant trois ans, j'ai participé au séminaire biographique, animé la première année par Jeanne Peiffer notamment, puis repris par Anne Collinot. Ce séminaire m'a appris énormément sur la biographie, le genre biographique, les expériences très différentes et toujours passionnantes. Je remercie tous ceux qui ont contribué ainsi à me former ! J'ai aussi eu la chance d'enseigner l'histoire des mathématiques sous plusieurs formes, en L1 ou L3 notamment, ce qui a été très enrichissant.

De manière générale, c'est en assistant à des séminaires ou à des colloques, voire en les organisant, que j'ai pris conscience de la richesse et de la diversité de la vie collective de l'histoire des mathématiques. J'ai découvert de nombreux lieux et les cultures différentes de la communauté d'histoire des mathématiques, que ce soit en France, en Allemagne ou aux États-Unis. Je remercie ainsi, pour leurs écoutes, discussions ou questions, Norbert Schappacher, Liliane Beaulieu, Maarten Bullyinck, Karen Parshall, Michael Barany, Eva, ainsi que de nombreux autres. L'organisation de la Novembertagung avec Jenny reste un moment fort, dont je la remercie ainsi que tous les participants. Je remercie aussi Frédéric Brechenmacher dont j'ai profité, lors de courtes ou longues discussions, de l'enthousiasme ; ses projets multiples et originaux sont une réelle source de motivation.

Le travail de thèse en lui même se partage avec d'autres doctorants. Merci au gang des marinières du bureau 1516 506, Clément, Florent et Aurélien, d'avoir partagé ces années - cours de maths pour les nuls et pauses orangina ! Merci à Séverine pour son amitié, sa délicatesse et sa gentillesse... et pour avoir autant papo'thé avec moi ! Merci aussi aux nombreux autres doctorants, du BDD et du couloir, pour avoir partagé repas, pauses, parties de Möllky et discussions, notamment Victoria, François, Pierre-Guy, Lara, Clémence, Jean, Henri, Maëlis.

L'expérience de la thèse se termine, et avec elle ces remerciements (et non les moindres). Je remercie à nouveau David Aubin d'avoir encadré ma thèse. Je remercie Hélène Gispert et Jesper Lützen d'avoir accepté de la relire et d'écrire un rapport. Je remercie Hélène pour ses conseils, discussions et encouragements, ainsi que pour sa gentillesse. Je remercie enfin Frédéric Brechenmacher, Amy Dahan-Dalmedico, Gilles Godefroy et Catherine Goldstein d'avoir accepté de constituer mon jury.

Tous ceux qui ont partagé des moments de ma vie pendant ma thèse en ont eux aussi profité. Je n'oublierai jamais la surprise des gens, notamment mes amis de la rue, lorsque je mentionne ma thèse en histoire des mathématiques : perplexité, fou-rire, et puis finalement intérêt sont de mise... Merci à eux, au plan igloo et à la conf' où j'ai passé de si nombreuses et belles heures.

Je dois à mes parents une curiosité jamais satisfaite, un goût pour les écritures, qu'elles soient ou non mathématiques, une envie de rencontrer les gens et de les faire parler de leur passion, ainsi qu'à mon frère de longues tirades pour le convaincre de l'intérêt d'une telle recherche : je les en remercie.

Merci enfin à Pierre et Malo qui ont vécu des matinées de travail ou des sorties salutaires, et ont partagé avec moi le reste de mes heures !

Résumé

Résumé

Ce travail se saisit de la figure de Laurent Schwartz (1915-2002) pour étudier la vie collective des mathématiques dans la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Il vise à montrer comment les pratiques collectives sont alors constitutives du travail et de la communauté mathématiques et comment elles évoluent au cours de cette période. Par le biais biographique, en considérant Schwartz à la fois comme un acteur important qui laisse de nombreuses traces ou comme un simple témoin, nous présentons plusieurs tableaux du collectif. Nous étudions la rencontre que Schwartz fait de la vie collective des mathématiques pendant la Seconde Guerre mondiale, notamment par son interaction avec le groupe Bourbaki. Nous analysons ensuite la diffusion de la théorie des distributions dans les mathématiques et son historiographie et montrons le rôle actif de Schwartz dans ces processus. Un chapitre consacré au théorème des noyaux de Schwartz et ses écritures ultérieures permet d'approfondir l'étude des interactions entre pratiques d'écriture en mathématiques et différents types de collectifs. Ce sont ensuite sur trois formes d'organisation collective du travail mathématique que nous nous penchons : le colloque (en proposant une étude de cas sur le colloque d'analyse harmonique de 1947), le séminaire et, enfin, le laboratoire de mathématiques (en prenant l'exemple du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique). Enfin, nous abordons la question de l'engagement politique de Schwartz en tant que mathématicien. Nous cherchons à montrer comment cet engagement traduit une certaine conception de la communauté mathématique, tout en s'inspirant de ses pratiques sociales particulières.

Mots-clefs

Laurent Schwartz, vie collective des mathématiques, histoire des mathématiques, distributions, colloque, séminaire, laboratoire

Laurent Schwartz (1915-2002) and the collective life of mathematics.

Abstract

This work takes the case of Laurent Schwartz (1915-2002) to study the collective life of mathematics in the second half of the 20th century.

Its goal is to show how collective practices have then been constitutive of mathematical work and community, as well as how they evolved over this period. Through a biographical lens, by considering Schwartz both as an important actor who has left numerous traces and as a simple witness, we present several tableaus of the collective. We study the encounter between Schwartz and the collective life of mathematics during World War II, in particular through his interaction with the Bourbaki group. We then analyze the diffusion of the theory of distributions in mathematics and its historiography, and show Schwartz' active role in these processes. A chapter devoted to the kernel theorem (théorème des noyaux) and its later written incarnations allows us to deepen our study of interactions between writing practices in mathematics and various kinds of collectives. Three forms of collective organization of the mathematical work are then investigated: the conference (through a study of the 1947 colloquium on harmonic analysis), the seminar, and, finally, the mathematical research center (taking as an example the Centre de Mathématiques de l'Ecole polytechnique). Finally, we take on the question of Schwartz's political engagement as a mathematician. We wish to show how this engagement embodies a certain conception of the mathematical community, while taking some inspiration from its particular social practices.

Keywords

Laurent Schwartz, collective life of mathematics, history of mathematics, distributions, seminar, conference, research center

Table des matières

Introduction

Lorsqu'on écrira l'histoire des mathématiques au 20^{e} siècle il n'y a aucun doute que Laurent Schwartz y occupera une place centrale. Ses contributions sont telles qu'il est compté parmi les mathématiciens les plus distingués du monde entier [1].

1. Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, A.I.9.6. Présentation de M.Laurent Schwartz par Francis Clarke à la collation solennelle des grades du 29 mai 1985. Attribution d'un honoris causa de l'Université de Montréal.

0.1 Laurent Schwartz dans l'« imaginaire collectif »

0.1.1 Mémoire(s)

> Peu de mathématiciens gagnent leur place dans l'imaginaire collectif national. Laurent Schwartz est l'un d'eux.
>
> [Waldschmidt 2003, p.3]

C'est par cette constatation qu'est introduit le numéro spécial de la *Gazette des Mathématiciens* consacré à Laurent Schwartz [2]. Schwartz est en effet très présent dans les mémoires de ceux qui l'ont connu. Mentionner son nom attire encore aujourd'hui de nombreuses réactions, enthousiastes ou réfractaires, rarement indifférentes. De l'enseignant extraordinaire, à l'homme aux multiples facettes, aux mille et un engagements [3], on a parfois le portrait d'un père, d'un oncle, d'un ami, d'un directeur de thèse dont on peut dire « il m'a tout appris ». Mathématicien avant tout, il est un collectionneur passionné de papillons. En tant qu' « homme public », défenseur acharné des droits de l'homme, on trouve dans les archives du *Monde* la trace de nombreuses pétitions qu'il a signées. Quelquefois, plus rarement, peut-être parmi les plus jeunes, on entend aussi : « je ne l'aimais pas trop ; il était d'une autre génération » ou encore on s'étonne à demi-mots de sa défense active pour l'introduction d'une sélection à l'université.

Pour beaucoup, il reste un modèle que l'on associe aux entreprises concernant la communauté mathématique :

> Maintenant je me surprends souvent à penser à Schwartz quand j'essaie d'entreprendre quelque chose pour la communauté mathématique. Il fut sans conteste un exemple pour de nombreux mathématiciens de ma génération. Nous lui devons beaucoup, autant pour la clarté de sa pensée mathématique que pour son engagement constant et infaillible pour des luttes restées commodément ignorées ou oubliées. C'est pourquoi, en écrivant ces mots, je sens une grande tristesse et un grand vide. Je viens de perdre un ami, un mentor, un oncle, comme nous disons familièrement au Vietnam quand on parle d'une personne qu'on aime tant qu'on l'intègre dans sa famille.
>
> [Lê 2003, p.160]

tout autant qu'aux débats intellectuels complexes :

> He had a keen interest in encouraging young mathematicians, without compromising for high standards for mathematical research. When faced with a problem, Schwartz would consider all possible solutions, not just the obvious ones. Although he was a formidable debater with a very powerful intellect, he was always respectful of opinions different from his, even from whom respect was not received.
>
> (...) Whenever I am faced with a problem which seems to have no solution, I ask myself, *« What would Schwartz do ? »*
>
> [Baouendi 2003, p.52]

Une question récurrente concerne la théorie des distributions : « est-ce lui qui l'a inventée ou bien Sobolev ? » comme une ritournelle, mais aussi comme une question inextricable sur laquelle il est nécessaire d'avoir un avis. Sans vouloir y répondre [4], on est amené à reconsidérer la question, suivant ainsi l'hypothèse faite par Dieudonné :

> [T]he various ideas which finally converged to the theory of distributions appeared in a kind of random pattern, each being developed in isolation from the others. Such a phenomenon may perhaps be attributed to a more general one, the isolation of the mathematical disciplines from one another which lasted till the middle of the

2. [*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens* 2003]
3. Je reprends l'expression de [Guichardet 2003a].
4. La théorie des distributions de Schwartz et son historiographie sont présentées en détail au chapitre 2.

> twentieth century ; it certainly was due in part to the lack of communication between their practitioners. Very likely a similar situation would be much less probable at present, with the multiplicity of symposia, colloquia, summer schools, seminars, etc., which are now offered to mathematicians.
>
> [Dieudonné 1984, p.374]

L'important est donc de discuter la manière dont les mathématiciens communiquent leurs idées et les échangent, en particulier à la lumière des nombreux changements qui apparaissent au cours de la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

La diversité et le nombre des témoignages ou récits, publiés ou non, sur Schwartz pose la question de la mémoire, des mémoires. La thèse de Juliette Leloup [Leloup 2009, p.23-27] remet ainsi en cause une image de l'entre-deux-guerres mathématique qui reposerait exclusivement sur des témoignages, directs ou rapportés, ou des souvenirs. Elle motive alors l'introduction de son nouveau corpus, celui des thèses de doctorat. Une telle image constitue en effet une « mémoire collective », au sens de Maurice Halbwachs [5], celle du groupe Bourbaki [6], dont le principal écueil provient du fait qu'il s'agit de souvenirs reconstruits. Le travail de Leloup n'est pas le seul explicitant ainsi la notion de « mémoire collective ». On peut citer les études de Caroline Ehrhardt sur Galois [7] dont l'article [Ehrhardt 2011b] propose de tester de manière empirique la méthode d'Halbwachs sur le cas de Galois.

Car, sans atteindre la notoriété de Galois parmi les mathématiciens, Laurent Schwartz peut le concurrencer lorsqu'il s'agit de donner un nom à une bibliothèque [8]. On le propose pour les raisons suivantes [9] :

> Puisque « Evariste Galois » doit certainement être déjà utilisé ailleurs, et malgré l'excellente idée qu'est la proposition « Mohamed Ibn Moussa Al-Kawarizmi », il me semble que le meilleur choix pour notre bibliothèque serait « Laurent Schwartz ».
>
> En effet, il a été à la fois :
> – l'un des grands anciens de nos plus illustres mathématiciens du XX$^{\text{e}}$ siècle, tout en s'intéressant aux disciplines nouvelles, aux papillons et à bien d'autres choses ;
> – l'un des fondateurs de Paris 7, avec un remarquable et constant souci tant de son enseignement que de ses étudiants de tous niveaux ;
> – et un citoyen comme on en voudrait davantage, en même temps courtois et vigilant, ferme et ouvert aux autres.
>
> Un humain rare, donc.
>
> Bref, je vote des deux mains et de tout cœur pour que nous décidions d'honorer ainsi sa mémoire.

5. [Halbwachs 1997]

6. Ainsi qu'elle le mentionne, et nous en reparlons plus tard, la « mise en mémoire » passe par des « jeux d'esprit et jeux de mémoire », qui ont été étudiés par Liliane Beaulieu. [Beaulieu 1998], [Abir-Am 1998].

7. Sa thèse [Ehrhardt 2007], ainsi que son ouvrage [Ehrhardt 2011a] explicitent notamment « la fabrication d'une icône mathématique ».

8. Il existe en fait déjà (au moins) une bibliothèque qui porte son nom. Il s'agit de la « salle Laurent Schwartz » qui désigne la bibliothèque de mathématiques de l'ENS de Lyon. Il existe aussi (au moins) un « amphithéâtre Laurent Schwartz » à la Faculté Paul Sabatier de Toulouse. On peut même trouver un « rond-point Laurent Schwartz » à Maurepas !

9. Le 9 juin 2011, Liliane Zweig, au nom de la direction de la bibliothèque MIR (Mathématiques Informatique Recherche) envoie un mail sur [news], une liste de diffusion interne aux mathématiciens des laboratoires de mathématiques des universités Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6) et Paris Diderot (Paris 7) pour « donner un nom » à la bibliothèque. Les noms avancés sont ceux d'Évariste Galois ou Marcel-Paul Schützenberger. Elle ne s'attend pas à une telle avalanche de réponses : une centaine de mails dans les 48h qui ont suivi son mail, et des dizaines de noms proposés, parfois défendus avec ardeur. Finalement, ainsi que certains le préconisent, la bibliothèque garde un nom formé d'un acronyme : MIR pour Mathématiques et Informatique Recherche, suivi des noms des deux universités dont elle dépend. Les archives de [news] sont accessibles via https ://mail.math.jussieu.fr/tools/pipermail/news/ (Page consultée le 10/09/2013).

L'importance des mathématiciens pour une telle commémoration – même la simple dénomination d'une bibliothèque – invite donc à la considération précise de la mémoire. Il nous faut, dans le cas de Schwartz, déterminer ce qui relève d'une « mémoire collective », de tel ou tel groupe, et ce qui constitue la mémoire de l'individu. Leloup reprend ainsi les conditions de l'interaction entre mémoire individuelle et collective chez Halbwachs :

> La première est celle de l'imperfection (l'imprécision ou le vague) des souvenirs de l'individu, ces ombres étant en partie « éclairées » et complétées par les souvenirs du groupe ; la seconde est celle de l'intersection non vide entre les souvenirs du groupe et de l'individu. En outre, Halbwachs précise comment la mémoire collective d'un groupe est en partie constituée par la mise en commun des mémoires individuelles de ses membres. L'interaction réciproque entre mémoire individuelle et mémoire collective, telle qu'elle est expliquée par Halbwachs, s'inscrit dans un temps donné et un espace donné.
>
> [Leloup 2009, p.24]

La confrontation est d'autant plus évidente que Schwartz a écrit et publié son autobiographie, intitulée *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, en 1997 [10]. L'intersection est non vide avec de nombreux groupes, de nombreux collectifs, ainsi que nous allons le voir. La mémoire de Schwartz relève donc, dans de nombreux cas, de la « mémoire collective » de tel groupe particulier. Mais le récit de Schwartz, ses mémoires, transforment à leur tour la « mémoire collective ». Il écrit dans la Préface [11] avoir souhaité « (...) que rien ne soit changé à [s]a pensée ni à [s]a personnalité, de manière que tous ceux qui [l]e connaissent [l]e reconnaissent et croient " entendre le timbre de [s]a voix ", comme [lui] ont dit certains lecteurs. ». Mais alors, est-ce que l'autobiographie rend impossible de reparler de Schwartz ? Les récits ultérieurs portent nécessairement la marque de ces mémoires écrits par Schwartz lui-même. Car, ainsi que le note Anthony Grafton lorsqu'il préface une édition de l'autobiographie de Cardan, l'écriture de l'autobiographie n'est pas uniquement un acte passif d'enregistrement [12]. Si Grafton considère l'autobiographie de Cardan comme étant sa manière –scrupuleuse, héroïque, et nécessairement incomplète – d'instruire le monde en faisant de son récit un cas d'étude historique [13], on peut, de même, considérer l'autobiographie de Schwartz comme étant sa manière – enthousiaste, vivante, et nécessairement imparfaite – de partager ses connaissances, ses expériences, ses mathématiques en faisant de son récit un cas d'étude à l'intérieur de la communauté mathématique [14].

---

10. [Schwartz 1997]
11. [Schwartz 1997, p.10]
12. Plus spécifiquement, pour Cardan, il écrit :

> If Cardano saw himself as the largely passive prey of the cosmos, he never saw autobiography as a passive act of recording.
>
> [Grafton 2002, p.xvii]

13. Il écrit :

> To that extent, Cardano's book is more than self-advertisement or applied astrology. It is his scrupulous, heroic, and necessarily incomplete effort to instruct the world by turning his soul into a case history.
>
> [Grafton 2002, p.xviii]

14. Schwartz n'est pas le seul mathématicien à avoir écrit son autobiographie. On peut mentionner par exemple celles de Norbert Wiener [Wiener 1953], [Wiener 1956] et André Weil [Weil 1991], que l'on cite plus loin, parmi de nombreuses autres.

0.1.2 Y a-t-il encore quelque chose à dire sur Laurent Schwartz ?

Schwartz est très présent non seulement dans les mémoires, mais aussi dans l'historiographie. Il est de tradition parmi les mathématiciens, à l'occasion du départ en retraite ou d'une date anniversaire, de célébrer l'œuvre scientifique. Un « Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz » a ainsi été organisé à l'École polytechnique, du 30 mai au 3 juin 1983, dont les actes, qui comportent des exposés mathématiques ainsi que des récits de souvenirs, sont publiés [*Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz. Vol. 1* 1985], [*Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz. Vol. 2* 1985]. Lorsque Schwartz décède en 2002, de nombreux notices nécrologiques sont écrites en son hommage [Connes 2002] dans la *Gazette des Mathématiciens*, [Treves, Pisier et Yor 2003] dans les *Notices of the American Mathematical Society*, [Pisier 2004] discours à l'Académie des Sciences, [Guichardet 2005], [Laudenbach 2002], [Bourguignon et Levy 2002], [Esambert 2004] dans des publications de l'École polytechnique, [Viterbo 2002] dans *La Lettre du CNRS*, [Choquet 2004] et [Malgrange 2004b] dans l'*Annuaire de l'association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure*, ou bien encore en espagnol [Bombal 2003] ; ainsi que de multiples articles dans la presse [15]. Un supplément de la *Gazette des mathématiciens* lui est consacré en 2003 [16] ; il comporte 30 récits de souvenirs différents, regroupés pour décrire « l'homme », « le mathématicien », « le citoyen ». Ce volume comporte aussi une chronologie assez complète. Un « colloque Laurent Schwartz » est organisé à l'École polytechnique en son hommage un an après son décès, du 1er au 4 juillet 2003 ; et la Bibliothèque centrale de l'École polytechnique. propose une exposition « Laurent Schwartz, papillons et documents » du 21 juin au 14 juillet 2003.

Sa théorie des distributions – plus précisément la préhistoire de cette théorie – a fait l'objet d'une thèse de doctorat, celle de Jesper Lützen [17].

Laurent Schwartz lui-même a beaucoup parlé et beaucoup écrit. On a cité son autobiographie [Schwartz 1997] ; mais Schwartz s'est aussi exprimé à l'occasion d'interviews, d'émissions de radio, ou même d'un entretien filmé [18].

Enfin, ses *Œuvres scientifiques* viennent de paraître [19] en 2011, en trois volumes [Schwartz

15. Une liste ainsi que les coupures de presse correspondantes sont conservées aux Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, A.I.8.22 Hommages post-mortem.

16. Il s'agit de [*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens* 2003], dont on mentionne la plupart des articles séparément dans la suite de ce travail.

17. [Lützen 1982], dont on reparle longuement au chapitre 2.

18. Une fois encore, on renvoie aux Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz pour ces documents. On peut citer notamment :

A.V.1.9 Notes manuscrites, préparation de « Au bon plaisir », émission de radio à France Culture, 1992.

A.V.1.10 Entretien filmé, École Polytechnique, 25 janvier 1995

19. On trouve dans les Archives de l'École polytechnique (Fonds Laurent Schwartz, A.I.10.1 Hermann) une volonté précoce de publication de ces Œuvres Complètes par Hermann, que Schwartz refuse. Dès 1977, Hermann propose à Schwartz cette publication, qu'il refuse pour deux raisons :

> Cher Monsieur,
>
> Je vous remercie de votre lettre du 3 juin au sujet de mes œuvres complètes mais cela me paraît tout à faire prématuré pour une double raison :
>
> 1) j'espère qu'elles ne sont pas encore achevées ;
> 2) les œuvres complètes de personnes telles que Cartan, A.Weil, J.Dieudonné, J.Leray n'ont pas été publiées, il me paraîtrait tout à fait anormal de songer aux miennes avant les leurs !

En 1982, lorsque l'éditeur adresse ses félicitations à Schwartz à propos de son rapport [Schwartz 1981a], il suggère encore cette publication :

> Cher Monsieur,

2011b], [Schwartz 2011c] et [Schwartz 2011d] ; et contiennent une liste de ses publications. Outre les choix scientifiques inhérents à la sélection des articles, ces *Œuvres scientifiques* contiennent des introductions aux différents domaines mathématiques étudiés par Schwartz. On a ainsi une présentation de « La théorie des distributions » [Malgrange 2011], une analyse de « Laurent Schwartz et les séminaires » [Guichardet 2011], une étude sur « L'influence de Laurent Schwartz en théorie des espaces de Banach » [Godefroy 2011], et enfin un portrait de « Laurent Schwartz probabiliste » [Emery 2011]. Ceci est complété par des photographies et la reproduction de quelques lettres. Les trois volumes publiés sont accompagnés d'un CD-Rom, sur lequel se trouvent tous les articles de Schwartz – y compris ceux qui n'ont pas été choisis pour l'impression – ainsi qu'un cours filmé et quelques autres documents d'archives.

Les mathématiques de Schwartz ont donc été présentées et publiées. Il existe un très grand nombre de témoignages et récits variés. La théorie des distributions a été étudiée. Mais alors, que peut-on encore écrire sur Schwartz ?

On peut apporter à cette question deux premières réponses provisoires. La première relève des sources existantes, et plus particulièrement de l'exploitation des archives. Schwartz a en effet légué ses archives à l'École polytechnique. Il s'agit d'un fonds très riche, et les quelques extraits qui illustrent les diverses publications sont loin de donner un aperçu de son contenu [20]. Une exploitation fine des archives ne vise pas à dévoiler des faits secrets, non encore connus sur la vie de Schwartz ni à mettre à jour un théorème inédit. Néanmoins elle permet de revisiter l'historiographie existante, et d'insister sur certains aspects. De nombreux autres fonds d'archives sont aussi mis à contribution dans cette thèse, ainsi que nous allons le voir plus loin.

La seconde réponse relève de la période considérée. La seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle reste encore très peu étudiée par des historiens des mathématiques. Nous mentionnons cependant plus loin quelques travaux existants. Ce travail s'inscrit donc dans le champ des études des changements majeurs des pratiques scientifiques pendant la période des Trente Glorieuses (1945-1975). Les travaux d'Amy Dahan sur Jacques-Louis Lions [Dahan Dalmedico 2005] et sur l'École polytechnique [Dahan Dalmedico 1994], [Dahan Dalmedico 1995] et ceux de David Aubin sur l'IHÉS [Aubin 1998] insistent sur l'aspect collectif de la vie mathématique de ces années-là. Dominique Pestre [Pestre 1992] pour la physique et Jean-Paul Gaudillière [Gaudillière 2002] pour la biologie moléculaire ont aussi insisté sur la figure centrale et charismatique de l'entrepreneur scientifique dans les années d'après-guerre.

0.1.3 Qui est Laurent Schwartz ?

Laurent Schwartz (1915-2002) est un mathématicien français. C'est ainsi en effet qu'il ouvre son autobiographie : « Je suis mathématicien. Les mathématiques ont rempli ma vie (...) » [Schwartz 1997, p.9]. Il entre à l'École normale supérieure en 1934 et y étudie les

> J'ai eu plaisir à voir l'accueil unanimement enthousiaste fait à votre rapport. Bravo pour ce dévouement continu et créateur aux choses publiques.
>
> Quand m'autoriserez-vous enfin à éditer vos œuvres complètes ou, du moins, des œuvres choisies ? J'enrage de voir des livres semblables, et que le vôtre manque ! (...)

Schwartz refuse, encore une fois, de considérer que son œuvre scientifique est derrière lui, et lui répond :

> En ce qui concerne mes œuvres complètes, franchement je ne suis pas pressé ; je publie encore pas mal à l'heure actuelle, et je ne voudrais pas mettre à ma création un point final !

20. On trouve une présentation des archives par Alain Guichardet dans [Guichardet 2003b], publié dans [Guichardet 2003a] ; ainsi que de nombreux documents numérisés sur le site de la Bibliothèque de l'École polytechnique. Un inventaire de ces archives est disponible dans les Archives de l'École polytechnique.

mathématiques. Il soutient sa thèse en 1942, juste avant de passer dans la clandestinité avec sa femme, Marie-Hélène Levy, elle aussi normalienne et mathématicienne [21] – ils sont tous les deux juifs – jusqu'à la fin de la guerre. Il continue à apprendre les mathématiques, et à la fin de la guerre publie son premier article sur les distributions, une généralisation des fonctions. Sa théorie des distributions lui vaut d'être le premier français à obtenir la médaille Fields en 1950. Analyste, il publie aussi en géométrie des espaces de Banach puis dans le domaine des probabilités dans lequel il s'intéresse à la théorie des martingales. Il est maître de conférences puis professeur à Nancy (1949), puis à Paris (1952), où il anime de nombreux séminaires, avant d'être professeur cumulant (à partir de 1959) puis détaché (1969) à l'École polytechnique où il s'engage dans des réformes importantes et crée le Centre de mathématiques en 1965, l'un des premiers laboratoires de recherche en mathématiques. Il encadre de nombreux – et brillants – étudiants en thèse : Alexandre Grothendieck, Bernard Malgrange, Jacques-Louis Lions, André Martineau (1930-1972), François Treves, Bernard Maurey, Gilles Pisier notamment. Il est aussi très actif dans la défense des droits de l'homme, et passionné de papillons dont il possède une collection impressionnante. On lui doit un rapport sur l'enseignement scientifique pour la Commission du Bilan de 1981, à la demande de Pierre Mauroy qui est le premier ministre de Miterrand, ainsi que de nombreuses réflexions sur l'université française.

On trouve en annexe (A, p.285) quelques dates, qui sont issues de la chronologie établie dans [*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens* 2003], avec quelques ajouts et modifications.

0.2 Omniprésence du collectif dans la vie de Schwartz et dans les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle

Ce qui ressort de la lecture de ce matériau, c'est une expérience de vie, une trajectoire professionnelle, des convictions politiques et morales, une personnalité... Mais chez Schwartz, il semble que tous ces différents aspects d'une biographie soient marqués par une grande attention portée aux autres, non seulement dans l'interaction entre individus mais surtout par des formes d'organisation et d'action collectives. C'est en cela que l'on peut parler d'omniprésence du collectif.

Au-delà de la perception que cherchent à transmettre Schwartz et ses proches de la grande importance de l'action collective pour la recherche mathématique, la transmission, la diffusion et le progrès des connaissances dans ce domaine, de même qu'à des niveaux politiques ou moraux, il semble en effet que Schwartz traduise cette conviction par un engagement profond en faveur de la mobilisation de divers collectifs. En cela, Schwartz ne paraît guère exceptionnel pour son époque. Car les mathématiciens, comme les intellectuels en général, voire même de nombreux autres au-delà de ces cercles, privilégient la construction de modes d'action collectifs. Néanmoins, comme on l'expliquera plus loin, l'étude de la vie collective telle que Schwartz en fit l'expérience est un bon moyen de saisir plus généralement l'impact de ces modes de structuration collective des mathématiques au XX$^{\text{ème}}$ siècle.

0.2.1 Du travail solitaire à une vie mathématique collective

On a souvent eu l'image du mathématicien dans sa tour d'ivoire, cherchant et parfois trouvant tout seul. Dans cette conception de l'activité mathématique, l'invention est

21. On présente plus longuement Marie-Hélène Levy au chapitre 1.

souvent abordée par le biais de la psychologie, ainsi qu'en témoigne un livre de Jacques Hadamard [Hadamard 1945]. À première vue, Laurent Schwartz ne semble pas faire exception à la légende, lui qui a inventé les distributions lors de ce qu'il appelle « la plus belle nuit de [s]a vie » [22], alors qu'il vivait en clandestinité à la fin de la Seconde Guerre Mondiale, isolé de la communauté mathématique. Il décrit aussi son activité de recherche solitaire à Autouillet, lieu de résidence secondaire familial :

> La recherche mathématique continue à me procurer le meilleur de mes plaisirs. Mais il y a plus de charme aux mathématiques à Autouillet qu'aux mathématiques devant mon bureau parisien. (...) Je me sens d'une solitude et d'une liberté totales, heureux au grand air, quitte à bien me couvrir et, s'il y a du vent, à lester les feuilles de papier afin qu'elles ne s'envolent pas. J'ai trouvé beaucoup de mes théorèmes les plus intéressants à Autouillet. La majeure partie de mon cours à l'École polytechnique y a été rédigé.
>
> [Schwartz 1997, p.37]

Mais la manière dont il présente sa contribution à l'histoire des distributions dans son autobiographie le montre bien – « Si je ne les avais pas trouvées, écrit-il à propos des distributions [Schwartz 1997, p.225], il me paraît certain qu'on l'aurait fait dans les quelques années qui ont suivi » : la conception qu'il se fait des mathématiques est celle d'une œuvre collective. Peu de mathématiciens contesteront en effet que leur travail, certes solitaire, s'insère, et de plus en plus, dans une dimension collective, voire universelle, des mathématiques. Les mathématiques se vivent, et de plus en plus, de manière collective. Depuis quelques années, certains mathématiciens célèbres ont revendiqué cet aspect de la recherche mathématique, comme par exemple William P. Thurston [Thurston 1994] qui souligne le rôle essentiel du groupe dans la formulation du théorème qui sera prouvé par un seul. On peut aussi mentionner l'étude de la preuve collaborative de la classification des groupes finis simples [Steingart 2012], ou bien l'initiative « Polymath » [Gowers et Nielsen 2009], initiée par le mathématicien Timothy Gowers en 2009, consistant à s'attaquer à un problème de mathématiques ouvert de manière entièrement collaborative [23].

Cependant – et c'est d'autant plus marquant dans le cas de Schwartz – au XX$^{\text{ème}}$ siècle, cette insertion des mathématiques dans une vie collective est, et doit être, activement construite. Non seulement les mathématiciens travaillent de plus en plus collectivement, développent des modes de travail où l'échange et la communication jouent des rôles prépondérants et participent à des entreprises collectives de grande ampleur ; mais aussi, dans le cas de Schwartz en particulier, ils ont pleinement conscience du fait que la vie collective est constitutive de l'expérience des mathématiques au XX$^{\text{ème}}$ siècle et qu'ils doivent consacrer une partie importante de leur activité professionnelle à organiser et structurer cette vie collective.

Voyages mathématiques, séminaires, conférences, interactions avec d'autres mathématiciens structurent la vie, mathématique en particulier, de Schwartz : celle-ci est éminemment collective. Prenons l'exemple d'initiatives concrètes : celle des comités. Dans l'autobiographie et les archives de Schwartz sont mentionnés une quarantaine de Comités, dont il est membre, voire initiateur. Ces comités – aussi bien l'appellation que la forme font appel à une forme de mobilisation particulière partagée, de manière plus générale, par les intellectuels – sont de natures diverses et peuvent concerner aussi bien la défense des droits de l'homme que l'organisation de l'université. Lorsqu'il analyse en particulier

22. [Schwartz 1997, p.246]

23. La question est posée par Timothy Gowers : « Is massively collaborative mathematics possible ? », et est publiée ici http ://gowers.wordpress.com/2009/01/27/is-massively-collaborative-mathematics-possible/ (Page consultée le 01/09/2013). Il existe, depuis, plusieurs « Polymath » consacré à différents problèmes. L'initiative est commentée notamment dans [Barany. 2010].

le Comité des mathématiciens [24], Schwartz remet en cause l'image du scientifique enfermé dans sa tour d'ivoire et conclut ainsi son autobiographie :

> Beaucoup ont aujourd'hui tendance à considérer les scientifiques, mathématiciens ou non, comme des gens peu soucieux de morale, nuisibles, enfermés dans leur tour d'ivoire et indifférents au monde extérieur. Le Comité des mathématiciens est une brillante illustration du contraire.
> [Schwartz 1997, p.528]

Au-delà de sa participation à de nombreux collectifs, Schwartz est conscient d'avoir un rôle actif à jouer dans la réforme de différents structures, et ce, en politique comme en mathématique :

> J'ai consacré une grande partie de ma vie à la politique, embrassant la carrière de « intellectuel engagé ». Mais, bien entendu, les mathématiques sont restées primordiales. J'ai toujours voulu « changer le monde », changer la vie. Je suis resté un réformateur que toute structure défectueuse et sclérosée dérange.
> [Schwartz 1997]

Outre une participation active en tant que mathématicien à de nombreux groupes, ce « réformateur » est en effet un acteur primordial dans la construction collective de la vie mathématique de son époque.

0.2.2 « Situer la mathématique dans le social » au XX$^{\text{ème}}$ siècle.

« [S]ituer la mathématique dans le social » : telle est l'ambition du discours du mathématicien Arnaud Denjoy qu'il prononce en 1937 [25]. On peut reprendre la question posée par Denjoy :

> Par quels effets s'est manifesté cet accroissement considérable du personnel consacré à la recherche scientifique dans le monde ?
> [Denjoy 1938]

La réponse qu'il donne reste encore à expliciter. Il indique ainsi que « [c]'est une sorte d'organisation du travail par équipe avec la division correspondante de la tâche, que l'on croit observer dans mains pays, même dans ceux dont l'esprit obstinément individualiste semblait le plus réfractaire à cette méthode. » Il attribue cela au fait que la science se modèle sur l'industrie. Après avoir indiqué les dangers de submersion dûs à la « marée montante de faits, de résultats et de notions », Denjoy propose « l'examen des conditions les plus favorables où grandit et mûrit le génie des hommes dont les conceptions originales, presque soudainement surgies, portent la révolution dans une science déjà bien constituée ». Les conditions qu'il énonce, « le loisir assuré », « l'entière liberté laissée à l'esprit d'errer à sa guise aussi longtemps qu'il n'aura pas été irrésistiblement attiré par un objet », doivent être réalisées dans une certaine organisation pensée de la société. Il regrette ainsi que « si la transformation de l'ordre actuel se poursuit dans le sens où elle paraît tendre, il est peu probable que le libéralisme de l'Etat excède l'octroi à un jeune savant de quelques années de loisirs complets, mais avec l'obligation morale d'orienter normalement ses pensées vers un ordre de recherches déterminé. »

Si l'on peut regretter que son analyse n'aille pas jusqu'à décrire le fonctionnement des pratiques collectives existantes ou bien encore à développer, il s'agit néanmoins d'une

---

24. Le Comité des mathématiciens, fondé en 1973 pour la défense d'un mathématicien soviétique , est étudié en détail au chapitre 7.

25. Il s'agit de la conférence inaugurale de la réunion internationale des mathématiciens, organisée par la Société Mathématique de France, le 7,8,9, et 14 juillet 1937. Ce discours est publié dans les *Annales de l'Université de Paris* [Denjoy 1938].

intéressante prise de conscience des effets de l'augmentation numérique du personnel de la recherche scientifique.

Nous ne possédons pas de radiographie précise de la communauté mathématique dont Denjoy cherche à caractériser les évolutions sociales. Mais la Première Guerre mondiale ainsi que l'entre-deux guerres sont étudiés, de manière récente, par les historiens des mathématiques de manière approfondie [Aubin, Gispert et Goldstein 2011] [26] ; et [« Regards sur les mathématiques en France entre les deux guerres. » 2009] [27]. Il existe néanmoins une enquête au début du siècle qui vise à donner une idée précise des méthodes de travail et les modes de vie des mathématiciens lancée par *L'Enseignement Mathématique* au tout début du siècle en 1902. Au cours des années suivantes, les réponses sont analysées, puis publiées dans le journal de 1905 à 1908. Le point de départ de cette enquête est un courrier d'un lecteur, Ed. Maillet, qui est publié en 1901 [Maillet 1901]. Il souhaite ainsi que l'enquête soit représentative du plus grand nombre de mathématiciens possible :

> Je crois que pour être complète, l'enquête dont je parle ne devrait pas exclusivement se borner aux savants illustres, ni aux hommes d'un âge avancé ; tout au contraire, elle deviendrait d'autant plus intéressante qu'elle comprendrait le plus grand nombre de mathématiciens ayant quelque notoriété, et surtout les géomètres qui, hier encore, étaient des élèves et qui sont des maîtres aujourd'hui.

Pendant une année, le journal propose l'enquête et constitue un questionnaire, qui sera finalement publié en 1902 [« Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens » 1902]. Quelques ajouts seront faits plus tard. Les réponses sont triées, puis publiées, le plus souvent en tant que telles, signées de leurs auteurs lorsque ceux-ci sont d'accord. Cela donne une douzaine de parutions entre 1905 et 1908, avec de multiples réponses de mathématiciens vivants ou bien extraites des biographies d'illustres mathématiciens disparus. L'intérêt d'une telle enquête est justifiée par cette phrase, qui accompagne le questionnaire intitulé « Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens » :

> Chacun a le droit de dire : " la manière dont je travaille n'a pas d'intérêt pour les autres". Mais il est certain que la manière dont l'ensemble des mathématiciens travaille a le plus grand intérêt. Et même, de l'inévitable diversité des réponses, doit sortir un très utile enseignement.
>
> [« Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens » 1902]

La dimension collective de l'activité mathématique est donc inhérente au projet. Les questions 12 et 13 [28] cherchent notamment à préciser la part personnelle du travail par rapport à l'assimilation de travaux existants sur une question précise. Mais aucune question ne cherche véritablement à expliciter les différentes formes que cette dimension collective peut prendre.

Entre l'enquête de *L'Enseignement Mathématique* et les années 1930, Denjoy a donc remarqué que les pratiques collectives prennent de l'ampleur en mathématiques. Cela sera

26. D'importants travaux en cours sur la Première Guerre mondiale doivent paraître prochainement.

27. Il s'agit d'un numéro de la *Revue d'histoire des sciences*, coordonné par Liliane Beaulieu dont l'introduction donne un aperçu d'ensemble [Beaulieu 2009]. On peut mentionner l'image donnée par l'étude des thèses de doctorat [Leloup et Gispert 2009] et [Leloup 2009].

28. Ces questions sont formulées ainsi :

> 12. — Avant d'entamer un travail, cherchez-vous tout d'abord à vous assimiler les travaux qui ont été produits sur le même sujet ?
>
> 13. — Préférez-vous au contraire laisser à votre esprit son entière liberté, sauf a vérifier ensuite, par des lectures sur le sujet, la part qui vous est personnelle dans les résultats que vous avez obtenus ?
>
> [« Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens » 1902, p.210]

d'autant plus vrai après la Seconde Guerre mondiale et, surtout, à partir des années 1960. Les changements des pratiques scientifiques suite à l'expérience de la seconde guerre mondiale sont étudiés pour les mathématiques par Amy Dahan [Dahan Dalmedico 2005], [Dahan Dalmedico 1994], [Dalmedico 2001], David Aubin [Aubin 2001], Jean-Paul Gaudillère [Gaudillière 2001] ; pour la physique par Dominique Pestre [Pestre 1994], pour la biologie moléculaire [Gaudillière 2002] , ou bien encore dans un volume *Les sciences pour la guerre* regroupant plusieurs domaines [Dahan et Pestre 2004].

Il existe aussi certaines enquêtes et portraits contemporains qui n'attrapent pas vraiment la dimension collective des mathématiques [Zarca 2012], ou bien n'en analysent pas son évolution diachronique, tel le panorama sur « Les mathématiques françaises contemporaines : carrières et lieux » [Berger 2005]. Un séminaire organisé par Pierre Samuel en 1974 à Orsay sur le sujet « Mathématiques, mathématiciens et société » aborde aussi plusieurs aspects intéressants [Samuel 1974], sans pour autant se saisir de ces enjeux collectifs [29].

On constate ainsi que, malgré l'importance des aspects collectifs dans la pratique et l'organisation des mathématiques en France au XX$^{\text{ème}}$ siècle, qui est bien illustrée par le cas de Schwartz, il n'existe pas d'études prenant cette question de front, ni de manière synchronique – même si celle-ci apparaît de plus en plus dans les rapports de conjoncture du C.N.R.S. par exemple [30] –, ni surtout de manière diachronique. En considérant les nombreux travaux récents d'historiens des mathématiques portant sur l'étude de collectifs – et ce, dans des acceptions très diverses –, nous allons déterminer de quelle manière on peut aborder le collectif dans son ensemble, et plus spécifiquement proposer d'introduire la notion de « vie collective des mathématiques ».

0.3 Des études de collectifs à la notion de « vie collective des mathématiques »

0.3.1 Études de collectifs en histoire des mathématiques

Le « collectif » désigne tout d'abord la collection d'individus, le groupe. Dans cette première acception, on considère à la fois différents regroupements de mathématiciens (institutions, sociétés savantes par exemple) mais aussi les « comportements manifestés par des personnes lorsqu'elles sont en groupe », c'est-à-dire plus particulièrement l'influence que la forme de ce regroupement a sur la pratique mathématique de ses membres. C'est-à-dire, si l'on reprend les termes de Norbert Elias :

> Ce qui nous manque – il faut bien s'en rendre compte – c'est un mode de pensée, une vision d'ensemble qui nous permette de comprendre, en réfléchissant, ce que nous avons en réalité sous les yeux tous les jours, qui nous permette de comprendre comment la multitude d'individus isolés forme quelque chose d'autres que la réunion d'une multitude d'individus isolés – autrement dit, comment ils forment une « société » et pourquoi cette société peut se modifier de telle sorte qu'elle a une histoire qu'aucun des individus qui la constituent n'a voulue, prévue, ni projetée telle qu'elle se déroule réellement.
> [Elias 1991, p.41] [31]

29. On a par exemple un exposé sur « La mode en mathématique » d'Étienne Bize [Samuel 1974, IV. p.1-14] voulant décrire un phénomène qui apparaît « lorsque l'action concertée ou non, conscience ou non de certains individus exerce une pression plus ou moins précise sur les autres membres de la communauté, pour leur faire admettre et adopter certains critères, certaines hiérarchies de valeurs, certaines idées, ou plus simplement certains agissements, le choix ainsi favorisé ne présentant en fait aucun caractère de nécessité ».

30. Ces rapports de conjoncture sont cités et analysés au chapitre 6.

31. Il s'agit d'une traduction française de la version allemande publiée en 1987. Le texte a en fait été rédigé en 1939, mais n'avait alors pas été publié.

Les études présentées ici montrent en effet que l'histoire de l'institution ou de la société savante en tant que telle dépasse l'histoire de chacun de ses membres et permet d'apporter quelque chose de nouveau à la compréhension plus générale des pratiques mathématiques. Dans ce qui suit, on se contentera de passer en revue quelques travaux qui nous ont été particulièrement utiles pour définir notre problématique.

De nombreux travaux d'historiens des mathématiques s'attachent à étudier une institution scientifique particulière. La thèse de David Aubin [Aubin 1998] [32] étudie ainsi l'Institut des Hautes Études Scientifiques, dont le caractère spécifique a permis l'émergence d'une théorie :

> The specific character of the IHES, I argue in the following chapters (especially in the chapter VI), made it possible for catastrophe and chaos theory to emerge from within its walls through exhanges of modeling and theoretical practices among permanent professors and visitors.
>
> [Aubin 1998, p.30]

Il introduit la notion de « modeling practices » (pratiques modelantes) qui identifie ce qui est rendu possible par une telle institution. David Rowe, dans ses travaux sur l'université de Göttigen comme par exemple [Rowe 1989], en étudie différents aspects. Il propose aussi une définition, historique et conceptuelle, de la notion d' « école mathématique » :

> [C]ollaborative research presupposes suitable working conditions and,in particular, a critical mass of researchers with similar backgrounds and shared interests. A work group may be composed of peers, but often one of the individuals assumes a leadership role, most typically as the academic mentor to the junior members of the group. This type of arrangement|the modern mathematical research school has persisted in various forms throughout the nineteenth and twentieth centuries
>
> [Rowe 2003, p.120]

Une importance particulière est aussi accordée à l'étude des journaux ou des sociétés savantes. On peut mentionner l'examen qu'Hélène Gispert fait de la Société Mathématique de France (1870-1914) [Gispert 1991] (parmi d'autres travaux). Il s'agit d'une étude d'ensemble de cette société savante, pour lequel elle s'appuie sur trois corpus, celui des sociétaires de la Société, leur production mathématique, ainsi que les thèses de doctorat soutenues dans les Facultés de sciences, qui permet de « décrire l'évolution du paysage mathématique français dans son ensemble et sur près d'un demi-siècle à partir d'une étude statistique des hommes et de leurs productions » [Belhoste 1994].

On peut enfin mentionner de nombreux travaux visant à décrire la constitution d'une communauté mathématique nationale, comme ceux de Karen Parshall pour la communauté mathématique américaine [Parshall et Rice 2002], discutant aussi son internationalisation [33] [Siegmund-Schultze 2001].

Institutions, écoles mathématiques, journaux et sociétés savantes, communauté mathématique nationale et internationale sont autant de collectifs étudiés comme regroupements de mathématiciens. La forme spécifique de chacun d'entre eux est examinées en détail pour en dégager les impacts sur les pratiques mathématiques elles-mêmes. Outre ces études de

32. Son analyse est ainsi résumée :

> It studies the way in which institutional settings, both formal and informal, played a role in the development, diffusion, and reception of catastrophe and chaos theories, and in this context, pays special attention to the history of the IHES.
>
> [Aubin 1998, p.5]

33. On discute cette internationalisation au chapitre 3.

collectifs particuliers, les historiens des mathématiques mettent aussi l'accent sur la circulation des savoirs, ainsi que sur les différentes formes d'échanges mathématiques [34].

0.3.2 Les mathématiques sont collectives par essence

Au-delà de la conception des mathématiques comme étant structurées par un certain nombre de pratiques collectives, plusieurs auteurs ont affirmé que les mathématiques sont par essence collectives. C'est ainsi qu'Halbwachs identifie une mémoire spécifique aux mathématiciens, collective, incarnée dans chaque individu :

> C'est donc (qu'il y a une mémoire des géomètres) que les géomètres se souviennent autant qu'ils raisonnent. Il y a même peu de cas où la nature collective de la mémoire apparaisse plus clairement puisque l'on ne se rappelle une démonstration et on ne la comprend qu'à condition que notre souvenir ou notre pensée soit exactement tel dans notre esprit que dans celui des autres géomètres. C'est dire que la mémoire ou la pensée collective est alors tout entière et non partiellement chez chaque individu.
>
> [Halbwachs 1997, p.213]

Ces auteurs ont montre que l'on peut aborder l'activité collective en mathématiques par une dialectique entre l'individu et le collectif, comme le fait Alain Herreman à partir de la lecture de *Récoltes et semailles* de Grothendieck [35] [Herreman 1999]. On peut aussi la penser en constituant et étudiant des collectifs (réseaux, « clusters », « citation networks ») de textes, comme le proposent Catherine Goldstein [Goldstein et Schappacher 2007], Frédéric Brechenmacher, par exemple dans [Brechenmacher 2011]. Certains adoptent encore une approche sociologique, ou même anthropologique, comme Claude Rosental [Rosental 2003], [Rosental 2009].

Il existe donc de nombreuses manières d'aborder les différents collectifs, ou même plus finement la dimension collective inhérente aux mathématiques. Néanmoins, ces approches restent fragmentaires et ne permettent pas de décrire les évolutions fondamentales dans la pratique mathématique propres à la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

0.3.3 La vie collective des mathématiques

Parler de « vie collective des mathématiques », c'est s'inspirer des travaux existants, et que l'on vient d'évoquer, sur les différents collectifs constituant la communauté mathématiques pour aborder cette période particulière dans son ensemble ; période lors de laquelle un grand effort est activement fourni pour construire et structurer collectivement la vie mathématique. Il s'agit donc d'une proposition de synthèse adaptée à cette période particulière que l'on va maintenant décrire.

---

34. On peut ainsi mentionner la Rencontre Mathématique de septembre 2013, intitulée « Échange mathématique : étude de cas (18$^{\text{e}}$-20$^{\text{e}}$) », qu'organisent Hélène Gispert, Philippe Nabonnand et Jeanne Peiffer. La description précise ainsi :

> Le processus de production des mathématiques ne peut être étudié sans envisager les mécanismes de circulation et les diverses formes que celle-ci revêt. Par exemple, un résultat de mathématique, aussi brillant et révolutionnaire soit-il, n'a aucun effet dans la discipline s'il n'est pas relayé, discuté et accepté par la communauté. C'est dire que les multiples échanges entre les divers acteurs (individuels, collectifs ou abstraits) impliqués dans le processus de production sont un élément essentiel à analyser. Ces échanges concernent des acteurs, des institutions, des vecteurs, des contenus qui ont été l'occasion de nombreux travaux en histoire des sciences.
>
> [Gispert, Nabonnand et Peiffer 2013]

35. [Grothendieck 1986]

On va aborder la question du collectif comme on aborde une biographie. Car parler de « vie collective des mathématiques », c'est tout d'abord mettre en avant l'aspect « vivant » des mathématiques, de la communauté mathématique. Cet aspect vivant apparaît par exemple lorsque l'on mentionne le thé après le séminaire, les discussions, la passion de l'enseignement et de la recherche partagée, l'excitation la craie à la main... C'est aussi et surtout proposition de synthèse. La question du collectif est un problème vaste, déjà traité de nombreuses manières que l'on vient de décrire. Mais il est difficile de saisir « la vie collective des mathématiques » dans son ensemble, c'est-à-dire comme un ensemble de pratiques collectives qui organisent le travail mathématique, et de reconnaître les modifications structurantes de la communauté mathématique propres à l'époque. De la même manière qu'un auteur de biographie justifie son écriture qui lui permet de faire des coupes sur une période donnée tout en conservant une certaine unité de vie, on peut justifier cette approche biographique qui permet alors de faire des coupes sur les figures du collectif tout en conservant une certaine unité d'analyse. Ceci nous amène à préciser ce que l'on entend par approche biographique.

0.4 La vie collective des mathématiques : une approche biographique

Trois raisons justifient l'approche biographique proposée ici. Tout d'abord, cette étude souhaite mettre en avant la « vie », le côté vivant des mathématiques. Ensuite, nous suivons bien sûr une approche biographique en centrant notre travail sur la personne de Schwartz. C'est pourquoi nous allons nous inspirer des discussions et méthodes récentes proposées par des historiens des sciences, ou même plus particulièrement, des mathématiques, afin de définir précisément le rôle de Schwartz dans ce travail. Néanmoins, précisons-le, ce travail n'est pas une biographie de Laurent Schwartz. Car ce que l'on cherche à décrire, et ce que ce travail propose, peut enfin être perçu comme une biographie des pratiques mathématiques.

0.4.1 Approches biographiques en histoire des mathématiqes

On observe en histoire des sciences, et en histoire des mathématiques en particulier, un tournant biographique. Le genre biographique est rediscuté, revalorisé et abordé par de nombreuses manières. Anne Collinot organise un séminaire à l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, intitulé « L'enquête biographique dans les études sur les sciences » depuis 2010 [36]. Deux colloques ont eu lieu à Nancy, en 2008 sur « L'approche biographique en histoire des sciences et des techniques » et 2009 : « Définir, classer, compter : l'approche prosopographique en histoire des sciences et des techniques ». Cela a conduit à la parution d'un ouvrage collectif, paru en 2012, intitulé *Les uns et les autres...Biographies et prosopographies en histoire des sciences*. L'expression du titre « Les uns et les autres » provient du nom d'une session du Congrès de la Société Français d'Histoire des Sciences et Techniques de 2011 à Nantes, organisée par Catherine Goldstein et Pierre Lamandé : « Et les autres ? ». Le Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré lui

36. En 2010-2011, le séminaire examine l'enquête biographique en tant que mode de connaissance dans les études sur les sciences. En 2012-2013, il étudie le « mode de vie » savant. Ce séminaire fait suite à au séminaire sur « Le biographique dans l'histoire et la sociologie des sciences » organisé à l'EHESS depuis 2007 par Jacqueline Carroy, Anne Collinot, Jean-Marc Drouin, Rafael Mandressi, Jeanne Peiffer, et Kapil Raj

a consacré deux séances, en 2000 et 2010 [37].

Dans ces nombreuses discussions, la biographie – ou plutôt l'approche biographique – prend de nombreuses formes. Quelques biographies récentes en histoire des mathématiques s'intéressent à des mathématiciens particulier, par exemple [Alfonsi 2011], [Bruneau 2011], ou encore [Ehrhardt 2012]. Il peut aussi s'agir d'un bilan sur une biographie non encore écrite, comme [Gispert 2012]. L'approche biographique peut être un « pari biographique » [38], ou bien plutôt perçue comme une « enquête biographique » [Collinot 2012]. Elle peut permettre une réflexion sur le rôle des uns et des autres [Goldstein 2012] [39], ou une volonté d'écrire l'histoire « par en bas », c'est-à-dire en accordant une place importante aux structures et lieux de l'enseignement des mathématiques [d'Enfert 2012].

0.4.2 Schwartz comme « témoin »

Ce travail n'est pas une biographie de Laurent Schwartz, mais utilise les méthodes et réflexions de l'approche biographique. Il peut néanmoins paraître étrange de choisir une approche biographique et de s'intéresser à un individu pour parler de la vie collective des mathématiques. On s'attendrait en effet plutôt à des approches globales, statistiques ou prosopographiques. Certaines des études de collectifs que nous avons décrites sont d'ailleurs des exemples de telles approches globales. Nous avons montré plus haut que la dimension collective de l'activité mathématique est essentielle pour Schwartz, qui est un acteur important. Il s'agit de plus d'une période particulière où le collectif structure de plus en plus la vie mathématique. Mais il nous faut définir précisément le rôle de Schwartz dans cette étude.

La place de l'individu dans une biographie, l'importance qu'on lui accorde a fait l'objet de critiques de la part des historiens de sciences. Aubin et Charlotte Bigg [Bigg et Aubin 2007] proposent une réflexion sur la place de l'individu dans l'écriture historique et cherchent à trouver de nouvelles méthodes pour dépasser la dichotomie « genius versus context ». Car la biographie traditionnelle, prenant implicitement le parti du génie, est rejetée par l'histoire sociale des sciences. Et pourtant, les notions de pionnier, inventeur, créateur restent utiles et importantes. La science est avant tout faite par des individus. Comment dépasser la tension entre individu et collectif ? S'il proposent le « self » (moi, conception de soi) comme une catégorie d'acteur dont l'élaboration et la perception sont sans cesse à renégocier, cette étude considère ici Schwartz comme un « témoin ». De même que le mot témoin a plusieurs sens, Schwartz lui aussi a plusieurs rôles.

Il est tout d'abord témoin, spectateur, sonde. On le considère comme un individu « exceptionnel-normal » , dans une perspective de micro-histoire telle que celle de Ginzburg [Ginzburg 1980]. On le considère comme « un autre », sans pour autant cacher le caractère exceptionnel de certains aspects de sa vie et de sa carrière.

37. La séance du 22 novembre 2010, intitulé « La place du genre biographique en histoire et le cas de l'histoire des mathématiques » et est organisée par Bruno Belhoste et Christian Gilain. Celle du 21 mai 2010, préparée par Hélène Gispert et Christian Gilain, s'appuie notamment sur les parutions depuis 2000 ; elle est consacré au « genre biographique en histoire des mathématiques : nouvelles recherches et nouvelles parutions »

38. Il est proposé par David Aubin et Catherine Goldstein pour étudier la communauté mathématique pendant la Première Guerre mondiale ; ainsi qu'ils l'ont présenté lors de la séance du Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré du 25 novembre 2011. Les travaux vont paraître prochainement [Aubin, Gispert et Goldstein À paraître], [Aubin et Goldstein À paraître], [Aubin À paraître].

39. J'ai ainsi proposé, lors de la session « Et les autres ? » organisée par Catherine Goldstein et Pierre Lamandé citée plus haut, de poser la question de « Laurent Schwartz, un autre en probabilités ? » afin de discuter la place de Schwartz dans une « école française de probabilités » que l'on mentionne au chapitre 5.

Mais il est aussi témoin en tant qu'acteur. On reconnaît son rôle actif, son « agency », c'est-à-dire sa capacité à agir de manière indépendante du contexte. Pestre, dans la conclusion de son *Introduction aux « Science Studies »*, interprète des approches récentes ainsi :

> Ce qui importe est la capacité de recomposition que portent les acteurs humains et techniques, la capacité d'initiative qu'ils peuvent mettre en œuvre, les ressources qu'ils ont pour créer des mondes que nous ne pouvons imaginer *a priori* mais qui déplaceront nos manières mêmes de définir la science et la société. Le futur est ouvert : nous devons faire confiance à la capacité des humains à sa saisir localement de leurs vies et, ce faisant, à modifier et faire advenir de nouvelles réalités.
>
> [Pestre 2006, p.111]

La place accordée à l'individu est plus importante que la vision d'Elias présentée plus haut. L'« agency » de l'individu influe sur les réalisations collectives, même si elle ne suffit pas à elle toute seule. Schwartz n'est donc pas uniquement un prétexte dans ce travail, l'individu n'a pas entièrement disparu.

0.4.3 Biographie des pratiques mathématiques

Ce travail propose en fait une biographie des pratiques mathématiques collectives dans la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle. L'approche biographique est donc l'approche historiographique que nous appliquons ici à la vie collective des mathématiques, c'est-à-dire à l'ensemble des pratiques collectives qui structurent la communauté mathématique pendant cette période. Écrire une biographie permet, de manière classique, de faire des coupes, de donner des aperçus tout en gardant une certaine unité puisqu'il s'agit d'une vie vécue. L'unité ici n'est pas temporelle, puisque la vie collective des mathématiques, ainsi que le montrent les études citées plus haut, ne naît pas au milieu du XX$^{\text{ème}}$ pour se développer ensuite avant de disparaître en l'an 2000. La temporalité est d'ailleurs ici imposée non pas par les différents aspects de la vie collective qui sont étudiés mais par la chronologie de la vie de Schwartz, que l'on suit de manière globale. L'unité du sujet existe néanmoins. Même si l'on ne peut définir de manière théorique ce qu'est la communauté mathématique, il n'en reste pas moins que l'on a des manifestations de la vie collective des mathématiques, qui laissent des traces ; notamment lorsque l'on se saisit de Schwartz pour en parler. Cette unité est appréhensible dans la diversité des coupes possibles par une telle approche biographique. Lorsque Thomas L. Hankins prend la défense de la biographie en histoire des sciences, il explique ce que celle-ci peut apporter :

> Biography provides the cross-sectional view (...). It also gives us a way to tie up together the parallel currents of history at the level where the ideas and events occur. We have, in the case of an individual, his scientific, philosophical, social and political ideas wrapped up in a single package. This package will most likely contain contradictions, blind spots, and irrelevancies. Often the individual will appear to keep two provinces of his mind completely distinct (usually at the precise point where we are looking for a connection), but (...) [i]f biography is honest, we can learn a great deal about the way in which science works, and we can also be protected from too-hasry generalizations.
>
> [Hankins 1979, p.5]

On applique ici cette vision de la biographie aux pratiques mathématiques : les coupes donnent des tableaux du collectif, que nous allons décrire ensuite, qui permettent de reconstruire, dans une certaine mesure, un portrait de la vie collective des mathématiques.

Nous proposons ici un « pari biographique » à deux niveaux. Le pari porte tout d'abord sur le choix de Schwartz comme « témoin », dévoilant par sa présence et son action de nombreux aspects de la vie collective des mathématiques. Il est aussi dans la réalisation du travail qui propose un portrait de cette vie collective des mathématiques.

0.5 Tableaux du collectif

Ce travail est organisé autour de sept tableaux du collectif qui sont autant de coupes de la vie collective des mathématiques, centrées sur Schwartz.

Le chapitre 1 définit, pour Schwartz, les enjeux de sa « rencontre » avec la vie collective des mathématiques, qu'elle se trouve incarnée dans un modèle familial ou bien à l'École normale supérieure. La rencontre se traduit, pendant cette période spécifique de la Seconde Guerre mondiale, par l'interaction entre un individu, Schwartz, et un collectif, le groupe de mathématiciens Bourbaki, que l'on aborde à travers les mathématiques, et plus précisément les distributions. Car la théorie des distributions de Schwartz, dont le chapitre 2 propose une étude de la réception et de la diffusion dans les mathématiques et l'historiographie, s'insère elle aussi dans la vie collective des mathématiques. Ce chapitre montre que l'historiographie elle-même participe de cette insertion et met en avant le rôle actif de certains mathématiciens dans la diffusion de la théorie ainsi que l'action de Schwartz lui-même. Le rôle de Schwartz apparaît aussi au chapitre 3 qui présente un colloque de mathématiques, celui d'analyse harmonique qui a eu lieu à Nancy en 1947. Cela permet de discuter l'objet « colloque » en général à l'intérieur de la vie collective des mathématiques, en cette période spécifique d'après-guerre, tout en montrant que ce colloque particulier a constitué un tremplin dans l'internationalisation de la carrière et de l'œuvre de Schwartz. Le chapitre 4 aborde les pratiques d'écriture autour d'un théorème particulier de Schwartz, le théorème des noyaux. Le théorème – son énoncé, les aspects visuels apparents ou la technicité des mathématiques en jeu – qui est énoncé dans différents lieux est un révélateur de plusieurs collectifs qui sont caractérisés dans le texte, dans les mathématiques elles-mêmes.

Le chapitre 5 se penche sur le séminaire de mathématiques en France. Ce deuxième objet du collectif apparaît, et se développe au cours du XX$^{\text{ème}}$ siècle pour devenir omniprésent aujourd'hui. Se saisir de Schwartz, parmi d'autre acteurs, permet d'en délimiter les différents rôles, celui de l'auditeur, de l'orateur ou encore de l'organisateur du séminaire. Un autre lieu collectif, propre à la période, est étudié au chapitre 6. Il s'agit du laboratoire de mathématiques, dont Schwartz crée l'un des premiers avec son Centre de mathématiques à l'École polytechnique. Cela s'insère dans une réflexion globale sur le besoin de laboratoire qu'éprouvent les mathématiciens à l'époque. Enfin, le chapitre 7 se saisit de l' « engagement mathématicien », particulièrement actif et documenté dans le cas de Schwartz, qui constitue une réponse, une arme, de la communauté mathématique à la « guerre » (dans un sens très large désignant notamment les combats pour la défense des droits de l'homme). Les actions choisies, inspirées de pratiques sociales des mathématiciens, traduisent une certaine conception de la communauté mathématique.

0.6 Sources

Ce travail s'appuie sur de nombreux documents d'archives non encore exploités, ainsi que sur quelques entretiens dont la liste est donnée dans l'annexe bibliographique V, p.417. On peut mentionner en particulier le Fonds Laurent Schwartz conservé à l'École polytechnique. C'est Schwartz lui-même qui a légué ses archives de son vivant ; le fonds a ensuite été complété par quelques ajouts après son décès. La considération de ce fonds de manière globale nécessite donc de s'interroger sur les choix de conservation ou non des documents.

La bibliographie ne sépare pas les sources primaires des sources secondaires, et ce, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le chapitre 2 montre que l'historiographie participe elle-même de la vie collective des mathématiques. De nombreux textes sont donc à la fois sources primaires et sources secondaires. Il en est de même pour les récits d'acteurs de manière plus générale, qui font partie des sources considérées et exploitées, non seulement comme analyse secondaire mais véritablement comme appartenant aux pratiques mathématiques collectives qu'ils mettent en scène. Enfin, la bibliographie ne comporte pas de liste exhaustive des travaux de Schwartz, celle-ci se trouvant dans ses *Œuvres Scientifiques* [Schwartz 2011b], [Schwartz 2011c], [Schwartz 2011d].

On note quelques limites à ce travail, qui sont propres aux sources consultées et notamment à la période récente considérée. En effet, il faut une dérogation pour consulter de nombreux dossiers scientifiques personnels dans les archives C.N.R.S., qui ne sont donc exploitables que de manière anonyme. Le fonds Laurent Schwartz de l'École polytechnique contient, quant à lui, toute une partie, la partie C, qui n'est pas consultable avant 2032, suite à une volonté de Schwartz lui-même. Les cartons concernés comportent des documents sur le Centre de mathématiques, ainsi que de nombreuses évaluations de chercheurs, ce qui explique le délai nécessaire à leur exploitation.

Chapitre 1

Une rencontre avec la vie collective des mathématiques.

Rencontre.
(ran-kon-tr') **s. f.**

1. Action d'aller vers quelqu'un qui vient.
2. Occasion qui fait trouver fortuitement une personne, une chose.
5. Concours, conjonction ou opposition des corps.

Dans ce premier chapitre, nous allons tenter de cerner les diverses manières dont Schwartz, au début de sa carrière mathématique et même avant, fait la rencontre des mathématiques. Dans un premier temps, nous avons choisi de nous laisser guider par la vision rétrospective qu'il a proposée dans son autobiographie [Schwartz 1997]. Il est frappant, dans ce récit, que les mathématiques apparaissent très tôt comme étant incarnées, portées par des gens dont il croise le chemin dans des circonstances précises. C'est en ce sens que la rencontre que nous voulons analyser est véritablement non simplement celles d'idées ou de morceaux de savoir désincarné, mais bien la rencontre avec certaines formes de vie collective.

De fait, trois des définitions attribuées au mot « rencontre » par *Le Littré*[1] donnent sens au titre de ce chapitre. Le premier sens du mot « rencontre », le plus utilisé , recouvre l'« action d'aller vers quelqu'un qui vient ». Schwartz découvre les mathématiques, il profite de l'expérience des mathématiciens de son entourage, il se prépare et entre à l'École normale : il décide d'aller vers les mathématiques. En ce sens, Schwartz rencontre, pendant ces premières années, les mathématiques, et plus précisément les mathématiques incarnées par ses professeurs et quelques membres de sa famille ou encore celles qui sont véhiculées par l'institution de l'École normale, qu'il considère comme étant le lieu de formation classique des mathématiciens.

Le deuxième sens, plus instantané et dû au hasard, désigne l'« occasion qui fait trouver fortuitement une personne, une chose ». Car c'est bien par un concours de circonstance, au départ, que Schwartz découvre Bourbaki à Clermont-Ferrand dans un contexte bien particulier. Ses années à l'École normale, ainsi que celles de sa femme, l'y ont néanmoins bien préparé et ont rendu possible cet événement. Schwartz écrit que sa vie mathématique commence ici ; on peut ajouter qu'il prend alors conscience que la vie des mathématiques est collective. Cela se réalise par la rédaction et la soutenance de sa thèse.

Enfin, le troisième sens : « concours, conjonction ou opposition des corps » représente bien la relation individu-collectif qui se crée à travers la rencontre de l'individu Schwartz avec le collectif Bourbaki. On peut dépasser la dualité, l'opposition entre : le collectif est

1. http ://www.littre.org/definition/rencontre (Page consultée le 2 août 2013.)

formé d'individus ; l'individu appartient au collectif en posant la question de l'interaction, de la conjonction, voire de l'adjonction. Quelle formation Schwartz reçoit-il de Bourbaki ? Comment cela se traduit-il dans ses choix et production scientifiques ? Réciproquement, Schwartz en tant qu'individu influence-t-il Bourbaki ? On peut aborder ces questions et y apporter quelques éléments de réponse en regardant précisément les distributions de Schwartz dans ce contexte.

Schwartz rencontre ainsi la vie collective des mathématiques à trois niveaux. De même que l'on s'affranchit petit à petit du récit autobiographique de Schwartz, sa personnalité s'efface peu à peu dans ce chapitre. Dans le chapitre suivant, au contraire, nous partirons de cette vie collective des mathématiques esquissée ici et nous verrons resurgir la personne de Schwartz, par une toute autre manière que celle, reconstruite, imposée par le récit autobiographique.

1.1 Les mathématiques incarnées

Deux pistes sont intéressantes à suivre pour comprendre la première « rencontre » de Schwartz avec la vie collective des mathématiques : la famille, l'environnement familial et l'École normale, l'institution. Schwartz leur accorde une grande importance en ce qui concerne sa formation mathématique. C'est en effet dans son environnement familial, un collectif identifié, que Schwartz rencontre les mathématiques, qui sont des mathématiques incarnées. Si la famille ne définit finalement pas une pratique mathématique collective, Schwartz y découvre par contre le mathématicien, en tant que métier, sans toutefois en percevoir son insertion dans la vie collective des mathématiques. Il semble aussi attribuer un grand rôle à l'École normale où il étudie les mathématiques. Mais si celle-ci est présentée comme un passage indispensable, il n'en analyse pas pour autant les aspects collectifs ; nous revenons néanmoins plus loin sur certains d'entre eux : la rencontre avec Bourbaki lui est subordonnée, la pratique du séminaire y est rendue possible notamment. Pour Schwartz néanmoins, dans son récit autobiographique, l'institution en tant que telle n'est pas créditée du caractère collectif auquel on pourrait s'attendre.

1.1.1 La figure du mathématicien dans la famille

Nous disposons de peu de sources pour comprendre la place de la famille dans cette première rencontre de Schwartz avec la vie collective des mathématiques. Les réflexions autobiographiques et biographiques explicites de Schwartz seront notre point de départ ; nous les confrontons aux récits des membres de sa famille. Concernant sa formation mathématique, Schwartz accorde à son environnement familial, à quelques-uns en particulier, une grande importance, que nous allons chercher à caractériser. Dans cette première « rencontre » de Schwartz avec la vie collective des mathématiques, la famille participe à son « action d'aller vers » les mathématiques, les mathématiciens ; elle joue un rôle particulier. C'est dans son environnement familial en effet que Schwartz prend conscience de l'incarnation des mathématiques dans des individus, c'est là qu'il rencontre le mathématicien. Pour Schwartz, ceux qu'il présente comme des modèles sont liés à son choix de métier : il choisit d'être mathématicien et non pas de faire des mathématiques. Ces rencontres avec Jacques Hadamard et Paul Lévy constituent, comme nous allons le voir, un aspect important de sa formation : il ne choisit pas une activité que l'on pourrait définir intrinsèquement (mathématicien) mais il choisit de s'identifier à ces deux modèles qui ont fait de cette activité leur métier. Laurent Schwartz épouse la mathématicienne Marie-Hélène Lévy, et partage avec elle certains épisodes de vie mathématique que nous allons présenter. Peut-on cependant affirmer que l'environnement familial définit une certaine pratique collective des mathématiques ?

Arbre généalogique.

En introduction de sa thèse, Schwartz remercie deux mathématiciens, membres de sa famille très proche, par les mots suivants :

> Je veux enfin exprimer ma reconnaissance à M. HADAMARD et M. Paul LÉVY qui ont guidé et enrichi ma formation mathématique (...)
> [Schwartz 1943b, p.6]

Il les remercie donc en tant que mathématiciens [2] ; car Paul Lévy et Jacques Hadamard ont été effectivement présents pour Schwartz, jeune étudiant se destinant aux mathématiques. De quelle manière l'ont-ils été ? En tant que que grand-oncle et beau-père bienveillants ? En tant que formateurs ? Pour leurs mathématiques ? Nous allons voir plusieurs aspects, décrits par Schwartz dans son autobiographie qui montrent que, plus que les mathématiques, Schwartz découvre surtout le métier de mathématicien, dont Hadamard et Lévy constituent les premiers exemples et modèles qu'il rencontre.

Le grand oncle : Jacques Hadamard (1865-1963) [3]
Schwartz le présente comme membre de sa famille tout autant que mathématicien réputé :

> Mon grand-oncle Jacques Hadamard, un des plus grands mathématiciens de son temps (1865-1963) – grand-oncle par alliance, mari d'une sœur de ma grand-mère maternelle Mamy – (...)
> [Schwartz 1997, p.45]

Les références à Hadamard dans l'autobiographie de Schwartz sont de plusieurs types et assez nombreuses. Il y a donc tout d'abord un grand nombre d'anecdotes, concernant sa « légendaire distraction » (p.153), l'Académie des Sciences (p.152), le Congrès International des Mathématiciens de 1950 (p. 48), un voyage en Russie (p.328), son mariage (p.86), pour citer quelques exemples. Schwartz reproduit quelques histoires qui lui ont été racontées par Hadamard.

Lorsqu'il se réfère à sa formation mathématique, la manière dont Schwartz parle d'Hadamard ressemble à la manière dont il présente les professeurs qui l'ont marqué. Car si Schwartz mentionne d'autres personnes importantes dans sa formation, certains de ses enseignants par exemple, ils apparaissent comme des individus isolés, qui permettent par moments d'éclairer l'influence familiale. Il écrit ainsi de son professeur de mathématiques en Mathématiques Elémentaires :

> J'entrai donc en mathématiques élémentaires. Pour la première fois de ma scolarité, je rencontrai un professeur de mathématiques enthousiasmant, Julien. Il était légèrement porté sur la boisson, mais nul n'y trouvait à redire. C'était avec joie et simplicité qu'il nous expliquait les plus merveilleux problèmes de la géométrie. Je découvrais un

2. Il écrit aussi un texte pour chacun d'entre eux, à l'occasion de publications destinées à leur rendre hommage : [**schwartz_L\'evy1**] peu après la mort de Paul Lévy, [**schwartz_L\'evy2**] à l'occasion du « Colloque Paul Lévy sur les Processus Stochastiques (Palaiseau, 1987) » et [Mandelbrojt et Schwartz 1965], avec Mandelbrojt, en hommage à Hadamard.

3. On peut consulter la biographie d'Hadamard [Maz'ya et Shaposhnikova 1998], traduite en français en 2005 [Maz'ya et Shaposhnikova 2005]. Leurs auteurs expriment leur reconnaissance à Marie-Hélène et Laurent Schwartz, à qui ils ont rendu visite, « pour leurs encouragements et pour [leur] avoir fait partager leurs souvenirs sur Hadamard ». Dans le chapitre 5, intitulé « Le Maître », l'un des paragraphes s'intitule d'ailleurs (p.163-164) : « 5.3 Laurent Schwartz : “ Il m'a énormément influencé” » et cite plusieurs passages de l'autobiographie de Schwartz.

> univers mathématique inconnu auparavant, entrevu seulement dans la géométrie de quatrième. En l'espace de deux ou trois semaines, je décidai de devenir mathématicien. [Schwartz 1997, p.46]

Et il écrit quelques pages plus loin (p.49), en parlant d'Hadamard, dont il critique la pédagogie « inadaptée à [ses] besoins » :

> Cependant, il resta à mes yeux un modèle auréolé de prestige, et si j'ai peu étudié avec lui, il a fait naître en moi l'idée de la recherche mathématique.

Cela nous apprend que, lorsque Schwartz choisit d'être mathématicien, il choisit non seulement les mathématiques, mais avant tout d'être mathématicien ; il choisit l'enseignement et la recherche, telles qu'il les perçoit dans les exemples qu'il côtoie – ses enseignants, et Hadamard.

Schwartz cite encore très fréquemment Hadamard, ou plutôt ses mathématiques. Le nom d'Hadamard est donc associé à ses livres et résultats de géométrie (p.51, 57, 76) ou aux parties finies d'intégrales divergentes (p.77, 238, 244, 310). On trouve aussi quelques mentions du « séminaire Hadamard » (p. 75, 79) par exemple[4]. Même si les références à Hadamard concernent plutôt ses mathématiques qu'une relation mathématique personnelle, elles traduisent une certaine familiarité de Schwartz avec Hadamard. Il nous livre par exemple le récit de « sa » première publication

> Je montrai ensuite l'astuce à Paul Lévy et Jacques Hadamard qui, évidemment, repérèrent immédiatement la faute. Jacques Hadamard en était enchanté, et pensait en effet que ce théorème « Une correspondance algébrique et biunivoque est homographique » ne devrait pas être enseigné aux élèves des classes de spéciales (...)
>
> Il fit donc campagne pour le rejet de ce théorème de l'enseignement et décida de le publier avec sa démonstration, afin qu'on ne l'enseignât plus en taupe. Le théorème fut publié dans le *Journal de mathématiques spéciales*[5]. Ce fut « ma » première publication, celle, volontaire, d'un théorème faux, et j'en suis assez fier.
>
> [Schwartz 1997, p.64-65]

Le climat familial qui règne autour des mathématiques dans les années de jeunesse de Schwartz lui permet de réaliser que les mathématiques sont incarnées : la vie mathématique est enseignement, recherche ; son professeur est mathématicien, Hadamard est mathématicien, Schwartz choisit, non pas les mathématiques, mais bien d'abord d'être mathématicien.

Le beau-père : Paul Lévy (1886-1971)[6]

Dans l'ordre des rencontres mathématiciennes de Schwartz, il nous faut maintenant présenter Paul Lévy, qui va devenir son beau-père lorsque Laurent Schwartz et Marie-Hélène Lévy se marient, en 1938. Schwartz raconte dans son autobiographie sa rencontre avec Marie-Hélène Lévy, avec qui il se fiance alors qu'ils sont tous les deux à l'École normale. Ils ne se marient qu'en 1938 car, Marie-Hélène ayant contracté la tuberculose, elle part se soigner dans un sanatorium en Haute-Savoie. Il continue à fréquenter la famille Lévy pendant ce temps, et surtout à venir discuter de mathématiques avec Paul Lévy. Voici le récit qu'il livre :

---

4. Nous reparlons du séminaire Hadamard au chapitre 5.

5. Je n'ai pas retrouvé cette publication. Mais l'important est ce qu'elle traduit dans le récit de Schwartz : une familiarité mathématique avec Hadamard, qui est importante pour Schwartz, parce que c'est la première fois qu'il démontre quelque chose qu'il n'a pas appris.

6. Paul Lévy a livré ses souvenirs et quelques considérations philosophiques dans son ouvrage : *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien* [**L\'evy_bio**]. Il n'y mentionne cependant pas ses relations familiales avec Schwartz comme ce dernier peut le faire. On peut consulter aussi [**L\'evy_these**] ainsi que [**mazliak_L\'evy**] qui présente sa correspondance avec Fréchet.

> Pendant les deux dernières années de l'ENS, je déjeunais chez les Lévy une fois par semaine. J'avais déjà fréquenté leur maison en 1934, à la fois pour la fille et pour le père. Il était très supérieur à tous ceux qui nous avaient donné des séminaires à l'École normale. Et j'ai reçu de lui une formation de tout premier plan, non seulement en probabilités, mais aussi en analyse.
> [Schwartz 1997, p.94]

Il précise son admiration pour ce deuxième grand mathématicien qu'il rencontre, ainsi que le rôle qu'il attribue à Paul Lévy dans sa formation mathématique :

> La famille de Paul LÉVY et la mienne se connaissent depuis très longtemps. J'ai connu la fille de Paul LÉVY alors que nous étions au lycée ensemble ; nous nous sommes fiancés à l'Ecole normale supérieure de la rue d'Ulm, où elle était la seule jeune fille de la promotion (et elle est devenue elle aussi une mathématicienne). Alors que j'étais en hypotaupe et en taupe, il m'est arrivé une ou deux fois d'aller chez elle, et de faire la connaissance de Paul LÉVY. Il m'a, dès ce moment-là, particulièrement frappé par sa stature grande et maigre, et aussi par son intelligence extraordinaire. Au point de vue de l'intelligence mathématique, j'avais essentiellement des contacts avec mes professeurs de lycée et, d'autre part, avec mon grand-oncle, Jacques Hadamard. Il m'est évidemment très vite apparu que Jacques Hadamard et Paul LÉVY étaient d'un niveau mathématique considérablement au-dessus de tous les professeurs que je connaissais. Paul LÉVY a joué un très grand rôle dans ma formation de mathématicien, et particulièrement pendant ma deuxième année d'École normale Supérieure à une époque où les mathématiques françaises étaient relativement retardataires ; mon contact avec lui a été particulièrement fécond pour ma formation d'analyste et, dans une certaine mesure, de probabiliste. Il m'a alors initié aux méthodes les plus intuitives en analyse, transformant l'analyse, qui était alors pour moi une succession de théorèmes relativement difficiles à démontrer, en quelque chose d'intuitif où l'on pouvait tout seul réfléchir et prouver.
> [**schwartz_L\'evy1**]

Dans ce récit, la rencontre de Schwartz avec le mathématicien se précise encore. Si la famille et les mathématiques s'entremêlent au début de son récit, il donne ensuite des précisions sur la manière dont Lévy participe à sa formation et, dans une certaine mesure, de modèle à sa carrière ultérieure. Schwartz se forme en effet à son contact à l'analyse et aux probabilités, les deux domaines mathématiques dans lesquels il va ensuite travailler. Paul Lévy est professeur d'analyse à l'École polytechnique. Comme nous le verrons plus loin, il encourage Schwartz à s'y présenter, il le soutient lors de ses candidatures (Chapitre 6). Et c'est finalement Schwartz qui prend sa suite à l'École polytechnique lorsqu'il prend sa retraite en 1959. Schwartz attribue aussi à Paul Lévy le retour aux probabilités qu'il effectue à la fin de sa carrière.

Le modèle familial semble avoir été présent toute sa vie pour Schwartz. Il prend la suite d'Hadamard et de Lévy à l'École polytechnique, il entre, comme eux auparavant, à l'Académie des Sciences en 1975. La tradition familiale est mise en avant par Dieudonné, lorsqu'il présente la candidature de Schwartz le 17 février 1975 [7] :

> Issu d'une famille où la vocation scientifique est une tradition, puisqu'elle compte parmi ses membres notre confrère le Prof. Debré, et a compté l'illustre mathématicien J. Hadamard, Laurent Schwartz n'est pas indigne de cet héritage et je souhaite qu'il soit appelé à le perpétuer dans notre Compagnie.

Claudine Schwartz, la fille de Laurent et Marie-Hélène Schwartz que nous allons maintenant présenter, raconte la place naturellement omniprésente du mathématicien et des

7. Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz, Comité secret du 17 février 1975, Présentation de L. Schwartz par Jean Dieudonné.

mathématiques dans sa vie de famille[Schwartz 2011a] ; pour elle aussi la figure du mathématicien est présente très tôt.

De Marie-Hélène Lévy à Madame Laurent Schwartz (1913-2013)

Les mots de Marie-Hélène Schwartz Marie-Hélène Schwartz [8] nous livre quelques mots sur son mari dans le volume spécial de la *Gazette des mathématiciens* qui lui est consacré. Elle décrit ainsi leur expérience des mathématiques :

> Laurent était un homme très sociable, il « aimait son prochain ». Tout travail commun lui a valu de vraies amitiés. (...)
>
> Je vais donner tout de même un contre-exemple. Les mathématiques, grâce auxquelles nous nous sommes connus, nous ont toujours rapprochés, mais pas autant qu'on pourrait le croire. En effet, à côté de ce qu'il appelait son « palais intérieur », il y avait le mien, bien plus petit mais qui m'était indispensable, ce qu'il comprenait parfaitement. Or, dans toutes nos années de vie commune, il ne se construisit guère de chemins entre le petit palais et le grand palais. Si de tels chemins avaient existé, c'est-à-dire si j'avais intéressé de près Laurent à mon travail, cela aurait eu quelques avantages, mais aussi un inconvénient majeur. Il était tellement « plus fort » que moi qu'il m'aurait vite dépassée, peut-être avec d'autres méthodes ; et ceci sans que je puisse ni le rattraper ni suivre à mon propre rythme, par les voies qui se sont naturellement présentées à moi. Et puis, nous étions un couple de notre génération, *a priori* plus heureux quand l'élément masculin « dépassait » l'élément féminin.
>
> Bien entendu, je me félicite du changement qui a facilité l'arrivée des femmes dans le milieu mathématique.
>
> [Schwartz 2003c, p.208-209]

Par ces mots, Marie-Hélène Schwartz nous dévoile plusieurs aspects. Les mathématiques les ont tout d'abord rapproché. Mais elle met en avant la « génération » dont son couple est issue, à laquelle Schwartz fait lui aussi allusion dans son autobiographie. Elle indique aussi l'absence de « chemins » entre leurs mathématiques respectives, l'absence de travail en commun. Sa dernière phrase, avec laquelle elle se réjouit de la présence actuelle des femmes dans le milieu mathématique, est difficile à interpréter, on ne peut notamment pas conclure s'il s'agit d'un regret exprimé. Partant cependant des éléments mis en avant ici, nous allons questionner la place qu'ont occupées les mathématiques chez ce couple de mathématiciens. Tous les deux normaliens, ils se marient en 1938 lorsque Marie-Hélène Lévy est guérie de la tuberculose. Le récit donné dans l'autobiographie de Laurent Schwartz de leur rencontre et puis de leur mariage montre bien qu'il s'agit de traditions de leur « génération », comme l'écrit Marie-Hélène. C'est ensuite la guerre. En 1940, ils se rendent à Clermont-Ferrand pour rencontrer, ensemble, Henri Cartan. Ils passent dans la clandestinité en 1942, juste après que Laurent Schwartz ait soutenu sa thèse. Marie-Hélène Schwartz ne reprend les mathématiques que quelques années après la guerre, et soutient sa thèse en 1953. Après avoir regardé le parcours de Marie-Hélène, nous allons présenter les différentes manières les mathématiques les ont ou non rapprochés.

8. Marie-Hélène Schwartz est décédée le 5 janvier 2013. Un court billet est paru sur Images des Mathématiques, mentionnant très rapidement ses travaux [Audin et Sabbah 2013]. Une journée de l'association « Femmes et mathématiques » a été consacrée à « Des femmes dans les mathématiques contemporaines » en février 1997, en hommage à Yvonne Choquet-Bruhat, Jacqueline Ferrand, Marie-Hélène Schwartz et Paulette Libermann. La présentation de Jean-Paul Brasselet est publiée dans la revue *Femmes et mathématiques* en 2001, et remanié dans l'« Hommage à Marie-Hélène Schwartz » publié dans la *Gazette des mathématiciens* d'octobre 2013. Cet hommage contient d'autres textes et témoignages [Laudenbach et al. 2013].

Femme, normalienne, mathématicienne. Marie-Hélène Lévy, qui est née en 1913, entre à l'École normale en 1934, en même temps que Laurent Schwartz. Elle est la seule femme de la section sciences de cette promotion, qui comporte 22 élèves [9].

Le contenu de ses travaux et son statut de mathématicienne justifieraient amplement de lui consacrer des recherches. Néanmoins, étant donné que j'ai choisi ici d'aborder la vie collective des mathématiques par le biais de Laurent Schwartz, Marie-Hélène Lévy semble apparaître comme « Madame Laurent Schwartz » – c'est en tout cas le nom avec lequel sont signées ses deux premières notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des sciences qu'elle publie pendant la guerre en 1940 et 1941 [Schwartz 1940], [Schwartz 1941c]. Elle va cependant se remettre aux mathématiques quelques années plus tard et devenir une mathématicienne dont les travaux sont appréciés.

Marie-Hélène Schwartz publie en effet deux notes en 1940 et 1941 puis, contrainte de se cacher avec son mari pendant la guerre, ne publiera les suivantes qu'en 1949 et 1950 [Schwartz 1949d], [Schwartz 1949e], [Schwartz 1950f], [Schwartz 1950d], [Schwartz 1950e] avant de soutenir sa thèse en juin 1953, qui porte sur les « Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre ». Les deux premiers chapitres de sa thèse paraissent en 1954 dans *Acta Mathematica* [Schwartz 1954f], et le troisième dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* [Schwartz 1954e]. Après être passée à Reims, Marie-Hélène Schwartz est nommée à la Faculté des Sciences de Lille en 1964, ainsi que cela est décrit dans l'ouvrage de Marie-Thérèse Pourprix [Pourprix 2009, p.149-150]. Cet ouvrage livre quelques souvenirs sur Marie-Hélène Schwartz, « cette personnalité chaleureuse et incontournable du département de mathématiques ».

Les travaux mathématiques de Marie-Hélène Schwartz vont « de l'étude des fonctions d'une variable complexe aux classes caractéristiques des variétés singulières », et sont en partie décrits dans [Laudenbach et al. 2013, Brasselet, « À propos des champs radiaux, un aspect de l'œuvre mathématique de Marie-Hélène Schwartz, p. 61-71].

Un couple mathématicien ? Les divers témoignages [Laudenbach et al. 2013] ou [Pourprix 2009, p.149-150] évoquent à demi-mots les difficultés pour Marie-Hélène d'avoir sa propre carrière mathématique, indépendante de celle de Laurent (« ombre portée par son mari », Lille a été le « jardin secret » de Marie-Hélène). Sans traiter cette question, nous souhaitons ici interroger la pertinence de la notion de vie collective des mathématiques à l'intérieur du couple formé par Laurent et Marie-Hélène. S'il semble a priori ne pas avoir eu d'échange mathématique entre les deux, ils ont néanmoins partagé certains épisodes de leurs vies de mathématiciens.

Laurent Schwartz ne mentionne aucun échange mathématique avec Marie-Hélène dans son autobiographie, ce qui confirme les dires de cette dernière cités plus haut. Cela est confirmé par Claudine Schwartz, leur fille, qui nous livre quelques souvenirs de famille, et raconte une ambiance dans laquelle les mathématiques sont omniprésentes, mais dont on ne parle guère : elle indique en effet que ses parents ne pouvaient pas partager leurs mathématiques.

9. On peut lire l'article de Nicole Hulin [Hulin 1994] qui indique l'évolution des conditions d'admission des femmes à l'Ecole de la rue d'Ulm. La première femme à entrer est Marguerite Rouvière en 1910 ; dix-neuf femmes entreront entre 1910 et 1939 (voir p.345). Ainsi en 1935, il n'y aura aucune femme dans la promotion scientifique. La promotion 1936 est celle de Colette Rotschild (Cassignol) et Jacqueline Lelong-Ferrand. Elle décrit la place particulière occupées par les femmes à l'école au fil daes années. A partir de 1940, les femmes ne pourront plus passer le concours. En 1985, les Ecoles d'Ulm et de Sèvres fusionnent et en 1986, le concours devient donc mixte.

> En famille nous ne parlions pas frontalement de mathématiques. Pour mon frère et moi, poser une question déclenchait des réponses longues, que nous trouvions fort excessives. Plus tard, avec mes enfants, le même phénomène s'est reproduit. Ma mère et mon père communiquaient difficilement sur les maths, il me semblait que cela était en partie dû « aux dimensions ». En effet, ma mère, myope dans la vie quotidienne, voit mentalement très bien dans l'espace à 3 dimensions. Mon père avait dans la vie de tous les jours une vue excellente bien que très sélective ; mentalement il voyait en dimension 2, passait très vite en dimension n, voire infinie, mais la dimension 3 lui posait un vrai problème.
> [Schwartz 2011a]

Marie-Hélène et Laurent Schwartz ont chacun leur propre spécialité mathématique ; leurs centres d'intérêt mathématique, ainsi que leur manière de faire des mathématiques sont suffisamment différentes pour qu'un échange soit difficile. Claudine Schwartz nous livre même les manières de travailler, très différentes, de ses deux parents ; ainsi que la forme de leurs brouillons : « une feuille de brouillon où était dessiné son mantra mathématique du moment : juste une flèche, une intégrale, une écriture ($< T, \varphi >$ par exemple) ou une courte formule » pour son père, et des « dessins ressemblant à de vrais croquis d'artiste, en trois dimensions » pour sa mère.

Cette absence d'échange mathématique n'a néanmoins pas toujours été la norme. Ils se sont formés ensemble : à l'École normale, puis par courrier lorsque, Marie-Hélène étant au sanatorium, Laurent lui envoie ses réflexions mathématiques et politiques, et pendant le début de la guerre, à Clermont-Ferrand. Venus pour que Marie-Hélène demande à Henri Cartan « un conseil pour son propre travail » [Schwartz 1997, p.155], ils s'y installent ensuite. Tous les deux, ils continuent à travailler :

> Cette période fut suffisamment tranquille pour que Marie-Hélène et moi nous remettions au travail.
> [Schwartz 1997, p.157]

Et c'est même Marie-Hélène qui va assister au cours de Dieudonné sur les espaces vectoriels topologiques, le sujet l'intéressant également, en mettant ensuite Laurent au courant du contenu qu'il assimile [Schwartz 1997, p.159]. Ils sont alors deux jeunes mathématiciens en train de se former en même temps. Ensuite, la guerre a arrêté le travail de Marie-Hélène Schwartz. Leurs deux enfants, Marc-André et Claudine, naissent en 1943 et 1947 respectivement.

Concernant la publication de la thèse dans *Acta Mathematica*, on en retrouve la trace dans un échange de courrier entre Jessen et Schwartz. [10] Ainsi le 26 décembre 1953, Laurent Schwartz écrit-il à Jessen [11] :

> Mon cher Jessen, (...)
> Ma femme a passé sa thèse en juin dernier ; sur recommandation de Marcel Riesz elle a envoyé son manuscrit aux Acta Mathematica. Nörlund lui a répondu en indiquant que ce serait "long". Je suis un peu inquiet, parce que, pour la thèse de Riss, le délai a été très anormalement long (plus de 2 ans !). Pourriez-vous voir de quel ordre infinitésimal il s'agit ?

La réponse de Jessen, concernant la publication de Marie-Hélène, dans une lettre en date du 14 janvier 1954, est la suivante :

> (...) My warm congratulations to your wife ; I am full of admiration ! I asked Norlund how quickly the printing may be expected to take place. He would not venture to mention any date, since so much depends on the printers, but all is being done to

10. Jessen est venu à Nancy lors du congrès d'analyse harmonique dont nous reparlerons. Laurent Schwartz est ensuite allée à Copenhague exposer sa théorie des distributions.

11. Archives Jessen, Copenhague.

> speed up publication. I think there is reason to hope, that the delay has now passed its peak.

Cet échange de courrier est l'une des rares fois où l'on trouve mentionnées les mathématiques – à un niveau très matériel – de Marie-Hélène dans les archives de Laurent Schwartz.

Il y a d'autres manière de partager une vie mathématique. On peut ainsi constater que certains des voyages mathématiques ont consisté en des cours donnés par les deux époux, Ainsi à Bogotà en 1956 (juin-octobre) : Laurent donne un cours intitulé « Variedades analiticas complejas » (variétés analytiques complexes) [Schwartz 1956a] et Marie-Hélène parle des « Espacios fibrados » (espaces fibrés) [Schwartz 1956b]. En 1973 à Canberra, ils donnent là aussi chacun un cours – les deux cours paraissent, ensemble, dans un volume intitulé « seminar Schwartz »[Schwartz et Schwartz 1973]. Le cours de Laurent porte sur les probabilités cylindriques et celui de Marie-Hélène sur les fonctions locales ou analytiques de plusieurs variables.

Par ailleurs, de nombreux mathématiciens, amis du couple, témoignent de la chaleur de l'accueil reçu chez les Schwartz. On peut citer ainsi, parmi d'autres, Grothendieck :

> [J]'ai été reçu avec affection à Nancy, en 1949, dans la maison de Laurent et Hélène Schwartz (où je faisais un peu partie de la famille) (...)
> [Grothendieck 1986, p.156]

Même s'ils n'ont pas partagé le contenu de leurs mathématiques respectives, Laurent Schwartz partage sa vie de mathématicien avec sa femme, ainsi que, de temps en temps, avec la mathématicienne, comme c'est le cas lors de leur formation commune ainsi qu'à l'occasion de ces voyages communs à l'étranger.

En conclusion : ces quelques réflexions sur Hadamard, Lévy et Marie-Hélène montrent le caractère ambigu des relations familiales entre mathématiciens. D'une part, cela les rapproche les uns des autres ; d'autre part, les échanges restent assez limités. Si les mathématiques caractérisent de manière très important la vie collective de Schwartz, la famille n'est pas pour Schwartz le lieu le plus important de vie collective en mathématiques.

1.1.2 La formation interrompue d'un mathématicien

Une deuxième aspect de la première « rencontre » de Schwartz avec la vie collective des mathématiques, de ses premiers pas vers les mathématiques, est constitué par son entrée à l'École normale. Cette institution constitue un collectif déjà étudié dans de nombreux travaux, qui mettent notamment en évidence l'importance des relations normaliennes dans l'insertion professionnelle [Sirinelli 1994], [Sirinelli 1988]. Qu'en est-il pour Schwartz ? La question de l'importance de l'École normale dans sa formation et pour sa rencontre avec la vie collective des mathématiques se pose à deux niveaux dans son récit. Les manières dont il considère et discute l'École normale correspondent en effet à deux temporalités différentes. De manière générale tout d'abord et dans une réflexion sur le long-terme et a posteriori de sa carrière mathématicienne, la présentation qu'il donne traduit une grande importance, pour lui, de l'École normale et des normaliens dans la scène mathématique française. Mais en tant qu'événement ponctuel, son entrée à l'École normale, qui est suivie pour Schwartz de son service militaire puis de la guerre, correspond à une formation interrompue. Elle nécessite en effet un autre événement, une autre rencontre, pour aboutir à la soutenance d'une thèse, qui correspond à son insertion dans la communauté mathématique. Cet autre événement, sa rencontre avec Bourbaki qui est discuté dans la partie suivante, permet à la fois son insertion dans la vie collective des mathématiques ainsi que sa prise de conscience du caractère collectif de la vie mathématiques ; ce qui n'a pas encore lieu ici.

Normalien : « un facteur commun à presque tous les futurs mathématiciens » [12]

Le passage de Schwartz à l'École normale et ses relations normaliennes ont un impact sur sa vie mathématique ultérieure, dont il reconnaît a posteriori le caractère collectif, attaché à l'institution. Après deux années de classes préparatoires, Schwartz entre à l'École normale supérieure en 1934. Il est alors rassuré sur son devenir de mathématicien :

> La compétition au lycée m'avait été utile pour surmonter mes doutes sur moi-même, ma lenteur d'esprit me complexait. Devenu normalien, je n'avais plus besoin de me rassurer ainsi. Celle-ci n'est bénéfique que sous la forme adoucie de la « saine émulation » qui conduit chacun à donner le meilleur de soi-même. Elle devient franchement nuisible et l'on doit s'en défier comme de la peste lorsqu'elle dresse un obstacle à la collaboration scientifique. Un scientifique qui publie ses résultats les livre à la communauté, il permet à d'autres d'aller plus loin. La science donne des habitudes de collaboration qui sont particulièrement intéressantes et qui lui sont propres.
>
> [Schwartz 1997, p.74]

Ce qui est ainsi propice à raconter la collaboration nécessaire au travail scientifique, c'est la sécurité qu'il ressent en devenant normalien. Car Schwartz l'affirme : « 95 pour cent des mathématiciens sont normaliens. » [Schwartz 1951b, p.50]. Cette affirmation doit être nuancée : Leloup indique en effet dans sa thèse, « L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France », qu'en moyenne 35 pour cent des soutenances à la Faculté des Sciences de Paris pendant l'entre-deux-guerres (1914-1945) sont celles de normaliens [Leloup 2009, p.168]. Le pourcentage qu'il donne correspond-il plutôt aux mathématiciens ayant un poste à l'université ? Il est en tout cas intéressant que ce soit la vision des mathématiciens en France qu'il nous donne : on est loin de l'image d'une pluralité des milieux mathématiques, tels qu'ils sont présentés, par exemple, dans les travaux d'Hélène Gispert autour de la Société Mathématique de France [Gispert 1991], [Gispert 2007].

Quand Schwartz présente en 1949 à Vancouver un exposé intitulé « Les mathématiques pendant et après la guerre » [Schwartz 1951b], il décrit en fait son propre parcours : classes préparatoires, entrée à l'École normale Supérieure à 19-20 ans, obtention des certificats de licence, diplôme d'études supérieures, préparation de l'agrégation entre 22 et 24 ans – Schwartz est en effet reçu à l'agrégation en 1938, second derrière Gustave Choquet. Alors que la plupart se destinent ensuite à l'enseignement secondaire, « Chaque année quelques uns, au maximum trois ou quatre, se destinent à la recherche et à l'enseignement supérieur. Ils prennent alors, au sortir de Normale, un poste d'Attaché de Recherche au C.N.R.S., Centre National de la Recherche Scientifique. » Schwartz décrit ensuite l'allocation, qui est celle qu'il a reçue après son service militaire – pendant une période très courte néanmoins du fait des restrictions dûes à la loi sur le statut des juifs, ainsi que nous allons le voir.

Le parcours de Schwartz est jusque là très classique selon lui, pour qui le passage par l'École normale est « un facteur commun à presque tous les mathématiciens » [Schwartz 1951b, p.50]. Mais il n'aboutit pas encore à sa soutenance de thèse.

On peut donc considérer que la formation de Schwartz est inachevée, parce qu'elle n'aboutit pas à la soutenance d'une thèse. Cela s'explique par le contexte particulier de la guerre, que nous allons présenter brièvement. Néanmoins, le passage de Schwartz par l'École normale semble avoir eu une grande importance pour lui : c'est pendant ces années qu'il se fiance avec sa femme, ses réflexions politiques forment la base des ses futurs engagements, il y développe des amitiés qui vont durer, il y apprend des mathématiques,

12. [Schwartz 1951b, p.50]

il y découvre, sous une certaine forme, le séminaire [13]...

Une formation interrompue par la guerre

A première vue, son parcours ne semble pas être affecté par la guerre. Il entre en 1934 et est reçu à l'agrégation en 1938 à la fin de sa troisième année. Il publie deux notes aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* en 1941 [Schwartz 1941b], [Schwartz 1941a]. Il soutient sa thèse en 1942, soit huit ans après son entrée à l'École normale : suivant l'étude de [Leloup 2009, p.79], la moyenne pour les normaliens est de 9-10 ans entre l'année de leur promotion et la soutenance de leur thèse ; sa thèse est enfin publiée en 1943 [Schwartz 1943b]. Cela correspond au schéma habituel décrit par Leloup [Leloup 2009, p.27-29] : publication de quelques courtes notes aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, puis soutenance et publication de la thèse [14]. La guerre semble néanmoins interrompre le parcours mathématicien de Schwartz, qui reste inachevé. Schwartz part faire son service militaire, de 1938 à 1940 (il est prolongé d'un an), puis il est démobilisé. Il est ensuite difficile de continuer à percevoir une bourse, il n'a pas encore de thèse, il sera même tenté par une carrière politique après la guerre [Schwartz 1997, p.267-278]. Les deux notes aux *Comptes-Rendus* ne contiennent en fait pas les résultats essentiels de la thèse de Schwartz [15]. Le contexte particulier de la situation de Schwartz apparaît très bien dans les paroles de Valiron, son encadrant de thèse. Ce dernier le soutient lors de sa candidature à l'École polytechnique en 1948 (candidature qui sera d'ailleurs refusée) [16] :

> M. VALIRON signale qu'il connaît M. SCHWARTZ depuis son entrée à l'École normale où il a été un élève extrêmement brillant et remarquable, entraînant ses camarades, organisant des conférences entre camarades sur le calcul des probabilités alors qu'il était élève de seconde année. Il l'a connu comme candidat à l'agrégation, faisant des leçons qu'il dominait plus que ne le faisaient ses camarades et qui ont été appréciées par le Président du Jury. Il a fait des leçons de composition pour lesquelles il a montré un talent extraordinaire.
>
> M. VALIRON l'a connu lorsqu'il a été militaire. Il y a une différence, dit-il, entre la quantité de publications de M. LICHNEROWICZ et celle de M. SCHWARTZ parce que M. SCHWARTZ, dès sa sortie de l'Ecole, a fait son service militaire qui a été prolongé jusqu'en 1939. Ensuite il a fait la guerre et l'a faite dans des conditions particulières. Etant officier de la D.C.A., il s'est intéressé au développement en séries. Il ne publie que très peu par rapport à ce qu'il trouve de sorte qu'on peut trouver qu'il est inférieur.
>
> Vers 1941, M. SCHWARTZ s'est orienté dans la recherche des représentations de fonctions et des approximations au moyen de séries exponentielles qui généralisent les séries de Fourier. Il a soutenu sa thèse à Clermont-Ferrand mais n'a pas pu la faire publier entièrement sous forme de thèse. [17]

Du fait de son service militaire puis de la guerre, Schwartz n'a publié que très peu en 1948. Les trois années que Schwartz passe à l'École normale, puis son service militaire [18],

13. On développe le séminaire de mathématiques comme forme de vie collective des mathématiques au chapitre 5.

14. Leloup donne quelques exemples ; le mémoire publié pouvant différer du mémoire soutenu.[Leloup 2009, p.80]

15. Concernant la publication de mathématiques pendant cette période, on peut consulter [Audin 2009a].On en parle ici plus loin avec la publication de la thèse de Schwartz pendant la guerre.

16. Il est en concurrence, notamment, avec Lichnérowicz, normalien de la promotion 1933, qui a effectivement beaucoup plus publié pendant la guerre notamment (une vingtaine de notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences notamment).

17. Archives École polytechnique, Procès-verbal du Conseil d'Instruction, séance du 12 juin 1948.

18. Je n'ai malheureusement aucune source concernant la période de service militaire de Schwartz. Cette période, notamment le temps passé à Biscarosse à enseigner à des officiers, est décrite par Schwartz dans

sont en quelque sorte une intégration inachevée, interrompue par la guerre. Nous allons voir cependant maintenant que la guerre n'a pas empêché la rencontre de Schwartz avec la vie collective des mathématiques, mais que celle-ci a eu lieu dans des circonstances très particulières et a façonné la conception de Schwartz.

1.2 Une rencontre d'une singularité profonde

Il s'agit en fait d'une rencontre en plusieurs étapes, mais cette fois le mot « rencontre » désigne un événement plus soudain, et non décidé par Schwartz : sa rencontre avec Bourbaki, qui est un événement crucial dans sa rencontre avec la vie collective des mathématiques.

La première étape a lieu à Toulouse, où Laurent et Marie-Hélène Schwartz ont rejoint leur famille, après que Schwartz a été démobilisé en août 1940 [19]. Ils pensent y passer le temps de l'Occupation, Schwartz travaille seul. Ils apprennent la venue d'Henri Cartan et Jean Delsarte dont ils ont entendu parler à l'École normale, qui sont à Toulouse pour y faire passer les oraux d'entrée. Comme Marie-Hélène a une question à poser à Cartan pour ses propres travaux, ils décident d'aller les rencontrer. L'École normale est un bon sésame : « Eux aussi avaient entendu parler de nous » écrit Schwartz [Schwartz 1997, p.155]. C'est alors que Cartan leur conseille de venir à Clermont-Ferrand, où les mathématiques sont très dynamiques, car l'Université de Strasbourg s'y est réfugiée. Ils suivent ce conseil, et Schwartz qualifie cette rencontre de « miraculeuse ». Cela tient à plusieurs facteurs : Laurent Schwartz, ainsi que sa femme, sont au tout début de leur carrière mathématique, ils n'ont pas encore soutenu de thèse. La présence à Clermont-Ferrand d'une communauté mathématique très vivante va leur permettre de continuer à se former, et, pour Laurent Schwartz, de préparer une thèse. Il en décrit l'importance ainsi :

> L'ambiance mathématique était exceptionnelle. Nous y sommes partis, et c'est là que nous avons fait la connaissance de Dieudonné et d'un grand nombre d'autres mathématiciens. Ma vie mathématique a vraiment commencé là.
> [Schwartz 1994b]

C'est, pour lui, le commencement de sa vie mathématique. Mais à Clermont-Ferrand se trouve aussi la majeure partie du groupe de mathématiciens Bourbaki, qui va accueillir Schwartz. C'est donc là que Schwartz rencontre, s'y confronte même, la vie collective des mathématiques.

1.2.1 À Clermont-Ferrand, une vie mathématique hors de la guerre

Quelle est donc cette « vie mathématique » que Schwartz découvre à Clermont-Ferrand lorsqu'il arrive en 1940 ? C'est tout d'abord la vie d'une Faculté de Sciences, très dynamique et dans laquelle se trouvent de nombreux mathématiciens. Une des raisons de ce dynamisme : l'Université de Strasbourg s'est réfugiée à Clermont-Ferrand dès septembre 1939 [20]. Schwartz énumère les mathématiciens présents :

son autobiographie [Schwartz 1997, p.137-150]

19. Tout ce paragraphe provient du récit de Schwartz [Schwartz 1997, p.150-158]. Concernant la période particulière de l'Occupation, un livre est consacré au scientifiques, dans lequel un chapitre est consacré au cas de Schwartz et s'intitule : « Laurent Schwartz, ou Bourbaki dans l'effervescence clermontoise. » [Chevassus-au-Louis 2004, p.163-172].

20. L'histoire détaillée de « l'université française de Strasbourg » est publiée [Strauss 1994] dans un ouvrage [Gueslin 1994] recueillant les diverses participations au colloque « Étudiants, universitaires et Universités de France pendant la Seconde Guerre Mondiale » tenu en novembre 1993. Des mathématiciens ont eu aussi témoigné, leur récit est publié dans la *Gazette des Mathématiciens* [Couty, Glaeser et Perol 1995].

> Leur réunion faisait de Clermont le premier centre mathématique de France, avant Paris. Les principaux mathématiciens qui y travaillaient, hormis Cartan, professeur à la faculté des sciences de Strasbourg (il n'y resta que quelques mois et fut nommé ensuite professeur à la faculté des sciences de Paris), étaient Georges Cerf (géométrie ; il avait été président de la Ligue des droits de l'homme de Strasbourg, révoqué comme Juif), Claude Chabauty (arithmétique), Jean Dieudonné (algèbre et analyse fonctionnelle ; il était professeur à Nancy, mais détaché à Clermont), Charles Ehresmann (topologie algébrique), André Lichnérowicz (géométrie différentielle), Szolem Mandelbrojt (fonctions quasi analytiques) et René de Possel (analyse).

Cette liste contient des mathématiciens de Clermont-Ferrand (De Possel) et de Strasbourg (Cerf, Chabauty, Ehresmann, Lichnérowicz). De Possel, Cartan, Chabauty, Ehresmann et Mandelbrojt font partie de Bourbaki. André Lichnérowicz est normalien de la promotion 1933, il est nommé maître de conférences en 1941. On trouve aussi à Clermont-Ferrand des étudiants en mathématiques [21]. Schwartz nous en cite trois, qui sont étudiants en thèse : outre lui-même, Alexandre Gorny [22], élève de Mandelbrojt et Jacques Feldbau [23], élève d'Ehresmann. Aucun des deux ne survivra à la guerre.

Mais « si sur les conditions de la vie étudiante, le témoignage des mathématiciens n'est pas vraiment original, il n'en est pas de même sur l'importance scientifique de la venue à Clermont de l'université de Strasbourg » [Couty, Glaeser et Perol 1995] . Les effectifs de Strasbourg sont en effet alors beaucoup plus importants que ceux de Clermont, qui n'a que deux chaires de mathématiques. De nombreux domaines des mathématiques sont représentés. Ces professeurs donnent des cours. Ainsi René de Possel présente-t-il les premiers travaux de Bourbaki :

> René de Possel présenta à Clermont dès novembre 1940 dans son cours de calcul différentiel et intégral la théorie des ensembles et la topologie générale d'après les deux premiers fascicules.
>
> [Couty, Glaeser et Perol 1995]

L'enseignement est décrit comme étant « très en avance sur ce qui se faisait ailleurs ». Schwartz suit le cours d'espaces vectoriels topologiques donné par Dieudonné, par l'intermédiaire de sa femme, qu'il utilisera largement dans sa thèse sur laquelle nous revenons plus loin :

> J'ai fait ma thèse en deux ans, et j'ai largement utilisé l'analyse fonctionnelle que j'avais apprise avec Dieudonné, par l'intermédiaire de Marie-Hélène. Car c'est elle qui est allée au premier grand cours d'analyse fonctionnelle. Nous avions décidé que ce n'était pas la peine d'y aller à deux, et c'est elle qui allait suivre le cours de Dieudonné. Elle me les transmettait, et j'ai appris ainsi toute l'analyse fonctionnelle dont j'ai eu besoin ensuite.
>
> [Schwartz 1994b]

La présence de Dieudonné est d'une grande importance pour Schwartz, qui d'ailleurs écrit s'être toujours considéré comme son élève [Schwartz 1994b] :

> Dans un certain sens, l'atmosphère était merveilleuse, à Clermont-Ferrand. C'est curieux qu'en 1940, sous Pétain, si l'on réussissait à oublier ce qui se passait à l'extérieur

21. Pour des précisions concernant l'Université de Strasbourg repliée à Clermont-Ferrand, voir le texte à paraître de Michèle Audin : http ://www-irma.u-strasbg.fr/%7Emaudin/MathAuvergne.pdf.

22. Leloup indique en fait [Leloup 2009, note 53] que « Laurent Schwartz évoque également le cas d'un étudiant polonais, Alexandre Gorny qui étudie à cette époque à l'université de Clermont-Strasbourg et qui sera déporté. Ce dernier a en fait déjà soutenu une thèse à la Sorbonne en 1939-1940, *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle* ».

23. Pour plus de détails concernant Feldbau, et de nombreux renseignement sur les publications mathématiques pendant l'Occupation, on pourra consulter l'article et le livre de Michèle Audin [Audin 2009a], [Audin 2009b].

> et qu'on rentrait dans l'université, on était pris d'un grand enthousiasme mathématique. Dieudonné était un très grand esprit algébrique, et je peux dire que j'ai été "victime" de lui. Je suis plus un analyste qu'un algébriste, mais je fais de l'analyse algébriste.
> [Schwartz 1994b]

Ils se retrouveront après la guerre à Nancy.

Enthousiasme, effervescence, atmosphère merveilleuse... tels sont les mots utilisés pour décrire cette vie mathématique hors de la guerre.

> La difficile période (...) a, paradoxalement été pour la mathématique à Clermont un moment très fécond.
> [Couty, Glaeser et Perol 1995]

La vie mathématique est aussi dans la solidarité, il se forme une véritable communauté dans la Faculté des Sciences. Malgré les difficultés liées au transport et aux mobilisations, les témoins précisent qu'« un réseau de relations interpersonnelles entre étudiants, et entre enseignants et étudiants, s'était vite constitué. » Ils donnent les cas de Georges Cerf, Gorny (qui sera déporté en 1942), et Schwartz qui a pu toucher sa pension du CNRS grâce à la « discrétion collective ». Feldbau sera, quant à lui, arrêté en juin 1943, puis déporté.

Les Schwartz restent deux ans à Clermont-Ferrand, puis passent dans la clandestinité, rendue nécessaire car ils sont tous les deux juifs. Ils ont notamment échappé à la grande rafle à l'Université de Strasbourg de novembre 1943.

> Les choses ont duré de la sorte jusqu'à 1942, quand la zone a été occupée ; nous avons alors fui Clermont-Ferrand, et personne n'a plus eu de nouvelles de nous. Nous sommes allés à la campagne. Nous avons changé de nom. Je n'ai plus entendu parler de Dieudonné ni de tous les amis, de tous mes collègues jusqu'à la fin de la guerre. De 1943 à 1944, j'ai renoncé au travail mathématique.
> [Schwartz 1994b]

Schwartz rencontre, à Clermont-Ferrand pendant la guerre et dans un contexte bien particulier, une certaine forme de vie mathématique.

1.2.2 Une rencontre avec Bourbaki.

La vie mathématique que découvre Schwartz ne s'arrête pas à cette vie universitaire dynamique. Il rencontre aussi Bourbaki [24] cette entreprise collective de mathématiciens, dont un grand nombre de membres se trouve à Clermont-Ferrand. André Weil y fait même un passage. Que signifie pour Schwartz cette rencontre avec Bourbaki ? Il s'agit de considérer cette rencontre comme étant celle d'un individu, un jeune normalien, brillant

24. Pour une histoire des premières années de Bourbaki et de leur projet collectif, on pourra consulter les travaux de Liliane Beaulieu : [Beaulieu 1989], [Beaulieu 1998] notamment. Elle donne l'identité de Bourbaki en quelques mots :

> « N(icolas) Bourbaki » est le pseudonyme d'un groupe de mathématiciens, pour la plupart français et anciens élèves de l'École normale supérieure, auteurs d'un ouvrage intitulé *Éléments de mathématique*, exposé de différentes théories mathématiques qui met en évidence leurs structures communes. Pour les mathématiciens, Nourbaki demeure le représentant par excellence d'un « style » mathématique assez aride qui allie l'axiomatique à un mode de présentation rigoureux et abstrait. Phénomène unique dans l'histoire récente des mathématiques, ce groupe a nourri autant de légendes qu'il a suscité des controverses, cultivant le secret et le mystère alors même que son traité devenait un grand succès d'édition et qu'il instituait un séminaire de mathématiques qui demeure le plus en vue de France.
> [Beaulieu 1998, p.74]

Un article de Christian Houzel décrit « Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle » [Houzel 2004].

certes, mais n'ayant pas encore soutenu sa thèse, avec un collectif de mathématiciens, réunis autour de leur projet de rédaction des *Eléments de mathématique*.

Schwartz raconte comment Bourbaki a transformé sa conception de l'activité mathématique :

> A Clermont-Ferrand, nous étions en plein bourbakisme. J'y ai surtout appris à manipuler d'une façon nouvelle des notions que je connaissais ; ainsi je n'avais jamais formulé simplement l'image directe et l'image réciproque d'un sous-ensemble par une application, l'image réciproque possède des propriétés remarquables de conservation, et, à l'École normale, je l'appelais l'ensemble des points de l'espace-objet dont l'image se trouve dans une partie déterminée de l'espace-image. C'était long ! Je n'avais pas eu l'idée de baptiser le concept, alors que l'activité mathématique consiste aussi parfois à mettre un mot simple sur une notion compliqué. Bourbaki m'a transformé complètement, parce que les expressions étaient parfaitement bien exprimées, bien axiomatisées. J'ai appris la topologie générale et algébrique, l'algèbre linéaire et multilinéaire, les variétés abstraites et les variétés différentielles. Il a fallu longtemps pour que ces notions apparaissent chez les jeunes.
>
> C'était la vie de Bourbaki. Je vivais dans cette atmosphère merveilleuse, ce fut une des périodes de ma vie les plus heureuses du point de vue mathématique, malgré l'atmosphère extérieure redoutable.
>
> [Schwartz 1997]

Il s'agit même plus que de la conception de l'activité mathématique. Schwartz découvre aussi une certaine façon de vivre collectivement les mathématiques au contact du groupe Bourbaki. On peut donc dire, en fait, que la rencontre de Schwartz avec la vie collective des mathématiques se fait en 1940, pendant la guerre, lorsqu'il rencontre Bourbaki à Clermont-Ferrand, où l'université de Strasbourg s'était réfugiée. Ses études à l'École normale peuvent être considérées comme un essai non transformé ; ce que vont réussir à faire ses rencontres avec Bourbaki. Schwartz parle dans son autobiographie de « libération » (expression paradoxale quand on songe au contexte de l'année 1940 !), de « renaissance à la vie mathématique », d'« élans » [Schwartz 1997, p.158]. Il donne cette formule :

> Bourbaki fut pour moi une révélation.
>
> [Schwartz 1997, p.159]

On peut voir dans les archives Bourbaki [25] que Schwartz a été présent à deux congrès Bourbaki, en décembre 1940 et avril 1941, en tant que « chrysalide » [26]. Les autres nouveaux venus à Bourbaki porteront l'appellation plus habituelle de « cobayes ». Schwartz n'est ensuite plus mentionné jusqu'à la fin de la guerre : cela correspond à la période qu'il a passé dans la clandestinité, et pour laquelle on connaît très peu de choses, hormis ce qu'il livre dans son autobiographie. Lors de ces deux premiers congrès sont discutés de nombreux sujets : topologie, algèbre, intégration, fonctions d'une variable réelle (en décembre 1940 [27] et l'algèbre linéaire, la topologie générale, et l'intégration en avril 1941 [28]. A chaque congrès, les membres (pas Schwartz, qui est encore chrysalide) se voient attribuer

25. Une partie des Archives Bourbaki sont en ligne, http ://math-doc.ujf-grenoble.fr/archives-bourbaki, notamment les premiers volumes de *la Tribu*, les comptes-rendus des premiers congrès, ainsi que les premières rédaction. Nous nous appuyons sur ces documents dans la suite, dont on indique la référence indiquée sur le site.

26. Ce terme fait référence à la passion de Schwartz pour les papillons. Ce thème sera très largement absent de ma thèse parce qu'à première vue assez éloigné des mathématiques. Néanmoins, Schwartz y accorde une grande place dans son autobiographie ; sa collection était très impressionnante. On peut mentionner une exposition organisée par la Bibliothèque Centrale de l'École polytechnique du 21 juin au 14 juillet 2013 ou un article dans *La Recherche* [Richard 2003]. Ses papillons se retrouvent aussi en couverture du séminaire d'Équations aux Dérivées Partielles.

27. Voir Archives Bourbaki, nbt-005 et nbt-006, *La Tribu* n°4 et 5.

28. Voir Archives Bourbaki, nbt-008, *La Tribu* n°6.

des tâches diverses.

La singularité de cette rencontre provient à la fois du contexte – celui de l'Occupation – mais aussi surtout du moment très particulier auquel elle intervient dans la vie mathématique de Schwartz, à un moment où sa formation de normalien semble s'interrompre. Mais, encore une fois, la guerre semble interrompre la formation de Schwartz, qui entre dans la clandestinité en 1942. Néanmoins, la situation est ici très différente. Tout d'abord, le récit de Schwartz accorde à cet événement une importance particulière. Ensuite, Schwartz soutient sa thèse en 1942, ainsi que nous allons le présenter dans 1.3. La soutenance de thèse marque donc son intégration réussie dans la communauté mathématicienne. Enfin, l'appartenance de Schwartz à Bourbaki ne cesse pas avec son passage dans la clandestinité mais s'interrompt uniquement pendant ces années. Nous étudions en 1.4 plus en détail les formes prises par sa « rencontre » avec Bourbaki en nous intéressant à la relation entre l'individu et le collectif qui se transforme peu à peu, et dont on peut tenter de caractériser les actions réciproques de l'un sur l'autre. Pour cela, nous nous appuierons notamment sur les archives de Bourbaki concernant la période 1940-1953, en nous centrant sur un exemple particulier.

1.3 Une thèse, marqueur objectif d'entrée dans la vie collective des mathématiques ?

Nous venons de présenter l'importance des étapes constituées par Clermont-Ferrand et Bourbaki dans la rencontre de Schwartz avec la vie collective des mathématiques. Cette rencontre est d'autant plus importante qu'elle aboutit à la soutenance de sa thèse en 1942. Il s'agit d'un marqueur objectif que nous allons présenter dans le but d'éclairer les conséquences de la rencontre de Schwartz avec la vie collective des mathématiques.

Le travail de Leloup [Leloup 2009] permet de saisir l'enjeu d'une thèse de doctorat en mathématiques dans la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Elle utilise le corpus des doctorats de sciences mathématiques entre 1914 et 1945 en vue de proposer « une approche globale du milieu des sciences mathématiques et de ses domaines, sans filtrage a priori de domaines ou de sources » [Leloup 2009, p.29]. Elle considère la thèse comme « une étape » [29], marquant le passage de l'étudiant au mathématicien, étape avant laquelle nous nous sommes arrêtés à la fin de la première partie. Elle construit surtout l'objet « thèse » comme étant composé non seulement du mémoire de doctorat, mais aussi des divers rapports qui l'entourent, ainsi que de la composition du jury. Son étude lui permet d'« appréhender différents aspects du milieu mathématique » ; elle prend ainsi comme hypothèse que « par les conditions de son élaboration, la thèse d'État apparaît ainsi comme une production mathématique à même de révéler certains pratiques mathématiques du domaine étudié par le doctorant considéré. » Par exemple, l'écriture du mémoire de thèse de Schwartz est conditionné par les cours et la formation qu'il a suivis.

29. [Leloup 2009, p.29-30]. Il ne s'agit pas d'une étape unique, ainsi qu'elle le rappelle [Leloup 2009, p. 30], en citant [Ehrhardt 2007, p.163] :

> « Comme l'explique Caroline Ehrhardt dans sa thèse,(...) " le passage du statut d'étudiant prometteur à celui de mathématicien confirmé est un processus complexe pour lequel un unique travail de recherche ne suffit pas et ne repose d'ailleurs pas exclusivement sur des critères mathématiques". Cette constatation que Caroline Ehrhardt dresse pour un étudiant du XIXème siècle reste encore vrai au XXème siècle, c'est pourquoi la soutenance d'une thèse en sciences mathématiques ne représente qu'une étape et non l'étape unique de passage d'un statut à un autre. »

Afin de saisir l'importance de l'étape de la thèse, on peut vouloir la considérer comme un rite initiatique, ainsi que cela est fait dans l'étude sociologique [Dardy, Ducard et Maingueneau 2002], qui aborde le genre universitaire du rapport de soutenance de thèse, de manière actuelle. Claudine Dardy en particulier donne un point de vue socio-ethnologique et considère tout le parcours de thèse comme un « parcours initiatique », en lui appliquant le concept de rite hérité d'études ethnologiques [30]. Néanmoins, s'il y a un « rite », celui-ci demande à être inscrit dans le contexte de son élaboration, à être historicisé ; ce que la thèse de Leloup nous permet de faire pour la période plus large de la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle, en spécifiant les singularités du contexte de la guerre propres au cas de Schwartz. C'est ce contexte notamment qui fait dire à Schwartz qu'il a soutenu sa thèse « in extremis » [Schwartz 1997, p.174] désigne non le retard dans la soutenance, mais le contexte de chasse aux Juifs qui l'oblige à passer dans la clandestinité avec sa femme, dès sa thèse soutenue en janvier 1943 [31] Schwartz évoque à demi-mots le contexte particulier à la guerre à la fin de son introduction, pour s'excuser de n'avoir pas toutes les références bibliographiques :

> D'une façon générale, et en particulier en ce qui concerne cette note historique, nous nous excusons d'avance des lacunes ou des erreurs bibliographiques qui ne peuvent manquer d'exister dans nos références ; nous avons dû travailler dans des conditions ne permettant pas une abondante documentation.
>
> [Schwartz 1943b, p.5-6]

Nous allons donc nous saisir de l'« objet thèse » de Schwartz et en faire l'étude en considérant les différents aspects collectifs. Schwartz s'est formé à l'École normale, et il rédige sa thèse à Clermont-Ferrand et la soutient ensuite. L'étude de sa thèse d'État, c'est-à-dire du mémoire qu'il publie, ainsi que du rapport que Delsarte écrit sur la thèse nous permet à la fois d'aborder le contexte de publication ainsi que de mettre en évidence certains aspects de la formation mathématique de Schwartz. C'est ainsi l'occasion de formuler la question de l'influence que Bourbaki a eue sur Schwartz en ces toutes premières années. Cela permet donc d'aborder la rencontre de Schwartz avec Bourbaki sous l'angle de la « conjonction » : qu'est-ce que Bourbaki apporte à la formation mathématique de Schwartz ?

Considérer la thèse comme un marqueur objectif de la rencontre de Schwartz avec la vie collective des mathématiques permet de voir que Schwartz, sa personne et son récit, tendent à disparaître derrière les aspects collectifs qui apparaissent – rapport sur sa thèse, publication, réception, influence de Bourbaki – que nous présentons.

30. Elle écrit ainsi : [Dardy, Ducard et Maingueneau 2002, p.27] « Dans notre exemple, celui de l'enseignement supérieur, le "cher collègue" est le plus souvent pour les enseignants-chercheurs celui qui a subi la même épreuve initiatique celle de la thèse. » et précise :

> Le concept de rite paraît devoir être pertinent appliqué non seulement à la thèse et à sa soutenance mais à ce que nous avons appelé le parcours de thèse.
>
> On peut appréhender le parcours de thèse tout entier comme un rite d'initiation au monde universitaire, comme apprentissage progressif et maîtrisé des signes d'appartenance à ce milieu, parcours de socialisation donc.
>
> (...) Le concept de rite semble opératoire pour rendre compte de la soutenance, mais il est peut-être applicable au parcours de la thèse pour en souligner la dimension socialisatrice, encore faut-il l'accomoder à des sociétés dominées par la culture écrite.
>
> [Dardy, Ducard et Maingueneau 2002, p.28]

31. Car il soutient parmi les premiers de ses camarades de promotion. Ainsi Gustave Choquet ne soutient sa thèse qu'en 1946, André Blanc-Lapierre en 1944 ; par exemple.

1.3.1 Un rapport sur la thèse de Schwartz

L'ouvrage déjà mentionné sur le rapport de soutenance de thèse fait « l'hypothèse que le rapport de soutenance de thèse constitue un genre spécifique » [Dardy, Ducard et Maingueneau 2002, p.25]. La méthode est précisée un peu plus loin :

> L'intention est donc de caractériser le rapport de soutenance de thèse comme genre après l'avoir identifié comme un révélateur du fonctionnement d'une communauté universitaire qui conforte son existence dans les pratiques de lecture et d'écriture qu'elle déploie à son propos.
>
> [Dardy, Ducard et Maingueneau 2002, p.30]

Le rapport dont je vais parler n'est pas à proprement parler le rapport de soutenance de la thèse de Schwartz, mais vraisemblablement un rapport pour le CNRS, écrit par Jean Delsarte et conservé dans ses archives [32]. Néanmoins, il fait partie du même « genre universitaire ». Dans [Dardy, Ducard et Maingueneau 2002, p.30], « Les sciences dite exactes, dites naturelles, dures, sèches et diront certains par autodérision, inhumaines, on été écartées. », car « La thèse y semblait plus le produit d'un laboratoire, d'une équipe de recherche, qu'une œuvre individuelle, dès lors, le rapport de soutenance de thèse paraissait moins déterminant pour le candidat que la possibilité en soi de faire une thèse dépendant des modalités d'intégration à une équipe et de la renommée de celle-ci. » Ce paragraphe est assez surprenant, et ne semble pas correspondre à une réalité en mathématiques, du moins à l'époque. Le travail de Leloup [Leloup 2009, p.63 ;66-73] étudie tout le corpus des thèses et de leurs rapports (aussi bien rapport de thèse que rapport de soutenance). Elle précise notamment que « le corpus des rapports de thèse joue ici un rôle particulier. Il permet de saisir des influences intellectuelles, des échanges intellectuels entre les mathématiciens confirmés et les mathématiciens débutants que sont les doctorants. ». Elle étudie aussi la manière dont les travaux sont évalués dans les rapports (la question de la nouveauté de certains résultats, la qualification d'« exceptionnels » pour certains doctorants ou bien d'« excellentes » ou « remarquables » pour certaines thèse. Le rapport n'est certainement pas déshumanisé. Ainsi qu'elle le précise pour le cas particulier des thèses de mécanique et physique mathématique, les rapport se font l'« écho de débats épistémologiques qui ont animé le milieu mathématique français de l'époque ». Il semble donc, contrairement à ce qui est suggéré par la citation de [Dardy, Ducard et Maingueneau 2002], que les rapports concernant les thèses de mathématiques soient très fortement concernés par la vie collective des mathématiques en même temps qu'ils mettent l'accent sur la nouveauté et la qualité des résultats individuels mis en évidence par le doctorant.

Nous allons lire le rapport écrit par Delsarte sur la thèse de Schwartz en regardant ce qu'ils indiquent sur son insertion dans la vie collective des mathématiques. Delsarte écrit son rapport en juin 1942, alors que Schwartz est boursier du C.N.R.S. (attaché de recherches de septembre 1940 à décembre 1942, indique-t-il dans son curriculum vitae déposé à l'Académie des Sciences) [33]. Voici le rapport en question :

> Université de Nancy.
> Nancy, le 2 juin 1942.
>
> RAPPORT SUR M. Laurent SCHWARTZ.
>
> M. Schwartz s'est occupé des questions d'approximation polynomiale se rattachant au problème de la détermination d'ensembles partout denses dans les espaces fonctionnels, et notamment aux théorèmes des Weierstrass et Müntz. Il a pu obtenir sous des

32. Archives Delsarte, DIV 01-3 SUPERIEUR cote 2156
33. Archives de l'Académie des Sciences, Fonds Laurent Schwartz.

formes très simples des conditions nécessaires et suffisantes de totalité pour une suite dénombrable de puissances de la variable ; il a pu aussi, dans le cas de la non totalité, définir de façon aussi simple qu'inattendue, la variété fonctionnelle engendrée par cette suite.

Ces résultats, très complets et très nouveaux, et relatifs à une question fort difficile, sont la preuve d'une ingéniosité et d'une habileté technique remarquable. M. Schwartz possède les connaissances les plus étendues dans les parties les plus diverses des mathématiques, et il a su les combiner avec une maîtrise étonnante chez un mathématicien si jeune.

La Commission estime que le cas de M. Schwartz doit être retenu en vue d'une des dérogations prévues par l'article 8 de la loi du 2 juin 1941. Ce jeune savant a en effet devant lui une carrière mathématiques des plus brillantes.

Le Rapporteur désigné par la commission.

Delsarte (signature)
Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

Le rapport est composé de trois parties. La première partie décrit les résultats obtenus, qui s'inscrivent dans des questions d'approximation polynomiale, et fait référence à deux théorèmes d'analyse relatifs à des approximations polynomiales de fonctions, celui de Weierstrass et une généralisation par Müntz. Il s'agit de résultats anciens (milieu XIX$^{\text{ème}}$ et début XX$^{\text{ème}}$ et bien connus [34]. La seconde partie du rapport comporte l'évaluation individuelle à la fois de la thèse et du doctorant, et en présente les principales qualités. On peut voir ici apparaître une deuxième influence intellectuelle, en plus de celle de l'analyse (théorie des fonctions) qui est présente dans la première partie, mais uniquement de manière implicite, lorsqu'il est fait mention de connaissances de Schwartz « dans les parties les plus diverses des mathématiques » : il ne s'agit pas uniquement de théorie des fonctions ; nous en reparlons plus loin. La troisième partie est plus inhabituelle, car elle fait référence aux « dérogations prévues par l'article 8 de la loi du 2 juin 1941 ». Cette mention explicite au contexte très spécifique dans lequel est soutenue la thèse de Schwartz est très certainement l'écho de débats qui ont animé la communauté à l'époque, dans un cas très particulier.

Le 2 avril 1942, Delsarte reçoit en effet, en tant que membre d'une commission consultative du C.N.R.S., une circulaire du directeur du C.N.R.S., qui est à l'époque Charles Jacob [35]. Cette circulaire précise notamment le rôle des commissions consultatives, qui ont été nommées en 1941 et 1942 [36]. Ces commissions s'occupent des demandes de renouvellement ou de nouvelle attribution d'allocations, ainsi que des demandes de bourse ou subvention. Une partie de cette circulaire concerne des éventuelles dérogations relatives à l'article 8 de la loi du 2 juin 1941. Il s'agit de la deuxième loi sur le statut des juifs, et l'article 8 envisage des dérogations à l'interdiction d'exercer certaines professions :

Art. 8. – Peuvent être relevés des interdictions prévues par la présente loi, les juifs :
1° Qui ont rendu à l'État français des services exceptionnels ;

34. Dans l'introduction de sa thèse, Schwartz ne donne aucune référence pour le théorème de Weierstrass, mais indique la référence de Müntz [Müntz 1914]. Il rappelle l'énoncé suivant du théorème de Weierstrass : *Toute fonction continue $f(x)$ sur un intervalle réel fermé $[a, b]$ peut, quelque soit $\varepsilon > 0$, être approchée à moins d'ε par un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.*

35. Pour l'histoire du C.N.R.S., on peut consulter les *Cahiers pour l'histoire du C.N.R.S.*.

36. On peut voir dans les archives Delsarte un extrait du Journal Officiel du 1er février 1942 donnant notamment la liste de ses membres : pour celle de mathématiques et mécanique analytique, il s'agit de Cartan, Delsarte, Dubreil, Garnier, Julia et Montel. Les commissions consultatives sont crées par arrêté le 21 octobre 1941 par Jérôme Carcopino, qui est alors secrétaire d'état à l'Education Nationale et à la Jeunesse. Concernant Jérôme Carcopino et les lois d'exclusion, on pourra lire [Corcy-Debray 2002]. Voir les Archives Delsarte, Institut Elie Cartan, Nancy, cotes 2151, 2152.

> 2° Dont la famille est établie en France depuis au moins cinq générations et a rendu à l'Etat français des services exceptionnels.
>
> Pour les interdictions prévues par l'article 2, la décision est prise par décret individuel pris en conseil d'Etat sur rapport du commissaire général aux questions juives et contresigné par le secrétaire d'État intéressé.
>
> Pour les autres interdictions, la décision est prise par arrêté du commissaire général aux questions juives.
>
> Le décret ou l'arrêté doivent être dûment motivés.
>
> Les dérogations accordées en vertu des dispositions qui précèdent n'ont qu'un caractère personnel et ne créeront aucun droit en faveur des ascendants, descendants, conjoint et collatéraux des bénéficiaires.
>
> [*Journal Officiel*-2 juin 1941]

Voici l'extrait en question de la circulaire :

> Je dois enfin attirer l'attention de M.M. les Recteurs, Doyens, Directoires de Laboratoires et Chercheurs, sur les conditions spéciales dans lesquelles les lois en vigueur placent les non aryens, les dignitaires des Sociétés Secrètes, et les étrangers, naturalisés ou fils d'étranger.
>
> Pour les non aryens, le Commissariat général aux questions juives est formel. Le Centre ne peut pas payer sur ses crédits des non aryens qui ne remplissent pas les conditions de l'article 3 de la loi du 2 juillet 1941.
>
> Le même Commissariat envisage qu'en vertu de l'article 8 de la même loi quelques dérogations pourraient être accordées par lui, sur proposition nominative adressée par le Directeur du Centre National. Celui-ci consultera à cet effet les Commissions qui se réuniront en juin. Mais si l'on peut espérer avoir des dérogations pour les allocations des chercheurs, le Commissariat aux questions juives est formel, quant aux aides-techniques, au sujet desquels il n'admettra pas de dérogations.
>
> En ce qui concerne les chercheurs atteints par la loi sur les Sociétés Secrètes, Monsieur le Secrétaire d'Etat à l'Education Nationale et à la Jeunesse est d'avis que, dans chaque cas particulier, devront être examinés les titres scientifiques réels des intéressés, qui ne pourront être admis ou conservés que si leur concours à la Recherche Scientifique s'avère d'une qualité exceptionnelle. A ce sujet encore les Commissions auront à donner leur avis.
>
> Enfin, pour les étrangers, naturalisés et fils d'étranger, la procédure reste à préciser. En tout état de cause, chaque cas particulier sera soumis aux commissions, puis transmis pour décision, à Monsieur le Secrétaire d'Etat à l'Education Nationale et à la Jeunesse [37].

A la lecture des demandes d'allocation, on peut constater que Schwartz n'est pas dans la liste des boursiers et allocataires de recherche pour l'année 1942-43. Cela confirme ce qu'il indique dans son curriculum vitae conservé à l'Académie des Sciences [38] : il est attaché de recherches au C.N.R.S. [39] de septembre 1940 à décembre 1942, il soutient sa thèse le 9 janvier 1943 à Paris, puis touche une « bourse de l'aide à la recherche scientifique » [40] de janvier 1943 jusqu'à septembre 1944 [41]. Le rapport rédigé par Delsarte en juin 1942 demande [42], conformément aux consignes reçues dans la circulaire, de le faire bénéficier d'une dérogation prévue par l'article 8.

37. Archives Delsarte, cote 2150
38. Archives de l'Académie des Sciences, Fonds Laurent Schwartz
39. Je n'ai pas trouvé trace de son dossier aux Archives du C.N.R.S. à Gif sur Yvette
40. Je n'ai pas réussi à retrouver l'origine de cette bourse.
41. En mai 1943, Schwartz est effectivement présenté comme « ex-boursier, DIV 01-3 65, » Archives Delsarte. Il est difficile de retracer les financements de Schwartz pendant la guerre. Toujours sur sur son Curriculum Vitae, il indique ensuite avoir été chargé de recherches au C.N.R.S. cette fois, de juillet 1944 à novembre 1944 ; avant d'être chargé de cours à Grenoble ; puis chargé de cours puis maître de conférences à Nancy (décembre 1945).
42. Archives Delsarte, cote 2156,2157

Malheureusement, il semble que cela n'ait pas suffi ! Schwartz restera caché avec sa femme, le restant de la guerre dans le Vercors. Il raconte dans son autobiographie [Schwartz 1997] qu'ils vivent dans la clandestinité, et prennent le nom de Sélimartin. Claudine Schwartz, sa fille, nous montre deux documents – sa carte d'identité ainsi qu'une carte de ravitaillement – au nom de Laurent Sélimartin [Schwartz 2007].

1.3.2 Publication

Schwartz demande au C.N.R.S. une subvention pour publier sa thèse, qui apparaît à la session de la commission consultative de mai 1943 [43]. Je ne sais pas si celle-ci a été acceptée (le document mentionne dans la colonne « accordé » la somme de 10 000 Francs, mais c'est écrit au crayon) ; Schwartz écrit quant à lui [Schwartz 1997, p.175] qu'il n'a pu publier sa thèse que grâce à la générosité de son père ; étant donné la somme énorme que cela représente pour lui à l'époque (il parle de 23 000 Francs, et la subvention demandée au C.N.R.S. est de 23 255 Francs). Le C.N.R.S. a peut-être perdu sa trace, suite à son passage dans la clandestinité début 1943 [44].

La thèse paraît finalement aux « Publications mathématiques de l'Institut Mathématique de Strasbourg », qui fait partie de la collection « Actualités scientifiques et industrielles » publiées par Hermann à Paris [Schwartz 1943b]. Nous reparlerons un peu plus loin de ces publications. Schwartz n'y fait paraître que les deux premiers chapitres de sa thèse. Cela est noté par Leloup, qui étudie la taille de la thèse, qui semble déterminée par la parution du mémoire. Le troisième chapitre, initialement contenu dans le travail de thèse, paraît aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* [Schwartz 1943a].

La collection des Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg (1938-1951) Il n'est pas anodin que Schwartz publie sa thèse, et plus tard son traité sur les distributions, dans la collection des *Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Strasbourg*. Concernant les premiers volumes, la collection semble en effet très bourbakiste.

Il est précisé que « Sur les fascicules III, IV et V, le nom de Strasbourg a été remplacé par celui de Clermont-Ferrand, lieu de repliement de l'Université de Strasbourg pendant la guerre de 1939-1945. » Ces publications font partie de la collection Actualités scientifiques et industrielles, de l'éditeur Hermann, Paris (chez qui Bourbaki édite tous les premiers tomes des *Éléments de mathématique*).

La correspondance entre Cartan et Weil nous éclaire un peu sur les délais de publication très critiqués par Weil notamment, qui en vient à regretter de ne pas avoir donné ses textes à un autre éditeur [45] [46].

1.3.3 Contenu et réception de la thèse

Que contient donc la « belle thèse sur l'approximation des fonction par des $e^{\lambda_n x}$ » de Schwartz ? Ainsi est-elle qualifiée par Cartan en 1944 dans une lettre à Weil [47].

43. Archives Delsarte, 2164

44. À titre de comparaison, l'un des dossiers scientifiques consultés aux Archives du C.N.R.S., concernant un Normalien de la promotion 1940, mathématicien, mentionne la bourse obtenue comme stagiaire au C.N.R.S. : elle est d'un montant de 30 000 Francs en 1944.

45. [Audin 2011]

46. Il serait intéressant de consulter les Archives Hermann-Bourbaki à la Bibliothèque Nationale de France, ainsi que l'annonce un communiqué de presse du 12 novembre 2012.

47. La correspondance entre André Weil et Henri Cartan a été éditée et commentée par Michèle Audin [Audin 2011].

Tome I (1938) André WEIL. Sur les Espaces à Structure uniforme et sur la Topologie générale.

Tome II (1937) C. DE LA VALLÉE POUSSIN. Les nouvelles Méthodes de la Théorie du Potentiel et le Problème généralisé de DIRICHLET.

Tome III (1940) Henri CARTAN. Sur les Classes des Fonctions définies par des Inégalités portant sur leurs Dérivées successives.

Tome IV André WEIL. (1940) L'intégration dans les Groupes topologiques et ses Applications.

Tome V (1943) Laurent SCHWARTZ. Étude des Sommes d'Exponentielles réelles.

Tome VI (1948) J. DIEUDONNÉ. Sur les Groupes classiques.

Tome VII (1948) André WEIL. Sur les Courbes algébriques et les Variétés qui s'en déduisent.

Tome VIII (1948) André WEIL. Variétés abéliennes et Courbes algébriques.

Tome IX (1950) L. SCHWARTZ. Théorie des distributions (Tome I)

Tome X (1951) L. SCHWARTZ. Théorie des distributions (Tome II)

FIGURE 1.1 – Collection des Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg (1938-1953)

Ainsi que le suppose Leloup, la formation reçue par le doctorant se retrouve dans l'écriture de son mémoire. On peut voir dans celle de Schwartz l'influence de Valiron, rapporteur de la thèse. Leloup explicite le rôle de Valiron comme rapporteur des thèses de théorie des fonctions après 1933 [Leloup 2009, p.343-344]. Schwartz le remercie ainsi dans son introduction :

> Je tiens à remercier tout particulièrement M. Georges VALIRON qui, non seulement m'a donné de nombreux conseils, mais encore, par la correspondance qu'il a bien voulu entretenir avec moi, m'a aidé à surmonter beaucoup de difficultés.

Leloup analyse la thèse de Schwartz comme faisant partie des thèses de théorie des fonctions de la variable réelle [Leloup 2009, p.90], et en décrit le contenu de la sorte : « Il y étudie des questions concernant l'approximation de fonctions continues sur $[0; +\infty]$ par des polynômes de Dirichlet de la forme $P(X) = \sum a_n e^{2\pi\lambda_n X}$ dans le cas où la série $\sum_{n>0} \frac{1}{\lambda_n}$ converge. Il y regarde également des questions d'extrêmalités de coefficients de polynômes de Dirichlet bornés sur $[0; +\infty]$. » Ainsi qu'elle le note, Schwartz résume lui-même dans sa biographie [Schwartz 1997, p.175] l'essentiel de son travail en ces termes : « une application pertinente de l'analyse fonctionnelle et des espaces vectoriels topologiques pour un problème classique d'analyse. » Car l'écriture de Schwartz doit aussi à l'influence de Dieudonné, de ses cours qu'il a suivis à Clermont-Ferrand, et plus généralement à Bourbaki dans son ensemble.

Précisons tout d'abord le problème d'analyse qui est l'objet de la thèse. Ainsi que Schwartz le résume dans sa « Notice » exposant ses travaux lors de sa candidature à l'Académie des Sciences [Schwartz 1981b], le résultat principal de son premier chapitre poursuit une généralisation, par Charles Müntz, du théorème d'approximation de Weierstrass. Le théorème de Müntz dit la chose suivante :

> Soit $\Lambda : \lambda_0 = 0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ une suite donnée de nombres réels $\leqslant 0$. Alors toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme de polynômes généralisés (sommes finies $\sum a_n x^{\lambda_n}$, $\lambda_n \in \Lambda$) si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ diverge.

La thèse de Schwartz répond à la question suivante :

> Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ converge, quelles sont les fonctions continues qui peuvent être approchées par les polynômes précédents ?

Schwartz commence par effectuer le changement de variable $x = \exp(-X)$, afin de se ramener à un problème « plus maniable sur des sommes d'exponentielles réelles », qui justifie le titre de sa thèse. Il redémontre d'ailleurs aussi le théorème de Müntz de cette manière, avant de donner ses résultats. Le second chapitre traite plus généralement de problèmes d'approximation et de conditions extrémales. Le chapitre 3 traite les « sommes d'exponentielles imaginaires » ; il concerne ainsi les séries de Fourier généralisées, et donne par la suite naissance à des travaux ultérieurs dont nous dirons un mot plus lion.

Même si l'énoncé du problème à l'origine de la thèse de Schwartz appartient à la théorie des fonctions, ses méthodes doivent néanmoins beaucoup à l'analyse fonctionnelle, ainsi que l'exprime la citation donnée au-dessus. Il n'est pas le premier à utiliser l'analyse fonctionnelle dans un tel cadre. Schwartz écrit ainsi dans le dernier paragraphe de son chapitre III, intitulé « Note sur les applications à la Théorie des fonctions analytiques » :

> L'origine de toutes les recherches concernant les distributions de points singuliers d'une série de Taylor ou de Dirichlet sur la frontière de son domaine de convergence est la thèse de M. Hadamard. (...)
>
> Dans tous les ouvrages précédents, aucune liaison n'existe entre la théorie des séries de Dirichlet et l'analyse fonctionnelle ; aucun des auteurs précédents n'a donné d'inégalités valables pour toutes les fonctions correspondant à une suite d'exposants donnés. (...)
>
> C'est dans l'ouvrage de MM. Paley-Wiener (1934), ouvrage d'analyse fonctionnelle, qu'existe pour la première fois à notre connaissance cette liaison entre les deux théories.
>
> [Schwartz 1943a, p.171-173]

Schwartz commence donc de par de nombreux rappels d'analyse fonctionnelle – cela est noté dans la recension de la réédition de 1959 [Schwartz 1959] [48]. Il y a ainsi des préliminaires rappelant quelques notions de dualité et d'espaces vectoriels topologiques, qu'il a appris à l'occasion des cours de Dieudonné à Clermont-Ferrand. Il est important de mentionner qu'il était familier avec la dualité dès sa thèse ; étant donné le rôle que va jouer la dualité dans sa définition des distributions quelques années plus tard. Nous allons analyser plus précisément ces rappels à la lumière de ses premiers pas avec Bourbaki dans la sous-section suivante.

Un mot tout d'abord sur la réception de sa thèse. En 1959, la thèse de Schwartz ainsi que le chapitre supplémentaire, le troisième, intitulé « Approximation d'un fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires. » [Schwartz 1943a] sont réédités en un seul volume [Schwartz 1959]. Cela donne lieu à une nouvelle recension dans les *Mathematical reviews*, par P. Koosis. Il précise tout d'abord que le travail a été publié pendant la guerre, et n'est que difficilement accessible, d'où la seconde édition. Pour lui, « it occupies an important place in a certain recent development of harmonic analysis ». Il y explique la technique générale de Schwartz consistant en une utilisation simultanée des principes de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des fonctions analytiques de type exponentiel.

Schwartz précise les directions dans lesquelles ses résultats sont utilisés ensuite :

48.

> These two chapters contain introductory paragraphs setting forth, sometimes with proofs, the functionnal analysis, Fourier transform theory, and entire function theory used in the book.
>
> [Koosis 1959]

> Ces articles ont donné naissance à plusieurs travaux ultérieurs, d'autres mathématiciens et de moi-même, sur les fonctions moyenne-périodiques et l'analyse ou la synthèse harmonique. Ils donnent une convergence de développements suivant des harmoniques dont les fréquences sont distribuées un peu n'importe quand, ce qui est le cas de tous les systèmes vibratoires non périodiques ; donc ils pourraient être susceptibles d'applications physiques.
>
> [Schwartz 1981b, p.21]

Sa thèse a notamment donné lieu ensuite à une note et un mémoire sur les fonctions moyenne-périodiques [Schwartz 1946], [Schwartz 1949c] :

> Les résultats de M. Delsarte sont entièrement à l'origine de ce mémoire. J'ai essayé d'appliquer les théorèmes que j'avais démontrés sur les sommes d'exponentielles (...) à l'étude de l'équation (2) dans le cas général.
>
> [Schwartz 1949c, p.849]

Schwartz s'est aussi intéressé, un peu plus tard, à l'analyse et à la synthèse harmonique dans divers espaces ; on peut mentionner notamment [Schwartz 1948b], et [Whitney 1948], qui répond à une question non résolue par Schwartz [Schwartz 1981b, p.22].

La recension très laudative de Koosis se termine par les mots suivants :

> The book present a beautiful model of a scientific investigation, and is a joy to read. It should be read not only by those interested in harmonic analysis or Dirichlet series, but also by ordinary graduate students, in order that they may learn good mathematical style and have something to balance the abstractionistic influences to which they are subjected.
>
> [Koosis 1959]

Qu'entend-il par ces influences abstractionistes auxquels sont soumis les étudiants et auxquelles cette rédaction de Schwartz offre un autre modèle ? Difficile, en 1959, de ne pas y voir une référence implicite au style de Bourbaki. Pourtant, Schwartz est membre de Bourbaki quand il rédige sa thèse, et nous savons l'importance de cette rencontre pour lui. Nous allons regarder plus précisément l'influence éventuelle de Bourbaki sur la thèse de Schwartz.

1.3.4 Une thèse et Bourbaki

Ainsi que le témoigne la correspondance entre Henri Cartan et André Weil, Bourbaki se tient au courant des travaux mathématiques et de la carrière de Schwartz :

> Schwartz, après sa belle thèse sur l'approximation des fonctions par des $e^{\lambda_n x}$ et une retraite forcée en Dauphiné, est venu s'installer à Paris comme boursier, mais vient malheureusement d'être nommé à Grenoble (comme suppléant), ce qui va l'obliger à partir au début de janvier.
>
> [Audin 2011, Lettre du 10 décembre 1944]

Mais qu'est-ce que la rencontre avec Bourbaki a appris à Schwartz ? Un examen de sa thèse permet de juger des premières conséquences de la rencontre de Schwartz avec Bourbaki, de l'impact que Bourbaki a sur ses connaissances mathématiques.

On peut regarder les références qui sont faites à Bourbaki, en tant que collectif de mathématiciens, ainsi qu'à ses travaux mathématiques. Tout d'abord, Schwartz remercie Bourbaki dans son introduction :

> Je veux enfin exprimer ma reconnaissance (...) à M.N. BOURBAKI dont la forte personnalité a influencé grandement mes recherches récentes.
>
> [Schwartz 1943b, p.6]

Leloup examine dans sa thèse le statut et la forme des remerciements [Leloup 2009, p. 146-152]. Ainsi, en addition aux remerciements formels, peuvent apparaître d'autres remerciements, qui sont « la marque de l'appartenance à un réseau de mathématiciens dans lequel s'inscrit le doctorant. », la marque « du processus de sociabilisation du doctorant envers le milieu qu'il cherche à intégrer. » Concernant le cas particulier des références à Bourbaki, Leloup précise que cela montre l'influence de Strasbourg comme pôle mathématique :

> On peut remarquer qu'on ne perçoit pas encore pendant l'entre-deux-guerres l'influence des premiers doctorants parisiens des années 1920 nommés par la suite maîtres de conférences ou professeurs à Strasbourg et qui sont devenus membres du groupe Bourbaki, tels Henri Cartan nommé dès 1931 à la faculté des sciences de Strasbourg puis Jean Dieudonné, André Weil, et Charles Ehresmann. Il faut en fait attendre la seconde guerre mondiale pour que des soutenances de doctorats d'État témoignent d'un renouveau de l'activité de la recherche mathématique à la faculté de Strasbourg, qui ne soit pas artificiellement le fait d'une volonté de mathématiciens parisiens. Ils portent alors la marque d'une influence des membres de Bourbaki. La thèse de Laurent Schwartz soutenue en 1943 en est un exemple. En conclusion à l'introduction de sa thèse, *Étude des sommes d'exponentielles réelles*, il remercie ainsi explicitement « N. Bourbaki dont la forte personnalité a influencé grandement [ses] recherches récentes ». Un second doctorat auraît également dû être soutenu pendant le conflit à la faculté des sciences de Strasbourg : celui de Feldbau, qui travaillait auprès de Charles Ehresmann sur les espaces fibrés. Mais Feldbau est pris dans une rafle dans le courant de 1943 et meurt en camp de concentration.
>
> [Leloup 2009, p.115]

Schwartz se réfère aux volumes de Bourbaki qui sont parus avant 1942, à savoir *Théorie des ensembles (Fascicule de résultats)* en 1939 ainsi que *Topologie générale Chapitres I, II* en 1940. Ces ouvrages sont dans sa bibliographie. À ma connaissance, il est le premier à citer Bourbaki dans sa thèse. Dans les années qui suivent, on peut noter par exemple François Châtelet dans sa thèse en 1944 [Châtelet 1944, p.27], qui fait référence au chapitre 1 du libre II Structures algébriques (cité par [Leloup 2009, p.163]), ou encore Jean Braconnier qui cite les livres I, II et III de Bourbaki dans sa thèse « Sur les groupes topologiques localement compacts » en 1945 [Braconnier 1945] [49].

Schwartz fait aussi référence au chapitre III de Topologie générale, sans en donner une référence publiée (p.9). Ce chapitre paraît en avril 1942 avec le chapitre IV, mais est discuté lors du 2ème Congrès de Clermont, du 16 au 19 avril 1941, qui est le deuxième congrès auquel Schwartz est présent « comme chrysalide ». On en voit un compte-rendu dans *La Tribu* N˚6, en date du 1 Mai 1941 (p.2) [50] :

> Les journées des 16, 17, 18 Avril furent consacrées à l'ultime lecture des chap. III et IV de la Topologie générale.
>
> Le résultat essentiel, et c'est le point marquant du Congrès, est que les Nombres réels sont enfin adoptés.

49. Jean Braconnier soutient sa thèse le 16 juin 1945 à l'Université de Nancy. Henri Cartan, Delsarte et Dieudonné font partie du jury. Il justifie l'influence de Bourbaki sur le fond et sur la forme dans son introduction :

> Sur un plan plus général, les travaux récents de N Bourbaki sur les structures fondamentales de l'analyse mathématique m'ont fourni un moyen d'exposition et de recherche d'une grande puissance. Conformément aux principes de cet auteur, j'ai essayé de donner à ce travail une solide armature logique, par l'emploi de la méthode axiomatique, de la notion de structure, par la présentation des faits sous forme de définitions, propositions et théorèmes.
>
> [Braconnier 1945, p.5-6]

50. Archives Bourbaki, nbt_ 07.

> Aucune modification d'ordre ne fut apportée à ces chapitres, mais de nombreuses petites modifications de détail, portant le plus souvent sur la rédaction, quelquefois sur de petits perfectionnements de démonstration. Il ne peut être question de les reproduire ici. Disons seulement que l'impression générale est nettement favorable. Malgré le puissant ennui dégagé par le sujet même, ennui que nous connaissons trop, il est hors de doute que la rédaction à laquelle nous nous sommes arrêtés constitue un très sensible progrès sur les rédactions publiées antérieurement, tant au point de vue de la brièveté qu'au point de vue de l'efficience des méthodes utilisées. , dont nous allons reparler.

On remarque l'ironie présente dans ce passage. Le style de *La Tribu*, très particulier, est l'une des marques de Bourbaki. Liliane Beaulieu analyse les « jeux d'esprit et jeux de mémoire » mis en place par le groupe, hérités de leur passage à l'École normale [Beaulieu 1998]. Elle décrit en particulier *La Tribu*, comme « chronique humoristique de Bourbaki » [Beaulieu 1989, p.77-90].

Les références précises (renvoyant à un théorème) ou générales (pour toutes les notions de topologie) mises à part, Schwartz explicite aussi la notion de filtre ainsi qu'une notation de Bourbaki qu'il utilise. Il précise ainsi dans son paragraphe sur les espaces vectoriels topologiques (p. 10) que « La limite doit être entendue ici dans un sens absolument générale, j peut être un indice entier tendant vers $+\infty$, ou une variable continue tendant vers une limite. Ce peut être enfin une limite suivant un filtre quelconque. » et renvoie au paragraphe correspondant dans le traité de Bourbaki. Il précise enfin :

> En ce qui concerne les inégalités, nous emploierons une fois pour toutes les notations de N. BOURBAKI (...) :
>
> $\leqslant 0$ s'énonce positif
>
> > 0 s'énonce strictement positif.
>
> De même pour : croissant et strictement croissant ; à gauche et strictement à gauche, etc. La transformation de FOURIER de L^p dans $L^{p'}$ diminue les normes ; elle les diminue strictement pour $1 < p < 2$.
>
> [Schwartz 1943b, p.18, note 3]

Il y a ici encore un signe, celui de la publication chez Hermann, qui montre le lien de Schwartz à Bourbaki. Ainsi que la dénomination de « note historique » utilisée par Schwartz pour désigner son introduction, d'une forme assez classique dans une thèse, rappelant les travaux précédents sur le sujet et donnant quelques références biliographiques ; qui n'est pas sans rappeler les notes historiques des *Eléments de mathématique.* [51]

La recension de 1959 mentionne aussi la note historique du chapitre 3 :

> The historical paragraph at the end of Chapter III is very valuable, and shows the relationship of this theory to the theory of functions as a whole, indicating also its more recent developments, not included in the book. The bibliography goes up to 1957.
>
> [Koosis 1959]

Même si ce n'est pas à première vue dans le style utilisé, la marque de Bourbaki se retrouve donc dans le mémoire de thèse de Schwartz. Cela ne donne néanmoins que quelques aspects de l'interaction individu-collectif, créée par la rencontre de Schwartz avec Bourbaki, et surtout, cela ne montre que les effets qu'a cette rencontre sur Schwartz dans la rédaction de sa thèse. Il nous faut regarder aussi la réciproque. Pour cela, nous allons considérer une période de temps plus large, 1940-1953 (surtout 1945-1953, car Schwartz ne participe plus aux activités de Bourbaki à partir de janvier 1943, lorsqu'il se cache avec sa femme), et un objet précis : les distributions.

51. Pour plus de détails sur les notes historiques de Bourbaki et leur collection publiée sous la forme des *Éléments d'histoire des mathématiques*, voir [Paumier et Aubin À paraître.].

1.4 Les distributions chez Bourbaki comme illustration de l'interaction individu-collectif

C'est donc le troisième sens de la rencontre que l'on étudie ici : conjonction, adjonction, confrontation. Un individu, Schwartz, rencontre un collectif, Bourbaki. Comment étudier cette rencontre, cette confrontation ? Si Schwartz est rapidement inclus à l'intérieur de Bourbaki, cette conjonction est assortie d'une adjonction : Schwartz profite de l'expérience qu'il acquiert au sein de Bourbaki. L'on va enfin noter l'importance de la confrontation entre les intérêts mathématiques de Schwartz, les espaces vectoriels topologiques en lien avec ses distributions, avec le projet de Bourbaki, et plus particulièrement la rédaction du volume sur ces espaces vectoriels topologiques.

1.4.1 *La Tribu* : un reflet de l'activité de Bourbaki

Bourbaki, en tant que collectif, est le sujet de nombreuses études [52]. Les premières années sont décrites dans le travail pionnier de Liliane Beaulieu [Beaulieu 1989] et [Beaulieu 1993], dans lequel elle décrit « les objectifs originels du groupe, la situation de ses membres dans le champ mathématique français et les contenus de ses réunions » [Beaulieu 1998]. Ce dernier article décrit quant à lui les « jeux d'esprit et jeux de mémoire » internes au groupe ainsi que leur fonction. Elle affirme ainsi :

> Chez N. Bourbaki, les jeux d'esprit et les jeux de mémoire se combinent pour assurer la cohésion et constituer l'identité d'un collectif qui résiste délibérément à la mainmise du champ scientifique dans lequel il demeure inscrit malgré lui.

L'ironie et l'humour sont savamment utilisés, et déterminent une certaine « structure sociale de Bourbaki » [53].

On trouve donc dans les Archives de l'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki en ligne le journal de Bourbaki, *la Tribu*, pour les années 1940-1953. Cela permet de connaître les présences des différents membres aux congrès, l'ambiance des congrès (nombreux poèmes et anecdotes), les engagements pris, l'avancée générale et les plans successifs du traité, ainsi que les rédactions commentées. Ces rédactions sont elles aussi disponibles en ligne, et nous nous y référerons par moments même si nous n'en avons pas fait d'étude exhaustive. Certaines de ces rédactions, conservées ou rédigées par Schwartz, se trouvent aussi dans les Archives Schwartz. La correspondance entre Henri Cartan et André Weil, éditée par Michèle Audin [Audin 2011], permet d'éclairer et de donner vie à certain de ces documents. La vie collective apparaît au niveau des relations humaines internes au groupe – caractère des uns et des autres, jugement de travaux,discussion autour de postes à la Sorbonne par exemple –, mais aussi très localement dans les mathématiques qui sont discutées, ainsi que nous allons l'illustrer.

52. Liliane Beaulieu tient à jour une bibliographie exhaustive des travaux portant sur Bourbaki. On peut la trouver en ligne : $http : //poincare.univ - nancy2.fr/digitalAssets/190568_B - biblio - B - iii2013.pdf$ (Page consultée le 1 août 2013.)

53. Beaulieu écrit ainsi : :

> Ainsi, la prise de distance face à soi est-elle aussi nécessaire au collectif Bourbaki que l'auto-sacrifice de chaque rédacteur et ce sens de l'humour constitue une pratique d'incorporation, à plus ou moins brève échéance. En s'accordant à lui-même comme à tous ses membres le droit d'injurier n'importe qui, Bourbaki, en tant que groupe, dévalorise la compétence individuelle et favorise la solidarité collective. Le droit égal aux représailles l'emporte sur l'individualité au sein de cette élite égalitaire. [Beaulieu 1998, p.99-109]

Voici un extrait de *La Tribu* n°17, Compte-rendu du Congrès de Nicolaides (13-20 février 1949) [54] permettant de relater l'ambiance de ces Congrès :

> Là-dessus, malgré les critiques de Cartan et les fausses sorties de Dieudonné ("Mon gendre, tout est rompu..."),- malgré les propositions quasi-subversives de Chevalley et les sarcasmes désabusés de Delsarte, -malgré les contre-rédactions de Roger et la transformation de Laplace suspendue par Pisot au-dessus des équations différentielles,- malgré les distributions de Schwartz, le style de Godement et les erreurs de Samuel, - malgré l'effarement des cobayes et des les disputes des "Founding Fathers", -malgré le froid, la neige, les bancs inconfortables, -malgré les lumbagos, le café terminé et les tuyaux fuyants,-malgré tout BOURBAKI attaque le premier l'Analyse et l'Algèbre !

C'est d'abord au sein de textes de ce style qu'aparaissent les distributions de Schwartz chez Bourbaki : à l'occasion d'un récit imagé d'un congrès.

Rappelons en quelques mots le fonctionnement général de Bourbaki. Chaque sujet est confié à un rédacteur ; la rédaction est ensuite commentée et confiée pour réécriture à un autre rédacteur. On trouve ainsi de nombreux « états » successifs de rédaction d'un même texte, qui n'est publié que lorsque le dernier état donne satisfaction à l'ensemble du groupe. A partir de 1949, Compte-rendu du Congrès de la Réforme, (Paris, 2-8 octobre 1949) sont créés des Comités spécifiques [55] Des comités sont ainsi prévus notamment « les matins de séminaire ». On apprend ainsi que Schwartz fait partie du « Comité des espaces vectoriels topologiques (Chap. I et II) », avec Dieudonné, Godement et Serre. Nous allons examiner sur quelques exemples la place de Schwartz dans les différents Congrès Bourbaki, et plus explicitement la place de ses distributions que nous verrons comme un fil directeur.

Deux questions, miroirs l'une de l'autre, se posent : comment Bourbaki a-t-il formé Schwartz et influencé le contenu et le style de ses mathématiques ? Et réciproquement, peut-on réussir à pointer l'apport individuel de Schwartz dans l'œuvre collective de Bourbaki –que ce soit dans le contenu mathématique ou encore dans son mode fonctionnement ? Étudier la place des distributions va nous donner quelques éléments de réponse.

1.4.2 Les distributions en gestation

Bourbaki suit de près les travaux du jeune mathématicien Schwartz dès la guerre terminée. Ainsi, le 10 décembre 1944, Henri Cartan donne des nouvelles de certains membres de Bourbaki et de ses proches à André Weil, et lui raconte notamment les résultats en

54. Archives Bourbaki, *La Tribu* n°17, 15 mars 1949 nbt_ 019.
55. :

> Weil s'endormit, écœuré par les incessants déplacements de virgules, et, durant son sommeil, Bourbaki lui apparut en songe. A son réveil il se leva, et d'un voix tonitruante, harangua les fidèles et prêcha la Réforme : "En vérité je vous le dis ! Nous ne pouvons continuer à perdre tous notre temps sur des broutilles. Lorsque le contenu d'un chapitre devient plus stable, plus n'est besoin d'un Congrès pleinier pour en discuter les détails. Des comités restreints sont plus aptes pour ce labeur. Les Congrès n'examineront plus que les rapports et les premiers états".
>
> La foule applaudit ce projet. On décide de faire fonctionner le système avec la plus grande souplesse : le passage 'une rédaction du Congrès aux comités sera décidé dans chaque cas particulier ; chacun peut demander de s'adjoindre à un comité ; chaque comité, une fois son travail terminé, rédigera un rapport qui sera distribué à tous ; un délai suffisant pour que chaque membre puisse envoyer ses observations par écrit s'écoulera avec que les décisions du comité soient mises à exécution ; chacun est fondé à réclamer un nouvel examen du chapitre en Congrès, s'il juge que les décisions d'un comité dépassent trop les questions de pure rédaction. Cartan et Dieudonné ayant demandé d'être de tous les comités, il est décidé, par crainte d'enlisement, de leur adjoindre au moins un autre membre qui aura mission de mettre de l'huile dans les rouages.

Archives Bourbaki, nbt_ 021.

cours de Schwartz, ces travaux qui vont mener à la découverte des distributions un peu plus tard :

> Il est plein d'idées, notamment sur les opérateurs différentiels, et les solutions généralisées des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ce qui l'a amené à cette question, c'est le théorème très simple suivant : si une fonction numérique f, définie et continue dans un sous-ensemble ouvert A d'un espace numérique, n'est solution d'aucune équation aux dérivées partielles linéaire homogène à coefficients constants, ni limite uniforme (sur tout compact contenu dans A) de telles solutions, les transformées de f par translations et homothéties, telles que le transformé de A contienne un compact K donné, forment, sur K, un ensemble *total* (toute fonction continue sur K est limite uniforme de combinaisons linéaires finies de telles fonctions). C'est par là que Schwartz arrive à une démonstration générale d'un théorème de Deny et Choquet, démontré par eux dans le cas du plan : si une f (comme ci-dessus) n'est pas polyharmonique ($\Delta^p(f) = 0$), f et ses transformées par similitude forment, sur K, un ensemble total.
>
> [Audin 2011]

Le théorème de Deny et Choquet ainsi que le résultat de Schwartz qui sont mentionnés sont désignés par Schwartz de « déclencheur décisif » [Schwartz 1997, p.241-243] pour son « invention des distributions ». Lützen en donne aussi les détails [Lützen 1982] dans son livre sur la préhistoire de la théorie des distributions [56].

L'article de Choquet-Deny est intitulé « Sur quelques propriétés de moyenne caractérisques des fonctions harmoniques et polyharmoniques » qui paraît en 1944, et celui de Schwartz « Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues » [Schwartz 1944]. Schwartz a eu connaissance du texte de Choquet-Deny avant sa parution, et sa démonstration, qui généralise l'un des résultats paraît dans le même volume du *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Le manuscrit de Schwartz a été reçu le 31 octobre 1944, alors que celui de Choquet et Deny a été reçu le 4 juillet 1944. Choquet et Deny mentionnent les travaux de Schwartz à la fin de leur article, en addendum :

> *Addendum :* M. Laurent Schwartz auquel nous avons fait part de notre travail a pu compléter le théorème du paragraphe 18, valable dans l'espace à une ou deux dimensions, en l'étendant à l'espace cartésien à un nombre quelconque de dimensions.
>
> Sa méthode très élégante s'inspire d'une idée analogue à celle que nous signalons au paragraphe 21.
>
> Il a eu l'obligeance de vouloir bien nous permettre de donner ci-dessous sa démonstration.
>
> [Choquet et Deny 1944]

Précisons de quoi il s'agit. Schwartz commence par donner une définition de solution généralisée d'une équation aux dérivées partielles, exploitant ainsi l'idée suggérée au paragraphe 21 de l'article de Choquet-Deny. Choquet de Deny énoncent en effet un résultat en terme de fonction polyharmonique et précisent en conclusion que « l'intervention des fonctions polyharmoniques dans [leur] étude pouvait être prévue par analogie, en considérant une question relative aux équations aux dérivées partielles » [Choquet et Deny 1944, p.139]. Schwartz définit la solution généralisée d'une équation aux dérivées partielles quelconque :

> *Définition.* On dit qu'une fonction continue $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ est solution généralisée de l'équation aux dérivées partielles à coefficients constants non tous

56. Une discussion détaillée sur l'historiographie de la théorie des distributions fera l'objet du chapitre suivant.

> nuls (1)
>
> $$\sum_{p_1+p_2+...+p_n=m} a_{p_1,p_2,...,p_n} \frac{\partial^m U}{(\partial x_1)^{p_1}(\partial x_2)^{p_2})...(\partial x_n)^{p_n})} = 0$$
>
> si elle est limite uniforme sur tout compact de solutions vraies de cette équation.
> [Schwartz 1944, p.141]

Cela lui permet de traiter le cas de toutes les dimensions. En effet, ainsi qu'il le précise en exemple, si les solutions généralisées (au sens qu'il vient de définir) de l'équation de Laplace ($\Delta U = 0$) ou des fonctions polyharmoniques ($\Delta^k U = 0$) sont des solutions vraies, il n'en est pas de même dans le cas de deux dimensions où l'on a des solutions généralisées par exemple de l'équation hyperbolique $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ qui sont juste continues (de la forme $f(x+y)+g(x-y)$, $f$et$g$ continues), non nécessairement dérivables (et donc qui ne sont pas des solutions vraies). Il énonce ensuite son théorème :

> Pour que le système de fonctions continues
>
> $$U(\lambda x_1 + \xi_1, \lambda x_2 + \xi_2, ..., \lambda x_n + \xi_n)$$
>
> des variables $x_1, x_2, ..., x_n$ soit non fondamental sur un compact K de l'espace à n dimensions, lorsque λ et $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, prennent toutes les valeurs réelles possibles, il faut (et il suffit si l'intérieur de K n'est pas vide) que U soit solution généralisée d'au moins une équation aux dérivées partielles du type (1).

Il considère uniquement les translations et homothéties (Choquet et Deny considéraient toutes les similitudes) et obtient une solution généralisée d'une équation aux dérivées partielles arbitraire (et plus une fonction polyharmonique). Son résultat est valable en dimension quelconque. Plus que le résultat lui-même, ce qui nous intéresse est la méthode utilisée pour sa démonstration. Notons tout d'abord que Schwartz précise dans son autobiographie [Schwartz 1997, p. 241-243] que sa définition de solutions généralisées est celle déjà utilisée par Bôchner et qu'il ne connaissait pas ses travaux à l'époque.

La clef de la démonstration de Schwartz repose sur une régularisation, c'est-à-dire l'introduction d'une fonction $\rho(x_1, x_2, ..., x_n)$ nulle en dehors d'un compact arbitrairement petit de l'origine et indéfiniment dérivable, qu'il choisit d'intégrale 1 qui lui permet d'approcher sa solution généralisée U par V qui est en fait le produit de convolution [57] de U par ρ. Je ne vais pas ici retracer la préhistoire de la théorie des distributions, car cela a été fait dans l'ouvrage du même titre de Jesper Lützen [Lützen 1982]. Lützen revient sur les solutions généralisées, et précisément sur cet article de Schwartz [Lützen 1982, p.148-152]. On peut voir que la convolution et les régularisations continuent à jouer un grand rôle dans le traité de Schwartz *Théorie des distributions* paru en 1950 et 1951 [Schwartz 1950c], [Schwartz 1951d]. Dans sa thèse intitulée *L'émergence du couple local / global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux 1851-1953*, Renaud Chorlay revient sur le rôle des partitions de l'unité dans le traité de Schwartz [Chorlay 2007, p.757-758] et le « Principe de localisation » pour parler du support d'une distribution.

Plus spécifiquement, Schwartz donne un exemple de fonction servant à la régularisation [Schwartz 1950c, p.22] :

57. On ne parle alors pas encore de produit de convolution, mais de produit de composition (« Faltung » en allemand) ainsi qu'on peut le lire dans [Schwartz 1950c].

LEMME. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $\leqslant 0$ $\rho_\varepsilon(x) \in (\mathcal{D})$ dont le support est la boule $B_\varepsilon : r \leqslant \varepsilon$, qui est > 0 pour $r < \varepsilon$, et vérifie

$$\int\int ... \int \rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = +1$$

Il précise en note que « La régularisation est une application courante du produit de composition, qui sera étudiée en détail au chapitre VI pour les distributions » et fait référence à l'ouvrage d'André Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* [Weil 1940, Chapitre III]. Schwartz consacre en effet un chapitre au « produit de composition ». Le traité examine aussi un peu les « applications aux équations différentielles et aux dérivées partielles », ce qui sera plus spécifiquement le sujet de la thèse de Jacques-Louis Lions, étudiant de Schwartz à Nancy en 1954.

Les termes de « solutions généralisées », « opérateurs » sont en quelque sorte la première idée qui va amener Schwartz aux distributions -la deuxième étant la dualité ; ainsi qu'il le décrit dans son autobiographie, et que le mentionne Lützen dans son dernier chapitre « Schwartz' Creation of the theory of distributions ». C'est cette deuxième idée qui va être particulièrement reliée au développement des espaces vectoriels topologiques (EVT) auxquels nous allons nous intéresser maintenant.

1.4.3 Les distributions dans les *Éléments de mathématique* ? ou bien les EVT dans le traité de distributions ?

Grâce à *La Tribu* et à la correspondance entre Henri Cartan et André Weil [Audin 2011], nous pouvons suivre l'arrivée des distributions chez Bourbaki, et plus spécifiquement ses nécessités techniques en termes d'espaces vectoriels topologiques. C'est-à-dire que l'on peut percevoir l'interaction entre les mathématiques de Schwartz et celles de Bourbaki, et comprendre par là même ce que signifie véritablement cette « rencontre » entre un individu et un collectif. Cela ne remet pas en cause les différentes histoires conceptuelles concernant ce sujet. Ici, sans rentrer dans tous les détails concernant les espaces vectoriels topologiques, nous allons insister sur les aspects vivants de cette interaction, qui sont très présents dans la forme de récit laissé par Bourbaki.

Le 19 juillet 1946, Cartan écrit ainsi à Weil :

> A l'occasion du congrès Bourbaki, nous avons eu un certain nombre d'exposés fort intéressants. Schwartz nous a parlé pendant 4 heures de ses « distributions », qui ont fait de grands progrès depuis un an : les applications se présentent, par exemple pour les équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants (théorèmes communs au cas elliptique et au cas hyperbolique). Mais sans doute Dieudonné sait-il cela mieux que moi ?
> [Audin 2011, p.118]

Cartan décrit aussi les exposés de Delsarte et Chevalley : les congrès Bourbaki ne sont donc pas uniquement réservés à la rédaction du Traité ! Ce n'est pas la première fois que Schwartz expose ses distributions, puisqu'il les a enseignées à l'occasion du cours Peccot du Collège de France en 1946. En regardant un peu plus précisément leur intrusion dans *La Tribu* et dans les travaux de Bourbaki, on voit alors se construire en parallèle les outils techniques et les distributions elles-mêmes, c'est-à-dire plus précisément que la *Théorie des distributions* est rédigée en même temps que les espaces vectoriels topologiques sont discutés et rédigés au sein de Bourbaki ; en même temps aussi que se créent de nouveaux concepts – développement de la dualité, nouvelles topologies (Dieudonné, Schwartz, Grothendieck notamment). Nouvelles recherches, publication complète d'une théorie et rédaction d'un chapitre des *Eléments de mathématique* sont donc très largement entremêlés ici.

Bourbaki et les espaces vectoriels topologiques : histoire et création mathématique, tel est le titre d'un ouvrage à paraître, fruit d'un groupe de travail à Nancy autour de ce thème ; Jean-Pierre Ferrier a étudié dans son article « La dualité dans les EVT de Bourbaki : entre exposition et création » [58]. La notion de dualité est essentielle dans la théorie des distributions ; nous nous référons donc ici à cette étude. Ici, le choix est fait de se focaliser plus précisément sur les distributions, qui apparaissent à la fois comme une justification à l'« exposition » des EVT et un prétexte à la « création », afin de retracer certains aspects de la vie collective des mathématiques dans cette rencontre.

Regardons comment les distributions interviennent lorsque l'on fait une étude plus large de la dualité dans les EVT de Bourbaki. Ferrier écrit ainsi :

> Il ne faut pas regarder très longtemps les rédactions pour se rendre compte que l'orientation donnée au second volume des EVT de Bourbaki doit beaucoup à Schwartz et très peu à Grothendieck [59]. Jacques Dixmier l'a confirmé : Schwartz avait besoin d'un outil pour démontrer les théorèmes sur les distributions qu'il visait avec, en premier lieu, le théorème des noyaux. Accessoirement, il avait aussi besoin d'un cadre pour les énoncer. Jean-Louis Ovaert s'est montré encore plus catégorique : les EVT de Bourbaki sont issus des premiers séminaires Schwartz. [60]
>
> [Ferrier à paraître. p. 85]

Ferrier se penche ensuite spécifiquement sur le théorème des noyaux, sur lequel nous reviendrons dans un chapitre ultérieur. Il conclut son travail ainsi :

> Pour finir, retenons comme certain que des membres du groupe se sont passionnés pour la rédaction des EVT, que cette passion a gagné presque tout le monde et qu'elle s'est poursuivie au delà de l'édition de 1953-55. Que le projet a été l'occasion d'une extraordinaire aventure collective, précisément parce qu'il arrivait un peu tôt par rapport à la maturation du projet. Et c'est cette aventure qu'il est passionnant de tenter

58. Il décrit l'intérêt de son travail ainsi (p.1) :

> Il faut bien voir qu'avec ses EVT le groupe Bourbaki s'attaquait à un sujet pour lequel il lui a fallu beaucoup créer. Il n'a pas pu bénéficier du même recul que sur d'autres thèmes. Mais c'est précisément cela qui confère un intérêt hors du commun aux EVT pour étudier l'entreprise à laquelle s'est attaché le groupe. Et c'est particulièrement vrai à propos de la dualité.

et précise :

> Avec les diverses rédactions qui se sont suivies pour produire les premières éditions du livre, avec les échanges entre les membres du groupe qui sont relatés dans *La Tribu*, nous avons en effet la chance d'entrer dans la Science en gestation. À propos de la dualité, plus encore que dans d'autres chapitres, nous y trouvons à la fois des hésitations, un sens aigu de la critique, un esprit collectif et beaucoup d'enthousiasme, même de la part des algébristes du groupe.

Ainsi que l'écrit Ferrier [Ferrier à paraître. p.1], « le livre des EVT ne passe pas pour l'un des plus réussis de ceux qu'a produit Bourbaki. » On lui préfère généralement le cours de Grothendieck [Grothendieck 1954] issu du cours qu'il a donné à Sao Paulo.

59. Une courte visite de Grothendieck à un congrès Bourbaki est décrite dans *La Tribu* nbt-028 (Celles-sur-plaine, 8-16 mars 1952.)

> Désireux de surmonter la réticence de l'opposition, le Haut Commissariat tenta une manœuvre de chantage ; il fit venir Grothendieck ! On espérait effarer à tel point les Congressistes qu'ils seraient prêts à avaler tonneau sur tonneau par peur de subir une réaction Grothendieckienne. Mais les logiciens veillaient ; ils apprirent à Grothendieck que, si les ensembles vides sont égaux, certains du moins sont plus égaux que d'autres : le pauvre en devient fou furieux et rentra à Nancy par le premier train.

et analysée par Ferrier p.53-54

60. Il s'agit du séminaire Schwartz de Nancy ; nous le mentionnons dans le chapitre sur le séminaire. Dolbeault se rappelle y être allé, en alternance avec Lions. Ce séminaire avait lieu chaque samedi, à Nancy, et Dolbeault ou Lions étaient invité à déjeuner chez Schwartz avant le séminaire. Source : entretien avec Dolbeault, 4 mars 2013.

de comprendre. En tentant de redonner un peu d'éclat au message que Bourbaki a voulu nous transmettre.

Qu'en est-il plus spécifiquement des distributions ? Pour les notions plus précises de topologies et de dualité, nous renvoyons donc à [Ferrier à paraître.]. Lorsque paraissent en 1950 et 1951 la première édition de la *Théorie des distributions*, les volumes *Espaces vectoriels topologiques* des *Eléments de mathématiques* ne sont pas encore publiés (ils ne le seront qu'en 1953 pour les chapitre I et II, et 1955 pour les chapitres III et IV) ; Schwartz ne peut pas y faire référence.

Un plan en mouvement ; des poèmes

Commençons par étudier un premier marqueur de la place des distributions dans le projet de Bourbaki, à savoir celui du plan du Traité. Ce plan est révélateur des projets de Bourbaki, mais pas nécessairement de ses réalisations ; ainsi que nous pourrons le constater. Les poèmes, qui émaillent *La Tribu*, témoignent quant à eux d'une forme particulière de l'humour du groupe, et donnent une trame de fond mathématique.

Beaulieu nous précise que le plan est un rituel de chaque congrès [Beaulieu 1998, p.82]. Elle analyse aussi les poèmes, plus précisément ceux qui contribuent à la construction d'une « origine de Bourbaki » [Beaulieu 1998, p. 109-115]. Elle rappelle néanmoins l'origine de ces pastiches dont sont familiers les élèves de l'École normale supérieure :

> Plusieurs membres du groupe étaient férus de littérature et certains prenaient plaisir à composer des poèmes nourris du fruit de leurs lectures. Les Bourbaki affectionnaient particulièrement La Fontaine, Corneille, Racine, les symbolistes, Mallarmé, Valéry et même Prévert. Ils s'étaient exercés à l'art du pastiche depuis le lycée et l'on pratiquait très couramment ce genre de virtuosité littéraire à l'École normale supérieure. Il était donc naturel qu'ils y aient eu recours dès leur première inspiration poétique, surtout quand il s'agissait d'évoquer l'image d'un passé glorieux au bénéfice du groupe. Le ton grandiloquent de certains morceaux produit un effet particulièrement comique quand il est question de mathématiques : comme d'autres formes d'humour, celle du pastiche tient alors, en partie, à l'introduction de termes mathéatiques et d'allusions à des incidents de la chronique de Bourbaki dans des textes diversifiés et poétiques. En outre, la musicalité des poèmes de facture classique facilite la mise en mémoire et la répétition, d'autant plus que les poèmes souches font partie d'un fond culturel commun et qu'ils sont connus de tous. Comme des récits des origines, rythmés et familiers, les poèmes au second degré jouent sur les mots et les images. Ainsi, font-ils partie, comme d'ailleurs tout l'humour de Bourbaki, du langage rituel qui sous-tend la fabrication et l'appropriation par le groupe d'une mémoire unitaire.

Le Congrès œcuménique du Cocotier (Royaumont, 13-25 avril 1949) marque l'apparition des distributions dans les rédactions à faire. Schwartz y est désigné comme « Orateur (ou ministre des Distributions) » et dans le poème qui suit on trouve les vers suivants :

> Schwartz ne s'en est ému, puissant distributeur,
> Et sur la bipolaire il fonce avec ardeur ;
> Elle aussitôt se rend ; mais c'est lui qui déconne [61].

Ces quelques mots montrent que les distributions de Schwartz ont intégré les jeux d'esprit et de mémoire de Bourbaki, elles sont une référence habituelle. Ils indiquent aussi la participation de Schwartz aux débats concernant les espaces vectoriels topologiques.

Il y est chargé de rédiger « l'état 4 les Fréchets ou assimilés », ainsi que « l'état 1 des distributions (pour dans 5 ans) [62] » Car les espaces de Fréchet ont été longuement l'objet

61. Archives Bourbaki, nbt_ 020.

62. Il s'agit sûrement d'une référence à propos du temps nécessaire à Schwartz pour rédiger sa *Théorie*

de ce Congrès (on y a lu et commenté l'état 3, ainsi que nous l'examinerons en détail un peu plus loin) ; ce qui leur a même valu un poème :

> Un Fréchet en travail bombinant solitaire.
> "Qu'importe, disait-il, si mon dual n'adhère
> A ses filtres bornés, pourvu qu'il soit complet ?
> C'est donc fort qu'il doit être ; et par toute la terre
> Il fera sonner haut le beau nom de Fréchet.
>
> Quel plaisir de le voir, convexe et continu,
> Pour un autre moi-même aisément reconnu,
> Bombiner à son tour auprès des semi-normes,
> Et enrichir sans fin mon illustre tribu
> De Fréchets tous pareils, tous charmants, tous conformes !"
>
> Mais hélas ! le Fréchet n'était pas réflexif ;
> Il n'avait su prévoir qu'aussitôt subversif
> Le dual briserait les liens qui le dénombrent.
> C'est en vain qu'il s'acharne et se traîne, inductif ;
> Son rêve s'est envolé, Banach, songe d'une ombre.
>
> Dieudonné consterné rassemble les débris
> Au pied d'un cocotier où triomphe un conscrit,
> Et, toujours plein d'espoir, au bidual les plonge.
> Trop tard : dans ses bras meurt le Fréchet incompris ;
> Finis ses tristes jours, que nul Zorn ne prolonge !
>
> Par cet exemple instruits, apprenez, s'il vous plaît,
> Rédacteurs trop zélés, à borner vos souhaits ;
> Baisez avec respect la main qui vous démembre.
> Tel bien souvent se crut imprimé en juillet
> Pour se voir vomi en septembre.

Les termes mathématiques utilisés, ceux du volume sur les espaces vectoriels topologiques, donne un air particulier à ce poème. Le « cocotier » qui est mentionné désigne en fait un canular, décrit par Beaulieu [Beaulieu 1998, p.106] dans lequel les membres les plus jeunes (en général) cherchent à piéger un membre plus vieux en énonçant un faux résultat par exemple. C'est sans doute ce qu'il s'est passé avec Dieudonné, pourtant spécialiste de la chose.

La prochaine lecture des espaces vectoriels topologiques est prévue pour février 1950 à Nancy : « lecture définitive des espaces vectoriels topologiques (chap.I, II, III et IV) ». À ce Congrès de Nancy (3-7 février 1950), une grande réflexion sur le plan est abordée [63]

> Tout Congrès était jusqu'ici agrémenté d'un « numéro du plan ». Notre Maître, ayant réfléchi en lisant une rédaction d'Analyse combinatoire, s'aperçut qu'avec trois plans par an il faudrait des millénaires pour épuiser tous les ordres de publication baroques ou non. Il donne donc d'ordre à ses fidèles de proposer à chaque Congrès sept fois septante sept plans généraux, sans omission ni répétition. Pour commencer, le Congrès vit éclore sept plans de la première partie et un de la seconde (compte non tenu des plans exposés oralement). Pour faciliter le travail, Delsarte s'est engagé à acheter, avec les milliards de Freymann et Rockefeller, une machine électronique capable d'imprimer un plan toutes les minutes et qui fonctionnera sans interruption pendant tous les Congrès.

des distributions, sujet qui était prétexte à plaisanterie, ainsi que le rappelle Malgrange. [Entretien avec Malgrange]

63. Archives Bourbaki, nbt-023

289

Deux solutions se présentent alors : ou couper l'Intégration en deux, -ou donner très tôt une théorie élémentaire des fonctions de variable complexe avec l'intégrale de Cauchy faite par les moyens du bord (sans Stokes). En tous cas le Congrès est unanime pour penser que Stokes doit se faire <u>avant</u> la Topologie Algèbrique ; celle-ci viendra à la fin de la première partie avec ses applications (Géom.diff.globale et surfaces de Riemann). Deux plans sont donc proposés aux fureurs des fidèles d'outre Atlantique :

1) "Les problèmes avant les méthodes"

I, II, III et IV pour mémoire
V Différentielles et var. diff. (sans Stokes)
VI Fonctions analytiques élém. (avec Cauchy fait sans Stokes)
VII Noyaux de groupes de Lie et géom.diff.locale
VIII Espac.vect.top. (avec la théorie élém. des algèbres normées).
IX Mesures et Distributions (avec Stokes)
X Topologie Algèbrique et trucs globaux.

2) "Méthodes, problèmes, méthodes, problèmes"

I à IV pour mémoire
V Esp.vect.top. (sans algèbres normées)
VI Intégration (chap.I à IV)
VII Différentielles et var.diff. (avec Stokes).
VIII Fonctions analytiques élémentaires.
IX Noyaux de groupes de Lie et Géom.diff.locale.
X Mesure de Haar, groupes, Fourier, Laplace, opérateurs dans les Hilberts, spectres, théorie ergodique (?).
XI ~~Noyaux~~ Distributions.
XII ~~Noyaux de groupes de Lie et Géom.diff.locale~~.Topologie algèbrique et applications.

Figure 1.2 – *La Tribu* N°21, Compte-Rendu du Congrès de Nancy (3-7 Février 1950), p.2

Lors du « Congrès de la Revanche du Cocotier » (Royaumont, 5-17 avril 1950) [64] est exposé un « Grand plan généralissime » (p.4) :

> Voulant en finir avec la perpétuelle valse des livres de la première partie, le Congrès décide de réduire cette partie à sa plus simple expression, et de mettre aux Parties II, III et IV les chapitres un peu trop techniques de la première partie. Ceci obligera à doter les parties II, III et IV d'un Leitfaden très strict. Mais cette solution a été jugée préférable à celle, d'abord envisagée, qui créait une « partie I bis », rendez-vous des chapitres techniques de la première partie.

Une quatrième partie, intitulée analyse fonctionnelle, apparaît, dans laquelle on doit parler de Mesure de Haar, mais aussi de distributions, Fourier, Laplace, EDP (équations aux dérivées partielles) ... Les parties III et IV ne seront en fait jamais rédigées ni publiées.

Au Congrès de Nancy (27 janvier-3 Février 1951) apparaît la mention du « Fascicule de résultats des e.v.t. » [65], « afin de permettre aux non-initiés de s'y reconnaître », que Schwartz s'engage à rédiger pour octobre 51. En octobre 1951, le fascicule [66] [67] est commenté [69] (p.7). Il faut notamment « améliorer le style », ajouter « un diagramme de Hasse de ces gens-là » (Banach, Fréchet, tonnelés,...) et donner des exemples. Schwartz est alors chargé de fournir « au plus vite des exemples d'esp.vect.top. que l'on rencontre en analyse » et de fournir un exercice « sur une application du graffermé ». Le fascicule est ensuite confié à Serre pour juin 1953 [70]. On peut voir dans l'état 2 de la rédaction de ce fascicule [71] un petit diagramme à la fin, ainsi qu'un appendice sur les « Propriétés des e.v.t. usuels. » ; notamment les espaces de distributions.

En 1952, au Congrès Croupion des Vosges (Celles-sur-Plaine, 8-16 Mars 1952), Chevalley est chargé de rédiger « Distributions et courants. ». Je n'ai pas de trace de cette rédaction. Schwartz est quant à lui chargé, au congrès suivant, Congrès de la motorisation de l'âne qui trotte (Pelvoux-le-Poet, 25 juin-8 juillet 1952) de rédiger les produits tensoriels topologiques (le sujet de la thèse de Grothendieck) pour octobre 1953 [72]. Ce papier est présent dans les Archives Bourbaki [73].

Les distributions apparaissent ainsi de manière fugace dans certains projets de plans, voire à l'occasion de poèmes. Tout cela est mêlé à des rédactions et réflexions sur les espaces vectoriels topologiques, dont on peut voir une synthèse dans le texte de Ferrier [Ferrier à paraître.].

Les distributions ne semblent pour le moment être présentes qu'en pointillé pour Bourbaki. Elles sont au contraire indissociables de la réflexion sur le contenu du volume sur les

64. *La Tribu* N°22, Archives Bourbaki, nbt_ 024.
65. *La Tribu* N°23, Archives Bourbaki, nbt_ 025.
66. Ce fascicule se trouve dans les archives : nbr_ 046, Rédaction 144. On trouve un exemplaire, daté de septembre 1951, dans le Fonds Schwartz de l'École polytechnique A.I.2.1.2.
67. Schwartz a déjà participé à la rédaction du *Fascicule de résultats de Topologie*, ainsi que cela est raconté dans *La Tribu* Compte-Rendu du Congrès de Nancy (9-13 Avril 1948) [68] :

> Fascicule de résultats de Topologie (fiches d'essai). Le résultat de l'expérience décidée en Décembre est jugé favorable, et on décide de confier à Delsarte la rédaction de tout le fascicule en suivant ces principes. Le style Samuel est jugé trop laiüsard, celui de Schwartz un peu sec, on penche vers un compromis du genre du fascicule de résultats des Ensembles. Pour être utile aux non spécialistes, il sera bon de faire un peu plus de laïus dans les premiers paragraphes (Filtres, limites, suites, voisinages, boules, ouverts, fermés).

69. *La Tribu* N°26, Compte-Rendu du Congrès croupion (Royaumont, 1-9 octobre 1951), Archives Bourbaki nbt_ 027
70. *La Tribu* N°30, nbt-031
71. Archives Bourbaki, rédaction 182, nbr_ 085.
72. *La Tribu* N°30, nbt-031
73. Daté de mai 1953, « Produits tensoriels topologiques », Schwartz mentionné au crayon, nbr_ 082 Rédaction 179.

Appendice II.

Propriétés des E.V.T. usuels.

1. Soit $\mathcal{D}_K$ l'espace des fonctions de classe C^{∞} sur R^n, à support dans un compact K, muni de la topologie de la convergence uniforme pour toutes les dérivées. $\mathcal{D}_K$ est un espace de Fréchet et un espace de Montel.

2. L'espace $\mathcal{D}$, limite inductive des $\mathcal{D}_K$, est une limite inductive stricte de Fréchets, et un espace de Montel.

3. Le dual $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$, espace des distributions sur R^n, muni de la topologie forte, est un Montel.

4. L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions de classe C^{∞} sur R^n, muni de la topologie de la convergence compacte de toutes les dérivées, est un espace de Fréchet et un espace de Montel.

5. Le dual $\mathcal{E}'$ ~~et~~ de $\mathcal{E}$, espace des distributions à support compact, muni de la topologie forte, est une limite inductive (non stricte) de Banach, et un Montel.

Figure 1.3 – Rédaction 182, Etat 2 du fascicule de résultats d'espaces vectoriels topologiques.

espaces vectoriels topologiques, ainsi que le montre le paragraphe suivant.

« Les théorèmes utiles pour les distributions. »

Au Congrès œcuménique du cocotier (13-25 avril 1949) [74], Bourbaki discute les espaces vectoriels topologiques. Il est alors décidé de regrouper les chapitres II et III en un seul ; et on se rend compte que « le chapitre des Fréchets demande une refonte complète ». Schwartz est chargé de rédiger l'état 4 « les Fréchets et assimilés ». Il s'agit d'une partie du chapitre IV dont on a dans les archives les états 3 [75] et 4 [76] [77]. Ce livre connaîtra encore de multiples rédactions et changements de plan avant sa publication.

Lorsqu'il lit le chapitre concernant les espaces de Fréchet, « Le Congrès est choqué du mélange de trivialités et de théorèmes fins (de catégorie). Il adopte pour principe de classification : espace, dual, bidual. Il demande un nom pour les espaces de Fréchet. ». Et plus précisément, il demande à Schwartz d'intégrer dans sa rédaction de l'état 4 les

74. Archives Bourbaki, nbt_ 020, *La Tribu* N°19

75. Archives Bourbaki ; Rédaction N°106, nbr_ 016, Titre : Livre VI-E.V.T. Chapitre IV (Etat 3) Espaces localement convexes métrisables

76. Archives Bourbaki ; Rédaction N°128, nbr_ 035, Titre : Chapitre IV (Etat 4) Espaces localement convexes métrisables.

77. Rédaction dans laquelle Schwartz définit les espaces vectoriels localement convexes « bornographiques » ; la terminologie est moquée au Congrès de la revanche du cocotier (Royaumont, 5-17 avril 1950. Archives Bourbaki, nbt_ 024)

> Les créations terminologiques furent empreintes de la plus grande fantaisie : espace bornographiques, bornologiques, bornivores, espaces tonnelés.

Ferrier [Ferrier à paraître. p.27] précise un peu la dénomination de ces espaces et leur place dans le Traité –en exercice ou bien dans le texte.

« théorèmes utiles pour les distributions » suivants :

> Il réserve la question des limites inductives d'espaces de Fréchet (qui seront probablement vidées si elles figurent à la prochaine rédaction). SCHWARTZ démontrera dans sa rédaction les théorèmes qui sont utiles pour les Distributions ; si ça devait l'amener trop loin, il n'aura qu'à publier un mémoire en collaboration avec DIEUDONNÉ.
>
> Les théorèmes utiles pour les Distributions sont :
>
> (Espace)
>
> 1. Un borné dans $(\mathcal{D})$ est borné dans un $(\mathcal{D}_k)$ (lim.ind.)
> 2. Les formes linéaires bornées sont continues (cor.1, prop.3, p.135).
> 3. Le th. des homomorphismes
>
> (Dual)
>
> 1. La topologie $\mathcal{T}_b$; les faiblement bornés sont fortement bornés.
> 2. Equicontinuité des faiblement bornés ; la limite faible d'une suite d'applications continues est continue (p.137).
> 3. Polarité des voisinages et des bornés (p.109)
>
> (Bidual)
>
> 1. Polarité des voisinages et des bornés (pour le dual)
> 2. Réflexivité (th.3, p.113)
> 3. Une partie du th. des homorphismes.
> 4. Pour qu'une forme linéaire sur le dual soit faiblement continue (et alors élément de l'espace), il faut et il suffit qu'elle soit faiblement continue sur tous les bornés.

Ce passage est particulièrement intéressant, parce qu'il suggère explicitement que la partie des espaces vectoriels topologiques est écrite comme un utilitaire pour les distributions des Schwartz, ce qui vient confirmer ce que l'on a dit plus haut.

Notons tout d'abord qu'effectivement, cette rédaction a amené Schwartz « trop loin » : avec Dieudonné, ils ont publié deux articles sur les espaces vectoriels topologiques ; l'un signé de leurs deux noms, déjà paru à la date de ce congrès,[Dieudonné et Schwartz 1949] intitulé « La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$ » et l'autre signé du nom de Bourbaki, [Bourbaki 1950] intitulé « Sur certains espaces vectoriels topologiques », qui paraît en 1951 et se rattache au précédent.

Essayons de retrouver ces propriétés dans les éditions du mémoire *Théorie des distributions* de 1950 (chapitre 1), et 1966, ainsi que dans le tome *Espaces vectoriels topologiques* de Bourbaki.

En 1950, le traité d'EVT de Bourbaki n'est pas encore paru ; Schwartz ne peut donc pas s'y rapporter. Un chapitre est entièrement consacré à ces notions ; il s'agit du chapitre III intitulé « Espaces topologiques de distributions. Structure des distributions. » Schwartz explique son but dans le sommaire du chapitre :

> Ce chapitre va d'une part étudier la convergence des distributions, d'autre part étudier leur structure locale et globale. Il a évidemment une grande importance aussi bien théorique que pratique ; les théorèmes sont très utilisables dans la pratique même sans aucune connaissance de l'analyse fonctionnelle (espaces vectoriels topologiques).
>
> [Schwartz 1950c, p.65]

Il explique ensuite que les espaces qui interviennent ne sont pas des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets), mais des espaces de Fréchet (espaces vectoriels complets, localement convexes, à base dénombrable de voisinages) ou des duals d'espaces de Fréchet. Les références qu'il donne en 1950 sont uniquement les ouvrages de Banach, Köthe et l'article de Dieudonné de 1942, intitulé « La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. » [Dieudonné 1942] Il annonce que « la publication prochaine d'un mémoire en commun par M.Dieudonné et [lui-]même sur « la dualité dans les espaces ($\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$ » rendra bien plus clairs les théorèmes énoncés ici et dont souvent [il n'a] pas donné la démonstration. » L'édition de 1966 intègre toutes ces nouvelles références, Schwartz-Dieudonné, Grothendieck notamment, ainsi que les fascicules d'espaces vectoriels topologiques de Bourbaki, parus en 1953 et 1955 pour la première édition ; et précise un peu les résultats énoncés.

Quels sont les théorèmes indispensables qui sont recensés dans *La Tribu* ? Il s'agit d'une liste de résultats, concernant les propriétés de l'espace, du dual et du bidual.

Schwartz cherche à mettre une topologie sur $(\mathcal{D})$. Il parle de « pseudo-topologie » en 1950 et la définit ainsi (p.24) :

> On dira que des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ convergent vers 0 si d'une part leurs supports sont contenus dans un compact fixe de $\mathbb{R}^n$, si d'autre part les fonctions φ_j convergent uniformément vers 0 dans $\mathbb{R}^n$, ainsi que chacune de leurs dérivées. Autrement dit pour chaque système fixe d'entiers $p_1 \leqslant 0$, $p_2 \leqslant 0$, ..., $p_n \leqslant 0$, les
>
> $$\frac{\partial^{p_1+p_2+...+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} ... \partial x_n^{p_n}} \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n)$$
>
> convergent uniformément vers 0 dans $\mathbb{R}^n$ (mais aucune uniformité n'est exigée pour la convergence de l'ensemble des dérivées de tous les ordres).

Au Congrès-croupion des Vosges (Celles-sur-Plaine, 8-16 mars 1952) [78], on fait le point sur les espaces vectoriels topologiques (p.11-15) :

> Un Comité a revu la rédaction définitive des chap.I et II qu sont adoptés modulo des virgules. Après maints essais de bouleverser l'ordre des matières, on adopte, pour les chap.III ($\mathcal{L}(E, F)$) et IV (dualité) un ordre assez voisin de celui des rédactiosn antérieurs. Avant de dévoiler ce plan à nos lecteurs, alléchons-le au moyen de deux listes :
>
> Liste des EVT utilisés en Première Partie
>
> En Intégration : Banachs, Hahn-Banach, graphe fermé, Banach-Steinhaus, polarité (au sens : conséquence de Hahn-Banach), th. de Banach relatif à la continuité faible sur E' (Fasc.Res.P.50)
>
> Aux distributions : Banach-Steinhaus, la réflexivité, les tonnelés, les $\mathcal{L}(E, F)$, les hypocontinus.
>
> Tous les EVT rencontrés sont tonnelés.
>
> Conséquence :
>
> Listes des expulsions
>
> Les bornologiques, les propriétés spéciales des espaces complets, le sorite(...)

Une fois encore, il est fait mention des résultats d'EVT utiles aux distributions. On peut voir à la lecture du volume finalement publié que les espaces de distributions sont très présents dans les quelques exemples donnés.

1.4.4 Distributions et formes différentielles

Il existe un autre point de rencontre entre les distributions de Schwartz et les rédactions de Bourbaki ; il s'agit des formes différentielles. Le livre prévu sur les « Variétés différentiables » ne va néanmoins jamais paraître, il y aura uniquement le *Fascicule de résultats. Variétés différentiables et analytiques* en 1967 et 1971. Il y a peu de rédactions et de commentaires des formes différentielles dans *La Tribu*, mais la correspondance entre Cartan et Weil précise comment Schwartz est chargé de rédiger ce morceau pour Bourbaki.

En 1947, Cartan écrit à Weil, à propos des travaux de Schwartz :

78. Archives Bourbaki, nbt_ 027

> Encore une question semi-Bourbaki : ayant un peu sérieusement réfléchi à la théorie des formes différentielles, je me suis aperçu que Schwartz a fort bien débrouillé la question, dans le cadre général de ses opérateurs de dérivation, et que la théorie a atteint un stade nettement bourbachique. Mais Schwartz s'était bien gardé de le dire, et encore plus de fournir à Bourbaki un rapport sur la question. Je propos qu'on lui inflige un blâme, avec pour punition la rédaction du chap. (ou du livre ?) sur les formes différentielles.
>
> [Audin 2011, Lettre de Cartan à Weil du 4 mars 1947, p.191]

Weil revient sur les formes différentielles et le travail de Schwartz :

> Je ne comprends pas trop ce que tu dis, que la question des formes différentielles est débrouillée par Schwartz. Il me semblait pourtant que celui-ci ne peut pas faire grand'chose, à moins d'être sur une variété de classe C^∞ (*indéfiniment* différentiable), et il serait fort choquant et antibourbachique de faire cette hypothèse pour définir les formes différentielles. Mais je ne vois que des avantages à ce que Bourbaki lui inflige, comme tu dis, un blâme et l'ordre de faire un rapport sur la question.
>
> [Audin 2011, Lettre de Weil à Cartan du 14 mars 1947, p.204-205]

Cartan s'explique dans sa réponse à ce propos des formes différentielles :

> Pour les formes différentielles : il faut d'abord faire la théorie sur une variété indéfiniment différentiable, ce qui donne le choix des formes pour un choix déterminé des variables. Les résultats peuvent ensuite être appliqués au cas où l'on effectue un changement de variables continûment différentiable ; d'où les résultats concernant les variétés différentiables (une fois). Pour mieux pouvoir juger de l'affaire, il faudrait que tu puisses voir le détail. Bien entendu, Schwartz obtient une théorie unitaire des « courants » de De Rham sur une variété différentiable (une fois).
>
> [Audin 2011, Lettre de Cartan à Weil du 23 mars 1947, p.209]

Et Weil conclut alors ainsi :

> P.S. *Ordre* au soldat Schwartz de rédiger au plus tôt les formes diff. -Ne pourrait-il déjà m'envoyer copie de ce qu'il a rédigé ?
>
> [Audin 2011, Lettre de Weil à Cartan du 6 avril 1947, p.218]

Schwartz a effectivement rédigé un « rapport sur les variétés différentiables » [79].

Dans la *Théorie des distributions* de Schwartz, on trouve à partir de l'édition de 1966 [80] deux nouveaux chapitres : le chapitre VIII sur la transformation de Laplace et le chapitre IX intitulé « Courants sur une variété ». Il semble que ces deux chapitres, sous une forme certainement différente, aient été prévus à l'origine par Schwartz, car Cartan écrit à Weil, le 4 mars 1947 :

> Pour le moment, il [Schwartz] rédige enfin son grand mémoire sur les « distributions » (opérateurs de dériv.), dont un chapitre doit dur reste être consacré aux formes différentielles. Il en est au chap. III et à la page 100, et il doit y avoir 9 chapitres ! ! ! Te voilà enfoncé !
>
> [Audin 2011, Lettre de Cartan à Weil du 4 mars 1967, p.191]

alors que la première édition de 1950 et 1951 ne comporte que sept chapitres.

A propos de ce neuvième chapitre, Schwartz écrit [Schwartz 1966, p.10] :

> Les courants, ou distributions-formes différentielles, sur une variété indéfiniment différentiable, sont traités en détail dans un livre de de Rham, où l'on trouvera en outre une étude des variétés différentiables elles-mêmes et des formes harmoniques sur les espaces de Riemann ; ils font, dans cette nouvelle édition, l'objet du chapitre IX.

79. On peut trouver ce rapport à la fois aux Archives Bourbaki 127_ nbr_ 034 et aux Archives Schwartz A.I.1.1.317 ; ce deuxième document est identique au premier, mais complété d'une note manuscrite de 9 pages de la main de Schwartz, à propos des formes différentielles.

80. A partir de cette édition, les deux tomes sont regroupés en un seul, et comporte neuf chapitre -les deux derniers étant nouveaux. Le premier tome a été publié en 1950, et réédité avec des corrections en 1957 ; le second a été publié en 1951 ; puis réédité en 1959 et 1961.

L'ouvrage de de Rham auquel Schwartz fait référence, intitulé *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques.* paraît en 1955 [Rham 1955]. Nous détaillerons au chapitre 5 les liens entre les courants et les distributions, qui permettent d'éclairer les mathématiques en question.

Ces échanges montrent que les mathématiques de Bourbaki et celles de leurs membres, celles de Schwartz en particulier, sont entremêlées. Cela influe sur le quotidien et les décisions de Bourbaki tout autant que sur la formation de Schwartz. Pour ce cas précis concernant les formes différentielles, un travail de Schwartz est à l'origine d'un projet de rédaction de Bourbaki.

De manière plus générale, en suivant comme fil directeur les distributions et les EVT, on a montré l'existence de fréquents allers-retours entre les intérêts partagés par Schwartz et Bourbaki. Cela se traduit ensuite par des choix mathématiques, voire par de nouveaux développements rendus nécessaires par les choix effectués. Dans le chapitre 4, nous nous intéressons de nouveau, mais dans un cadre plus large, aux confrontations entre les EVT et les distributions, en utilisant comme sonde le théorème des noyaux.

Conclusion

Ce premier chapitre aborde le thème de la formation mathématique de Schwartz, sa rencontre avec les mathématiques. Les mathématiciens de sa famille donnent à Schwartz une image incarnée des mathématiques ; mais ce n'est que lorsqu'il rencontre Bourbaki à Clermont-Ferrand qu'il rencontre la vie collective des mathématiques. On aborde donc ici un premier collectif, le groupe de mathématiciens Bourbaki, qui a déjà été beaucoup étudié. Ce que rend possible la conjonction de ces deux sujets, c'est une première mise en question de la vie collective des mathématiques. Tout d'abord, que peut-on dire de cette vie collective en s'intéressant à Schwartz ? Le jeune étudiant, quand il parle de sa famille ; puis le mathématicien débutant qui fait ses premiers pas mathématiques auprès du confirmé Bourbaki. Schwartz se fait le reflet de ces rencontres. Mais, cette relation de l'individu au collectif auquel il appartient se complexifie lorsque l'on aborde plus précisément la question, ainsi que cela a été fait ici par l'étude des distributions chez Bourbaki. Bourbaki n'apparaît plus uniquement comme le lieu privilégié de la formation de Schwartz, mais bien plutôt comme l'expression concrète de la rencontre, renversée, du collectif avec l'individu.

Les premières années mathématiques de Schwartz ont permis d'aborder sa rencontre avec la vie collective des mathématiques. Schwartz a aussi rencontré brièvement différentes formes de vie collective des mathématiques, comme des séminaires ou des congrès, qui sont des formes importantes à la fois pour la suite de sa carrière et la constitution de pratiques mathématiques collectives à l'époque : nous en reparlons dans les chapitres 3 et 5. Nous allons aussi nous intéresser à l'intégration de la théorie des distributions dans la vie collective des mathématiques de manière plus générale au chapitre 2 en en étudiant les formes de réception.

Le récit de Schwartz a été le vecteur privilégié par lequel nous avons étudié sa conception, sa rencontre et son intégration à la vie collective des mathématiques ; qui se font en plusieurs étapes. Nous avons mis en évidence plusieurs formes de vie collective des mathématiques, qui ne prennent pas toutes la même importance pour Schwartz. A mesure que Schwartz s'intègre à la vie collective des mathématiques, nous avons eu de moins en moins besoin de son récit autobiographique, et sa figure s'estompe derrière cette vie collective dont il fait partie.

Chapitre 2

Réceptions de la théorie des distributions de Laurent Schwartz au sein de la vie collective des mathématiques

Si Schwartz « rencontre » la vie collective des mathématiques, qu'en est-il de la réciproque ? La rencontre implique en effet deux parties. Le premier chapitre se termine précisément par une première incursion vers un renversement des points de vue, à savoir une réflexion sur la manière dont les distributions de Schwartz se retrouvent dans le projet collectif de Bourbaki. Nous allons ici effectuer entièrement ce changement d'angle d'approche et aborder la réciproque de cette rencontre. De la même manière que Schwartz « rencontre » la vie collective des mathématiques (au sens du chapitre 1), sa théorie des distributions de Schwartz s'insère dans cette vie collective. La « réception » d'une théorie mathématique désigne l'action de recevoir quelque chose, d'entrer en sa possession, de l'accueillir ; nous allons regarder dans ce chapitre les différentes « réceptions » de la théorie des distributions de Laurent Schwartz au sein de la vie collective des mathématiques.

Qu'entend-on ici par « réception(s) » ? Nous abordons ici la manière dont la théorie des distributions est reçue au sein de la vie collective des mathématiques d'un point de vue très global. Le pluriel indéfini indique qu'il ne s'agit pas d'une étude de réception de la théorie des distributions dans un lieu particulier (institution, pays, discipline). Le pluriel annonce surtout que nous allons faire intervenir plusieurs processus et considérer la réception à plusieurs niveaux. Une théorie mathématique se construit de manière collective ; cette théorie peut circuler au sein d'un groupe particulier, se diffuser ou être diffusée d'une certaine manière par l'un des acteurs, être reçue par un acteur, qui peut à son tour la transformer, transmise suivant différents vecteurs...elle a une vie, et cette vie est collective. Ce sont ces processus collectifs que nous allons étudier ici. La réception peut aussi être étudiée à plusieurs niveaux, en fonction de ce que l'on considère. On peut se placer au niveau des idées, des concepts mathématiques qui circulent, de la théorie mathématique qui se construit de manière cumulative. On peut aussi se placer au niveau des acteurs. De nombreuses études en histoire des sciences visent à définir les différents processus qui accompagnent la réception d'une théorie et à les préciser. Ces études mettent en évidence à la fois la prééminence du contexte [1] mais aussi le processus actif d'appropriation,

1. La réception d'une théorie doit être inscrite « dans le temps médian des pratiques et des usages mathématiques », comme l'affirme [Ehrhardt 2010] dans son étude des travaux de Galois et de sa « naissance

de transformation d'une théorie qui permet ensuite sa diffusion, sa transmission. Doter un texte d'une intention est en effet un phénomène collectif, qui dépend du lieu, de la formation, des pratiques [2]. Nous les confrontons plus loin à l'ensemble des textes que nous utilisons ici.

Le sens du mot « réception » qui donne son titre à ce chapitre est par définition très englobant, puisqu'il vise à se saisir à la fois de ces différents processus et de ces deux niveaux pour caractériser cette insertion de la théorie des distributions dans la vie collective des mathématiques. La théorie des distributions de Schwartz est bien identifiée dans l'historiographie ; et ce chapitre n'a pas prétention à combler un trou dans cette historiographie, ni à en juger le contenu. Il vise, par contre, à montrer comment celle-ci considère la réception de cette théorie comme étant éminemment collective. Outre les nombreux textes composant ce corpus historiographique, nous nous appuyons ici sur quelques lettres issues du Fonds Laurent Schwartz de l'École polytechnique ainsi que sur des documents inédits issus des archives de l'Académie des Sciences (Rapports sur la théorie des distributions présentés à l'occasion de plusieurs Comités secrets) qui sont reproduits dans l'annexe B, p.289.

Ce chapitre fait ainsi l'hypothèse que la « réception » d'une théorie mathématique est un phénomène collectif et la valide en utilisant le corpus historiographique de la théorie des distributions de Schwartz, que l'on va décrire. Il montre que l'historiographie n'est pas figée et participe elle-même à une certaine réception de la théorie des distributions de Schwartz. Enfin, il propose l'étude d'un corpus particulier, constitué par les recensions effectuées par Schwartz pour les *Mathematical Reviews* entre 1947 et 1958, qui montre la manière particulière dont Schwartz est actif dans la réception de sa théorie et cherche à normaliser l'usage et l'intérêt des distributions.

On considère ici uniquement, sauf exceptions précisées dans le chapitre, l'ensemble des « lectures historiennes », au sens défini par Goldstein dans [Goldstein 1995] [3], de la théorie des distributions de Schwartz. On regarde sur le même plan des écrits d'historiens, de mathématiciens ou de témoins, voire d'acteurs eux-mêmes ; car on les lit en fonction du but qu'ils poursuivent, à savoir celui de proposer un regard historique, sur la théorie des

posthume » ; plus que le sens même des textes considérés, on a accès à des « lectures situées », considérées par [Goldstein 1995, p.8-9].

2. Concernant l'appropriation de la théorie, voire sa transformation, un exemple en est l'ouvrage de Bruce J. Hunt, *The Maxwellians* [Hunt 1991] , dans lequel il examine la manière dont les idées, non complètement abouties, de Maxwell ont été transformées par ceux qu'il nomme « the Maxwellians » pour former ce que l'on appelle couramment « la théorie de Maxwell ». L'appropriation est le fait des acteurs de la réception ; la manière dont certains acteurs sont particulièrement actifs dans ce processus est analysée par Warwick [Warwick 2003] dans le cas de la théorie de la relativité : son livre , aux chapitres 8 (p.399-442) et 9 (p.443-500), propose deux cas spécifiques de réception de certains travaux d'Einstein, dans un cadre bien déterminé. Il affirme que cette réception ne peut être comprise qu'en termes de formations locales et pratiques locales de recherche, confirmant ainsi l'analyse présentée au-dessus d'Ehrhardt et précise aussi la manière dont les acteurs de la réception qu'il étudie sont actifs et participent au processus de réception. Il met en évidence un autre aspect important concernant le sens qui est donné au texte, l'interprétation qui en est faite, ainsi que les transformations et les nouveautés qui sont apportées comme faisant partie de la réception. Enfin, il analyse le problème de la transmission par un texte en le comparant à la manière dont les étudiants assimilent de nouvelles choses. Les aspects pédagogiques sont étudiées de manière minutieuse par Warwick tout au long de son livre. Dans notre étude de la théorie des distributions, nous n'allons pas nous intéresser dans le détail aux aspects pédagogiques, notamment parce qu'ils n'ont pas fait l'objet d'études, mais uniquement à l'image qui ressort des récits les mentionnant. La formation de Schwartz a quant à elle été présentée au chapitre 1.

3. [Goldstein 1995, p.6-8] distingue ainsi les « mathématiciens » des « historiens » ou « commentateurs » par la visée de leur texte : les lectures mathématiciennes cherchent des problèmes ou des méthodes pour trouver de nouvelles mathématiques ; les lectures historiennes produisent des réflexions historiques à partir de renseignements sur l'activité du passé.

distributions. Le biais de la vision rétrospective du témoin semble être passé sous silence : même si cela constitue l'une des limites du corpus que l'on considère, nous cherchons ici à caractériser la conception collective de la vie mathématiques qui est présentée par l'ensemble de ces textes [4].

L'étude historique la plus complète portant sur cette théorie des distributions est celle de Lützen, qui s'intéresse à sa préhistoire [Lützen 1982] [5]. Mais de très nombreux autres textes en parlent, l'inscrivent dans l'histoire. Sont ainsi étudiées sa « découverte » [Lützen 1982], son « invention » [Schwartz 1997], son « évolution » [Synowiec 1983] [6], son « histoire » [Yuskevitch 2004] [7], [Dieudonné 1984], sa réception [Gårding 1997b, p.77] et [Lax 2004], son impact sur l'analyse [Gårding 1997b], ou bien même une présentation des différentes « opinions » à propos des distributions [Kutateladze 2008]. On peut aussi citer des études thématiques, comme [Treves 1967] « Théorie des distributions et analyse fonctionnelle ». La plupart des articles insistent sur « la théorie des distributions », plutôt que sur l'objet mathématiques « distributions », comme par exemple [Malgrange 2011], et la personne de Schwartz ne s'efface pas derrière sa théorie : on parle par exemple de « Laurent Schwartz et la théorie des distributions » [Malgrange 2003]. Certains travaux s'insèrent dans des études sur des sujets plus généraux : histoire de l'analyse fonctionnelle [Dieudonné 1981], « L'influence française sur la recherche mathématique finlandaise » [Lehto 1994] par exemple. La théorie des distributions est aussi souvent mentionnée dans des « témoignages » et récits, d'élèves, de collègues, de témoins ; [Montbrial 2003], [Bony 2003], [Robert 2003] par exemple. Schwartz est au cœur de la plupart de ces textes, car beaucoup ont été écrit en son hommage : lorsqu'il reçoit le prix Cognac-Jay de l'Académie des Sciences [8], un colloque en son honneur en 1985 [9], un numéro spécial de la *Gazette des Mathématiciens* [*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens* 2003] en 2003 ainsi que d'autres textes écrits après sa mort [10]. Très schématiquement semble se dessiner le modèle suivant : la théorie des distributions a des « précurseurs » , une « préhistoire » [Lützen 1982], et des successeurs. Elle a été un grand « succès » [Malgrange 2003, p.68] ou bien a connu une réception « hostile » [Gårding 1997b, p.80]. En considérer globalement les « réceptions » va nous permettre de dresser un certain tableau de la vie collective des mathématiques. Certains textes de notre corpus historiographique citent

4. La première partie du chapitre, 2.1, discute néanmoins de la nature et du statut d'un sous-ensemble de ces textes, afin de mieux saisir la construction de cette historiographie.

5. Les recensions de [Lützen 1982] sont elles aussi très intéressantes, notamment la longue analyse écrite par Dieudonné [Dieudonné 1984] dans laquelle il résume les deux tendances qui, selon lui, ont précédé la théorie des distributions. Nous en reparlons en 2.1.

6. Au moment où il écrit son article, de manière indépendante de l'étude de Lützen, Synowiec écrit à Schwartz. La réponse de Schwartz est présente dans ses archives : archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, B.I.1.1.102 (1977).

7. Cet article s'intitule en fait « Some remarks to the history of the theory of generalized solutions of partial differential equations and of generalized functions. » et remet en cause certaines affirmations de Lützen concernant les travaux de Sobolev ; nous en reparlons au paragraphe 2.1.2.

8. Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, A.I.8.8 Prix Cognacq Jay (1972) Jean LERAY Rapport sur l'attribution du Prix Cognacq-Jay (Samaritaine) 1972 à Laurent Schwartz, Jacques-Louis Lions et Bernard Malgrange. (suivant la répartition 50%, 25%, 25%)

9. À l'occasion de ce colloque, Bernard Maurey, un étudiant de Schwartz polytechnicien, donne un exposé sur « le séminaire rouge » qu'il conclut par ces mots : « J'espère que ce petit discours aura fait comprendre pourquoi, pour un certain nombre d'anciens élèves de l'École polytechnique qui ont choisi d'essayer de faire des mathématiques, le nom de Laurent Schwartz évoque bien d'autres choses que la théorie des distributions » [Maurey 2003, p.79]. Et en effet, le numéro spécial de la *Gazette des Mathématiciens* évoque bien d'autres aspects de la vie de Schwartz ; la théorie des distributions reste néanmoins très présente : la moitié des trente textes proposés la mentionne ; parfois la discute longuement.

10. Nous verrons plus loin que le travail historique de Lützen a engendré des réponses, historiques, polémiques ou mathématiques.

des « précurseurs », ou encore analysent l'« influence » ou l'« impact » de la théorie des distributions [11]. Même si ces notions restent imprécises, nous allons nous intéresser aux conceptions collectives qu'elles véhiculent. Certains auteurs, qui proposent une lecture critique de l'historiographie en même temps qu'une lecture historienne de la théorie des distributions, remarquent un biais : à savoir que les études sont très centrées sur Schwartz et l'Europe de l'Ouest. Il n'existe pas d'étude globale comparant les différents contextes de réception ; l'étude des « lectures mathématiciennes » de la théorie des distributions n'a pas encore été faite et n'est pas non plus l'objet de ce chapitre, ce qui constitue une limite à la portée de cet exposé. Nous étudions cependant deux aspects précis de cette réception dans les chapitres 3 et 4, qui constituent donc un apport au corpus utilisé ici. Le chapitre 3 propose l'étude d'un colloque à l'occasion duquel Schwartz a présenté sa théorie des distributions devant un auditoire international pour la première fois, et en décrit les conséquences, à la fois sur les mathématiques et la carrière de Schwartz. L'appropriation de la théorie des distributions et ce qu'elle signifie en termes de pratiques d'écriture est étudiée dans le cas particulier du théorème des noyaux au chapitre 4.

Ce chapitre s'organise autour de différentes acceptions du mot réception, autour des différentes réceptions de la théorie des distributions de Schwartz comme révélateurs des dynamiques collectives.

Dans la première partie, la réception de la théorie des distributions désigne le corpus, l'ensemble des textes qui proposent des éléments historiques sur la théorie des distributions, donnent leur avis sur cette théorie ou en font l'analyse. Du fait de la nature particulière de ces textes et de leurs auteurs, il n'est ni possible ni souhaitable de séparer les littératures primaires et secondaires ici, ainsi que nous allons le voir. L'étude est proposée sur un sous-ensemble restreint du corpus global, à savoir l'étude de l'historien des mathématiques Jesper Lützen, [Lützen 1982], sur la préhistoire de la théorie des distributions et les réactions qui ont suivi sa publication. Cette partie montre que l'historiographie participe à la vie collective des mathématiques et que, pour ces auteurs, la construction d'une théorie mathématique est un phénomène collectif. La tension entre individu et collectif y est particulièrement importante.

La réception peut aussi signifier l'acceptation ou la non-acceptation de la théorie, dans différents contextes. La deuxième partie, avoir présenté quelques aspects généraux, en étudie deux cas particuliers. L'élection de Schwartz à l'Académie des Sciences, qui est en un sens l'élection de sa théorie des distributions, est l'occasion de l'écriture de textes particuliers, inédits. Un mathématicien en particulier, Hörmander, apparaît comme étant particulièrement acteur de la réception de la théorie des distributions.

Enfin, Schwartz agit sur la réception, la diffusion, la place de sa théorie des distributions de différentes manières. Il fabrique une manière particulière d'agir en normant la réception de sa théorie lorsqu'il écrit des recensions aux *Mathematical Reviews* entre 1947 et 1958, ce qui est l'objet de la troisième partie.

11. Ces notions assez vagues sont remises en cause par Ehrhardt notamment, qui inscrit historiquement son questionnement :

> Dès lors que l'on refuse de raisonner en termes de « précurseur » ou « d'influence », bien trop vagues pour refléter une quelconque conceptualisation historique, le contraste entre l'infortune de Galois et la postérité de son œuvre cesse d'apparaître comme un heureux hasard de l'histoire des mathématiques pour redevenir une question d'histoire, pour laquelle l'édition de Liouville constitue un moment fondamental.
>
> [Ehrhardt 2010, p.545]

2.1 De la préhistoire à la réception : prises de conscience des aspects collectifs de la construction de la théorie des distributions

En 1982, Lützen publie sa thèse sur la préhistoire de la théorie des distributions [Lützen 1982]. Il étudie le développement des concepts mathématiques qui ont précédé les distributions ; le résultat de son étude rend collectives les questions qu'il pose au départ concernant l'invention des distributions . Les réactions engendrées par cette publication vont prendre l'allure d'une controverse a posteriori et vont participer à l'insertion de la théorie des distributions dans la vie collective des mathématiques. La tension entre l'individu, les idées, le collectif est particulièrement manifeste.

Nous considérons ici un sous-ensemble du corpus global, à savoir tous les textes s'intéressant à la question de la préhistoire de la théorie des distributions. Il s'agit donc du livre de Lützen, des recensions de son travail, ainsi que d'autres textes postérieurs, immédiatement ou bien publiés après le décès de Schwartz en 2002. Il s'agit d'une période très tardive (1982-2008) par rapport au premier livre de Schwartz sur les distributions (1950). Il n'est donc pas évident que cela ait un sens de parler encore à ces dates, très actuelles, d'insertion de la théorie des distributions dans la vie collective des mathématiques. Nous montrons néanmoins que l'historiographie n'est pas figée mais vivante et qu'elle participe en tant que telle au processus de réception de la théorie des distributions de Schwartz. Elle traduit aussi certaines conceptions du collectif qui vont modeler la réception de la théorie des distributions. Cela est d'autant plus vrai lorsque l'on considère le corpus dans son ensemble, ainsi que cela est fait dans le reste du chapitre. En en considérant provisoirement un sous-ensemble, on peut présenter la nature particulière de chacun des textes et de leurs auteurs. Cela donne une bonne représentation du corpus global.

Nous lisons ici les textes à deux niveaux. Ce qu'ils affirment sur la préhistoire de la théorie des distributions permet de mettre en avant une certaine conception collective des mathématiques tout en présentant une tension prononcée entre l'appport individuel et les concepts mathématiques. La considération de la dynamique de ces textes traduit quant à elle la dynamique d'un certain mode d'insertion dans la vie collective des mathématiques.

On commence donc par présenter rapidement les enjeux du travail de Lützen, en insistant sur l'apport de son étude qui rend collective, d'une certaine manière, la question de l'invention des distributions. Nous détaillons les textes – recensions, articles, lettres – écrits en réaction, en analysant notamment la manière dont est construite – ou non – une certaine polémique entre Schwartz et Sobolev. Plus que comme une querelle rétrospective et reconstituée entre deux hommes, nous considérons ici l'ensemble des discussions au sujet de la manière dont est conçue la vie collective des mathématiques par les mathématiciens eux-mêmes à propos des débuts de la théorie des distributions.

Enfin, l'une des questions les plus intéressantes qui est discutée dans l'historiographie concerne la nature de la théorie. Qu'est-ce qui est reçu ? Concept ou théorie ? Cela fait émerger chez les mathématiciens une prise de conscience très claire du fait que la construction d'une théorie est un processus collectif que nous décrivons.

2.1.1 Étudier la préhistoire de la théorie des distributions ou comment rendre collective la question de son invention

Dès le début de sa Préface, Lützen pose la simple question suivante :

> Who invented distributions and when ?
>
> [Lützen 1982, p.v]

à laquelle il apporte directement la réponse :

> [D]istributions were invented by S. Sobolev and L. Schwartz around 1936 and 1950, respectively.
>
> [Lützen 1982, p.v]

Cependant le résultat de son étude historique « collectivise » en quelque sorte sa réponse, puisqu'il revient sur cette première question en conclusion, la précise, et montre qu'elle se décompose en plusieurs questions qui ont des réponses différentes :

> In the Preface I posed two questions : Who invented distributions and when ? and I gave the provisionnal answer : Sobolev in 1936 and Schwartz en 1950. After having discussed the prehistory of the theory of distributions in detail the question seems too general and needs specification. If one asks about the first people to use distributions in mathematics, the answer is Fourier 1822, Kirchiff 1882 and Heaviside 1898. If one asks for a rigorous theory, which possibly only implicitely used distributions, the answer is Bochner 1932. If one wants to know who first defined distributions rigorously as functionnals, the answer is Sobolev 1935 and finally, if one wants to point to the person who saw the far-reaching applications of distributions and created a broad theory of these objects, Schwartz is the one to cite with 1945-1950 as his years of publication. In Soviet and Eastern European texts on the theory of distributions the third of these questions is usually stressed so that Sobolev becomes the hero ; in Western texts the credit is often given to Schwartz because only the last question is asked (see, for example, Dieudonné [1964]).
>
> [Lützen 1982, Concluding remarks, p.159]

La question simple posée dans la Préface se complexifie et rend la présentation de la théorie des distributions plus collective au sens où elle fait intervenir plus d'individus et de concepts mathématiques.

Ce n'est néanmoins pas cette question qui est au cœur de l'étude de Lützen. Ce ne sont pas les individus mais les concepts qu'il étudie ; et ils donnent une vision d'une œuvre collective [12]. Il qui résume le but de son travail dans ces deux extraits :

> Did Sobolev [13] and Schwartz construct distributions from scratch or were there earlier trends and, if so, what were they ? It is this question, concerning the prehistory of the theory of distributions, which I attempt to answer in this book.
>
> [Lützen 1982, Preface, p.v]

> The primary aim of the book is to show how different problems gave rise to theories anticipating the thory of distributions and how these theories were connected with each other and with the theory of distributions.
>
> [Lützen 1982, p.4]

Écrire la « préhistoire » de la théorie des distributions, c'est donc s'intéresser à ce qu'il y a avant que cette théorie ne soit créée, c'est décrire les principales tendances, les problèmes mathématiques et les théories qui lui sont proches ; et les relier avec la théorie des distributions elle-même. Cela signifie de présenter un grand nombre d'acteurs et de mathématiques [Lützen 1982, p.4]. Parler de préhistoire n'a donc de sens qu'à partir du moment où cette théorie est créée ; c'est la connaissance de cette théorie, bien plus que les sources utilisées par leurs auteurs, qui permet à l'historien de poser les questions et

12. Dans une interview récente, Lützen revient sur cette étude sur la théorie des distributions. Il écrit ainsi que « c'était un concept mathématique qui était au centre de [s]es recherches, principalement fondées sur des publications existantes ». Néanmoins, il rappelle avoir réalisé une interview de Schwartz, celle sur laquelle est basée son chapitre 6, « qui avait aiguisé [s]on envie de faire une recherche biographique, ou du moins un travail où le thème central serait un mathématicien et ses travaux » [Verdier 2010, p.23].

13. Pour une présentation de Sergei Sobolev (1908-1989), de sa carrière et des fonctions généralisées, on peut consulter [Leray 1990],[Kutateladze 2008, p.2-4],[Yuskevitch 2004],[Kantor 2004b].

de rechercher parmi les mathématiques qui ont précédé les problèmes et théories qui vont être considérées comme constitutives de celle que l'on étudie. La préhistoire de la théorie des distributions étudiée par Lützen s'arrête avec la publication du traité de Schwartz en 1950-51 [Schwartz 1950c], [Schwartz 1951d]. Les sources mentionnées par Schwartz dans son traité ne contiennent pas la majeure partie des travaux qui sont considérés comme faisant partie de la préhistoire de la théorie des distributions.

2.1.2 Réactions, réponses, critiques : une historiographie mouvante

Après la parution du livre de Lützen on a des réactions ; la question de la préhistoire dont il s'est saisie est reprise par d'autres.

Commençons par mentionner qu'en 1983, le mathématicien John Synowiec [14] publie un article dans *Historia Mathematica*, intitulé « Distributions : the evolution of a mathematical theory ». La recension pour les *Mathematical Reviews*, écrite par Smithies (MR0667854) [15] comme pour le livre de Lützen, compare les deux études. Même si l'article de Synowiec apporte de nouveaux acteurs ayant précédé Schwartz, il est beaucoup plus court que l'étude de Lützen, et ne semble pas avoir suscité beaucoup de réactions. Le livre de Lützen, par contre, a donné lieu à de nombreuses études. On peut mentionner deux autres recensions de ce livre. Tout d'abord celle écrite par Claudine Schwartz pour *Zentralblatt MATH*, dans laquelle elle met l'accent sur la partie du livre écrite à partir d'une interview de Schwartz par Lützen [16]. Dieudonné écrit quand à lui une très longue recension dans *The American Mathematical Monthly* [Dieudonné 1984], dans laquelle il met en ordre les tendances ayant construit la préhistoire de la théorie des distributions. Les deux tendances sont selon lui à rechercher dans les travaux sur les solutions faibles des équations aux dérivées partielles et les transformées de Fourier. Il en donne en fait sa propre analyse, qu'il reprend en partie de son histoire de l'analyse fonctionnelle [Dieudonné 1981]. Dieudonné est à la fois témoin, acteur ; professeur et collègue de Schwartz, à Clermont-Ferrand, Bourbaki et Nancy. Il s'intéresse aussi beaucoup à l'histoire des mathématiques, sur laquelle il publie de nombreux textes (livres et articles). En 1993, Yuskevitch, historien des mathématiques russe, publie, en russe, une critique du livre de Lützen [Yuskevitch 1993], dont nous reparlons plus loin. Ce texte est traduit en 2004 en français et anglais à l'occasion des articles de Kantor [Kantor 2004b], [Yuskevitch 2004], [Kantor 2004a], qui sont critiques de la présentation trop centrée sur l'Europe de l'Ouest de cette histoire. De même que le texte de Kantor, on a d'autres articles qui paraissent après la mort de Schwartz en 2002. Mentionnons l'article mathématique de Kiselman [Kiselman 2002] qui répond à deux questions mathématiques posées par Lützen et laissées ouvertes, à savoir l'équivalence entre des objets mathématiques définis par Carleman et par Schwartz [17]. Bernard Malgrange, élève de Schwartz, l'un des premiers mathématiciens à avoir utilisé les distributions dans sa thèse, répond, dans la *Gazette des Mathématiciens* à l'article de

14. Synowiec a écrit à Schwartz en 1977 pour lui poser une question sur les distributions (Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, B.I.1.1.102, lettre de Schwartz à Synowiec, 1977).

15. Frank Smithies (1912-2002) est un mathématicien britannique, de la même génération que Schwartz, qui a travaillé sur les équations intégrales et était en poste à Cambridge. A partir de 1979, il s'intéresse à l'histoire des mathématiques, voir http ://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Smithies.html (Page consultée le 1 septembre 2013).

16. Elle écrit ainsi dans la recension, en parlant du chapitre 6 :

> This is easily the most interesting chapter in the book and a good deal of the material contained in this chapter seems to have come from a personal interview that the author had with L. Schwartz.

17. On en reparle au chapitre 3.

Kantor, avec lequel il n'est pas d'accord. Enfin, on a un article de Kutateladze [Kutateladze 2005], [Kutateladze 2004], [Kutateladze 2004], [Kutateladze 2008] qui associe les noms de Schwartz et Sobolev.

Cette rapide présentation de la nature des textes et auteurs, permet de comprendre la diversité du corpus historiographique considéré. Des réflexions contenues dans ces textes, nous allons illustrer le mouvement progressif de la préhistoire à la réception, qui passe par une une prise de conscience des aspects collectifs de la conception de la théorie.

2.1.3 Qui définit la controverse ? Acteurs, témoins, mathématiciens, historiens.

On voit apparaître une certaine tension entre une conception de l'activité mathématique comme étant collective et la place d'un individu en particulier. De cette étude qui rend la question collective en apparence ressort une impression d'une polémique entre deux individus. Les réactions à Lützen portent en grande majorité sur les places attribuées à Schwartz et Sobolev, à leurs apports individuels à la théorie des distributions.

S'agit-il d'une « controverse » ? En mathématiques, une controverse célèbre est celle qui oppose le calcul différentiel de Newton et celui de Leibniz. Kutateledze associe d'ailleurs les noms de Sobolev et Schwartz aux noms de Newton et Leibniz [Kutateladze 2004]. Yuskevitch explique que ce n'est pas un cas de dispute ici :

> On sait bien que l'établissement d'une priorité chronologique entre plusieurs auteurs d'une découverte scientifique ne se fait pas toujours de manière harmonieuse, mais aujourd'hui il ne conduit plus à des effets aussi négatifs, ni à des disputes violentes, comme ce fut le cas par exemple avec Newton et Leibniz, les artisans de l'analyse infinitésimale.
>
> [Yuskevitch 2004, p.46]

Je mets néanmoins le mot entre guillemets, car les études de controverses ont une signification et une histoire particulière dans les études sur les sciences [18]. Critiqué lorsqu'il s'agit d'étudier les dynamiques de sciences, ce moyen – l'étude des controverses – permet néanmoins de décrire les pratiques de la science et reste un outil méthodologique intéressant. Ici, on ne peut par véritablement parler de controverse, au sens par exemple de l'étude de Collins [Collins 1985], car le débat n'est pas véritablement contemporain aux acteurs (la littérature la plus abondante sur le sujet est très postérieure, à quelques exceptions près). Par contre, et en cela on approche un autre intérêt d'étudier une controverse, le débat est très documenté et s'accompagne de nombreux discours et justifications, notamment sur la nature de cette théorie des distributions et sur la conception de l'histoire des mathématiques, ce qui donne une première image de cette vie collective des mathématiques que l'on cherche à étudier : c'est l'objet de la deuxième partie de ce chapitre. Nous allons ainsi voir que l'image de Newton et Leibniz reste très présente dans ces débats, même si elle va prendre une signification toute autre.

Malgrange répond à Kantor, toujours dans la *Gazette des Mathématiciens* :

> Peut-être aussi qu'il ne s'impose pas de créer à titre posthume une polémique entre deux auteurs, ici Sobolev et Schwartz, polémique qui n'existait pas de leur vivant.
>
> [Malgrange 2004a, p.100]

Car, en effet, la mémoire, les commémorations peuvent créer une controverse, ainsi que le montre Gingras à propos de la relativité ; il analyse cette construction collective et utilise pour cela des méthodes quantitatives [Gingras 2008]. Peut-être du fait de nombreuses telles

18. On peut citer [Pestre 2006] qui en donne les principaux aspects. Les controverses occupent une place importante dans son *Introduction aux science studies*.

occasions de commémoration, la personne de Schwartz est par ailleurs très présente dans l'historiographie sur la théorie des distributions, contrairement à celle de Sobolev, sauf dans les articles déjà mentionnés ([Kantor 2004b], [Kutateladze 2008], [Yuskevitch 2004]).

Plus que d'une controverse, il s'agit ici d'une complexification des aspects collectifs. Comme l'écrit Serge Lang [Lang 2001], dire que les mathématiques sont une entreprise collective, au sens où elles progressent en utilisant des résultats d'autrui, est une tautologie. Néanmoins, les aspects collectifs sont masqués par des revendications d'attribution, voire des mésattributions de résultats, comme ceux qu'il attribue à Weil par exemple [19]. Ni Schwartz, ni Sobolev ne sont intéressés par une polémique de leur vivant [Schwartz 1997], [Malgrange 2004a], [Kutateladze 2004]. Mais les études historiennes mettent l'accent sur les attributions ou bien remettent en cause la direction choisie par Lützen. Le désaccord est géographique. Une lecture courante de la controverse est fait dans le cadres Est/Ouest. La préhistoire de la théorie des distributions telle qu'écrite par Lützen est trop centrée à l'Ouest, suivant [Yuskevitch 2004]. Il écrit ainsi que :

> Si Lützen avait restreint son étude de la préhistoire des distributions à l'Europe de l'Ouest, il eût été naturel d'insister sur les travaux de Schwartz. Mais pour l'étude du développement des mathématiques, comme processus mondial (ce qu'il a toujours été), le plan suivi ne paraît pas correct.
>
> [Yuskevitch 2004, p.49]

Pour lui, la « préhistoire de la théorie des fonctions généralisées de Sobolev (...) reste peu étudiée. » [Yuskevitch 2004, p.46]. Il distingue les réponses apportées dans l'historiographie d'Europe de l'Ouest et celle d'Europe de l'Est [20]. Car c'est à partir du moment où l'on cherche à écrire l'histoire de cette théorie que la controverse apparaît –la question récurrente du rôle de Sobolev, et de la paternité des distributions.

Lützen ou Gelfand sont proposés comme arbitres à cette controverse. L'historien retrace les tendances précédant la théorie ; les acteurs s'effacent derrière les idées, et la réponse aux questions qui ? quand ? se précise avec l'analyse qui est faite tout au long de l'ouvrage jusqu'à reformuler complètement la question. On peut appuyer Lützen en remarquant dans l'historiographie que lorsque l'on parle de distributions ou plutôt de fonctions généralisées, le nom de Sobolev est mentionné ; mais celui de Schwartz est toujours associé à la théorie des distributions, ainsi que le déclare Pisier, à l'occasion d'un discours à l'Académie des Sciences en hommage à Laurent Schwartz, au cours duquel il cite Lützen :

> Bien entendu, d'autres travaux avant les siens avaient préfiguré cette théorie nouvelle, en particulier la notion de « dérivée faible » existant déjà dans certains travaux antérieurs de Wiener, Leray et Friedrichs ou dans ceux de Bochner, Carleman et surtout S. Sobolev dont Schwartz ne connaissait pas les travaux avant 1945. Ce dernier avait introduit de façon très conséquente une notion de fonction généralisée dès 1936 en vue d'étudier certaines équations aux dérivées partielles. Sur cette base, l'École russe revendique d'ailleurs pour Sobolev la paternité rétroactive de ce que l'on appelle couramment dans toutes les langues (sauf peut-être le russe) les « distributions de Schwartz ». Les difficultés de communication Est-Ouest, la guerre et d'autres facteurs expliquent sans doute ce paradoxe : la publication de Sobolev est antérieure, mais tous les développements spectaculaires de la théorie jusqu'à aujourd'hui trouvent leur source dans la théorie de Schwartz. L'historien Lützen qui a écrit un livre sur l'histoire

19. Serge Lang écrit son article en réaction à un récit de Knapp [Knapp 1999], relatant un épisode anecdotique à l'occasion duquel Weil se serait exclamé ne pas être intéressé par les priorités, les mathématiques étant une entreprise collective.

20. L'article de Kantor qui remet en cause le jugement de Lützen sur les travaux de Sobolev s'intitule « Mathématiques d'Est en Ouest. Théorie et pratique : l'exemple des distributions. » [Kantor 2004b]. Dans cet article, il traduit le texte de Yuskevitch qui est en désaccord avec les conclusions de Lützen [Yuskevitch 2004] de l'article russe [Yuskevitch 1993].

> des distributions résume ainsi la situation [Lützen 1982, p.64] : Sobolev inventa les distributions, mais la théorie des distributions fut créée par Schwartz.
>
> [Pisier 2004, p.2-3]

Un deuxième arbitre proposé, caractérisant d'une autre manière les apports respectifs de Sobolev et Schwartz est Gelfand [21] :

> Most mathematicians agree that Israel Gelfand could be ranked as the best arbiter in distribution theory. The series Generalized Functions written by him and his students was started in the mid 1950s and remains one of the heights of the world mathematical literature, the encyclopedia of distribution theory. In the preface to the first edition of the first volume of this series, Gelfand wrote :
> « It was S. L. Sobolev who introduced generalized functions in explicit and now generally accepted form in 1936. The monograph of Schwartz Théorie des Distributiones appeared in 1950–1951. In this book Schwartz systemized the theory of generalized functions, interconnected all previous approaches, laid the theory of topological linear spaces in the foundations of the theory of generalized functions, and obtain a number of essential and far-reaching results. After the publication of Théorie des Distributiones, the generalized functions won exceptionally swift and wide popularity just in two or three years. »
> This is an accurate and just statement. We may agree with it.
>
> [Kutateladze 2008, p.11] [22]

La question de la préhistoire des distributions, qu'on peut avoir tendance à voir comme une querelle (rétrospective) de priorité entre deux hommes se comprend finalement beaucoup mieux comme des discussions au sujet de la manière dont est conçue la vie collective des mathématiques par les mathématiciens eux-mêmes. En effet, on voit très fréquemment ressortir l'argument suivant lequel Sobolev a défini, le premier, les distributions de manière rigoureuse, et Schwartz est celui qui crée une théorie des distributions, donnant ainsi un cadre naturel aux applications possibles [23]. Cette conclusion s'accompagne de réflexions sur la nature de ce qui est reçu, et plus largement sur une conception des mathématiques que nous allons détailler. On aperçoit dès à présent le glissement qui s'effectue de la préhistoire de la théorie à sa réception. Allant même plus loin, Szolem Mandelbrojt utilise une comparaison à la théorie de l'intégration de Lebesgue [24] :

> Il serait impossible de nommer tous ceux qui utilisent cette théorie – à tel point que le nom de l'auteur cesse souvent d'être mentionné, comme on ne mentionne plus le nom de Lebesgue en parlant des ensembles mesurables ou des fonctions intégrables.

Cette comparaison de la théorie des distributions à celle de l'intégration de Lebesgue, c'est une connaissance très largement partagée, et surtout une acception collective de la communauté des mathématiciens de cette théorie.

Ainsi, l'analyse des textes composant l'historiographie à plusieurs niveaux nous a permis tout d'abord de montrer que ces textes participent de la réception de la théorie des distributions, à une période très récente néanmoins. Ces textes montrent surtout une prise de conscience des aspects collectifs de la conception d'une théorie et de son acceptation, que traduisent les réflexions sur sa nature, les débats entre invention et découverte, ainsi que les considérations de la théorie comme étant « classique ». Dans la suite, nous nous intéressons uniquement à la réception de la théorie des distributions de Schwartz.

21. C'est aussi ce que propose Leray, lorsqu'il écrit un rapport complémentaire pour l'Académie des Sciences (Archives de l'Académie des Sciences, dossier biographique Laurent Schwartz. Comité secret du 13 avril 1964. Travaux de M. Laurent Schwartz, rapport annexe, écrit par Jean Leray).

22. Ce même auteur a aussi écrit [Kutateladze 2004] [Kutateladze 2005]

23. Voir par exemple [Lützen 1982, p.120].

24. Archives de l'Académie des Sciences, dossier biographique Laurent Schwartz, Comité secret du 4 novembre 1974

2.1.4 Le « Christophe Colomb des distributions »

Lützen dédicace le volume de son ouvrage qu'il destine à Schwartz par ces mots :

> Au Christophe Colomb des distributions

La comparaison à Christophe Colomb est déjà utilisée par Hadamard, lors qu'il écrit sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique :

> We speak of invention : it would be more correct to speak of discovery. The distinction between these two words is well known : discovery concerns a phenomenon, a law, a being which already existed, but had not been perceived. Colombus discovered America : it existed before him ; on the contrary, Franklin invented the lightning rod : before him there had never been any lightning rod.
>
> [Hadamard 1949, p.xi] [25]

Mais, ainsi qu'il le précise ensuite, cette distinction n'est pas toujours si évidente à faire. C'est aussi l'avis de Schwartz, qui intitule son chapitre « L'invention des distributions » [Schwartz 1997, p.223-266] mais le débute par ces mots :

> L'invention des distributions eut lieu à Paris, au début de novembre 1944, alors que j'avais encore des papiers d'identité au nom illégal de Sélimartin. La découverte, subite, se produisit en une seule nuit.

Il utilise, ici, l'un ou l'autre de ces deux termes. Il précise néanmoins plus loin [Schwartz 1997, p.264] la différence entre « les trouvailles qui sont des découvertes et celles qui sont des inventions », sans pour autant discuter le cas des distributions. La conception qu'il en a est précisée par une citation qu'il indique à Lützen, et que celui-ci commente dans son ouvrage :

> The many answers to the question from the Preface reflects the ambiguity in the term "discover". Schwartz himself has [1978, Interview] drawn my attention to the book, *Democracy Ancient and Modern* [Finley 1973, pp.13-14] in which M. Finley discusses the nature of discovery.
>
> « It was the Greeks, after all, who discovered not only democracy but also politics, the art of reaching decisions by public discussion and then of obeying those decisions as a necessary condition of civilized social existence. I am not concerned to deny the possibility that there were prior examples of democracy, so-called tribal democracies, for instance, or the democracies in early Mesopotamia that some Assyriologists believe they can trace. Whatever the facts may be about the latter, their impact on history, on later societies, was null. The Greeks, and only the Greeks, discovered democracy in that sense, precisely as Christopher Colombus, not some Viking seaman, discovered America.
>
> The Greeks were then – and this no one will dispute – the first to think systematically about politics, to observe, describe, comment and eventually to formulate political theories. »
>
> According to this theory of discovery, Schwartz is evidently the discoverer of the theory of distributions, since he was the first to see the full consequences of his theory and to make a strong influence on the later development of the theory. By choosing 1950 as the boundary between the prehistory and the history of the theory of distributions, I have used a definition of discovery similar to Finley's. However, just as the Vikings' discovery of America was a great event, so Sobolev's definition and use of distributions is a highlight of the prehistory of distributions.
>
> [Lützen 1982, p.159-160]

25. Cet essai est paru en 1945 [Hadamard 1945], et dans une édition élargie en 1949, que l'on cite ici[Hadamard 1949]. Il est traduit en français en 1959 [Hadamard 1959].

Les différentes étapes de la découverte sont décrites par Schwartz, dans un article écrit en 1987 intitulé : « De certains processus mentaux dans la découverte en mathématiques » [Schwartz 1987], ainsi que dans son autobiographie. Il y donne l'image de la « percolation », puis de l'« illumination ». Il raconte la « sèche » nécessaire au travail de recherche. Il décrit le « déclencheur final » et le « déclic », ainsi que la « plus belle nuit de sa vie ». La découverte est soudaine et l'enthousiasme est important. Les termes utilisés par Schwartz, ainsi que la comparaison à Poincaré qu'il donne sont très proches de l'ouvrage d'Hadamard déjà cité. Hadamard s'appuie en effet notamment sur le récit de Poincaré, ainsi que sur l'étude de *L'Enseignement Mathématique* présentée en introduction. L'invention est liée à un choix, l'« illumination » est précédée d'une « incubation », puis, dans certains exemples, suivie d'une nuit blanche...

La vision présentée ici traduit une conception assez solitaire du travail mathématique, où les principales découvertes sont faites au cours d'une « nuit merveilleuse ». Schwartz nous décrit ainsi son « palais intérieur », la manière dont ses connaissances mathématiques sont structurées dans son cerveau.

Mais son chapitre sur l'invention des distributions ne s'arrête pas à l'explication de sa théorie sur l'invention ou la découverte. Schwartz y présente des sources mathématiques, de nombreux mathématiciens dont les travaux ont précédé ses distributions. Lorsqu'il choisit l'image de la percolation, il écrit :

> Il arrive que les préliminaires d'une découverte importante ne soient pas publiables et que personne ne les remarque. Si celui qui les a faites ne les garde pas à l'esprit, rien n'en sortira. Mais l'esprit humain amasse, et l'auteur des préliminaires peut être ainsi celui-là même qui fraiera le chemin à la découverte. Comme ce peut être également plusieurs mathématiciens.
>
> [Schwartz 1997, p.225]

Le chemin qui mène à la découverte, la percolation, se fait donc en plusieurs étapes, voire à plusieurs mains.

La présentation de Schwartz en « Christophe Colomb » des distributions semble à première vue aller à l'encontre du bilan provisoire tiré à la suite de l'étude de la « controverse » précédemment. Une vision solitaire du travail mathématique et une découverte soudaine, tels sont les aspects résumant l'expérience de Schwartz. Néanmoins, il élargit son expérience personnelle instantanée par l'image de la percolation, lui permettant de réintroduire les aspects collectifs de la conception d'une théorie mathématique. Pour lui, la construction d'une théorie mathématique est une œuvre collective, les distributions étaient « in the air » [26]. Ainsi Schwartz présente-t-il sa contribution à l'histoire des distributions dans son autobiographie :

> Certaines époques se prêtent plus que d'autres à une découverte complète. Quand je trouvai les distributions d'un seul coup, non seulement j'y étais préparé par mes réflexions précédentes, mais l'époque était très propice en raison des travaux antérieurs de nombreux mathématiciens. Si je ne les avais pas trouvées, il me paraît certain qu'on l'aurait fait dans les quelques années qui ont suivi.
>
> [Schwartz 1997, p.225]

Un exemple plus général d'une telle analyse, qui dépasse le cadre mathématique, se trouve dans l'étude du structuralisme par David Aubin, dans laquelle il définit des « connecteurs culturels » pour traduire l'idée que le structuralisme était « in the air » [Aubin 1997, p.298].

On voit donc ici que la manière dont les acteurs présentent la théorie des distributions traduit plus largement une certaine conception de l'histoire des mathématiques dans laquelle les aspects collectifs sont essentiels, et modèlent leur argument. Nous revenons sur

26. Lützen écrit quelques mots en conclusion [Lützen 1982, p.163].

cela dans la partie suivante, notamment à l'occasion de la présentation des travaux de Schwartz à l'Académie des Sciences.

2.2 Réception de la théorie des distributions de Schwartz dans des contextes précis.

Des récits et témoignages sur les premières années de la théorie des distributions de Schwartz, on peut extraire des pistes vers lesquelles on pourrait s'orienter pour en étudier la réception . On voit tout d'abord l'importance d'autres contextes internationaux, notamment Europe du Nord (voir chapitre 3) et États-Unis. Certains canaux de diffusion sont aussi présentés : colloques (voir chapitre 3), livres, cours. On est surtout frappés par l'enthousiasme et l'aspect passionné des témoignages, que les citations proposées ici tendent à reproduire. Nous nous attardons ensuite sur la réception de la théorie de Schwartz dans deux contextes précis : à savoir son élection à l'Académie des Sciences, qui donne lieu à de nombreux rapports jugeant sa théorie ; et la réception active par un mathématicien, Hörmander, qui s'accompagne d'une adaptation de la théorie que l'on présentera au chapitre 4.

La réception de la théorie des distributions est très souvent décrite en termes de réception enthousiaste [27] ou bien au contraire hostile ; elle est tour à tour présentée comme étant un succès ou bien critiquée. Beaucoup d'articles de l'historiographie se placent du point de vue d'un contexte national, institutionnel ou bien disciplinaire. Certains articles veulent rappeler que l'enthousiasme actuel n'a pas toujours été de mise, et que la théorie des distributions n'a pas toujours été bien reçue.

Lars Gårding résume l'hostilité de la première réception ainsi :

> At the time the theory of distributions got a rather lukewarm and sometimes even hostile reception among mathematicians. Analysts of an older school could joke that « Your distributions may be all right, but you are only really happy when you find a function. » Bochner's review (1953) of *Théorie des distributions* has a heavy, sarcastic ending : « We have recounted all this view suggesting that it would not be easy to decide what genereal innovations in the present work are analytical and even conceptual, and that it is in order to appraise the value of the book by its specific results, such as we have extracted above ; and of such let the author produce many more, by all means. » The Swedish Arne Beurling, a specialist in harmonic analysis, muttered à propos distributions and Laurent Schwartz that « he has no uniqueness theorem ».
>
> [Gårding 1997a, p.80]

Il précise que cette hostilité est celle des analystes d'une école plus ancienne ; ou bien encore de spécialistes du domaine tels Bochner, dont la recension du traité de Schwartz n'est guère enthousiaste [28], ou encore Beurling. Lützen conclue son ouvrage sur quelques réticences, surtout celles de Courant [Lützen 1982, p.161-162] ; les réactions de Courant et Friedrichs sont décrites par [Lax 2004] et Nirenberg mentionne les premiers séminaires sur les distributions à l'Institut Courant à New-York [Nirenberg 2003]. L'acceptation est mitigée ; néanmoins le souvenir laissé par la visite de Schwartz est enthousiate :

> We enjoyed a year-long visit from Laurent Schwartz to the Courant Institute in the sixties. He taught a course on functional analysis which he prepared very carefully. Our students, who were used to a looser lecturing style, loved it
>
> [Nirenberg 2003]

27. La réception enthousiaste connue par les premières conférences de Schwartz est décrite au chapitre 3.
28. On cite cette recension et on la commente au chapitre 4.

L'enthousiasme est de mise en Finlande :

> Bien sûr, la France était si forte en mathématiques qu'elle ne pouvait tomber dans l'oubli en Finlande. On discutait beaucoup du Bourbakisme, on exprima des opinions pour et contre. (...) À partir des années cinquante, je peux porter témoignage personnellement de l'influence française sur les mathématiques finlandaises, étant devenu enseignant à l'Université d'Helsinki en 1951. Je me rappelle l'ardeur avec laquelle un groupe de jeunes mathématiciens qui se réunissait le soir essayait de se familiariser avec la théorie des distributions de Laurent Schwartz, médaille Fields en 1950. (...)
>
> [Lehto 1994, p.55]

Ces quelques exemples sont issus des souvenirs de témoins des premières années des distributions dans différents contextes ; ils relatent la manière dont elles ont été reçues dans ces différents endroits. Ce que montrent surtout ces récits, c'est la passion que suscite cette théorie : on s'y intéresse, on la présente en séminaire, on invite Schwartz à parler, on la critique...elle ne laisse pas indifférent.

Au-delà de ces premières impressions, c'est grâce à de nombreux mathématiciens actifs que la théorie des distributions s'est fait connaître. Même si ceux-ci sont beaucoup moins présents que Schwartz dans l'historiographie, ils sont parfois mentionnés, ainsi Gelfand, dont les ouvrages ont joués un rôle fondamental :

> In Russia distributions were taught under the name of generalized function in an attractive series of books by Gelfand and coauthors.
>
> [Gårding 1997a, p.81]

Les scènes de l'Europe du Nord et des États-Unis semblent à première vue être des lieux importants où étudier cette réception hors de France. Les différents canaux de réception mentionnés ici, à savoir livres, conférences, voyages mettent l'accent sur les différents modes de circulation de la théorie des distributions. Nous allons maintenant nous attarder sur la réception dans deux contextes précis : son élection à l'Académie des Sciences, pour laquelle la théorie des distributions est présentée dans des rapports écrits par des académiciens, et sa réception-transformation par Hörmander, dont nous présentons ici les premiers traits, avant d'y revenir plus longuement au chapitre 4.

2.2.1 Élection à l'Académie des Sciences

L' « élection » de la théorie des distributions et de Schwartz à l'Académie des Sciences se fait en plusieurs étapes, des années 1950 jusqu'à l'élection de Schwartz dans la section de géométrie en 1975. Schwartz est élu juste avant que l'Académie des Sciences ne modifie ses statuts et augmente le nombre de ses membres, afin de suivre l'évolution de la communauté scientifique internationale.

La théorie des distributions est bien reçue au sein de l'Académie des Sciences, qui décerne à Schwartz le Prix Carrière en 1955 pour ses travaux sur les distributions. Schwartz est par ailleurs sur la liste des candidats de la section de géométrie dès 1956. En 1952, la section de Géométrie de l'Académie des Sciences se compose de six membres : Jacques Hadamard (1865-1963), élu en 1912 ; Émile Borel (1871-1956), élu en 1921 ; Gaston Julia (1893-1978), élu en 1934 ; Paul Montel (1937-1975), élu en 1937 ; Arnaud Denjoy (1884-1974), élu en 1942 et René Garnier (1887-1984) qui est élu à la suite d'Élie Cartan (1869-1951). En mai 1952, lors d'une séance du Conseil d'Instruction de l'École polytechnique [29], Paul Lévy indique « Je crois que la section de Géométrie de l'Académie des Sciences a proposé M. SCHWARTZ pour être mis sur la liste des six candidats proposés. » Gaston Julia, membre de la section, confirme ce point. On ne trouve néanmoins trace de Schwartz

29. Archives de l'École polytechnique, Procès-Verbal du Conseil d'Instruction, 6 mai 1952.

qu'en 1956, lors de l'élection suivante suite au décès d'Émile Borel. Les candidats proposés sont en première ligne Maurice Fréchet, en seconde ligne Paul Lévy, puis Henri Cartan et Szolem Mandelbrojt, et enfin, Jean Favard et Laurent Schwartz ; Paul Dubreil est rajouté par l'Académie. La section de géométrie est très réduite à cette date. Ainsi que cela est précisé sur la page « Histoire » du site internet de l'Académie des Sciences [30] :

> Au début du XX^{e} siècle, l'augmentation du nombre de membres (78 en 1909, 90 en 1918, 100 en 1964) et d'associés étrangers (12 en 1909, 20 en 1954) est sans commune mesure avec l'accroissement de la communauté scientifique internationale.

Chaque élection est préparée par une réunion du « Comité secret » au cours duquel sont exposés les travaux des différents candidats. C'est au cours de cette réunion que l'Académie des Sciences donne une liste ; l'élection a lieu la semaine suivante. En 1956, on a ainsi un rapport de Gaston Julia qui présente les travaux de Schwartz [31]. Fréchet est élu le 14 mai 1956.

En 1958, lorsque l'Académie détermine la constitution des délégations françaises à l'Assemblée de l'Union Internationale des Mathématiques (Edimbourg, 14 au 21 août 1958, à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens), Schwartz est désigné comme l'un des suppléants [32].

Paul Levy est élu le 20 avril 1964, en remplacement d'Hadamard (mort en 1963) ; Schwartz est toujours parmi les candidats proposés. En 1972, Szolem Maldelbrojt est élu et le prix Cognac-Jay est attribué à 50% Schwartz, 25% Lions, 25% Malgrange. Leray écrit un rapport à la remise de ce prix, en donnant des détails sur la préhistoire et l'histoire de la théorie des distributions [33]. Schwartz est élu correspondant le 2 mai 1973. On a ensuite plusieurs rapports sur les travaux de Schwartz (Comité secret du 21 janvier 1974, Rapport écrit par Mandelbrojt ; Comité secret 4 novembre 1974, rapports écrits par Mandelbrojt et Dieudonné [34]). Henri Cartan est élu le 28 janvier 1974, suite à la mort de Denjoy. Enfin, Dieudonné et Alfred Kastler, physicien, présentent deux rapports lors du Comité secret du 17 février 1975, et Schwartz est finalement élu le 24 février 1975 [35], remplaçant ainsi Paul Montel. Ces nombreux rapports sont très intéressants et sont cités maintes fois dans le reste du chapitre. Ainsi, par exemple, Kastler, qui intitule son rapport « L'œuvre de Laurent

30. http ://www.academie-sciences.fr/academie/histoire.htm (Page consultée le 20 août 2013).
31. Rapport sur les travaux de Laurent Schwartz par Gaston Julia. Archives de l'Académie des Sciences, dossier biographique Laurent Schwartz.
32. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, Tome 246 partie 1, p.1940
33. Archives de l' Académie des Sciences, dossier Laurent Schwartz ou bien Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, A.I.8.8.
34. Archives de l'Académie des Sciences, dossier biographique Laurent Schwartz.
35. Le 15 novembre 1976, l'Académie a de nouveaux statuts. La section de géométrie devient section de mathématiques, et le nombre de membres augmente de manière conséquente. Ainsi [36] :

> Face à l'essor des sciences et de leurs applications d'une part et à l'organisation de la recherche scientifique en France d'autre part, l'Académie entreprend, successivement en 1976 (décret du 15 novembre 1976) puis au début des années 2000 (décrets du 2 mai 2002 et du 31 janvier 2003), des réformes majeures dans sa composition et ses modalités d'action. Actuellement le nombre de membres âgés de moins de 75 ans peut atteindre 250. Lors de chaque élection, la moitié des élus doit être âgée de moins de 55 ans. Le nombre d'associés étrangers est de 150. L'élection de correspondants est arrêtée. Ces nouveaux statuts permettent à l'Académie de mieux jouer son rôle de réflexion, d'évaluation et de proposition sur les questions de société posées par le développement des sciences et des techniques, sur l'organisation et la qualité de la recherche et de l'enseignement des sciences, sur le développement des relations scientifiques internationales, et enfin sur le rayonnement et la diffusion de la science auprès du public. La loi de programme pour la recherche (18 avril 2006) complète les dispositions en octroyant à l'Institut de France et à chacune des cinq Académies une grande autonomie.

Schwartz et la Physique », conclue-t-il, après avoir expliqué l'importance des distributions en physique, qu'il est important pour l'Académie de faire entrer un mathématicien de stature internationale :

> Nous avons discuté récemment, mes chers confrères, des moyens exceptionnels à mettre en œuvre pour associer à notre compagnie des hommes de science de renommée internationale qui font honneur à notre pays. Cette fois-ci nous avons un moyen normal pour le faire. Profitons-en. Ne laissons pas échapper cette occasion.

Les autres rapports présentent la théorie des distributions principalement, et l'originalité du travail de Schwartz.

On peut noter que les premiers Bourbakis entrent en nombre à l'Académie des Sciences à partir des années soixante. Henri Cartan devient correspondant le 5 avril 1965 en même temps que Claude Chevalley ; et Dieudonné est élu membre non résident le 28 juin 1968 ; Cartan est élu le 28 janvier 1974, suite à la mort de Denjoy. Szolem Mandelbrojt est élu membre le 23 octobre 1972. André Weil est élu membre le 15 mars 1982. Coulomb (physicien présent aux débuts de Bourbaki pour très peu de temps) est, quant à lui, membre de la section d'astronomie dès 1960. Jean-Pierre Serre, qui est « cobaye » puis membre de Bourbaki à partir de 1949, entre à l'Académie en 1976.

Une certaine conception de l'histoire des mathématiques

Dans les rapports présentés, la théorie des distributions de Schwartz est souvent associée au calcul différentiel et intégral. On peut en donner une explication très simple, ainsi que le propose Alain Connes lorsqu'il écrit la notice nécrologique de Schwartz [37] :

> En généralisant la notion classique de fonctions, il a formulé clairement et mis au point un concept nouveau permettant d'utiliser la dérivation et la transformation de Fourier dans des situations inaccessibles au calcul différentiel de Newton et Leibniz.

Mais la principale utilisation de cette association, entre la théorie des distributions de Schwartz et le calcul différentiel de Newton et Leibniz, traduit une certaine conception de l'histoire des mathématiques, qui est également celle de Schwartz : la construction d'une théorie mathématique est une œuvre collective. Dieudonné explicite la comparaison de la théorie des distributions à celle du calcul différentiel et intégral ainsi [38]

> Laurent Schwartz est universellement connu comme le créateur de la théorie des distributions. S'agissant d'un des importants évènements de l'histoire de l'Analyse mathématique, je vous demanderai la permission de développer quelques considérations historiques, qui à mon avis, en font mieux saisir la nature et la portée.
>
> Il est communément admis que l'invention du Calcul infinitésimal est due, de façon indépendante, à Newton et Leibniz. Pourtant, si l'on se reporte aux œuvres des mathématiciens du XVIIe siècle, on constate que dès 1630, donc avant la naissance de Newton et de Leibniz, des savants tels que Fermat, Descartes, Cavalieri, Roberval résolvaient couramment, par des méthodes de nature infinitésimales, des problèmes tels que la détermination de tangentes à une courbe, de points d'inflexion, de centres instantanés de rotation, des calculs d'aires et de volumes, la recherche de maxima et minima, etc. ; activités qui, un peu plus tard (alors que Newton et Leibniz sont encore sur les bancs de l'école) se complètent par les premières rectifications d'arcs de courbure, les premiers exemples de développements en série entière, de déterminations

37. Alain Connes, novembre 2002. Notice nécrologique. Lien : http ://www.academie-sciences.fr/academie/membre/Schwartz_ Laurent.htm (Page consultée le 9 août 2013)

38. Présentation de L. Schwartz par Jean Dieudonné, Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz, Comité secret du 17 février 1975.

> de courbes satisfaisant à des conditions équivalentes à des équations différentielles, et ainsi de suite. On serait tenté de conclure que l'attribution de l'invention du Calcul infinitésimal à Newton et Leibniz est une grossière erreur historique.

A l'époque de Newton et Leibniz, on utilise couramment des méthodes infinitésimales, et ce, depuis des années. Il décrit de manière similaire le contexte dans lequel s'est développée la théorie des distributions :

> L'histoire de la théorie des distributions s'est déroulée de façon très semblable. (...) de leur côté, ingénieurs et physiciens tels qu'Heaviside ou Dirac allaient de l'avant sans s'embarrasser de rigueur mathématique et obtenaient des algorithmes d'une élégante efficacité que les mathématiciens enviaient sans oser les imiter. Aussi, à partir de 1930 environ, voit-on de divers côtés surgir les principales idées qui vont former l'armature de la théorie des distributions : leur définition comme fonctionnelles et leurs propriétés essentielles de passage à la limite (notamment leur dérivation) chez Sobolev en 1936 ; l'extension de la transformation de Fourier aux distributions tempérées chez Bochner dès 1932 et chez Carleman vers la même époque ; la régularisation par convolution avec des fonctions indéfiniment dérivables à support compact chez Wiener dès 1926 et plus tard chez Soboloev et chez Friedrichs et son école ; à quoi il faudrait ajouter les "parties finies d'intégrales" remontant à Hadamard, les "solutions faibles" d'équations aux dérivées partielles qu'on trouve déjà chez Poincaré, et même les "valeurs principales d'intégrales" de Cauchy. Mais tout cela restait fragmentaire et décousu et je puis témoigner que les mathématiciens de cette époque ne se rendaient absolument pas compte de la parenté profonde entre tous ces travaux ni de leurs rapports avec les algorithmes des physiciens.

Bien avant Schwartz, on utilise des fonctionnelles, on étend la transformée de Fourier, on parle de solutions faibles, de parties finies d'intégrales. Mandelbrojt, lui aussi, considère l'histoire de la même manière [39] :

> Rappelons, et je sais bien que j'exagère en prenant cet exemple, que les éléments, ou des éléments de la géométrie existaient bien avant la création de la géométrie euclidienne. De même, bien que l'invention du calcul infinitésimal soit attribué, à juste titre, à Newton et à Leibniz, on ne peut pas nier qu'avant ces mathématiciens d'autres savants (Fermat, Roberval...) utilisaient bien des notions semblables à celle de dérivée.

Il utilise même un deuxième exemple, celui de la géométrie euclidienne et des *Éléments* d'Euclide qui en sont une synthèse. De même qu'on utilisait des notions semblables à celle de dérivée avant Newton et Leibniz, on utilise des notions semblables à celle de distribution avant Schwartz.

Mais alors, si le contexte est ainsi dans ces deux cas, pourquoi attribue-t-on le calcul différentiel et intégral à Newton et Leibniz ? Et la théorie des distributions à Schwartz ? Dieudonné explicite, encore de manière parallèle, quel a été leur apport à la théorie [40] :

> Ce serait négliger un point qui paraît fondamental dans l'histoire des mathématiques, l'importance des notions générales, des notations et des algorithmes : l'exemple de l'algèbre, qui a mis des siècles à démarrer, est très instructif à cet égard. Les mathématiciens de la première moitié du XVIIe siècle avaient d'excellentes idées intuitives sur les processus impliquant des "passages à la limite" et la façon de les mettre en

39. Archives de l'Académie des Sciences, dossier biographique Laurent Schwartz, Comité secret du 4 novembre 1974

40. Présentation de L. Schwartz par Jean Dieudonné, Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz, Comité secret du 17 février 1975.

> œuvre ; mais cela n'allait pas au-delà d'une "méthode" générale, et dans chaque cas particulier, il leur fallait utiliser des raisonnements ad hoc, souvent fort compliqués et assortis de multiples figures permettant de suivre pas à pas le passage à la limite. Ce qu'apportèrent Newton et surtout Leibniz, ce sont les notions générales sous-jacentes à tous ces procédés : dérivée, différentielle, intégrale ; des notations commodes pour les désigner (personne n'a pu améliorer jusqu'ici la notation leibnizienne de l'intégrale) ; enfin, les algorithmes généraux gouvernant leur emploi, qui ont réduit à d'élémentaires exercices pour débutants les problèmes auxquels s'attaquaient les plus grands mathématiciens des âges précédents, et permis les énormes progrès de l'Analyse des 2 siècles suivants. Il n'y a donc aucune injustice à rendre hommage à Newton et Leibniz pour une œuvre qui a marqué un tournant capital dans l'histoire des sciences.

Et pour Schwartz [41] :

> Le mérite de Schwartz a été tout d'abord de réaliser en très peu de temps (1945-46) l'indispensable synthèse de ces diverses idées, en apportant à la fois les notions de base (dont beaucoup, comme celles de support ou de convolution, n'avaient même pas été effleurées en général), les notations, encore en usage aujourd'hui, et surtout en dégageant pour la première fois les algorithmes généraux, de nature algébrique et topologique, qui donnent à la théorie toute sa souplesse et son efficacité. La communauté mathématique internationale comprit rapidement la valeur de l'outil nouveau ainsi forgé, puisque 5 ans à peine après la parution du premier article de Schwartz, elle couronnait ses recherches par l'attribution d'une médaille Fields. Depuis lors, bientôt 30 années d'usage constant dans une foule de questions de mathématiques et de physique théorique n'ont fait que renforcer le rôle que jouent les distributions dans la science d'aujourd'hui, à tel point que leur théorie est devenue un sujet dont la connaissance est exigée des étudiants du niveau de la Maîtrise dans de nombreuses Universités.

Les notions générales et la synthèse, les notations, les algorithmes généraux dégagés, l'efficacité de la théorie, un nouvel outil utilisable : tels sont les caractéristiques des travaux de Newton et Leibniz, des travaux de Schwartz, et qui justifient de la leur attribuer, selon Dieudonné.

Les derniers mots de Dieudonné sont en quelque sorte précisés par Malgrange, qui compare, quant à lui, Newton et Schwartz [Malgrange 2011, p.] :

> Cette théorie fait aujourd'hui partie du bagage de base des mathématiciens ; quand on considère une distribution, on ne pense pas plus à citer Schwartz qu'on ne cite Newton quand on dérive une fonction, ou Descartes quand on prend des coordonnées. Ceci est, à mon sens, le sommet de la notoriété.

On revient ici à la considération de la théorie comme adoptée collectivement par la communauté mathématicienne.

Les rapports écrits par Dieudonné pour l'Académie des Sciences proposent une comparaison suivie entre le calcul différentiel et intégral et la théorie des distributions ; entre Newton et Leibniz et Schwartz [42]. Ce développement traduit une conception particulière de l'histoire des mathématiques, une tension entre le travail collectif et l'apport individuel. La comparaison choisie, à savoir la référence au calcul différentiel et intégral qui est utilisé et connu de tous les membres de l'Académie des Sciences, est une manière de favoriser la reconnaissance du travail de Schwartz à une communauté plus large. En un sens, l'élection de Schwartz à l'Académie des Sciences est aussi celle de sa théorie des distributions.

41. ibid.

42. Dieudonné réinvestit cette comparaison dans ses travaux d'histoire des mathématiques, voir par exemple [Dieudonné 1981, p.231]

2.2.2 Récepteurs actifs : l'exemple d'Hörmander

Lars Hörmander (1931-2012) est un mathématicien suédois [43], l'un des premiers à se servir des distributions de Schwartz dans sa thèse, sous la direction de Marcel Riesz, puis Lars Garding. Il raconte qu'il est arrivé, par hasard, après être tombé sur le livre de Schwartz, à Nancy alors jeune étudiant

> As a young student with a fresh licentiate degree I got an opportunity to go abroad to look for new impulses in the Spring of 1952. First I went to Zürich where I arrived between semesters and did not find much in my line of interest even after a new semester started. By chance I saw a copy of *Théorie des distributions* by Laurent Schwartz in a book store, bought it, and read it with enthusiasm. As a result I changed my Swiss francs to French francs and took off to Nancy where I arrived just when the semester ended there. My planning for this first trip abroad could not have been worse! If my memory is correct I was just in time to hear the last lecture by Schwartz in a course on harmonic forms on Kähler manifolds, which of course went far above my had. However, I was introduced to Schwartz by the American mathematician Edwin Hewitt whom I had met previously in Sweden, and with Hewitt and his wife I was invited to lunch at his home. The pleasantly relaxed and hospitable atmosphere there is my first memory of him.
>
> [*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens* 2003, p.59]

Son enthousiasme pour le livre de Schwartz, ainsi qu'il l'écrit, n'est pas bien reçu par Marcel Riesz –Schwartz le confirme lors de son voyage en Suède, ainsi que nous le verrons au prochain chapitre. Néanmoins, nous allons voir deux manières selon lesquelles Hörmander a été particulièrement actif dans la diffusion de cette théorie des distributions. Tout d'abord, il en fait usage dans sa thèse, ainsi que cela est rapporté par Gårding ; avec Malgrange, il est même l'un des premiers à s'en servir ainsi :

> The theses by Malgrange (1955) and Hörmander (1955) were the first comprehensive treatments of this field. Malgrange used distributions and Schwartz's notations systematically and devoted himself also to convolution equations. Hörmander used distributions quite sparsely. Instead, square integrable functions were extensively employed.
>
> [Gårding 1997a]

Hörmander fait un usage moins intensif des distributions que Malgrange, ce qui rassure son directeur de thèse ([Gårding 1997a]). On voit néanmoins dans sa thèse, publiée dans *Acta Mathematica* [Hörmander 1955] que s'il se sert localement de la théorie des distributions, il est très familier avec le livre de Schwartz. Il consacre la section 3.4 [Hörmander 1955, p.222-229] à la construction et à la détermination de propriétés des solutions fondamentales de certains opérateurs. Ainsi qu'il le précise au début de la section, il utilise constamment la théorie des distributions de Schwartz, ainsi que la définition de solution fondamentale que ce dernier a introduit dans son traité [Schwartz 1950c].

Mais la manière la plus efficace avec laquelle il fait connaître les distributions est peut-être la publication de son livre, en 1963, dans lequel il introduit les distributions comme étant l'outil qu'il utilise pour résoudre des problèmes d'analyse classique [44] :

> In Hörmander's comprehensive book (1963) time was ripe for the systematic use of distributions in the theory of partial differential operators. It starts with a terse chapter of distribution theory and in the sequel the notions introduced are used as a matter of

43. Il obtient la médaille Fields en 1962, pour ses travaux sur les équations aux dérivées partielles. Pour une présentation de ses travaux mathématiques, on peut lire [Gårding 1963] (écrit à l'occasion de sa médaille Fields), et [Gårding 1988] (écrit lorsqu'Hörmander reçoit le prix Wolf en 1988).

44. Nous verrons les détails mathématiques de cette présentation au chapitre 4.

> course. Here distributions are used as a natural tool and the problems are the classical ones of the structure of solutions and existence and uniqueness of various boundary problems.
>
> [Gårding 1997a]

Hörmander raconte qu'il s'agit de la publication d'exposés donnés à Stockholm, et qu'il inclue cette présentation parce que la théorie des distributions n'est alors pas encore bien connue. Il insiste sur les aspects d'analyse, et minimise l'analyse fonctionnelle [45] :

> When I published my first book [H5] on partial differential equations in 1963, I wrote an introductory chapter on distribution theory, based on lecture note of a course I had give at Stockholm University. Since distribution theory was not so widely known and appreciated at that time it seemed necessary to give such preliminaries which emphasized its "hard analysis" contents and minimized functional analysis aspects. The chapter was rather condensed and written withe a reader in mind who had some classical background on partial differential operators.
>
> [Hörmander 2003]

À l'occasion d'échanges de courrier entre Schwartz et Hörmander suite à la publication de l'autobiographie de Schwartz, dans laquelle Schwartz crédite Hörmander et Malgrange comme étant les premiers à diffuser la théorie de manière active, Hörmander précise qu'il ne pensait pas uniquement en termes de distributions dans sa thèse, parce que son directeur, Riesz, y était opposé. Mais après sa thèse, il écrit que :

> after my thesis, I no longer hesitated to come out in the open as a believer in your distributions.
>
> [Hörmander 2003, p.61]

Le terme qu'il emploie, « believer » (« croyant ») montre qu'il lui fallait alors faire acte de foi envers les distributions, dans un climat non totalement favorable. Schwartz répond qu'il l'a toujours considéré comme un supporter complet des distributions.

Le cas particulier d'Hörmander complexifie l'histoire de la réception de la théorie des distributions, et précise surtout le rôle indispensable des acteurs de cette réception. Nous renvoyons au chapitre 4, dans lequel on voit que la réception de la théorie des distributions passe par son adaptation par Hörmander.

2.3 Schwartz acteur de la réception de sa théorie des distributions : ses recensions pour les *Mathematical Reviews* (1947-1958)

S'intéresser à Schwartz en particulier comme acteur de la réception de sa théorie des distributions fait à nouveau intervenir différents canaux et différents rôles. Schwartz est au cœur de l'historiographie sur la théorie des distributions, et on lui reconnaît un rôle actif dans le succès de sa théorie, ainsi que l'écrit Gårding :

> The initial success of the theory was due to an enthusiastic forward marketing and to Laurent Schwartz's conviction of the importance of distributions and the fiery lectures he gave in several European countries after the war. I met him the first time at such a lecture in Lund in the fall of 1948. Like many in his audiences I will forever remerber his powerful rendering and insistent French intonation of one of his first sentences : *Les fonctions indéfiniment différentiables et nulles en dehors d'un compact*
>
> [Gårding 1997a, p.79-80]

45. C'est précisément l'objet du chapitre 4, et la raison pour laquelle Hörmander en est un acteur privilégié.

Les rôles et canaux par lesquels Schwartz participent à la réception de sa théorie des distributions sont ceux auxquels on s'attend. Il publie des articles puis un traité général sur sa théorie. On reconnaît à Schwartz le mérite d'être un excellent orateur, et donc un professeur très apprécié et un conférencier dont on se souvient. Il est aussi un directeur de thèse très proche de ses élèves (Nancy, Paris pour cette période). Si la première étape peut être la réception de son premier article [**td45**], il semble que cela n'en soit pas le biais principal. Sont ainsi évaluées et commentées la manière dont Schwartz a fait connaître ses travaux en 1948, alors qu'il est candidat à l'École polytechnique [46]. Ainsi Valiron souligne-t-il que Schwartz « a négligé peut-être de faire des publications qu'auraient faites d'autres mathématiciens. Il n'a pas publié de notes aux comptes rendus, il a donné tous ses résultats dans un petit mémoire de l'Université de Grenoble. ». Il rappelle par contre qu'il a été « chargé de fonctions au Collège de France » – Schwartz est en effet chargé du cours Peccot en 1946 – et qu'il « a été amené à exposer ses méthodes dans plusieurs pays, il n'a pu jusqu'à présent accepter les invitations qui lui étaient faites ». Levy précise lui aussi que Schwartz est « matériellement très pris, que ses travaux sont connus par des conférences et non par des publications. » Car en effet, Schwartz privilégie les conférences, et ne publie les deux volumes de son traité sur la théorie des distributions, [Schwartz 1950c], [Schwartz 1951d], qu'à partir de 1950. Cartan se rappelle de ce livre très attendu : :

> Je suis tout de suite enthousiasmé ; mais sans doute Schwartz n'avait-il pas besoin de mes encouragements, car il était déjà bien lancé. Ses idées évoluent d'ailleurs très vite ; au bout de peu de temps il me parle déjà de la transformations de Fourier des distributions tempérées (qui s'appelaient alors "sphériques"). Il faudrait rédiger ; mais là c'est le drame, car il n'en a pas le temps : trop d'idées nouvelles se bousculent, il y a trop d'applications entrevues, et il faudrait laisser les choses mûrir. Cette non-rédaction fâche beaucoup André Weil, qui est au courant par-dessus l'Atlantique. Paradoxalement la première publication où l'on utilise les distributions est la thèse de Jacques Deny, qui s'en sert magnifiquement en théorie du potentiel. Schwartz publie tout de même en 1946 un court article de 8 pages, que Brelot s'est empressé de prendre pour les *Annales de l'université de Grenoble* (qui ne s'appelaient pas encore *Annales de l'Institut Fourier*). C'est seulement en 1950 et 1951 que sortiront les deux volumes de Schwartz sur la théorie des distributions dans la série des *Publications de l'université de Strasbourg* ; cette première édition ne comportait pas encore de papillons sur la couverture.
>
> [Cartan 2003, p.25-26]

À côté de ces publications peu nombreuses, Schwartz parle énormément : il donne des cours, des conférences ; cela sera documenté au chapitre suivant : la tournée des conférences de Schwartz est un facteur essentiel de l'internationalisation de sa théorie.

Schwartz considéré comme étant un professeur exceptionnel. Ainsi s'en souviennent ceux qui l'ont un jour entendu. Il profite du cours Méthodes Mathématiques pour la Physique, dès 1955, pour enseigner ses distributions, qui vont donc par là même devenir très rapidement une théorie classique, car connue d'un grand nombre d'étudiants. Jacques Roubaud [47] en donne un récit très vivant et imagé que l'on trouve en annexe, Annexe C p.301. Outre ce récit, de nombreux témoignages nous livrent différents ressorts pédagogiques, les effets de style pour capter l'auditoire dont Schwartz se sert et qui marque les étudiants [Bony 2003, p.55], [Schwartz 2003a], [Montbrial 2003], [Baouendi 2003], [Demazure 2003,

46. Archives de l'École polytechnique, Conseil d'Instruction, séance du 12 juin 1948.

47. Jacques Roubaud est un mathématicien et poète français, membre de l'Oulipo (OUvroir de LIttérature POtentielle). Son livre *Mathématique* [Roubaud 1997] s'ouvre sur les premiers cours de Choquet à l'Institut Henri Poincaré. Il y parle aussi de Schwartz, en indiquant qu'il prenait les étudiants à témoin pendant ses cours (p.64) et le présente (p.87-88). On livre en annexe un long passage (p.90-95) qui décrit l'ambiance lors de ses cours.

p.33]. Les étudiants sortent éblouis, fascinés, agacés...pour se rendre compte qu'ils n'ont pas retenu grand chose de l'exposé qui leur avait paru si clair dans la bouche de Schwartz. Mais le cours ne les laisse pas indifférent, et, plus que la théorie des distributions elle-même, c'est d'abord le professeur qui les marque. La théorie des distributions devient bien connue par ces étudiants parce que le cours est très célèbre, parce que l'enseignant est exceptionnel ; même si cela reste une des raisons parmi d'autres.

Schwartz en tant que conférencier, et le rôle que ses exposés ont joué notamment dans l'internationalisation de sa carrière et de sa théorie des distributions sont décrits plus particulièrement au chapitre 3 ; car le Colloque d'Analyse Harmonique est la première conférence internationale à laquelle il participe et à l'occasion de laquelle il expose sa théorie des distributions. Sur la forme, on peut juste mentionner que les exposés de Schwartz, comme ses cours, sont appréciés par les participants pour leur clarté et leur simplicité.

Malgrange se rappelle à plusieurs reprises du rôle particulier de Schwartz en tant que directeur de thèse. Il est particulièrement présent auprès de ses étudiants, que ce soit pour leur expliquer et apprendre des mathématiques :

> Sur ce dernier point, on me pardonnera une autocitation ; elle date de 1983, et je n'ai rien à y changer : « Ce dont je peux témoigner, c'est que cette théorie n'était pas si facile à apprendre pour des chercheurs débutants, peut-être moins à cause des difficultés techniques que d'un mode de pensée auquel nous n'étions pas habitués ; il nous a fallu beaucoup d'aide de Schwartz pour y arriver ; je me souviens de discussions avec Lions lorsque nous commencions à travailler avec lui : « quel drôle de type avec ses fonctions indéfiniment dérivables à support compact, et ses distributions dont l'ordre augmente indéfiniment quand on va à l'infini ; il est fou de prétendre que sa théorie est élémentaire, et de vouloir l'enseigner aux étudiants de physique ». Incidemment, je pense maintenant que Schwartz avait raison de présenter sa théorie comme élémentaire : il est plus facile, plus formateur et plus utile d'apprendre d'abord à dériver des fonctions admettant des discontinuités, et à calculer des parties finies d'intégrales et leurs transformées de Fourier, plutôt que de commencer par les démonstrations détaillées de la théorie de l'intégration »
>
> [Malgrange 2011]

Schwartz entretient des rapports personnels très importants pour ses élèves [48] [Malgrange 2004a, p.73].

La thèse de beaucoup des étudiants de Schwartz a un lien très étroit avec la théorie des distributions. Plus que le contenu de ces thèses, on peut donner un exemple de la manière dont Schwartz aide ses étudiants à entrer, à leur tour, dans la vie collective des mathématiques. Ainsi Jacques-Louis Lions parle-t-il en Belgique dès 1954, alors qu'il n'a pas encore soutenu sa thèse. L'un des membres de la Classe des Sciences de l'Académie Royale des Sciences de Belgique le présente ainsi :

> Le *Deuxième Colloque sur les équations aux dérivées partielles* se tient à Bruxelles du 24 au 26 mai 1954 et, à vingt-six ans, Jacques-Louis Lions y est de loin le plus jeune conférencier. [49] Les autres exposés sont donnés par des mathématiciens confirmés (...)
>
> Le titre de la contribution de Laurent Schwartz, « Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques » [50] renvoie à la note en bas de page :
>
> > Cet article, qui résume ma conférence, est l'exposé, non de travaux personnels, mais du chapitre I^{er} de la thèse de M. J.-L. Lions, intitulée « Problèmes aux limites en théorie des distributions ».

48. Entretien avec Bernard Malgrange, 11 décembre 2009.
49. [Lions 1955c]
50. [Schwartz 1955c]

> Le généreux directeur de thèse « chauffe » ainsi la salle pour préparer la conférence de son brillant élève.(...)
>
> La Belgique a ainsi la primeur d'un exposé d'ensemble sur le contenu de la thèse de J.-L. Lions.
>
> [Mahwin 2005, p.219-220]

On peut trouver de nombreux autres exemples de la sorte, par exemple l'année de son séminaire que Schwartz a consacré à l'exposition de la thèse de Grothendieck sur les produits tensoriels topologiques des espaces vectoriels topologiques, ainsi que nous le verrons au chapitre 4. Schwartz considère donc que séminaires et conférences sont de bons moyens pour entrer dans la vie collective des mathématiques ; le chapitre 5 présente justement le séminaire comme faisant partie de cette vie collective.

Au-delà des différentes rôles décrits ici, et des différents canaux de exploités par Schwartz pour la réception de sa théorie, nous allons en détailler un, particulier. Il s'agit des recensions écrites par Schwartz pour les *Mathematical Reviews*, entre 1947 et 1958, et en particulier de la manière dont il norme la réception de la théorie des distributions dans ce cadre.

2.3.1 Recensions pour les *Mathematical Reviews* (1947-1958)

Les *Mathematical Reviews* sont créées aux États-Unis en 1940 par Otto Neugebauer, comme son homologue allemand, *Zentralblatt und ihre Grenzbegiete*, fondé au début des années 1930 [51]. La recension scientifique, et en particulier mathématique, a un rôle qui dépasse les simples intérêts pour la recherche mathématique ou bien l'histoire mathématique. Dans son article concernant l'entre-deux guerres et la création des *Mathematical Reviews*, Reinhard Siegmund-Schultze argumente que la fonction de contrôle permise par la recension mathématique la rend indissociable des structures de pouvoir internes à la science et à la société, notamment à la compétition entre groupes nationaux :

> This article argues that scientific – in particular mathematical–reviewing in this century cannot be considered merely as a tool for research or historical documentation, isolated from prevailing political and social conditions. While two fundamental requirements for scientific reviewing – namely "objectivity" and "modernity" (to be explained below) – are necessary for the usefulness of scientific reviewing under any political and social conditions, it is the "control function " of scientific reviewing which relates it to the power structures within science and society and to the competition of different social and national groups.
>
> [Siegmund-Schultze 1994, p.310] [52]

---

51. Un récit vivant de l'histoire des *Mathematical Reviews* est donné par Allyn Jackson [Jackson 1997].

52. Cet article relate notamment les discussions des mathématiciens américains sur les différents journaux de recension mathématique (*Jahrbuch*, *ZentralBlatt*, ainsi qu'autour de la création des Mathematical Reviews). Cette étude éclaire les relations Allemagne-États-Unis entre les deux guerres ; elle illustre le passage d'un monopole européen à un leadership américain. Le récit de la création des *Mathematical Reviews*, dans ce contexte international particulier, arrive à la fin de l'article. Il conclue ainsi

> American mathematicians' ambitions to found a mathematical abstract journal of their own had been in existence since World War I, but were repeatedly set aside due to concern for other priorities of American mathematics, especially research, and because of the overruling needs of international communication. Finally, the foundation, in 1940, of the American Mathematical Reviews was an inevitable consequence of the political coordination of the Zentralblatt, and, at the same time, a sign of the growing strength and independence of American mathematics. [Siegmund-Schultze 1994, Conclusion p. 326]

Michèle Audin propose l'étude d'une note particulière d'André Weil publiée en 1940, qui a donné lieu à une « guerre des recensions ». Elle indique qu'il s'agit d'une « étude de cas » confirmant que « les recensions ne sont pas isolées de la situation politique et sociale » [Audin 2012b, p.243-244]

Les intérêts historiques d'une telle entreprise de recension sont mis en avant, et utilisés, par Dieudonné en 1978 pour dégager les tendances actuelles en mathématiques. Il écrit ainsi :

> Over 1500 papers un pure mathematics are now reviewed every month in *Mathematical Reviews* ; is it possible to discern any trends at all in such an explosive development ?
>
> [Dieudonné 1978, p.235]

Il base en effet son étude notamment sur les *Mathematical Reviews* [53] afin de faire un point sur les grandes avancées et l'actualité des mathématiques pures. Une entreprise de recension est donc utile pour un tel travail historique.

Afin de décrire l'utilité pour les mathématiciens d'une entreprise de recension comme les *Mathematical Reviews*, il nous faut décrire ce qu'est la recension d'un article ? Si l'on se fie à la description actuelle donnée sur la page de conseils de MathSciNet [54] :

> A review should primarily help the reader decide wether or not to read the original item.

La recension est donc un court texte, comportant de quelques lignes à 600 mots (jusqu'à 3000 pour la recension d'un livre), qui présente les résultats principaux de l'article en introduisant les notations nécessaires à leur compréhension, ainsi que les grandes lignes de la preuve. L'auteur de la recension est supposé aider le lecteur à évaluer l'article, en insérant des commentaires pertinents, voire des critiques – il est néanmoins précisé que l'auteur de l'article n'a aucune manière de répondre à la critique exprimée dans la recension – ainsi qu'en indiquant d'autres articles reliés et en donnant des références.

Le travail de recension est énorme, ainsi que cela est noté par Dieudonné, et le nombre d'articles connaît une croissance très forte dans la seconde moitié du vingtième siècle. De nombreux mathématiciens sont donc mis à contribution. J'ignore néanmoins tous les détails concernant le choix des mathématiciens qui recensent ainsi que leur nombre à la date à laquelle Schwartz commence à le faire.

Schwartz participe à cette entreprise collective et recense, pour les *Mathematical Reviews*, 101 articles entre 1947 et 1958, soit une dizaine par année en moyenne [55]. Il écrit majoritairement en français -quatre exceptions seulement sont rédigées en anglais. Un premier survol rapide va nous permettre de voir les domaines dans lesquels sont classés les articles qu'il recense. S'agissant de cette période particulièrement importante pour la réception de la théorie des distributions, nous regarderons ensuite plus précisément comment Schwartz cite ses propres travaux sur les distributions dans les recensions, en lien avec les travaux de l'auteur. Les articles dont Schwartz écrit la recension forment un corpus particulier, qui donne un panel intéressant de définitions alternatives et présentations des distributions, que l'on va décrire. Enfin, en allant voir de plus près certains des articles, nous pourrons analyser un peu plus les utilisations et citations des distributions de Schwartz qui y sont faites.

53. La recension MR0486248 par Bertram Ross de [Dieudonné 1978] décrit ainsi le travail de Dieudonné :

> The author describes this paper as a summary of a summary of a summary. He attempts to discern present trends culled from a survey of the *Mathematical Reviews* and from many Bourbaki seminar sessions. He begins by explaining how topics drift into and out of the "Main stream" of mathematics.

Dieudonné est l'auteur de 597 recensions de 1945 jusqu'à 1992, date de sa mort.

54. http ://www.ams.org/mresubs/guide-reviewers.html (page consultée le 19 juin 2013)

55. Il n'en parle pas du tout dans son autobiographie, et je n'ai aucune détail sur la manière dont on lui a demandé d'effectuer ce travail, ni pourquoi il s'est arrêté en 1958.

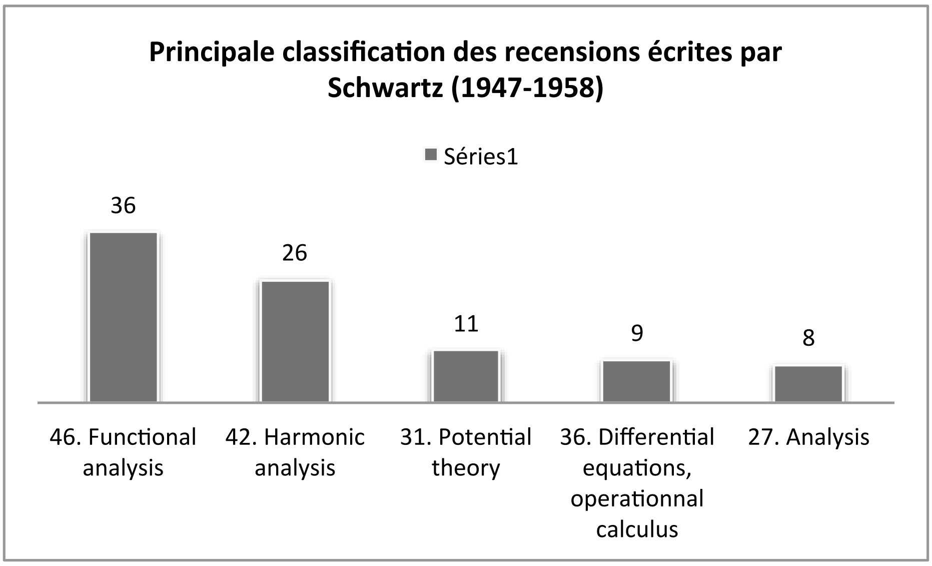


Figure 2.1 – Domaines des recensions écrites par Schwartz (1947-1958)

Classifications

En regardant les domaines dans lesquels sont classés les articles dont Schwartz écrit la recension, on obtient – et ce n'est pas surprenant – le graphique suivant 2.1 : les domaines correspondent aux centres d'intérêt et de compétence de Schwartz.

Schwartz écrit donc surtout des recensions pour des articles d'analyse fonctionnelle et d'analyse harmonique. Au sein de l'analyse fonctionnelle, les articles portent sur les espaces vectoriels topologiques (voir figure 2.2) ; sujet sur lequel il a notamment écrit un article important avec Dieudonné en 1949 [Dieudonné et Schwartz 1949]. Au sein de l'analyse harmonique, la majorité des articles recensés portent sur l'analyse de Fourier (voir figure 2.3). Ceci peut refléter l'importance qu'ont les distributions tempérées dans l'analyse de Fourier [56].

On peut en effet regarder les classifications respectives des travaux de Schwartz. Par exemple son article [Schwartz 1945] est classé en 42.4 (« Fourier series, integral transforms »), son exposé au Colloque d'Analyse Harmonique de 1947 [Schwartz 1949c] en 42.4. son traité de théorie des distributions [Schwartz 1950c] en 46.3 Ainsi les articles portant sur les distributions semblent être classés dans ces deux sections 42 et 46.

Cela amène à nous pencher d'un peu plus près sur cette classification. En effet, entre 1947 et 1958, il n'y a pas de classification « distributions ». Celle-ci apparaît en 1959, il s'agit de 46.40, intitulée « Distributions, generalized functions », et qui sera remplacée en 1973 par 46F « Distributions, generalized functions, distribution spaces ». On trouve en annexe de ce chapitre les ramifications des classifications 42 « Harmonic analysis in Euclidean spaces » et 46 « Functional analysis » pour les périodes 1940-1958 et 1959-1972 (voir Annexe D p.305), qui donne les subdivisions des domaines 42 « Harmonic Analysis » et 46 « Functional Analysis » entre 1940 et 1958, et entre 1959 et 1973.

56. Schwartz écrit ainsi à Hörmander le 13 septembre 1990 (Lettre citée dans [Hörmander 2003, p.60-61]), à l'occasion d'une réédition augmentée de son livre [Hörmander 1990] :

> [O]ne of the things which I find absolutely fascinating is the triumph of the ideas of Fourier. Fourier has invaded all the domains of analysis : I am not sure he had suspectedit till that point !

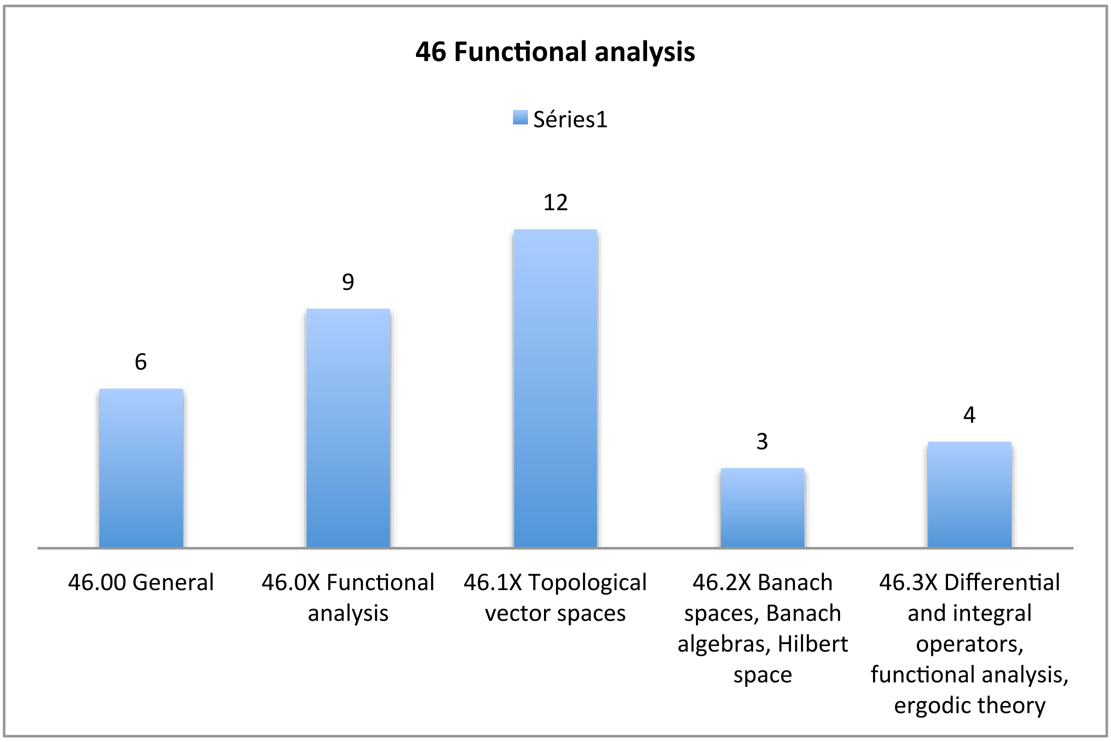


Figure 2.2 – 46. Functional Analysis

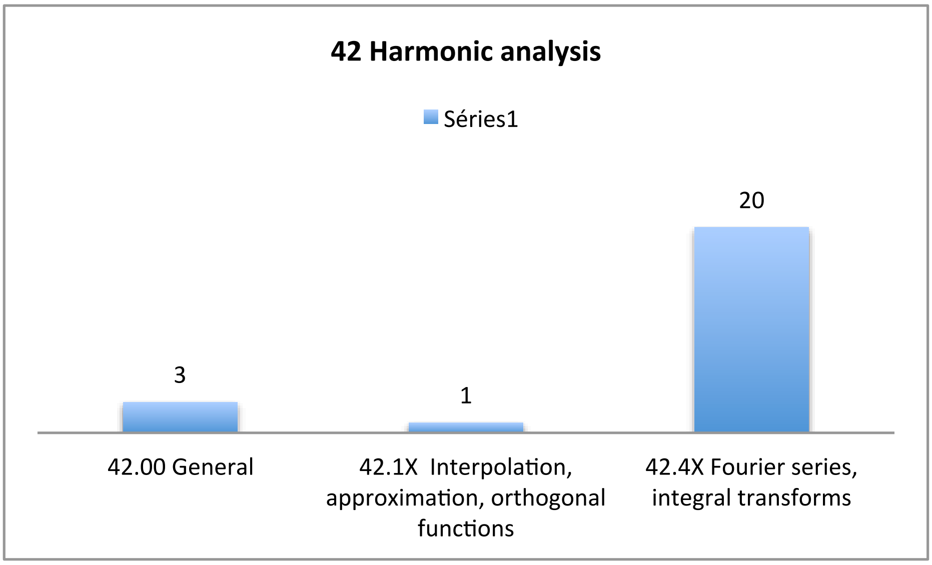


Figure 2.3 – 42. Harmonic Analysis

Présentation des recensions, références.

Près de la moitié (48 sur 101) des recensions écrites par Schwartz comportent le mot « distributions ». Douze d'entre elles font référence directement au traité de Schwartz *Théorie des distributions* [Schwartz 1950c], [Schwartz 1951d], et quatre à l'article [Schwartz 1945] (en fonction de la date de la recension, si celle-ci est écrite avant la parution de [Schwartz 1950c].) Sept autres recensions donnent une référence explicite à un autre de ses propres travaux : [Schwartz 1952b], [Schwartz 1951a], [Schwartz 1954c], [Schwartz 1952a], [Schwartz 1953a].

A cela il faut rajouter les références explicites mais non bibliographiques dont les formulations sont par exemple les suivantes : Schwartz mentionne un « résultat analogue du reviewer » (Schwartz, MR0073123) [57] ou bien précise que « Le reviewer a montré » (Schwartz MR0096080, MR0103411, MR0086355) ou encore écrit que « Le reviewer donne une autre présentation de la théorie de l'auteur, dans un article à paraître prochainement ».

Il y a parfois une « Note du reviewer » (Schwartz MR0043249, MR0043248) par exemple pour signifier que l'on peut étendre la démonstration de l'auteur, ou bien des additions : « With some modifications and additions by the reviewer » (Schwartz MR0036370) ou encore un renvoi à un ajout écrit lors d'une recension précédente : « This property is known and was already pointed out by the reviewer in the review of » (Schwartz MR0031144).

Un grand nombre d'articles ont donc un lien avec les distributions, et nous allons les présenter plus longuement. Schwartz donne parfois comme unique référence bibliographique l'un de ses travaux mentionnés plus haut. Rappelons que c'est le reviewer qui donne ou non des références dans la recension ; dans de très rares cas, Schwartz cite toute la bibliographie de l'auteur, mais le plus souvent, il ne donne qu'une seule, voire aucune, référence. C'est donc lui qui, le cas échéant, fait le choix de faire une référence explicite à ses propres travaux.

On remarque tout d'abord que Schwartz ne cite Sobolev qu'une seule fois (Schwartz MR0021070) lorsqu'il écrit la recension d'un article russe en 1947. Il associe cette citation à la référence à ses propres travaux en citant [Schwartz 1945].

Les articles qui portent sur les distributions et dont Schwartz écrit la recension peuvent être regroupés de la manière suivante : tout d'abord, un certain nombre d'articles consistent en une utilisation ou application des distributions pour résoudre un certain problème ; pour ces articles les recensions sont assez courtes, souvent sans référence bibliographique explicite. On peut ensuite mettre à part les articles proposant une notion de « multiplication » pour les distributions, pour lesquels Schwartz précise, en faisant ainsi référence à l'un de ses articles [Schwartz 1954c], « On sait qu'il n'y a pas de théorie possible d'une multiplication des distributions » (MR0090012) . Enfin, beaucoup d'articles sont un « exposé », « résumé », une « généralisation », voire une « généralisation abstraite » (MR0090011) ou une « simplification » ou un exposé alternatif (« alternative account » des distributions. Dans ce cas, Schwartz cite ses travaux, et précise le lien de l'article avec sa propre théorie. On peut ainsi lire par exemple : « If the distributions T are considered in the sense developed by the reviewer (...) » (MR0036370) ou bien « This generalization, and this notion of differentiation are very similar to those introduced by the reviewer » (MR0036949). Lorsqu'il écrit ces recensions, Schwartz modifie parfois les termes utilisés par l'auteur ; il précise ainsi parfois, ainsi que nous allons le voir que les « generalized functions » présentées par l'auteur sont des « distributions ».

57. Lorsque la référence précise à l'article recensé n'est pas utile, on se contente de noter uniquement la cote donnant accès à la recension sur www.ams.org/mathscinet/ (Page consultée le 01/09/2013).

Utilisations et applications des distributions

Plusieurs articles dans ce corpus concernent donc une utilisation ou une application des distributions, mais cela ne couvre qu'une toute partie de tous les articles écrits à cette date. Par exemple, il n'écrit que très peu de recensions des travaux de ses élèves ; seulement celles de trois articles de Jacques-Louis Lions, deux notes aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* : [Lions 1951b] [Lions 1951a], et un autre article. [Lions 1953].

Lorsqu'il s'agit d'une utilisation de la théorie des distributions de Schwartz, la référence à ses travaux est explicite. Elle se trouve parfois dans le titre, comme par exemple [Gates 1952] « Differential equations in the distributions of Schwartz », ou bien encore dans l'introduction de l'article [Garnir 1951] :« Nous supposerons connue la théorie des distributions telle qu'elle est exposée dans [Schwartz 1950c], [Schwartz 1951d]. Nos notations sont celles de cet ouvrage. » Dans ces cas là, Schwartz n'éprouve pas le besoin de faire référence à ses travaux dans la recension.

On voit néanmoins qu'il est très précis sur les références à ses résultats, si besoin est, comme par exemple à l'occasion de l'article [Gårding 1950] où il écrit :

> Le théorème démontré est le suivant : Toute distribution [voir le rapporteur, Théorie des distributions, tome 1, Actualités Sci. Ind., no. 1091 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9, Hermann, Paris, 1950 ; ces Rev. 12, 31], solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique à coefficients indéfiniment dérivables, est une solution usuelle, elle-même une fonction indéfiniment dérivable. Ce théorème est identique à celui du rapporteur [loc. cit., p. 137], avec les mêmes hypothèses. La démonstration est la même, sauf sur un point (il remplace un passage à la limite par une relation algébrique) : C'est essentiellement la démonstration très voisine donnée dans de Rham et Kodaira [Harmonic Integrals, Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1950 ; ces Rev. 12, 279].
>
> (MR0040536)

Beaucoup d'autres articles utilisent les distributions, mais les recensions sont en général très courtes et ne présentent pas de jugement ou d'apport personnel de Schwartz.

Définitions alternatives, généralisations ou simplifications des distributions

Il en va autrement du grand nombre d'articles dont Schwartz écrit la recension qui proposent des définitions alternatives ou des généralisations des distributions. Schwartz connaît bien ces travaux, puisqu'il écrit de nombreuses recensions dans lesquelles il compare ces présentations de distributions à ses propres travaux. Mais il les présente très brièvement dans son autobiographie comme des « tentatives » :

> D'autres tentatives ont été faites pour introduire les distributions d'une façon plus claire pour les ingénieurs. Je ne crois pas que ce soit tellement important ni possible. Les autres définitions se heurtent à des obstacles qui les rendent finalement plus difficiles.
>
> [Schwartz 1997, p.254]

Il parle rapidement d'une « théorie de Mikusiński » avant de présenter un peu plus longuement les hyperfonctions [Schwartz 1997, p.254-255].

On peut consulter la présentation de Lützen qui résume les différentes approches proposées [Lützen 1982, Appendix : Alternative Definitions of Generalized Functions (p.166-170)]. Ainsi qu'il l'écrit (p.166), les distributions peuvent se définir de plusieurs manières, à savoir en termes de fonctionnelles, de suites ou de dérivées impropres. Il présente ensuite trois méthodes de généralisations, qui donnent des objets mathématiques non équivalents aux distributions : les opérateurs de Mikusiǹski, les hyperfonctions (auxquelles Schwartz accorde une grande importance dans son autobiographie [58] et les fonctions non-standards.

Lützen donne également quelques références proposant des comptes-rendus plus détaillés de ces différentes approches. Parmi les noms cités, beaucoup d'auteurs ont eu un ou plusieurs articles recensés par Schwartz, que nous allons présenter brièvement. Par ailleurs, certains des articles portent sur des présentations simplifiées de distributions.

Cette partie, la plus importante du corpus étudié des recensions de Schwartz, peut s'étudier à deux niveaux. Le contenu des articles, le nombre même d'articles, et l'importance consacrée à définir, exposer, vulgariser les distributions montre l'intérêt partagé pour cette théorie et son utilisation. Le soin apporté par Schwartz à citer ses travaux et à établir le lien entre les résultats présentés et sa propre théorie le montre actif dans la réception de la théorie des distributions. Il est difficile de suivre dans un tel corpus morcelé et incomplet le contenu mathématique des définitions proposées. Nous nous intéresserons en particulier aux aspects faisant le lien entre ce qui est présenté et les travaux de Schwartz lui-même. Il est particulièrement intéressant que cela soit Schwartz lui-même qui écrive ces recensions, ainsi que cela est noté à propos d'une recension d'un article de König (que l'on commente plus bas) :

> The review MR0055425 of this article by L. Schwartz in the *Mathematical Reviews* is a historical document.
>
> [« Heinz König zum 80. Geburtstag gewidmet » 2009]

Car en effet, Schwartz commente « en direct » certaines premières réactions, adaptations, ou utilisations de sa théorie ; ce qui rend l'étude de ces recensions particulièrement intéressante.

Nous organisons ici les recensions présentées autour des trois auteurs les plus importants (en terme de travaux recensés par Schwartz). Ils forment trois pôles autour desquels se relient les autres, sans être indépendants entre eux toutefois.

---

58. Schwartz parle en effet des hyperfonctions dans son autobiographie [Schwartz 1997, p.254-255] . On peut aussi lire la présentation qui en est faite par Pierre Schapira :

> Pour comprendre l'originalité de la théorie des hyperfonctions de Sato, il faut se souvenir de l'ambiance mathématique de l'époque. L'Analyse Mathématique dans les années 50-70 était sous l'influence directe de l'analyse fonctionnelle et fortement marquée par le succès de la théorie des distributions. On cherchait essentiellement des théorèmes d'existence et la plupart des démonstrations consistaient à définir « le bon espace fonctionnel », à démontrer une « inégalité a priori », et à appliquer le théorème de Hahn-Banach. C'est dans ce contexte que Mikio Sato définit en 59-60 les hyperfonctions comme valeurs au bord de fonctions holomorphes, découverte qui lui permettra d'obtenir un poste à l'Université de Tokyo, et ce, grâce à la protection éclairée du Professeur Iyanaga, personnalité d'une ouverture d'esprit exceptionnelle et grand ami de la culture française. Sato part ensuite deux ans aux États-Unis, à New-York et à Princeton, où il essaie sans succès de convaincre André Weil de la pertinence de son approche cohomologique de l'analyse.
>
> La méthode de Sato est radicalement nouvelle car elle n'utilise en aucune manière la notion de limite. Ses hyperfonctions ne sont des limites de fonctions dans aucun sens raisonnable, et l'espace des hyperfonctions n'a aucune topologie naturelle autre que grossière. Pour sa construction Sato invente en parallèle avec Grothendieck la cohomologie locale, un outil purement algébrique. Il s'agit vraiment d'un regard révolutionnaire sur l'analyse, une rupture épistémologique, dirait-on dans les années 70. Mais outer son originalité incontestable, l'approche de Sato a des implications profondes car elle débouche naturellement sur l'analyse microlocale, comme je vais tenter de l'expliquer.
>
> [Schapira 2003, p.23-25]

Sur Sato, on peut lire aussi une interview publiée en 2007 [Jackson 2007].

Pologne - Mikusiński Schwartz écrit les recensions de 11 articles de Mikusiǹski [59]. Regardons plus particulièrement trois d'entre eux, [Mikusiński 1948], [Mikusiński 1949], [Mikusiński 1950] particulièrement intéressantes pour comprendre la manière dont Schwartz insère le travail dans sa théorie des distributions. Il s'agit du premier article de « vulgarisation » de la théorie des distributions, si l'on en croit la présentation qu'en fait Temple (que l'on présente plus loin) en 1955 :

> This work of 'vulgarization' can be happily achieved by means of the approach to Schwartz's theory which has been opened by Mikusiński (1948).
>
> [Temple 1955, Introduction]

Le dernier de ces articles, [Mikusiński 1950], définit les opérateurs de Mikusiński dont on trouve une présentation rapide dans [Lützen 1982, p.169]. [60]

Mikusiński cite Schwartz dès 1948 dans [Mikusiński 1948] dont le titre est « Sur la méthode de généralisation de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible ». Il donne comme référence [Schwartz 1945] et [Schwartz 1948a], montrant ainsi que les articles de Schwartz sur les distributions sont lus et utilisés avant la parution de son traité de 1950. L'article de Temple 1955 parle de cet article comme d'une tentative de vulgarisation de la théorie pour la rendre plus simple. Schwartz écrit :

> L'espace vectoriel des distributions [Schwartz 1945] peut être défini comme le complété de l'espace des fonctions pour une topologie convenable. L'auteur étudie ce procédé général de la formation d'être mathématiques nouveaux par la notion de convergence faible et de complétion. Il semble m'attribuer la paternité de cette méthode de complétion, qui remonte à Cantor (définition des nombres réels).
>
> (Schwartz, MR0027958)

Schwartz écrit que cette généralisation est très proche de sa théorie des distributions (Schwartz, MR0036949) mais précise cependant que les espaces obtenus sont différents. Il conclue en disant que cela justifie le calcul symbolique. L'auteur ne fait plus référence à Schwartz dans cet article [Mikusiński 1949], ce qui semble aller dans le sens de la « théorie classique » telle qu'elle est présentée plus haut, à la lecture de l'historiographie. Le troisième article [Mikusiński 1950] introduit cette fois-ci les « generalized functions » par une méthode topologique, alors que l'article précédent les introduit par une méthode algébrique. Mikusiński cherche à justifier le calcul de Heaviside.

Mikusiński et Sikorski sont par ailleurs les auteurs d'un livre intitulé *The Elementary Theory of Distributions* [Mikusiński et Sikorski 1957], [Mikusiński et Sikorski 1961] dont le reviewer écrit :

> The authors give an excellent treatment of the elementary theory of distributions of finite order, which should be of great value to physicists and engineers.
>
> (Korevaar, MR0094702)

Ainsi que le précise une notice sur Mikusiński, la théorie des distributions est d'un grand intérêt pour justifier le calcul opérationnel :

> At the same time when operational calculus was born, mathematicians took great interest in the theory of distributions initiated by S. Sobolew (see [Sob]) and L. Schwartz (see [Sch.1], [Sch.2], [Sch.3]). This theory was based on difficult tools of functional analysis. In order to make the theory of distributions closer to physicists and engineers, Professor Mikusiǹski gave its elementary definition based on commonly known notions

59. Sur Jan Mikusiński (1913-1987), mathématicien polonais, on peut consulter [Skórnik 2007].

60. Lützen précise que Mikusiński a montré que ses opérateurs ne sont pas équivalents aux distributions de Schwartz. On peut consulter aussi [Lützen 1979/80] sur le calcul opérationnel d'Heaviside et ses justifications ; les articles de Mikusiński portent majoritairement sur le « calcul opératoire » ou le « calcul de Heaviside ».

> of mathematical analysis. Theory of distributions based on that definition was developed on Mikusiński's seminar in Wroclaw and Warsaw and was worked out in a form of two volume treatise. This treatise was edited together with Roman Sikorski and was published in English and then translated into other languages (see [MS.1], [MS.2]). There were several editions of the book "Elementary Theory of Distributions" in Polish, English, Russian, Chinese and French. In comparison to the functional approach, a new element in the theory of distributions developed by Mikusiǹski was, apart from original approach, the study of regular and irregular operations (see [Mi.4]).
>
> [Skórnik 2007, p.4-5]

Plusieurs autres articles de ce corpus sont des utilisations ou applications des opérateurs de Mikusiński, notamment [Ryll-Nardzewski 1954]. On trouve aussi les articles de Słowikowski, qui visent à unifier les distributions de Schwartz et les opérateurs de Mikusiński, en proposant une généralisation de la théorie qui les englobe. Schwartz écrit ainsi, à propos de [Słowikowski 1955a] [61] :

> L'auteur développe un formalisme contenant comme cas particuliers la construction du groupe des nombres rationnels à partir du groupe des nombres entiers (groupe quotient), la construction des opérateurs de Mikusiński [Studia Math. 11, 41–70 (1950) ; MR0036949 (12,189d)] et la construction des distributions [Schwartz, Théorie des distributions, t. I, Hermann, Paris, 1950 ; MR0035918 (12,31d)], à partir des fonctions continues.

Słowikowski l'exprime en ces termes : [Słowikowski 1955b, p.10] « Schwartz's idea of distributions and Mikusiński's idea of operators can both be unified in the notion of distribuo-operators ».

Royaume-Uni - Temple Schwartz écrit les recensions de quatre articles de Temple [62], [Temple 1952], [Temple 1954], [Temple 1955], [Temple 1956]. En particulier [Temple 1955] résume différentes approches de simplification ou vulgarisation de la Théorie des distributions.

61. Słowikowski introduit son travail [Słowikowski 1955a] de la manière suivante :

> There are several different approaches to the problem of generalizing the notion of function and its derivative. The purpose of the paper is to give a general theory of algebraic extension of certain algebraic systems so that we obtain as particular cases of this theory : Schwartz's theory of distributions [2], the theory of Mikusiński [1] and the classical method of extension of an integral domain to a field of rationnals. This theory is a generalization of Sikorski's [3] approach to Schwartz's theory. It may be applied to the semi-group of linear operators in locally-convex space.

62. George Frederick James Temple (1901-1992) est un mathématicien anglais, dont la notice explique qu'il s'est intéressé aux distributions et décide de réécrire le travail de Schwartz, en tant que mathématicien appliqué :

> His early interests in analysis and his work on quantum theory had earlier directed his attention to the ' scandal' of the Dirac delta function, and his interest in infinitesimals was sharpened by his study of the boundary layer (as was Abraham Robinson's at about the same time). In a series of papers [42, 43, 44] and especially [47], after he had left King's he took the new 'theory of distributions' of Laurent Schwarz and rewrote it. Schwarz's version had got rid of the delta function at the expense of a formulation in terms of linear functional on a function space which, at the time, was obscure to anyone but a specialist in analysis. The applied mathematician felt that Schwarz had achieved something but only at the expense of writing everything back to front. Temple's rewriting retained the correctness but was quite easy to apply over a wide range of applied mathematics. This work attracted the award of the Sylvester medal of the Royal Society in 1970.
>
> [Kilmister 1995, p.284]

Temple décrit sa réécriture de la théorie de Schwartz comme étant celle du physicien mathématique ; il fait le choix de mettre en avant la propriété suivante des distributions : elles sont indéfiniment dérivables. Son but est de donner un exposé élémentaire de la théorie des distributions :

> 1. INTRODUCTION The invention of the theory of distributions by Laurent Schwartz has unified in one systematic theory a number of partial and special techniques proposed for the analytical interpretation of 'improper' or 'ideal' functions and symbolic methods. The theory of distributions is undoubtedly of great practical importance for the applied mathematicians, but unfortunately for them the theory is highly abstract, and in the words of Schwartz's treatise, 'Toutes les parties d'aspect theorique de ce livre exigent d'assez bonnes connaissances de topologie generale et d'analyse fonctionelle (espaces vectorielles topologiques)' (Schwartz I950, P. 10). It therefore seems desirable to give a more elementary and less abstract account of this new branch of analysis, so as to make the important discoveries of Schwartz available to the physicist and engineer. This work of 'vulgarization' can be happily achieved by means of the approach to Schwartz's theory which has been opened by Mikusinski (1948). The present paper gives a self-contained account of the basis of the theory of ge generalized functions, illustrated by its applications to Fourier series and integrals.
>
> 2. THE HEURISTIC APPROACH The new analysis can be developed in at least three different ways, but for the mathematical physicist there can be little doubt that the most advantageous approach is to emphasize that in the new analysis any continuous function can be differentiated any number of times. t In this section we shall examine what is implied in this objective, with a view to choosing the simplest and most direct approach."

Temple écrit aussi :

> this suggests that the appropriate technique is the method (Schwartz 1950, 1951), or the equivalent method of generalized functions (Temple 1953, 1955). This technique permits a considerable simplification of the classical arguments as given, for example, in Courant (1950).
>
> [Temple 1956, p.3-4]

Il cite toujours la théorie de Schwartz, et lui préfère néanmoins sa méthode, plus simple.

De [Temple 1952], Schwartz écrit qu'il s'agit d'un « Exposé rapide de la théorie des distributions et de quelques applications physiques. » L'article s'intitule « La théorie de la convergence généralisée et des fonctions généralisées et leurs applications à la physique mathématique ». Schwartz préfère parler de « distributions » plutôt que de « fonctions généralisées ». C'est encore le cas pour [Temple 1954] où Temple parle de « weak functions » et Schwartz de distributions dans sa recension, et de [Temple 1955] et [Temple 1956] où Temple parle de « generalized functions » dont Schwartz indique qu'il s'agit des distributions.De [Temple 1955], Schwartz écrit dans la recension qu'il s'agit d'un « Exposé de la théorie des "generalized functions" (distributions) définies comme limites de suites de fonctions, en un sens convenable » . Ainsi, Schwartz précise à chaque fois qu'il s'agit de ses distributions.

Dans la lignée de Temple, Schwartz écrit la recension d'un article de Love (lui aussi mathématicien anglais) [Love 1957] , qui cite aussi les opérateurs de Mikusiński. La recension de Schwartz est très succincte. Love, même s'il utilise la méthode de Temple, cite les travaux de Schwartz. Il écrit ainsi par exemple :

> Temple, in his Presidential Address [3], gave an alternative account of Schwartz's theory of distributions [2], in which improper functions, satisfactorily formulated, were used in place of linear functionals with the aim of gaining directness and simplicity. He reviewed Mikusiński's theory of generalized functions defined by weakly convergent sequences of ordinary functions, and developed Schwartz's theory as a sequel to it.

> He also underlined the resemblance of Mikusiński's generalized functions to Cantor's real numbers defined as (classes of equivalent) Cauchy sequences of rational numbers. Following this lead, I attempt to present below a theory of generalized functions defined as (classes of equivalent) strongly convergent sequences of ordinary functions.
>
> [Love 1957]

On a d'autres expositions des distributions, qui citent aussi Mikusiński et Temple notamment, comme par exemple [O'Keeffe 1957b] [63] et [O'Keeffe 1957a] [64] dont Schwartz écrit qu'il expose des « propriétés essentielles des distributions.

Allemagne - König Heinz König est un mathématicien allemand [65] ; Schwartz écrit les recensions de trois de ses articles : [König 1953], [König 1955] [König 1957].

Le premier [König 1953] est intitulé « Neue Begründung der Theorie der "Distributionen" von L. Schwartz. » (Nouvelle justification de la théorie des distributions), ce que Schwartz résume ainsi :

> L'auteur définit une nouvelle théorie des « distributions » sur $\mathbb{R}^n$ [L. Schwartz, Théorie des distributions, t. I, II, Hermann, Paris, 1950, 1951 ; ces Rev. 12, 31, 833]. L'originalité réside dans l'extension de la notion de distribution, mais surtout dans la méthode axiomatique d'introduction, comparable à la méthode d'extension algébrique d'un corps ou à la méthode de Bochner [Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932, pp. 110–144].
>
> (Schwartz, MR0055425)

Il rapporte aussi que l'un des problèmes posé par Schwartz, à savoir celui de la division des distributions [66], peut se reformuler dans le cadre de cette nouvelle définition :

63. O'Keeffe présente sa méthode par rapport à celle de Schwartz : « In this paper Schwartz's method is followed except that, instead of introducing a new type of finite part for singularities of integral order, convergence factors of Riesz 's type are used. » [O'Keeffe 1957b].

64. O'Keeffe cite les traités de Schwartz [Schwartz 1950c], [Schwartz 1951d]. Il résume la théorie de Schwartz dont il a besoin pour son travail : il parle de théorie parallèle des distributions en mentionnant les travaux de Mikusiński, Temple et Korevaar, tout en remarquant que les applications semblent limitées :

> This paper covers the details of the theory which is sketched by Schwartz in his book [1°] and extends the method to partial differential equations. A generalization of the method to certain cases of variable coefficients by means of a generalized type of convolution used by Volterra is also made. It is here that the essential difference between the symbolic and the Laplace transform theories becomes more apparent. The classes of differential qeuqations to which the method becomes applicable by generalization are quite different in the two cases. A parallel theory to that of distributions has been developed by Mikusiński [11], temple [12] and Korevaar [13] and applied to the operationnal calculus by Mikusiński ; Korevaar and Erdelyi [15]. This theory is somewhat less general than Schwartz's and has the advantage of requiring a less extensive preparation in analysis. Its application so far seems to be confined to linear differential equations with constant coefficients in one and two dimensions.
>
> We assume the theory of distributions of L. Schwartz , which for the purposes of this paper may be summarized in the following working form (...)
>
> [O'Keeffe 1957a]

65. On a dans [« Heinz König zum 80. Geburtstag gewidmet » 2009] l'appréciation suivante de ses travaux :

> Typical of his work is the analysis or creation of basic new concepts from most original viewpoints. An example right after the birth of the theory of distributions is his wonderful article "Neue Begründung der Theorie der "Distributione" von L. Schwartz" Math. Nachr. 9 (1953) 129–148.

66. À propos de la division des distributions, on peut lire les articles introductifs dans [Berline et Sabbah 2007], qui reproduit notamment un article de Schwartz [Schwartz 1955a]. Malgrange expose la division des distributions, qui est résolue par Hörmander (dans le cas des polynômes) et Lojasiewicz (dans le cas

> (...) (notre “problème de la division” revient alors à se demander quand le quotient d'un élément de L est encore dans L).

Schwartz recense plusieurs articles de José Sebastião e Silva, dont[Silva 1955] et [Silva 1956] dont la « Définition axiomatique des Distributions [est] analogue à celle de H. König » (Schwartz, MR0075544) ; ou bien encore [Penzlin 1955/56] dont la recension de Schwartz précise qu'il s'agit d'un « Exposé résumé de la théorie des distributions, d'après la méthode de H. König [Math. Nach. 9 (1953), 129–148 ; MR0055425 (14,1072a)] » (Schwartz, MR0082636) et [Sikorski 1954] qui donne une « Définition des distributions sur la droite réelle par voie algébrique directe, par une méthode analogue à celle de König [Math. Nachr. 9, 130–148 (1953) ; ces Rev. 14, 1072] » (Schwartz, MR0064124) [67].

Cas de la multiplication des distributions Plusieurs articles proposent enfin une théorie dans laquelle la multiplication des distributions est possible ; la multiplication n'est en effet pas possible dans la théorie des distributions de Schwartz, ainsi qu'il le montre dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [Schwartz 1954c]. Quelques détails mathématiques, sur la multiplication des distributions et sur le front d'onde tel que l'introduit Hörmander se trouvent dans Annexe E p. 309. La notion de front d'onde permet de contourner les difficultés liées à l'impossibilité de la multiplication des distributions en général.

La recension de [König 1955] [68] commence par citer l'article de Schwartz :

> On sait qu'il est impossible de définir un produit multiplicatif de deux distributions arbitraires, associatif et vérifiant la règle de dérivation du produit [Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris 239, 847–848 (1954) ; MR0064324 (16,265e)].
>
> (Schwartz, MR0068745)

Dans [König 1957], Schwartz explique ce que l'auteur entend par « théorie de la multiplication », en précisant encore que ce n'est pas possible dans le cadre de sa théorie des distributions :

---

général) de manière indépendante au séminaire Schwartz (année 1959-1960, exposés 21 à 25) et au séminaire Bourbaki (mai 1960, exposé 203) [Malgrange 1960].

67. Sikorski [Sikorski 1954] écrit :

> « The purpose of this paper is to give a definition of distribution, which seems to be more natural than the original definition of L. schwartz [3]. The present definition has the advantage of making it directly evident that each distribution on each compact (ie closed uned bounded) interval is a derivative (of a finite order) of a continuous function. The main idea of this derivative is similar to that of König's [1] definition. For simplicity we shall consider only the one-dimensional case.

La « simplicité » ou la « naturalité » que l'on attribue à la définition des distributions dépend du résultat que l'on souhaite obtenir prioritairement.

68. König écrit :

> « In dieser Arbeit greifen wir das Problem, für dis Distributionen von L. SCHWARTZ ein universelles Produkt zu definieren, welches das gewöhnliche Produkt zweier Funktionen und das « produit multiplicatif » zweier Distributionen asl Spezialfälle enthält, in möglichst umfassender Form an. Dieses Problem ist für die physikalischen Anwendugen von grosser Bedeutung. Der vorliegende erste Teil der Arbeit bringt die Grundlagen einer allgemeinen Multiplikationstheorie. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf den Fall einer einzigen unabhängigen Veränderlichen. Das « produit multiplicatif » $S.T \in (\mathcal{D}')$ zweier Distributionen S, $T \in (\mathcal{D}')$ (das wir im folgenden « inneres Produkt » nennen wollen), kann man nach L. SCHWARTZ nur in speziellen Fällen definieren, wenn nämlich die eine Distribution um so « regulärer » ist, je « irregulärer » die andere ist. (...à
>
> [König 1955]

Il remercie nommément le professeur Schwartz.

> On sait qu'il n'y a pas de théorie possible d'une multiplication des distributions. L'auteur appelle ici théorie de la multiplication la donnée d'un faisceau P (...)
>
> Cet article est long, mais minutieusement rédigé, et il contient tous les développements axiomatiques conduisant logiquement aux diverses théories possibles. L'abondance des multiplications pouvant être utilisées est un obstacle assez sérieux pour les applications éventuelles. Mais d'un autre côté certaines considérations supplémentaires d'invariance (parmi lesquelles par exemple l'invariance de Lorentz) sont peut-être susceptibles de conduire, en théorie quantique des champs, à une théorie de multiplication privilégiée parmi d'autres, s'appuyant sur le présent formalisme.
>
> (Schwartz, MR0090012)

D'autres articles concernent la multiplication des distributions : [Ishihara 1955] [69] ou encore [Bogoliubow et Parasiuk 1957].

Les recensions par Schwartz des articles proposant une multiplication des distributions montre qu'il cherche à normaliser le sens de « multiplication des distributions » : pour lui, ce qui est proposé n'est pas la multiplication des distributions, celle-ci étant impossible comme il l'a lui-même montré. Il le rappelle donc et précise ensuite ce que l'auteur entend démontrer.

Cette étude fait ressortir quelques aspects par lesquels on peut agir sur la réception d'une théorie. Schwartz insiste ainsi sur l'utilisation du vocabulaire, sur les références à ses travaux et résultats. Il se positionne dans les recensions qu'il écrit, tout particulièrement lorsqu'il s'agit de propositions de définitions alternatives à ses distributions ou bien de multiplication des distributions. On peut considérer qu'il norme l'usage et la considération des distributions dans le cadre de sa théorie.

Conclusion

La « réception » d'une théorie est donc constitutive de la vie collective des mathématiques. La théorie des distributions, tout d'abord, a une vie collective. Mais en étudiant l'historiographie couplée à celle de la théorie – tout en prenant garde aux dates de publications et aux travaux parfois très postérieurs à la création de cette théorie –, on montre que l'historiographie elle-même participe de la vie collective de la théorie. Il faut mentionner ici l'une des limites au cadre de cette étude, qui pourrait donc être prolongée : à savoir qu'elle ne propose pas une étude de réception de la théorie, mais une étude de cette réception à travers l'historiographie.

On présente alors les enjeux et la construction d'une telle réception, en ce qui concerne à la fois la nature de la théorie et la conception de l'histoire des mathématiques revendiquée ou bien sa diffusion, dans des contextes bien définis, écrite en terme de succès ou de difficultés. Nous montrons que le processus de réception est en fait actif à plusieurs niveaux. Tout d'abord, le rôle de certains mathématiciens, Hörmander en particulier, dans la diffusion de la théorie montre une forte détermination. Schwartz lui-même est actif dans cette diffusion ; nous le montrons en étudiant la manière dont il insère sa théorie dans les recensions qu'il écrit.

69. Ishihara introduit ainsi son article : « Multiplication of distributions are considered by L. Schwartz (1) in his text-book in case only when one of the distributions is a non- function at each step of multiplication. Indeed, according to the ordinary definition we can not consider other sort of multiplication. » [Ishihara 1955] et indique l'impossibilité de la multiplication montrée par Schwartz : « Recently L. Schwartz (4) has pointed out the impossibility of the associative multiplication including and the derivative operation from purely algebraic consideration. In this paper we study the extended multiplication mainly from the topological consideration. »

Ce chapitre est lié aux deux suivants, qui apporteront un éclairage original à ces questions de réceptions de la théorie des distributions de Schwartz. Il ont pour sujet des objets très précis de la vie collective des mathématiques – à savoir un colloque et un théorème – qui permettent justement cet éclairage. Le chapitre 3 porte sur le colloque d'Analyse harmonique de Nancy en 1947, qui est un colloque important pour l'internationalisation des distributions et de la carrière de Schwartz. Son étude permet aussi de montrer comment Schwartz est acteur dans la diffusion des distributions. Elle présente l'objet « colloque » et ses enjeux dans la vie collective des mathématiques. Le chapitre 4 porte sur le théorème des noyaux. Il s'agit d'un théorème important, considéré comme l'un des principaux travaux originaux de Schwartz. Son étude permet de parler de la vie collective des mathématiques dans la technicité des mathématiques. Deux résultats fondamentaux de la théorie des distributions de Schwartz, à savoir les distributions tempérées et le théorème des noyaux, sont abordés aux chapitres 3 et 4 respectivement. Ces deux chapitres permettent de discuter, dans une analyse fine et technique, différents point mentionnés ici.

Chapitre 3

Rencontres mathématiques et vie collective : autour du colloque d'analyse harmonique, Nancy 15-22 juin 1947

Introduction

Schwartz rencontre la vie collective des mathématiques en différentes étapes de sa formation (chapitre 1), et sa théorie des distributions s'intègre à cette vie collective des mathématiques (chapitre 2). Or il existe des « rencontres mathématiques » – congrès, symposium, colloque – qui sont des lieux privilégiés de cette vie collective des mathématiques dont on a jusqu'alors dressé les premiers contours. Schwartz ouvre un chapitre de son autobiographie par ces mots :

> Le symposium d'analyse harmonique eut dans mon existence des conséquences nombreuses et imprévisibles.
>
> [Schwartz 1997, p.309]

Il présente dans ce chapitre VIII la « reconnaissance internationale » et le « monde plus vaste » [Schwartz 1997, p.309] qui va lui être alors ouvert. Schwartz met l'accent sur les conséquences que ce colloque a eues sur sa vie mathématique. Ce colloque précis, celui d'analyse harmonique qui a lieu à Nancy en juin 1947, va permettre à Schwartz d'insérer sa théorie des distributions ainsi que sa carrière à un niveau international. Il s'agit d'un aspect très précis de la « réception » de la théorie des distributions présentée au chapitre précédent.

Comment comprendre cela avec la manière dont les colloques sont présentés dans l'historiographie ? Les colloques, en particulier de mathématiques, sont présents de différentes manières dans la littérature. Il peut s'agit d'une présentation générale, mettant en avant certains mathématiciens, prix, ou résultats mathématiques présentés ; du récit d'un participant, ou bien d'une étude plus globale, par exemple celle du financement ayant permis leur organisation.

Nous nous intéressons ici au colloque comme forme particulière de vie collective des mathématiques, dans ces années d'après-guerre. L'objet colloque s'inscrit dans une longue tradition de congrès scientifiques internationaux issue du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, mais il se redéfinit en fonction des besoins spécifiques dans la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle, date à laquelle on peut mentionner que les transports sont facilités par rapport au siècle précédent. Dans le cas étudié, il s'agit de contexte particulier de reconstruction d'après-guerre en France. La communauté des mathématiciens se saisit de la question de l'organisation de manifestations de ce type, de rencontres mathématiques sous une forme spécifique, et s'approprie les opportunités proposées.

Revenons au colloque d'Analyse Harmonique de Nancy, qui a eu lieu du 15 au 22 juin 1947 ; ainsi qu'à l'analyse que Schwartz fait de l'influence qu'il a eue sur sa vie. Ce colloque a été étudié de deux manières. Tout d'abord, il est mentionné à trois reprises par Lützen dans son livre *Préhistory of the Theory of Distributions* [Lützen 1982] (au chapitre 3 « Generalized Fourier Transforms ») :

> Carleman and Schwartz met in 1947 at the Colloque International de Analyse Harmonique in Nancy where they both gave papers on their generalization of the Fourier integrals to function pairs and tempered distributions respectively.
>
> [Lützen 1982, p.89-90]

> At the Colloque International 1947, where both Carleman and Schwartz gave their generalizations of the Fourier integral, the Swede Arne Beurling gave a third method, which however is closely related to Carleman's.
>
> [Lützen 1982, p.90-91]

(au chapitre 6 « Schwartz' Creation of the Theory of Distributions ») :

> In any case, it is certain that in June 1947, he had the tempered distributions and the corresponding Fourier transformation because during the week of June 15-22 he spoke on the "Théorie des distributions et tranformation de Fourier" at a congress on harmonic analysis at Nancy, and developed the basic elements of the theory.
>
> [Lützen 1982, p.157]

Ce point est certes important, et nous y reviendrons plus en détail dans ce chapitre même, mais il semble réduire le colloque à une simple présentation de théorèmes et d'idées ; voire même à ne pas distinguer le colloque de la publication du résultat (sauf peut-être à dater véritablement l'idée en question, juin 1947 en l'occurrence, alors que la publication date de 1949).

D'autre part, Doris T. Zallen a écrit un article intitulé « The Rockefeller Foundation and French Research » dans lequel elle mentionne les bourses accordées par la Fondation Rockefeller au Centre National de la Recherche Scientifique dans un contexte de reconstruction de la science française après la guerre. L'une de ces bourses est destinée à financer des colloques, tel celui d'Analyse Harmonique qui est l'objet de ce chapitre. Dans cet article, seuls sont mentionnés les titres des différents colloques qui ont eu lieu grâce à ce financement. Cela permet néanmoins de comprendre le cadre dans lequel ces colloques se sont insérés, et de la volonté qui les a précédés.

Néanmoins, ni l'une ni l'autre de ces approches ne traduit véritablement en quoi le colloque est un aspect particulier important de la vie collective des mathématiques. On note que les congrès, conférences et colloques sont des événements importants pour l'histoire des mathématiques de la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Les travaux de Dahan et Aubin mentionnent fréquemment des colloques particuliers comme étant des clefs pour comprendre le développement et la circulation du savoir tout autant que l'organisation collective des mathématiques [1]. Qu'est-ce que la forme spécifique du colloque permet pour les mathématiques et les mathématiciens ? Quelle influence un colloque ponctuel a-t-il dans l'histoire des mathématiques ?

1. Voir surtout [Dahan Dalmedico 1996] ainsi que [Aubin 1998], [Aubin et Dahan-Dalmedico 2002], [Aubin 2001].

L'objet de ce chapitre est de déterminer comment les mathématiciens se saisissent de la forme du colloque pour en faire un objet important dans la vie collective des mathématiques. Le colloque d'analyse harmonique, qui a eu lieu à Nancy du 15 au 22 juin 1947, est pour cette étude un bon prétexte – c'est le premier colloque international du C.N.R.S. organisé par des mathématiciens notamment ; nous étudions le colloque dans son ensemble, en partie du point de vue de Schwartz. Schwartz participe à ce colloque ; il expose l'un de ses résultats qui est publié ensuite, il est présent lors des autres exposés, il rencontre et discute avec les autres participants, il participe aux réceptions...Définir l'objet colloque va aussi nous permettre de comprendre ce colloque en particulier comme un événement important de confrontation de la vie collective des mathématiques avec Schwartz.

Après avoir présenté le contexte dans lequel s'organisent ces colloques internationaux du C.N.R.S. et la manière dont les mathématiciens, plus généralement, participent à la construction et à l'organisation de congrès scientifiques, nous nous attardons sur de multiples aspects du colloque d'analyse harmonique de Nancy de juin 1947. Nous montrons enfin que ce colloque a constitué un tremplin pour Schwartz et sa théorie des distributions.

3.1 La reconstruction d'après-guerre et la forme colloque réinvestie : les colloques internationaux du C.N.R.S.. Le cas des mathématiques.

Afin de comprendre le contexte dans lequel a eu lieu ce colloque d'analyse harmonique en 1947, commençons par présenter l'initiative de la Fondation Rockefeller après la guerre. Nous présentons ensuite plusieurs exemples de colloques internationaux de mathématiques, afin de pouvoir préciser, de manière assez générale pour l'instant, ce que peut être un tel colloque.

3.1.1 Bourses de la Fondation Rockefeller : la mise en place de colloques sous une forme bien précise.

Juste après la fin de la guerre, dès 1945, la Fondation Rockefeller va chercher à jouer un rôle dans la science française. C'est l'objet de l'étude de [Zallen 1989], qui s'attache précisément à ces années d'après-guerre. Nous allons nous appuyer sur cette étude, et surtout extraire de l'étude ainsi que des archives mobilisées par Zallen, les indications permettant de définir à la fois les objectifs de la Fondation Rockefeller mais aussi la forme bien délimitée des colloques – les colloques internationaux du C.N.R.S. – dont la Fondation va être à l'origine de la mise en place.

A l'automne 1945, les besoins de la communauté scientifique française, fragilisée par la guerre, sont identifiés de la sorte par Warren Weaver, alors directeur de la « Natural Sciences Division » de la Fondation Rockefeller [2] :

1. restoration of contacts, both within and without France ;
2. furnishing of critical items of equipment (apparatus, chemicals, literature) ;
3. training of scientific personnel.

La Fondation Rockefeller, qui souhaite lancer la reconstruction de la science française, va choisir deux moyens afin de remplir ces besoins qu'elle identifie. Après des discussions, il est décidé d'attribuer deux bourses au Centre National de la Recherche Scientifique, l'une de $250,000 pour l'équipement des laboratoires et l'autre de $100,000 pour l'organisation

2. Ses propos sont relatés dans [Zallen 1989, p.6].

de conférences. Cette deuxième bourse, celle qui nous intéresse ici, vise le premier des besoins recensés, à savoir la restauration de contacts scientifiques, à l'intérieur de la France et avec l'extérieur. Les objectifs et la forme de ces colloques sont précisés par Weaver, dont Zallen retrace les propos :

> To overcome the effects of the intellectual isolation of French science induced by the war, Weaver suggested a grant of $100,000 to help the CNRS bring leading scientist (American and non-French Europeans) [3] to a series of special conférences in France. These conferences would be targeted to address particular problems such as protein structure, ensymatic sustems in cellular physiology, or statistics of quality control (Weaver's examples). The conferences, by bringing world experts together with French scientists in that field, would help identify « the most fruitful lines along which the work can now proceed ». Weaver's description of these conferences indicates that they were to be small and informal (« the attendance of mature contributors restricted to say 15 ; with provision, however, for additional listening and observing audience of young men »), and were to include two to five non-French researchers. They were to be held at various locations throughout France, and last long enough (of the order of a week) so that real work could be accomplished. Rather than merelyproviding information, then, these conferences were envisioned as a means of re-establishing and energizing scientific programs in France by offering French scientists the opportunity to orient their work so as to both draw on their particular strength and fit their work with recent developments internationally.
>
> [Zallen 1989, p.6]

L'objet de la bourse est donc d'aider le C.N.R.S. à faire venir en France des scientifiques de haut-niveau à des colloques. Il s'agit de conférences petites et informelles, auxquelles on invite un nombre restreint de scientifiques. Ces conférences doivent avoir lieu dans différents lieux en France et durer assez longtemps pour avoir le temps d'accomplir un vrai travail. Ces conférences sont perçues comme étant le moyen de relancer des programmes scientifiques en France, en incitant les scientifiques français à réorienter leur recherche afin de mieux l'inclure dans les développements internationaux récents. L'attribution d'aides pour des conférences est l'une des activités favorites de la Fondation, ainsi que le précise Zallen, pour laquelle elle a déjà beaucoup d'expérience. Nous revenons plus loin sur les nombreux aspects qui apparaissent ici.

Une première bourse est attribuée en juin 1946, pour trois ans, pour l'organisation de trente conférences, en même temps qu'une bourse pour l'équipement (les deux étant complémentaires, de l'avis des dirigeants du C.N.R.S.). Au bout des trois années, seules vingt conférences ont eu lieu et la moitié de la somme a été dépensée. La bourse a donc été prolongée de trois ans, pendant lesquels dix-huit autres conférences ont été organisées. Puis une deuxième bourse de $40,000 est versée de nouveau en juin 1952, pour trois ans plus un an de prolongement. Au final 55 conférences sont organisées de juin 1946 à juin 1956. [Zallen 1989, p.23-24] donne une liste de ces conférences, dans l'ordre chronologique, et notamment celles de mathématiques.

Institutionnalisation

Revenons sur le choix du C.N.R.S. [4] auquel la Fondation Rockefeller confie l'organisation de ces colloques, qui prennent d'ailleurs le nom de « colloques internationaux du

3. Dans un contexte de guerre froide, cette expression montre l'exclusion de l'URSS de la communauté scientifique internationale considérée par les Américains. On pourra lire [Krige 2006].

4. Pour l'histoire du CNRS, on pourra consulter la collection *Cahiers pour l'histoire du CNRS*, et plus spécifiquement l'article de Jean-François Picard et Elisabeth Pradoura « La longue marche vers le CNRS (1901-1945) » [Picard et Pradoura 1988 (remanié en 2009)]. Voir aussi [Guthleben 2009].

C.N.R.S. »[5]. Le C.N.R.S. est considéré comme prédominant en France à cette date par la Fondation Rockefeller, ainsi qu'on peut le lire dans son rapport annuel de 1946 (p.162)[6] :

> The Centre National de la Recherche Scientifique has two functions : to carry on research and to assist research in French universities. It is organized in over 30 sections, covering all the fields of pure and applied science, with a directorate representing the leadership of French science. Many of the leaders are former Foundation fellows who have knowledge of and sympathy for science in other countries. An important phase of the Centre's plan is that of developing research in the provincial universities as well as in Paris.

Très concrètement, la Fondation Rockefeller et le C.N.R.S. se répartissent le financement des colloques. On en trouve des traces dans la brochure que le C.N.R.S. envoie aux organisateurs de colloques. Ainsi lorsqu'en 1955, Delsarte[7] souhaite organiser un colloque d'équations aux dérivées partielles[8], il reçoit cette brochure du C.N.R.S., intitulée « Renseignements pratiques pour la préparation et le règlement des colloques internationaux organisés par le C.N.R.S. avec l'appui de la Fondation Rockefeller », qui est reproduite dans l'annexe J, p.331. Cette brochure permet de comprendre comment étaient présentés les colloques à leurs organisateurs. Même si cette brochure a été envoyée en 1955, nous la citons pour l'ensemble des colloques.

Les « prévisions de dépenses » prévoient une répartition des remboursements de frais de voyage et séjour entre le C.N.R.S. et la Fondation Rockefeller :

> Il est prévu pour chaque colloque :
>
> 1°) Un crédit sur les fonds ROCKEFELLER :
>
> a) pour les frais de voyage et de séjour des étrangers,
>
> b) pour certains frais de réception et d'organisation (cf. imprimé N°9) dont l'organisateur devra donner un état détaillé pour justification.
>
> 2°) Un crédit sur les fonds du C.N.R.S. :
>
> a) pour les frais de voyage et de séjour des français,
>
> b) pour les frais de réception et de secrétariat qui devront tous être justifiés par une facture en bonne et dûe forme (cf. imprimé N°8)

On constate ainsi que les fonds Rockefeller servent à financer les séjours et voyages des étrangers, étant ainsi fidèles à l'objectif initial de relancer les contacts entre scientifiques français et étrangers. Enfin, les colloques internationaux du C.N.R.S. sont publiés par le C.N.R.S. dans une collection dédiée.

Les modes de financement de publication traduisent une institutionnalisation de ces colloques, qui passe par l'attribution de leur organisation au C.N.R.S. par la Fondation Rockefeller. La forme de ces colloques est bien établie, son organisation est institutionnalisée.

5. Après l'arrêt des bourses de la Fondation Rockefeller, ces colloques continuent à être organisés par le C.N.R.S..

6. On peut trouver ce rapport sur le site http ://www.rockefellerfoundation.org (consulté le 1er septembre 2013).

7. Doyen de la Faculté des Sciences de Nancy, nous reparlons de Delsarte plus loin, car c'est lui qui organise aussi le colloque d'analyse harmonique de 1947.

8. Le colloque sur les équations aux dérivées partielles aura lieu à Nancy, du 9 au 15 avril 1956, et Schwartz sera d'ailleurs présent. Par contre, la bourse Rockefeller ayant pris fin à cette date, il sera uniquement « sous les auspices du C.N.R.S. »

Géographies

Si les bourses de la Fondation Rockefeller ont pour but une restauration de la communauté scientifique française telle qu'elle existait avant la guerre, elles permettent pour cela une modification de la manière dont les individus interagissent entre eux, et une meilleure visibilité à la fois des universités de province en France ainsi que de la science française sur la scène internationale. Ainsi que les objectifs premiers le spécifiaient, le but est de restaurer les liens à la fois internes à la France mais aussi internationaux.

En ce qui concerne la volonté d'organiser des colloques dans des universités de province, on constate que 20 des 55 colloques ont lieu dans de tels lieux (voir Annexe G, p.319). Il y a ainsi 5 colloques à Lyon, 4 à Strasbourg, 3 à Nancy, 2 à Alger et Marseille, et 1 à Toulouse, Montpellier, Bordeaux et Grenoble. Tous les autres ont lieu à Paris (dont 1 à Gif-sur-Yvette).

Si l'on regarde l'influence des bourses sur la science française [9], on peut constater que les conférences ont été bien accueillies, dès le départ, ainsi qu'en témoignent de nombreux récits ; ce qui amène la Fondation Rockefeller à conclure sur le succès des conférences :

> There is little question but what the CNRS colloquia have been most successful, have been uniformly well conceived and well conducted, and have played a very fine role in broadening the international outlook of French scientists [10].

L'internationalisation de la science a été l'objet de nombreuses recherches, dont certaines portent exclusivement sur les mathématiques. On peut notamment citer les ouvrages de Reinhard Siegmund-Schultze *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics between the two World Wars.* [Siegmund-Schultze 2001] [11] et celui édité par Karen H. Parshall et Adrian C. Rice *Mathematics Unbound : the evolution of an international mathematical research commnity 1800-1945* qui, même s'ils ne se focalisent pas sur l'époque qui nous intéresse ici, permettent de mieux définir ce que l'on entend par ces termes « international » et « internationalisation » et de les replacer historiquement.Ainsi Parshall et Rice décident-ils de traiter la question sur une période très large, à l'aide d'étude de cas, et remettent en cause le phénomène d'internationalisation comme étant propre à la fin du vingtième siècle. La communauté des mathématiciens actuelle est internationale, à la fois en terme de conférences, invitations, publications, et échanges d'idées mathématiques [12],

9. Voir notamment [Zallen 1989, p.15-17].

10. Propos rapportés dans [Zallen 1989, p.15], Gerard R. Pomerat officer's diary, June 6, 1951 entry. Rockefeller Foundation archives, RG 12.1.

11. Ce livre cherche à répondre à la question : « How and to what extent did and do these (originally non-scientific) cultural and political differences between nations shape science and mathematics in its cognitive and social structures in a qualitative new manner beyond the national level » [Siegmund-Schultze 2001, p.4] et étudie pour cela notamment la Fondation Rockefeller.

12. Ainsi écrivent-ils :

> Few would disagree with the characterization of today's intellectual community, indeed of society itself, as « international ». (...)
>
> As a constituent of this broad schorlarly body, the community of mathematicians shares these characteristics and, like most of its academic peers, could be forgiven for taking the international nature of its field for granted. Its members attend meetings and conferences the world over, participate in exchange programs with foreign institutions, publish papers in globally circulated journals editorially based in a host of countries, and draw from from the work of mathematicians worldwide, all with the principal objective of advancing their discipline. It does not take extensive knowledge of the history of mathematics –or of uman kind for that matter– to know that this is a recent phenomenon. More particularly, it seems to have been a characteristic of the late twentieth century.
>
> Or was it ?
>
> [Parshall et Rice 2002, p.1]

et cela se retrouve bien avant cette période récente.

Nous verrons néanmoins qu'il est toujours possible de parler d'internationalisation, dans le sens qui est décrit juste au-dessus mais aussi en termes de voyage et de déplacement personnel, après la seconde guerre mondiale ; ce phénomène est toujours en cours, ainsi que nous le verrons dans le cas particulier de Schwartz : cela a un sens de parler d'internationalisation de la carrière et des mathématiques de Schwartz à partir de 1947.

L'un des rapports de la Fondation Rockefeller conclut en 1952 sur le rôle des colloques ainsi [13] :

> the colloquiums seem to have played an important role in overcoming the traditional French reluctance to visit abroad (particularly in the United States) or to seek really strong international rapport. As a small somewhat unexpected corollary to this, it seems that a good many of the visiting scientists have been helped to discover the fine scientific work, and especially scientific thinking, being done in some of the French laboratories

L'un des principaux aspects de ces colloques est peut-être d'avoir familiarisé les scientifiques français avec les voyages internationaux, indique ce rapport : nous verrons que c'est le cas pour Schwartz.

En terme de géographies, les colloques se positionnent à deux échelles. A l'échelle nationale tout d'abord, la volonté de favoriser les universités de province permet l'organisation d'entre un tiers et la moitié des colloques à l'extérieur de Paris. A l'échelle internationale ensuite, les colloques sont l'occasion pour les Français d'inviter des scientifiques étrangers à venir connaître leurs travaux, et a pour conséquence de développer les voyages scientifiques ultérieurs des scientifiques français.

Spécialisation

Précisons maintenant un troisième enjeu, qui participe au projet. Il s'agit de la spécialisation, c'est-à-dire de l'organisation de colloques sur des sujets spécifiques, sur lesquels travaillent déjà quelques scientifiques français mais dont les recherches ont à gagner à la confrontation internationale. Le rapport de la Fondation Rockefeller de 1946 [14] le précise ainsi :

> The scientific conferences will be organized relative to some modern problem or group of problems, such as chemical genetics, protein structure, enzyme chemistry, cellular physiology, recent advances in statistical techniques, magnetic theories and structure of metals. Such small, informal meetings will give an excellent opportunity for eight or ten French scientists to join with a few non-French colleagues in discussion of their fields of interest, and to bring themselves up to date on work done during the war, as well as to plan the most fruitful lines along which work can now proceed. Two such conferences, one on the subject of high polymers and the other on the theory of optical images, were held in 1946 ; and these conferences have been judged most successful.

Les conférences portent sur de nombreux sujets [Zallen 1989, p.13], des mathématiques à la biologie. La majorité de ces conférences correspondent au format prévu, à savoir qu'elles portent sur des problèmes spécifiques, faisant partie de programmes de recherche français. Elles attirent des éminents scientifiques. Le côté informel n'est pas

13. Propos rapportés par [Zallen 1989, p.16-17]

14. Rockefeller Foundation Annual Report 1946, p. 163. Archives Rockefeller en ligne : http ://www.rockefellerfoundation.org/about-us/annual-reports (Page consultée le 1 septembre 2013).

toujours respecté néanmoins ; certaines conférences attirant tous les prix Nobel de la discipline par exemple. La liste des titres des colloques, voir Annexe G p.319, montre bien la spécialisation des sujets choisis.

L'accent mis sur la spécialisation est aussi précisé par le petit nombre de participants souhaités, autour de quelques experts dont un français et des jeunes.

On a laissé de côté les enjeux politiques, le cadre dans lequel s'insère le projet de la Fondation Rockefeller, pour ne présenter que les aspects structurels des colloques. Les colloques internationaux du C.N.R.S. sont institutionnalisés, leur forme est spécifique (petit nombre de participants, place des jeunes, sujet spécialisé) et les aspects géographiques importants (province - internationalisation).

Retenons donc le projet initial de ces colloques, à savoir une reconstruction de la science française autour de conférences d'une semaine, autour de scientifiques éminents étrangers et d'une équipe présente en France, accompagnée de discussions informelles. Nous allons rechercher les effets spécifiquement d'un de ces colloques internationaux, à savoir celui d'analyse harmonique de juin 1947. L'analyse plus précise d'un colloque va permettre de voir comment le C.N.R.S. a mis en œuvre la réalisation concrète des colloques rendus possibles par le financement de la Fondation Rockefeller, ainsi que les conséquences qu'un tel colloque a pu avoir tant sur la vie mathématique de Schwartz. Mais avant cela, nous allons définir plus précisément l'objet « colloque » ou « congrès », et son investissement par les mathématiciens.

3.1.2 L'objet congrès se définit ; son investissement par les mathématiciens.

Des congrès scientifiques à des congrès spécialisés en mathématiques

L'objet « congrès international de scientifiques », si parler d'objet congrès a un sens [15], se construit progressivement au cours du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, faisant suite à la création de sociétés scientifiques. Le volume 12 de la *Revue germanique internationale* intitule cette construction : « La fabrique internationale de la science. Les congrès scientifiques de 1865 à 1945 » propose de nombreuses études de cas, et donne les références aux travaux existants sur les congrès scientifiques. Ainsi que cela est précisé dans la présentation [Feuerhahn et Rabault-Feuerhahn 2010], cette étude s'intéresse à la nature du colloque comme pratique scientifique et non plus uniquement à son contenu. Cela nous permet ici de saisir le contexte dans lequel les colloques internationaux du C.N.R.S. sont pensés et créés.

Les congrès scientifiques internationaux se spécialisent peu à peu, en suivant la création de sociétés savantes nationales et internationales [16]. Nous allons présenter ici spécifiquement le cas des congrès internationaux de mathématiques, ainsi que d'initiatives d'organisations de congrès d'un type particulier, avant de regarder comment les mathématiciens se saisissent plus particulièrement de l'opportunité constituée par les colloques internationaux du C.N.R.S..

On peut donc s'intéresser aux Congrès Internationaux des Mathématiciens, dont le premier a lieu à Zurich en 1897 [17] (voir [Lehto 1998], [Parshall et Rice 2002], dont on a dit quelques mots dans l'introduction).

Étudiés dans leur ensemble afin de donner un premier aperçu [Albers, Alexanderson

15. Voir [Brian 1989] pour une discussion sur l'objet congrès.
16. On peut se référer à l'exposé de David Aubin, Diplomates et sciences de l'observatoire in Négocier la première mondialisation. Diplomates,experts et invention d'une diplomatie technique au 19e siècle. Atelier international du 24 mai 2013 organisé par UMR IRICI et Universita degeli Studi di Padova.
17. Ce congrès en particulier a été étudié dans [Decaillot 2010].

et Reid 1987] ou bien comme faisant partie de l'histoire institutionnelle de l'IMU [Lehto 1998], l'importance de la vie collective des mathématiques lors de ces congrès fait l'objet d'un interlude, « Social life at the ICM » dans l'ouvrage de G.P. Curbera *Mathematicians of the World, Unite!* [P.Curbera 2009]. Cette étude, basée sur la lecture détaillée des *Proceedings* et agrémentée de nombreuses photos intercale à la narration chronologiques des congrès successifs quelques histoires thématiques – ces interludes – dont celle sur la vie sociale est la plus importante aux yeux de l'auteur [P.Curbera 2009, Introduction], afin de montrer que le but initial de créer des relations personnelles entre mathématiciens de différents pays a bien été atteint. Cela éclaire certaines des réflexions du mathématicien Lennan Carleson proposées en guise de préface [P.Curbera 2009]. Les mathématiques ne sont néanmoins abordées que par les titres des exposés [Alexanderson 2010]. La manière dont on parle de ces congrès, entre récit et souvenir, permet toutefois de présenter les principales caractéristiques de ceux-ci : se rencontrer [18].

Il s'agit d'une conférence très large, qui s'inscrit dans l'internationalisation des mathématiques [Parshall et Rice 2002], mais qui n'est pas véritablement comparable aux colloques internationaux du C.N.R.S. que l'on présente ici.

Les premières études, notamment le volume introduit par [Prochasson 1989], indiquent qu'il n'est pas évident de former une typologie des congrès. Mais si cette typologie a un sens au milieu du XX$^{\text{ème}}$ siècle, alors le « colloque », tel le colloque international du C.N.R.S. appartient à un type particulier. L'unité n'est pas thématique mais institutionnelle, financière (Rockefeller, C.N.R.S.).Elle se trouve aussi dans le lieu (national, France notamment province). La régularité n'est pas précisée, mais un certain nombre de colloques ont lieu chaque année. Regardons deux autres exemples de congrès de ce type en mathématiques.

Une initiative antérieure en mathématiques semble en effet plus équivalente à ces petits colloques internationaux du C.N.R.S. d'après-guerre. Il s'agit des « Conférences internationales de sciences mathématiques organisées à l'université de Genève ».

Les « Conférences internationales de sciences mathématiques » se sont tenues à Genève de 1933 à 1938, et on peut en trouver la liste, présentée dans l'annexe I, p.329 dans la publication de celle de 1938, sur les probabilités, par Hermann [19]. La publication particulière de la conférence de probabilités laisse la place à un long volume introductif, dans lequel la finalité de ces conférences est longuement décrite [20] :

> Grâce à quelques dons généreux de personnes habitant Genève, la Faculté des Sciences de notre ville a pu organiser depuis 1933 une série de conférences portant sur différentes parties des sciences mathématiques ; Cette entreprise vise à faire progresser ces domaines et à maintenir la collaboration fructueuse entre les mathématiciens de tous les pays. Cette série internationale fut honorée de la présence de quelques-uns des maîtres les plus illustres, et de jeunes mathématiciens dont l'avenir peut attendre de grandes choses.
>
> A côté des conférences isolées, une formule s'est avérée spécialement heureuse, de l'avis des personnes les plus compétentes : celle qui groupe en un colloque les spécialistes d'un domaine particulier des sciences mathématiques. La communauté des préoccupations crée immédiatement des liens d'amitié, des échanges de vue féconds et

18. Voir par exemple [Ghys 2010] qui écrit :

> Mais je me réjouis de participer au Congrès d'Hyderabad ; je compte bien essayer de m'accrocher et apprendre le plus possible de maths la semaine prochaine. Sans oublier le principal : Internet ne remplacera jamais les rencontres personnelles.

19. [*Colloque consacré à la Théorie des Probabilités, 1937, Genève. Présidé par M. Maurice Fréchet.* 1938-39].

20. *Ibid.*, Introduction (fascicule 1, p.13-15) de R. WAVRE.

> ces congrès restreints de mathématiques jouent, plus modestement, le rôle que joue le congrès Solvay [21] pour d'autres disciplines.

On peut lire que la forme de ces conférences n'est pas strictement encadrée. Néanmoins, après cinq années, le bilan tiré fait l'éloge de la forme particulière du « colloque » qui groupe des spécialistes d'un même domaine précis ; ce qui permet des rencontres et des échanges féconds. R. Wavre, président de la commission d'organisation des conférences, précise ensuite que « Ces petits congrès se tiendront, nous l'espérons, chaque année à l'exception des périodes où se réunit le grand congrès quadriennal qui fournit l'occasion idéale à tous les mathématiciens de se rencontrer. » Les conférences internationales sont bien connues des mathématiciens. Il donne ensuite quelques détails, concernant l'organisation concrète de ces colloques, qui commence par le « recours à l'obligeance d'un savant dont la compétence est universellement reconnue dans le domaine à explorer ». La réussite de ces colloques passe notamment par des « discussions très fournies » et se manifeste dans « l'empressement avec lequel [les] invitations ont été acceptées ». Ces colloques ont été financés en partie par des « mécènes anonymes », et les textes sont publiés, généralement dans *L'Enseignement Mathématique*, ou sous forme de fascicule pour ce colloque de probabilités qui a donné naissance à une très grande quantité de textes.

Une autre initiative, contemporaine des Colloques Internationaux du C.N.R.S. existe en Belgique à partir de 1949. Il s'agit des Colloques du Centre Belge de Recherches Mathématiques (à partir de 1949) dont on trouve une liste pour les années 1949-1961 dans l'annexe H, p.323. Le Centre Belge de Recherches Mathématiques est créé en 1949 par Lucien Godeaux (1887-1975) [22], qui est l'un des cofondateurs de la Société mathématiques de Belgique en 1921. Il s'agit d'« une série de colloques réunissant les experts étrangers et belges sur une question précise » [Mahwin 2005].

A l'occasion de l'un de ces colloques, en 1954, Schwartz expose le premier chapitre de la thèse de son étudiant en thèse, Jacques-Louis Lions, ainsi nous l'avons mentionné au chapitre 2. Le récit de Mahwin montre que Schwartz s'est ici saisi d'une occasion privilégiée de faire connaître les travaux de son étudiant, en faisant « chauffer la salle » avant de laisser parler « de loin le plus jeune conférencier » devant cette audience de « mathématiciens confirmés ». On peut penser qu'il reproduit, en quelque sorte, sa première expérience – celle pour Schwartz du colloque d'analyse harmonique de 1947 que nous présentons dans la partie suivante – de parler, à l'occasion d'un colloque, devant un tel public.

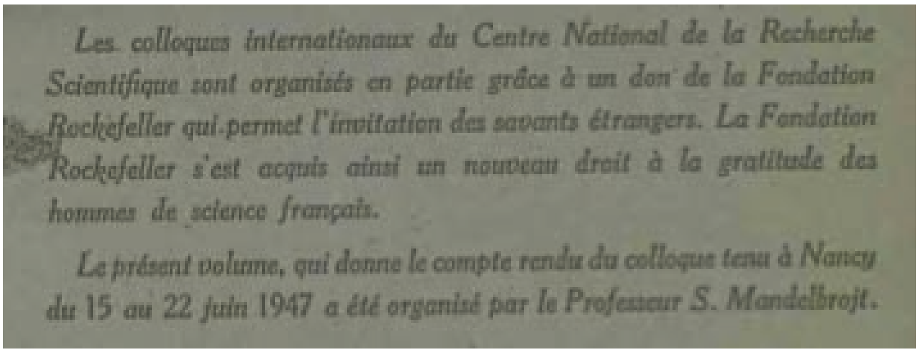
Ces deux exemples, celui de Genève et celui du Centre Belge de Recherches Mathématiques, (même s'il restent à étudier en détail) montrent que la forme du colloque – de petite taille, localisé dans un pays mais visant un public local et international, laissant la place à des experts mais aussi à un public plus jeune – prend forme au milieu du XX‘eme siècle. Nous allons maintenant regarder comment les mathématiciens vont organiser leurs colloques internationaux du C.N.R.S..

21. Pour une présentation et une analyse de l'importance des Congrès Solvay, on peut lire [Marage et Wallenborn 2011] :

> Dès lors, les congrès scientifiques, dans la mesure même où ils permettent d'assister « en direct » à la réflexion et aux confrontations, fournissent un observatoire privilégié pour étudier les processus d'élaboration des connaissances. Surtout si, comme les Conseils Solvay, ces congrès interviennent à des moments clefs du développement d'une discipline,et qu'ils sont de surcroît délibérément organisés de manière à favoriser la discussion.

ainsi que [G. Wallenborn 1995], [Mehra 1975].

22. Sur Lucien Godeaux, voir notamment [Godeaux 1975].



Les colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique sont organisés en partie grâce à un don de la Fondation Rockefeller qui permet l'invitation des savants étrangers. La Fondation Rockefeller s'est acquis ainsi un nouveau droit à la gratitude des hommes de science français.

Le présent volume, qui donne le compte rendu du colloque tenu à Nancy du 15 au 22 juin 1947 a été organisé par le Professeur S. Mandelbrojt.

Figure 3.1 – Encart inséré au dos de la couverture des volumes publiés des colloques internationaux du CNRS. Ici : celui d'analyse harmonique, 1947.

Les mathématiciens se saisissent des colloques internationaux du C.N.R.S.

Les colloques internationaux du C.N.R.S., ainsi qu'on peut le voir dans la liste, ont fait une large part aux mathématiques : parmi les 55 colloques financés en partie par la bourse de la Fondation Rockefeller, Zallen en compte 12 sur les mathématiques (physique théorique incluse). Schwartz a ainsi participé au colloque d'analyse harmonique (Nancy, 15-22 juin 1947), d'algèbre et théorie des nombres (Paris, 25 septembre-1er octobre 1949) et de géométrie différentielle (Strasbourg, 26 mai-1er juin 1953). On peut mentionner le colloque de topologie algébrique (Paris, 26 juin-2 juillet 1947), qui a eu lieu juste après celui de Nancy ou encore celui sur le calcul des probabilités et ses applications (Lyon, 28 juin-3 juillet 1948).

Ainsi qu'il a été précisé au-dessus, tous les colloques ont été publiés par le C.N.R.S.. Dans chaque volume, sauf exception, un encart (voir Figure 3.1) précise qu'il s'agit d'un colloque scientifique international, organisé grâce au C.N.R.S. et à la Fondation Rockefeller.

A la lecture des introductions de ces colloques, ou bien encore de la liste des participants, on peut constater que le C.N.R.S. a donné des consignes précises concernant l'organisation de ces colloques. Arnaud Denjoy, qui organise le colloque sur les probabilités à Lyon écrit ainsi :

> En 1947, le Centre National de la Recherche Scientifique (13, quai Anatole-France, Paris), a inauguré avec succès une série de colloques scientifiques internationaux grâce à la participation financière de la Fondation Rockefeller.
>
> Parmi les sujets dont l'étude était prévue pour 1948 figurait le Calcul des Probabilités et ses applications. Conformément à la doctrine du C.N.R.S., répartissant ses colloques entre Paris et la province, Lyon a été choisi pour siège du colloque consacré à ce sujet. [Recherche Scientifique 1949]

Regardons la liste des participants du colloque d'algèbre et théorie des nombres. (3.2) On trouve une liste des invités étrangers et français, ainsi que des autres participants ; ainsi que cela a été précisé dans le projet de la Fondation Rockefeller. Ce colloque est par ailleurs très fortement marqué par la présence bourbakiste. On trouve même les prémices de son organisation dans une lettre de Weil à Cartan en janvier 1947, dont la majeure partie des consignes ont été respectées :

> P.S. Il me vient une idée : puisque vous avez accepté de collaborer aux Colloques (ou Symposia ?), pourquoi ne pas en profiter, et prévoir pour l'hiver prochain un colloque d'algèbre et théorie des nombres, avec Chevalley, moi-même, Artin ou Siegel (ou les deux), Chabauty et Pisot, et (disons) Fueter et Van de Corput ? Scientifiquement, ça

FIGURE 3.2 – Liste des participants au colloque international d'algèbre et théorie des nombres ; Paris, 23 septembre-1er octobre 1949

COLLOQUE INTERNATIONAL.

ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES.

Paris. 23 septembre-1er octobre 1949.

LISTE DES PARTICIPANTS.

ORGANISATEURS.

A. Châtelet, Doyen de la Faculté des Sciences de Paris, *Président*.
P. Dubreil, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
R. Croisot (Poitiers).
M. Lazard (Paris).
J. Riguet (Paris).
R. Samuel (Clermont-Ferrand).

INVITÉS ÉTRANGERS.

E. Artin (Princeton, États-Unis).
G. Birkhoff (Harvard, États-Unis).
J. G. van der Corput (Amsterdam, Pays-Bas).
H. Davenport (London, Grande-Bretagne).
W. Korinek (Praha, Tchécoslovaquie).
Th. Lepage (Bruxelles, Belgique).
K. Mahler (Manchester, Grande-Bretagne).
L. J. Mordell (Cambridge, Grande-Bretagne).
T. Nagell (Uppsala, Suède).
B. Segre (Bologna, Italie).
B. L. van der Waerden (Amsterdam, Pays-Bas).
O. Zariski (Harvard, États-Unis).

Les Mathématiciens soviétiques, sollicités, ont exprimé le regret de ne pas pouvoir envoyer un représentant.

INVITÉS FRANÇAIS.

C. Chabauty (Strasbourg).
F. Châtelet (Lyon, actuellement Besançon).
J. Dieudonné (Nancy).
L. Lesieur (Poitiers).
Ch. Pisot (Bordeaux).
F. Roger (Bordeaux).
A. Weil (Chfcago, États-Unis).

AUTRES PARTICIPANTS.

O. Alibash (Ankara, Turquie).
M. Anas (Caboul, Afghanistan).
R. Apéry (Rennes, actuellement Caen).
T. Bachiller (Madrid, Espagne).
R. Ballieu (Louvain, Belgique).
P. Belgodère (Paris).
P. Boos (Paris).
L. Bouckaert (Louvain, Belgique).
H. Cartan (Paris).
J. Chapelon (Paris).
Mme M.-L. Dubreil-Jacotin (Poitiers).
M. Eger (Marseille).
R. Garnier (Paris).
Th. Got (Paris).
J. Hadamard (Paris).
K. A. Hirsch (Newcastle u. Tyne, Grande-Bretagne).
P. Jaffard (Paris).
M. Janet (Paris).
G. Julia (Paris).
L. Kaloujnine (Paris).
J. Kampé de Fériet (Lille).
M. Krasner (Paris).
J. Kuntzmann (Grenoble).
J. Leray (Paris).
S. C. Lowell (Londres).
Y. Martin (Rennes).
Mlle P. Mathieu (Paris).
P. Metral (Marseille).
A. Néron (Paris).
J. Nielsen (Copenhague, Danemark).
G. Papy (Bruxelles).
D. Pedoe (Londres).
R. Pernet (Lyon).
Mlle S. Piccard (Neuchâtel, Suisse).
R. Raffin (Paris).
R. A. Rankin (Cambridge, Grande-Bretagne).
L. Schwartz (Nancy).
D. Tamari (Paris).
Mlle M. Teissier (Paris).
J. Tits (Bruxelles).

J. Z. 031174. 1 A

> se soutiendrait au moins aussi bien que tout ce à quoi on a songé ; et ça permettrait un *vrai* congrès Bourbaki.
>
> [Audin 2011, p.143-144] [23]

Le succès des colloques est, lui aussi, très fréquemment décrit. Ainsi Châtelet et Dubreil, organisateurs du colloque d'algèbre et théorie des nombres, louent-ils la forme particulière de ce colloque :

> C'est pour nous une grande joie de présenter le Recueil du Colloque international d'Algèbre et de Théorie des nombres qui eut lieu à Paris du 22 septembre au 1er octobre 1949. *A priori*, le développement intense de ces deux branches des mathématiques, depuis une trentaine d'années, pouvait garantir le succès d'une telle rencontre. En fait, ce succès a dépassé toute attente. La belle tenue scientifique des conférences et des discussions, l'atmosphère de cordialité et de sympathie, la présence de très jeunes mathématiciens et les promesses qu'ils ont révélées, l'intérêt manifesté par un public nombreux, ont été pour nous autant de satisfactions profondes.
>
> [CNRS 1950]

De la forme convenue de ce discours transparaît un enthousiasme suscité par la forme particulière du colloque. Dans le cas du colloque d'analyse harmonique que nous présentons ensuite, nous allons confronter cette vision enchantée avec les faits : quelles rencontres ont été permises par ce colloque ? Quelles réalisations en sont découlées ?

Ce n'est donc pas la première fois que les mathématiciens discutent du succès de tels colloques. Les colloques du C.N.R.S. se situent donc dans une certaine continuité, tout en introduisant un renouveau dynamique en permettant une organisation régulière et des colloques de petite taille d'un forme particulière.

3.2 Le colloque d'Analyse Harmonique, Nancy 15-22 juin 1947

Nous décrivons ici, le plus précisément possible, l'organisation du colloque d'Analyse Harmonique et son déroulement. Nous cherchons ici à confronter ce colloque à la forme particulière proposée par la Fondation Rockefeller, et plus généralement, à comprendre l'importance du colloque dans la vie collective des mathématiques, c'est-à-dire comme lieu de structuration de la communauté, comme espace important pour faire des mathématiques et être mathématicien.

3.2.1 Pourquoi un colloque d'analyse harmonique à Nancy en 1947 ?

Spécialisation - Prévoir un colloque : réunir des mathématiciens ou bien choisir un thème ?

Conformément au projet de la Fondation Rockefeller, il s'agit d'un colloque spécialisé, portant sur l'analyse harmonique, auquel participent jeunes chercheurs et mathématiciens confirmés. Pour comprendre les motivations qui ont mené à l'organisation d'un colloque d'analyse harmonique à Nancy, on peut se tourner vers les récits rétrospectifs des acteurs. Cartan écrit ainsi :

23. Ce n'est pas la seule référence à ces colloques dans la correspondance entre Cartan et Weil. Ainsi Cartan annonce-t-il à Weil les deux premiers colloques – Analyse harmonique et Topologie algébrique de juin 1947 –, et Weil lui suggère une question à poser « aux participants de votre colloque de juin (où je n'assisterai sûrement pas) » [Audin 2011, p.202,213]

> À Nancy, Delsarte se met en devoir de mieux faire connaître à l'extérieur ses jeunes collègues Schwartz et Godement. C'est en partie dans ce but qu'il organise, en juin 1947, avec l'aide du CNRS, un colloque international sur l'analyse harmonique. Il réussit à y faire participer Norbert Wiener, dont l'agilité d'esprit stupéfia les participants : car pendant chaque exposé il tombait dans un profond sommeil, puis à la fin de l'exposé se réveillait brusquement et en manquait pas de faire des remarques pertinentes sur ce qui avait été dit.
>
> [Cartan 2003, p.25-26]

Faire connaître ses jeunes mathématiciens fraîchement recrutés à Nancy, tel peut être l'objectif de Delsarte. Cela correspond avec l'ambition du projet des colloques telle que présentée par la Fondation Rockefeller : il s'agit d'inclure la jeune génération.

Concernant la participation de Schwartz, Mandelbrojt écrit quant à lui [24] :

> Le président du Colloque pensait que la découverte des distributions par Schwartz, à l'époque professeur à Nancy, méritait qu'on la fasse connaître à des mathématiciens comme Harald Bohr, Norbert Wiener, Carleman, Plancherel et plusieurs autres créateurs internationaux non moins importants.

Il reste maintenant à déterminer le thème du colloque. Pour Norbert Wiener, dont Cartan précise que la présence est une réussite pour Delsarte, le colloque tourne autour de ses idées :

> As a matter of fact, much of the meeting was to deal with my ideas. [Wiener 1956, p.317]

Le colloque porte sur l'analyse harmonique. L'histoire de l'analyse harmonique est développée par Jean-Paul Pier [Pier 1990], [Pier 1992] ou encore par un article récent du mathématicien Jean-Pierre Kahane, « Analyse et synthèse harmonique » [Kahane 2011] recense diverses introductions, historiques le plus souvent, à l'analyse harmonique. Les thèmes qu'il retient, en suivant l'article « Harmonique (analyse) » d'*Encyclopaedia Universalis* [25], sont les suivants : « séries de Fourier, analyse et synthèse harmoniques, transformation de Fourier, groupes commutatifs localement compacts », que l'on va retrouver dans les titres des communications du colloque. Selon les dires de Pier [Pier 1992, p.4], « la théorie de l'analyse harmonique [est] introduite par Wiener dans son travail de référence de 1930 ». Plancherel travaille quant à lui en analyse de Fourier depuis le début du vingtième siècle. Pier décrit « l'analyse harmonique abstraite » et les travaux de Weil notamment, ainsi que ceux de Godement et Cartan, Beurling autour des groupes abéliens localement compacts [Pier 1992, p.7-8]. Ce rapide aperçu montre que l'analyse harmonique est un domaine vivant au milieu du vingtième siècle, que les mathématiciens français y ont leur place, et que les orateurs invités en sont des spécialistes. Mais il ne suffit pas à caractériser la manière dont le thème du colloque s'est constitué.

Pour Mandelbrojt, c'est plutôt la réunion de tous les participants qui crée le thème autour de l'analyse harmonique :

> Les différentes branches de l'Analyse que nous avons cherché à approfondir étaient, il est vrai, assez disparates. (...) "Analyse Harmonique" convenait certainement à l'ensemble des faits exposés, mais on avait parfois l'impression qu'on chercherait un nom à donner à un ensemble de recherches qu'on désirait voir exposer, plutôt que de rassembler des découvertes qu'on pouvait exposer sous le vocable d'Analyse Harmonique.
>
> [Société Mathématique de France 1973] [26]

24. Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz, Comité Secret du 4 novembre 1974. Rapport sur les travaux de M. Laurent Schwartz (né en 1915). Professeur à l'Ecole Polytechnique. Par S. Mandelbrojt

25. René Spector, 1970

26. L'ensemble de ce texte est recopié en annexe F p.315.

En tout cas, les travaux des participants sont étroitement liés. On peut ainsi lire, dans une lettre de Cartan à Weil du 19 juillet 1946, une appréciation des travaux de Godement qui mentionne les travaux de quatre autre participants au colloque :

> Tu trouveras dans cette enveloppe une rédaction que j'ai faite à ton usage de la dualité dans les groupes abéliens localement compacts, fruit de ma collaboration avec Godement. Je crois que cela t'intéressera, et Dieudonné aussi peut-être. Godement a brillamment soutenu sa thèse le 13 (...) J'allais oublier de te dire que Godement vient d'étendre aux groupes abéliens localement compacts généraux le théorème taubérien de Wiener (pour qu'un sous-espace fermé de L^1, invariant par translation, soit tout L^1, il faut et il suffit que pour tout point $\hat{x}$ du dual existe une fonction du sous-espace dont la transformée de Fourier soit $\neq 0$ en $\hat{x}$), ainsi que le théorème récent que Beurling avait démontré pour les fonctions bornées uniformément continues sur le groupe $\mathbb{R}$, et qui vaut pour toute fonction continue bornée sur un G abélien loc. compact (si f continue bornée n'est pas identiquement nulle, il existe un caractère qui est limite, uniformément sur tout compact, de fonctions uniformément bornées, combinaisons linéaires de translatées de f). Les deux théorèmes (Wiener et Beurling) se ramènent d'ailleurs l'un à l'autre, comme le montre Godement. Grâce à une astuce, il se ramène au cas où l'on peut appliquer les théorèmes de Gelfand sur les anneaux (commutatifs) normés. Ainsi Wiener et Beurling se trouvent démontrés sans le secours des fonctions analytiques, ce qui est bien intéressant, –et vexant pour Carleman (voir son bouquin de 1944 sur l'intégrale de Fourier).
>
> [Audin 2011, Lettre de Cartan à Weil du 19 juillet 1946, p.116-117]

Dans cette citation, cinq des participants au colloque sont mentionnés. En 1946, soit un an avant le colloque, les travaux en analyse harmonique de Cartan et la thèse de Godement se raccordent aux travaux de Wiener, Beurling et Carleman.Lors du colloque, les exposés de Cartan et Godement se suivent, et présentent la transformation de Fourier et l'analyse harmoniques sur les groupes abéliens localement compacts respectivement. Les communicatiosn de Beurling et Carleman font quant à elles intervenir les fonctions analytiques.

Il s'agit d'un petit colloque, dont voici la liste des « participants les plus marquants », ainsi que l'indique le compte-rendu scientifique envoyé par Delsarte au recteur [27] :

Szolem Mandelbrojt Organisateur, Professeur au Collège de France.
Une inégalité sur les séries asymptotiques

Jean Delsarte Organisateur, Doyen de la Faculté des Sciences de Nancy

Norbert Wiener Massachussetts Institute of Technology
Sur la théorie de la prévision statistique et du filtrage des ondes

Torsten Carleman Université de Stockholm
Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier

Michel [28] Plancherel *Intégrales de Fourier et fonctions entières.*

Le Professeur Linden Attaché culturel adjoint des U.S.A., à Londres

Raphaël Salem MIT

Arne Beurling Université d'Upsal (Suède)
Sur les spectres des fonctions

Harald Bohr et Borge Jessen Université de Copenhague *Mean motions and almost periodic functions*

27. Archives départementales de Meurthe et Moselle, liasse W 1018/96.

Michel Loève Université de Londres
Fonctions aléatoire, analyse harmonique, application au problème ergodique et aux fonctions modulaires[29]

A. Ostrowski Université de Bâle (Suisse)
La recherche des périodicités cachées

Gaston Julia Sorbonne
Quelques progrès récents dans la théorie des opérateurs linéaires de l'espace hilbertien

Henri Cartan Sorbonne
Transformations de Fourier dans les groupes abéliens localement compacts[30]

Jean Favard Paris
Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle

André Blanc-Lapierre Paris
Analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires

Paul Lévy Paris
L'analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires

Laurent Schwartz Université de Nancy
Théorie des distributions et tranformation de Fourier

Roger Godement Université de Nancy
L'analyse harmonique dans les groupes [normalement compacts][31] *abéliens*

Liste des participants « les plus marquants » au Colloque Analyse Harmonique, Nancy 15-22 juin 1947 ; nationalité et titre de l'exposé s'il y a lieu.

Parmi les participants français, André Blanc-Lapierre, Laurent Schwartz et Roger Godement sont tous les trois des mathématiciens relativement jeunes (nés en 1915 pour les deux premiers, 1921 pour Godement ; et ayant soutenu leurs thèses en 1945, 1942 et 1946 respectivement). En cela, le choix des orateurs (ils le sont presque tous) rejoint à peu près le projet de la bourse Rockefeller, qui mentionne une quinzaine de participants , avec quelques jeunes dans l'audience. Il est difficile de reconstituer l'audience de ce colloque, en plus des participants qui donnent des exposés. Je sais juste que Deny y a participé, étant mentionné comme secrétaire des conférences avec Schwartz.

La terminologie utilisée est celle préconisée par la brochure pour l'organisation, voir Annexe J p.331. On y lit ainsi une distinction entre les participants, qui sont invités, et normalement donnent un exposé, et dont les frais sont remboursés ; les assistants, qui ont reçu une invitation et viennent écouter le colloque ; et les « jeunes chercheurs et étudiants déjà spécialisés » que l'on engage à venir écouter, mais dont l'autorisation de poser des questions doit être accordée par le président de séance. La liste transmise est bien celle des participants, et Deny est l'un des assistants ou jeunes assistants au colloque. Mais les mathématiciens laissent une place plus importante aux jeunes chercheurs, qui exposent eux aussi leurs travaux et ne viennent pas simplement écouter le colloque.

De cette liste, on peut voir ressortir trois probabilistes, à savoir Paul Lévy, Michel Loève[32] et André Blanc-Lapierre. Dans une lettre de Loève à Levy du 4 avril 1947, l'or-

29. Cet exposé n'est pas publié, mais mentionné dans le document des archives départementales de Nancy.

30. Cet exposé n'est pas publié, mais mentionné dans le document des archives départementales de Nancy.

31. Titre original de l'exposé, supprimé dans le titre de l'exposé publié

32. Sur Michel Loève (1907-1979), voir [Simon 2010], [« Loève's correspondence with Lévy, Fréchet and Neyman » 2010].

ganisation du colloque d'analyse harmonique est mentionnée ; leurs trois exposés doivent être regroupés :

> J'ai vu M. Mandelbrojt. Il demande que vous vouliez bien grouper 1° votre exposé 2° celui de BlP 3° le mien, en une matinée (durant le Congrès) – total environ 2 heures suivi de discussion. Je puis remettre mon résumé jusqu'au 15-20 avril. M. Mandelbrojt n'a reçu jusqu'ici que 5 communications.
>
> [« Loève's correspondence with Lévy, Fréchet and Neyman » 2010, p.8-10]

Et effectivement, dans le programme du colloque, voir annexe K p.347, les conférences sont prévues à la suite, le samedi 21 juin à 14H. Leurs exposés portent sur l'analyse harmonique des fonctions aléatoires.

Les autres exposés ne sont pas détaillés ici, mais nous revenons dans 3.2.3. sur celui de Schwartz et son interaction avec les travaux des autres participants.

Ce qui est important ici, c'est que c'est le cadre du colloque lui-même qui crée la communauté, qui prend un thème comme sujet de recherche. On voit une interaction forte entre le savoir mathématiques et l'organisation collective. Organiser un colloque semble donc, à première vue, commencer par réunir des gens et cette réunion définit le thème. Mais après coup, l'énoncé du thème prend toute sa signification, ainsi que peut l'écrire Delsarte au Recteur :

> il portait sur l'Analyse Harmonique qui est une des parties de l'Analyse mathématiques moderne ayant le plus d'importance, tant au point de vue de la philosophie générale, qu'au point de vue des applications, lesquelles sont innombrables et d'une grande conséquence (Calcul des Probabilités, Statistique, Radiotechnique, Théorie des Ondes, Physique Moderne, Physique atomique) [33].

Géographies - une université de province dynamique, des participants internationaux

Précisons tout d'abord les pays d'origine des participants. Trois d'entre eux viennent des Etats-Unis ; seul Norbert Wiener donne un exposé, et le troisième est un attaché culturel. Quatre participants viennent d'Europe du Nord : Carleman et Beurling de Suède, Bohr et Jessen du Danemark. Ostrowski et Plancherel viennent de Suisse et Loève d'Angleterre. Les neuf autres participants viennent de Paris ou de Nancy. Il s'agit bien d'un colloque international, dont la moitié des participants sont français. L'origine des intervenants trouve son écho dans la partie suivante, qui décrit les premiers voyages scientifiques de Schwartz.

Le colloque a par ailleurs lieu à Nancy, dans une université de province donc : la préconisation d'organiser des colloques partout en France est donc bien respectée, et se fait l'écho de la préoccupation du C.N.R.S. pour les Facultés de province. Les mathématiques à Nancy sont vivantes à cette date, grâce à Delsarte [34] qui y est depuis 1927. Il fait venir à Nancy Paul Dubreil (1933-1937), puis Jean Leray (1936-1947) et Dieudonné (1937-46 et 1948-52) ; puis Schwartz (1945-52), Godement (1946-55) ; et, un peu plus tard, Serre (1954-56), Jacques-Louis Lions (1954-64). Nancy est aussi un haut-lieu de Bourbaki, ainsi que le décrit [Beaulieu 2003] : le secrétariat de Bourbaki y est entre 1935 et 1968, des réunions Bourbaki y ont lieu, de nombreux membres y passent...Les récits rétrospectifs des acteurs amplifient la place importante de Nancy dans les mathématiques françaises.

Norbert Wiener parle de l'université de Nancy en ces termes élogieux :

33. Archives départementales de Nancy, liasse W 1018/96, versée par le Rectorat de l'Académie de Nancy-Metz.

34. Sur Delsarte, et particulièrement son rôle sur les mathématiques à Nancy, voir [Egether 2003].

> At the time of which I write, the University of Nancy had been less damaged by the centralizing pull of Paris than many others. Schwartz has since gone to the capital, after the conventionnal pattern of French academic careers. At the time of my visit, however, Nancy was an excellent center for young visiting mathematicians who wished to see French university life at its best and who wished to get full attention of young men still at their greatest vigor and on the way up. Now it again shows signs of relapsing into some of the French provincial apathy.
>
> [Wiener 1956, p.317]

Il s'agit, pour lui, d'un important lieu de formation pour la jeune génération. Cette impression lui est certainement donnée par la participation au colloque de 1947. Mandelbrojt [35], quant à lui, se contente d'un éloge lyrique de la qualité des recherches mathématiques à Nancy après la guerre :

> Le Colloque d'Analyse harmonique tenu à Nancy en 1947 fut la première réunion internationale mathématique tenue en France après la guerre. Nous avons choisi Nancy comme lieu de cette rencontre pour honorer les mathématiciens de l'Université de cette ville dont les recherches pendant les années qui suivirent la guerre furent parmi les plus remarquables faites dans ce pays, et, peut-être, dans le monde entier.

On peut ainsi répondre à la question posée dans le titre, à savoir : pourquoi un colloque d'analyse harmonique à Nancy en 1947 ? À l'origine se trouve la volonté de faire connaître les travaux de jeunes mathématiciens ainsi que Nancy. Delsarte regroupe pour cela des mathématiciens travaillant dans les mêmes domaines, les thèmes des exposés se réunissent autour de l'analyse harmonique. On comprend ici les différents niveaux de la spécialisation, à savoir autour d'un thème et d'un petit nombre de participants, et de la géographie, une participation internationale dans une université de province, qui sont représentés ici.

3.2.2 Comment ? L'organisation d'un colloque en pratique

Pour décrire l'organisation et le déroulement du colloque, nous allons nous appuyer à la fois sur les documents des archives et sur les récits des acteurs. Cela permet de saisir l'influence des détails matériels sur la perception que les participants ont du colloque, ainsi que sur la considération du colloque, comme objet spécifique, dans la vie collective des mathématiques.

Préparation matérielle et mathématique du colloque Le colloque est organisé dans ses moindres détails. Ainsi Schwartz écrit-il à Jessen le 6 juin 1947 [36], juste avant sa venue au colloque :

> Cher Monsieur,
>
> Pour l'organisation du colloque d'analyse harmonique de Nancy il nous serait nécessaire de savoir quelle chambre vous désirez que nous réservions. Nous pensons vous réserver une chambre avec salle de bains au "grand Hôtel" place Stanislas. Sauf contr'ordre de votre part c'est ce que nous ferons ; naturellement nous préférerions avoir une réponse de votre part. Nous voudrions aussi savoir à quel moment vous pensez arriver afin de pouvoir venir vous chercher à la gare. Le colloque commence le lundi 16 Juin au matin, au Palais de l'Académie place Carnot.
>
> Je vous prie, cher Monsieur de croire à mes sentiments les plus respectueux.
>
> (signature)
>
> Laurent Schwartz

35. CS du 4 novembre 1974. Rapport sur les travaux de M. Laurent Schwartz (né en 1915). Professeur à l'Ecole Polytechnique. Par S. Mandelbrojt

36. Archives Jessen à Copenhague.

Maître de conférences à la faculté des Sciences
2 Rue de la Graffe
Nancy FRANCE

(manuscrit)
P.S. Je vous ai envoyé quelques tirages à part. L'article des Annales de Grenoble sert de point de départ à la conférence que je ferai au Colloque.

Les détails matériels, tout aussi bien que mathématiques, sont très présents. Notons surtout que Schwartz a envoyé des tirages à part de son premier article sur les distributions, permettant ainsi aux participants d'en prendre connaissance avant le colloque.

Déroulement et atmosphère

Les participants donnent le récit de l'atmosphère du colloque ; les détails rapportés montrent que les contacts sont facilités à chaque moment. Norbert Wiener se souvient de son hôtel comme étant le quartier général des visiteurs étrangers lors du colloque :

> The hotel at which I stayed was the headquarters for the foreign visitors. There was Harld Bohr, from Denmark ; Carleman, from Sweden ; Ostrowski, from Basel, and dear old Papa Plancherel from the Zurich Federal Institute of technology. Jessen was there from Denmark and Beurling from Sweden, both of them belonged to a younger generation.
>
> [Wiener 1956, p.317]

On trouve dans le programme détaillé du colloque, envoyé pour information au Recteur par Delsarte à l'issue du Colloque, accompagné de « Renseignements généraux ». Il se trouve en photo dans l'annexe K, p.347. Dans ce programme, outre les horaires et titres des exposés des différents participants, on trouve de multiples informations pratiques. Il nous est possible de reconstituer, d'après ce programme et ces renseignements généraux, quelques uns des moments partagés pendant ce colloque.

On apprend ainsi qu'il y a entre une et trois conférences par demi-journée, le plus souvent deux. Schwartz dispose ainsi de toute la matinée du jeudi 19 juin pour exposer sa « Théorie des distributions et transformation de Fourier ». Outre les exposés, est prévue le premier jour, lundi 16 juin, une réunion d'organisation pour parler de l'emploi du temps et des questions financières. Schwartz et Deny sont secrétaires des conférences.

Le document précise aussi le « déjeuner commun » et le thé « à 16h30, dans la salle des Conférences », qui ont lieu chaque jour du Colloque. Il est aussi fait mention des « Festivités » proposées, comme le « banquet » le mercredi soir, la « soirée » chez le Doyen Delsarte le vendredi soir et le « thé » offert par le Recteur Donzelot le samedi après-midi. Quelques visites de la ville de Nancy et restaurants sont aussi recommandés. Enfin, on peut penser que Schwartz a, lui aussi, participé à l'organisation de ce colloque, car ses coordonnées font partie, avec celle de Mandelbrojt et Delsarte, des « adresses et n°s de téléphone utiles ».

Une expérience réinvestie par Schwartz en 1956

On peut aussi mentionner que le C.N.R.S. continue à organiser des colloques internationaux même après que la bourse Rockefeller est terminée. Delsarte organise par exemple ainsi à Nancy un colloque sur les Équations aux Dérivées Partielles en 1956. Dès 1955, il demande conseil à Schwartz sur les personnes à inviter. Schwartz est invité au colloque et considéré comme expert à consulter pour l'organisation du colloque. Delsarte demande aussi précisions et conseils à Jacques-Louis Lions (élève de Schwartz, qui a fait sa thèse sur ce sujet). Les archives Delsarte en conserve tous les détails : organisation d'un « thé-porto », problèmes des dames aux réceptions (si l'une vient, il faut en inviter d'autres). Ainsi Delsarte écrit-il à Lions, à propos de l'invitation de mathématiciens russes :

> Au sujet des Russes, il y avait la semaine dernière à Nancy, un colloque de pétrographie chez ROUBAULT, où se trouvaient deux géologues russes (tous deux de l'Académie d'URSS), on peut donc les faire venir (Détente). Je leur ai parlé et ils m'ont dit d'écrire dès maintenant aux gens que je voulais inviter.

Les colloques sont toujours ancrés dans le contexte international, ce qui se traduit très concrètement dans leur organisation.

Dans sa réponse [37], Schwartz suggère de nombreux noms de mathématiciens pouvant participer au colloque. Il demande aussi la participation de deux de ses élèves Trèves et Mizohata, dont il expose les travaux. Encore une fois, il se sert de l'occasion du colloque pour faire connaître ses élèves. On peut conclure de l'expérience de ce nouveau colloque deux conclusions. Tout d'abord, en 1956, Schwartz est considéré comme un expert. Il est effectivement considéré comme un expert dans le domaine des équations aux dérivées partielles, au vu des avancées de ses élèves dans le domaine, dans la poursuite de ses propres travaux. Mais il est aussi expert dans l'organisation de colloques. Sa participation à d'autres colloques, celui de 1947, le rend plus à même de juger de la pertinence de la participation de certains mathématiciens. Par ailleurs, le fait qu'il soit élu à la commission du C.N.R.S. lui permet, dit-il, de défendre le projet du colloque. On voit aussi que Schwartz se sert, encore une fois, du colloque comme d'un tremplin, pour son élève ici (comme cela avait été le cas pour Lions). Son expérience de 1947 est réinvestie dans ces deux aspects.

La présentation de l'organisation matérielle du colloque n'est guère surprenante : on sait bien comment s'organise un colloque. Les divers aspects relevés sont cohérents avec la forme des colloques internationaux du C.N.R.S. que l'on a présentés. Le financement a été présenté au 3.1. Les invitations montrent à quel point les aspects matériels et mathématiques s'entremêlent. Le déroulement des journées fait s'interpénétrer les aspects scientifiques et matériels, voire les divertissements. On peut néanmoins souligner que ces aspects matériels ont eu un grand impact sur les mémoires, ils sont remarqués et notés par les participants au colloque. Ils sont par ailleurs réinvestis par Schwartz, dans leurs conséquences sur la vie collective des mathématiques. C'est le premier colloque auquel il participe, il en est à la fois participant mais aussi un peu organisateur, de part son poste à Nancy. La conception qu'il garde ensuite du colloque est marquée par cette première expérience. Il fait partie des experts, de ceux à qui l'on demande conseil pour l'organisation de colloques ultérieurs. Et il réinvestit les colloques pour présenter les travaux de ses élèves, leur donner la même chance qu'il a eue en 1947 de présenter ses résultats devant un public international.

3.2.3 Comprendre le « succès » : le cas de l'exposé de Schwartz

En guise de préface à l'édition des actes du colloque, on peut lire les mots suivants :

> Un colloque international sur l'Analyse Harmonique s'est tenu à Nancy en juin 1947. Il a été organisé par le Centre National de la Recherche Scientifique avec le Concours de la Fondation Rockefeller. Outre les participants actifs dont les Mémoires suivent, de nombreux auditeurs ont constamment suivi les conférences et les discussions. Ce colloque a donné lieu à de nombreux contacts personnels entre ses participants, français et étrangers. Les idées fécondes nées de ces contacts sont à l'origine de quelques travaux importants parus depuis, ou en train de paraître.

37. Pour tout ce paragraphe, voir Archives Jean Delsarte, IECN, cotes 5501, 5502, 5503, 5504, 5506, 5506, 5507, 5508, 5510, 5561.

[CNRS 1949]

Une telle analyse lyrique du colloque n'a guère de signification si on la lit seule. Nous allons néanmoins essayer de comprendre, du point de vue de Schwartz, quels ont pu être les différents succès de ce colloque. Nous présentons, dans un premier temps, l'exposé de Schwartz, en insistant sur les mathématiques qu'il a présentées et sur l'intérêt partagé de ses résultats afin de comprendre quelles interactions mathématiques ont pu avoir lieu lors de ce colloque. Examiner plus en détail la contribution de Schwartz permet aussi de voir à la fois comment elle s'insère dans les développements récents internationaux en analyse harmonique mais aussi comment elle contribue au renouveau de la recherche française (en l'occurrence en s'intégrant dans le cadre de sa théorie des distributions).

Les distributions sphériques

> C'est aussi du Colloque de Nancy que les distributions de Schwartz, leur transformée de Fourier et leurs topologies sont sorties dans le monde mathématique et se sont si largement et rapidement répandues.
>
> [Société Mathématique de France 1973, Préface par Mandelbrojt]

C'est à l'occasion de ce colloque que Schwartz expose pour la première fois la définition de ses « distributions sphériques », qui deviennent à partir de 1951 les « distributions tempérées ». Nous allons regarder en détail la manière dont Schwartz parle de transformation de Fourier de distributions dans ses premiers articles.

La question de la transformation de Fourier des distributions est présente dès 1945 [Schwartz 1945], le premier article dans lequel Schwartz définit sa théorie des distributions. On pourrait parler d'une première tentative pour définir la transformée de Fourier d'une distribution ; qui reste néanmoins assez "bancale" par manque de symétrie et de stabilité : une distribution quelconque n'a pas nécessairement de transformée de Fourier ; si elle en a, on n'a pas de formule naturelle d'inversion.

Dans le dernier paragraphe, intitulé « Structure topologique dans l'espace des distributions » Schwartz définit une notion de convergence au sens des distributions :

> *Des distributions T_i convergent vers 0 si, quelle que soit φ, les $T_i(\varphi)$ convergent vers 0, et cela uniformément par rapport à tout ensemble de fonctions φ à noyaux contenus dans un compact fixe, et bornées dans leur ensemble ainsi que chacune de leurs dérivées.*

Cette topologie, « la plus intéressante » selon Schwartz, permet de « se débarasser de toutes les difficultés inhérentes habituellement à la dérivation ». Il donne un premier théorème, suivant lequel la convergence de fonctions continues, uniforme sur les compacts, implique la convergence des distributions (que définissent ces fonctions). Cela montre que sa notion de convergence est bien compatible avec la convergence usuelle des fonctions :

> Théorème 1. *Si des fonctions continues f_i convergent vers une fonction continue f, uniformément sur tout compact, les distributions f_i convergent vers la distribution f.*

Son deuxième théorème affirme que

> *La dérivation est une opération linéaire continue. Autrement dit si des distributions T_i convergent vers T, les DT convergent vers DT_i, D étant un symbole de dérivation quelconque*

Une fois donnée et explicitée cette topologie sur l'espace des distributions, Schwartz donne quelques exemples autour de la série et de l'intégrale de Fourier. Un premier exemple simple de convergence dans l'espace des distributions est le suivant :

Théorème. Quelque soit le nombre réel α, les fonctions $t^\alpha e^{itx}$ convergent vers 0 pour $t \to \pm\infty$

Schwartz remarque que « cet exemple est d'autant plus curieux que pour $\alpha > 0$, les modules $|t|^\alpha$, de ces fonctions convergent vers $+\infty$ ». Il nous en donne la démonstration, qui se sert des théorèmes énoncés précédemment. En effet, si n est un entier $> \alpha$, les fonctions $\frac{1}{t^n}t^\alpha e^{itx}$ convergent uniformément vers 0. Or les fonctions étudiées en sont les dérivées, à un facteur près. En appliquant le théorème sur la continuité de l'opération de dérivation, nos fonctions convergent donc vers 0, dans l'espaces des distributions.

Schwartz cherche à donner des analogues de ce théorème dans le cadre de la série de Fourier puis de l'intégrale de Fourier. Pour la série de Fourier, cela donne l'énoncé suivant (Schwartz n'énonce pas de théorème, mais le décrit dans le texte) :

La série de Fourier $\Sigma a_n e^{inx}$ est convergente, dès que $|a_n| = O(|n|^\alpha$, α réel > 0

Cela permet d'en déduire la convergence de la série de Fourier d'une distribution périodique. On peut en effet calculer les coefficients de Fourier d'une telle distribution : $a_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi}T * e_n$. Et, quitte à considérer qu'il s'agit de la dérivée p-ème ($p > |\alpha|$) d'une série qui converge ($\Sigma \frac{1}{n^p} a_n e^{inx}$, on peut comme précédemment appliquer les théorèmes énoncés pour conclure que la série de Fourier converge au sens des distributions.

Schwartz dit ensuite que les résultats sont analogues avec l'intégrale de Fourier. Le résultat est le suivant :

L'intégrale de Fourier converge dès que $f(x) = O(x^a)$

C'est-à-dire que $\int_{-A}^{B} e^{itx} f(x)dx$ *converge vers une limite dans l'espace des distributions de la variable t, quand A et $B \to +\infty$*. La démonstration est similaire à celle pour les séries de Fourier.

Néanmoins, Schwartz écrit qu' « il existe une formule de réciprocité, mais [qu'] elle est plus compliquée que dans le cas où $f(x)$ est sommable. C'est donc un premier problème. Schwartz conclut en disant que l'on peut être amené à considérer, plus généralement, les transformées de Fourier de toutes les distributions, « quels que soient leur irrégularité et leur comportement à l'infini ». Néanmoins, pour cela, il est précise qu'on « est obligé d'introduire une nouvelle famille de distributions d'un maniement nettement plus compliqué et moins intuitif. » Il donne l'exemple de la transformée de Fourier de e^x qui est « une masse $+1$ au point d'abscisse imaginaire $-i$ » (qui n'est pas une distribution, car « dans le cadre des distributions introduites jusqu'ici, les points réels seuls interviennent »). Schwartz promet « un mémoire sur les fonctions moyenne-périodiques où ces diverses notions sont avantageuses ».

On voit donc ici, et c'est confirmé par l'article suivant de Schwartz, qu'il n'a pas encore trouvé le bon point de vue pour la transformée de Fourier.

En 1947, à Nancy, il va exposer ses distributions, pour la première fois devant un public international. Il a fait envoyer un tiré à part de son article aux participants, ainsi que nous l'avons lu dans sa lettre à Jessen. Il n'est pas le seul à présenter un exposé parlant de transformées de Fourier généralisées. Commençons par regarder l'exposé publié de Schwartz.

Les deux problèmes rencontrés dans l'article de 1945, à savoir l'absence de formule de réciprocité simple pour le cas des fonctions $f(x) = O(x^a)$ qui ont une transformée de Fourier au sens des distributions ; et la non-stabilité de l'espace des distributions général par transformation de Fourier vont être résolus.

Le discours de Schwartz a changé, car il écrit qu'« il n'est pas possible de définir la transformée de Fourier d'une distribution quelconque. Il faut changer les notions utilisées. »[Schwartz 1949c, p.2]

Il introduit donc l'espace $(\mathcal{S})$ qui est *l'ensemble des fonctions* $\theta(x_1, x_2, ..., x_n)$*, indéfiniment dérivables, tendant vers zéro à l'infini plus vite que toute puissance de* $\frac{1}{r}$ $(r^2 = x_1^2 + ... + x_n^2)$*, ainsi que chacune de leurs dérivées.* On remarque que $(\mathcal{D})$ est inclus dans $(\mathcal{S})$. La convergence sur $(\mathcal{S})$, compatible avec la convergence sur $(\mathcal{D})$, est définie ainsi :

> *Des* $\theta_j \in \mathcal{S}$ *convergent vers zéro dans* $(\mathcal{S})$ *si toute dérivée des* θ_j*, après multiplication par tout polynôme, converge uniformément vers zéro.*

Il peut alors définir $(\mathcal{S}')$ comme étant l'espace des distributions donné par les formes linéaires continues sur $(\mathcal{S})$. Cet espace ainsi défini est « le domaine naturel de la transformation de Fourier et de l'analyse harmonique. ». Schwartz appelle ces distributions les « distributions sphériques » (car pou qu'une distribution de $(\mathcal{D}')$, distribution sur $\mathbb{R}^n$, appartienne à $(\mathcal{S}')$, il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable en une distribution sur la sphère).

Avec trois formules, Schwartz peut définir la transformation de Fourier pour une fonction α dans $(\mathcal{S}')$:

$$F(a) = \alpha(y_1, y_2, ..., y_n) = \int\int ... \int a(x_1, x_2, ..., x_n) exp[-2i\pi(x_1y_1 + x_2y_2 + .. + x_ny_n)]dx_1...dx_n$$

donner la formule de réciprocité :

$$\bar{F}(\alpha) = a(y_1, y_2, ..., y_n) = \int\int ... \int \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) exp[+2i\pi(x_1y_1 + x_2y_2 + .. + x_ny_n)]dx_1...dx_n$$

et la formule de Parseval, si $F(a) = \alpha$, $F(b) = \beta$:

$$\int\int ... \int a(x_1, ..., x_n)\bar{b}(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n = \int\int ... \int \alpha(y_1, ..., y_n)\bar{\beta}(y_1, ..., y_n)dy_1...dy_n$$

qui permet de définir la transformation de Fourier dans $(\mathcal{S}')$: si U est une distribution sphérique, on définit sa transformée de Fourier $V = F(U)$ à l'aide de la formule de Parseval : $U(\bar{a}) = V(\bar{\alpha})$ où $\alpha = F(a)$.On a F isomorphisme de $\mathcal{S}')$ sur lui-même ; f et $\bar{F}$ sont deux isomorphismes réciproque. La place importante faite à la formule de Parseval ici provient, selon Dieudonné dans sa longue recension de l'ouvrage de Lützen [Dieudonné 1984], d'une remarque de Weil en 1940 dans *L'intégration dans les groupes topologiques* [Weil 1940, p.118].

Un intérêt partagé

L'une des raisons pour lesquelles les distributions de Schwartz ont connu un si grand succès lors de ce colloque tient à l'intérêt partagé de nombre de ses participants pour les mathématiques en question. Norbert Wiener écrit ainsi, à propos du succès du colloque et de ses mathématiques :

> The meeting was a highly succesful one, and we found it possible to integrate our work very well.
>
> [Wiener 1956, p.318]

Et plus précisément à propos de Schwartz :

> Of all the Nancy people, the one whom I saw most often was Laurent Schwartz. His wife was Paul Levy's daughter, whom I had met years before when I visited her father at Pougues-les-Eaux. Schwartz was active along lines very similar to my own. He had generalized still further the field which I had already treated in my *Acta* paper on

> generalized harmonic analysis [38]. He reduced it to that highly abstract basis which is characteristic of all the work of the Bourbaki school to which he belonged.
>
> [Wiener 1956, p.318]

Mais ce sont les travaux de Carleman qui sont les plus proches de ceux de Schwartz lors de ce colloque. Carleman présente un exposé intitulé « Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier » [Carleman 1949]. Il y parle des paires de fonctions mentionnées juste ensuite. Les distributions sphériques de Schwartz se rapprochent aussi des travaux de Bochner, dont Schwartz cite un ouvrage : *Vorlesungen über Fouriersche Integrale* [Bochner 1932]. Bochner écrit une recension critique du traité *Théorie des distributions* dans laquelle il dit :

> It would not be easy to decide what the general innovations in the present work are, analytical or even conceptual (...)
>
> [Bochner 1952b, p.85]

Pour lui, les distributions de Schwartz ne vont pas tellement plus loin que son propre travail de 1932.

Dans [Kiselman 2002], Kiselman, après avoir présenté les travaux de Bochner et Carleman sur les généralisations de la transformée de Fourier, et parlé rapidement de Schwartz et de Sato [39], répond aux questions laissées sans réponse par Lützen [40]. La première concerne les paires de fonctions introduites par Carleman, qu'il conjecture ne pas toujours représenter des distributions, ce qui est démontré dans l'article de Kiselman. La seconde question vise à démontrer rigoureusement que les transformées de Fourier des distributions tempérées, prises aux sens de Carleman et Schwartz, sont égales. Le théorème 9.1 en donne l'énoncé suivant :

> *For any temperate distribution $u \in S'(R)$, Carleman's Fourier transform agrees with Schwartz's Fourier transform ; more precisely, u is represented by a Carleman pair (f_1, f_2) and the difference between the boundary values, taken in the sense of distributions, from the upper and lower half planes of Carleman's Fourier transform $CF(f_1, f_2)$ is equal to Schwartz's Fourier transform $SF(u)$ of u.*
>
> [Kiselman 2002, p.179]

Il écrit dans sa conclusion que, bien que le calcul de Carleman soit valable pour une classe d'hyperfonctions [41] strictement plus large que les distributions tempérées, les travaux de Carleman n'étaient pas bien connus – malgré une certaine diffusion – et n'ont pas joué un grand rôle dans le développement des hyperfonctions au Japon.

Cette discussion sur l'exposé de Schwartz et son introduction des distributions tempérées permet de montrer l'intérêt partagé des thématiques du colloque d'analyse harmonique, autour de généralisation de la transformée de Fourier ; ce qui en justifie l'organisation choisie. Si les distributions tempérées sont un apport majeur de Schwartz à la théorie des distributions, le colloque d'analyse harmonique à l'occasion duquel il les expose est un événement important dans la diffusion de sa théorie. Nous allons présenter maintenant quelques conséquences immédiates de ce colloque, à la fois sur la carrière et les mathématiques de Schwartz.

---

38. [Wiener 1930]
39. Sato traite de la transformée de Fourier des hyperfonctions. L'article de Kiselman mentionne aussi les travaux de Beurling et Hörmander.
40. Il s'agit donc d'une étude historique, mais aussi mathématique, puisque cet article répond à deux questions ouvertes sur les distributions.
41. au sens de Sato.

3.3 Un tremplin pour Schwartz et sa théorie des distributions.

Il est certain qu'ils furent tous fortement impressionnés par l'exposé de Schwartz. D'ailleurs, Bohr, n'était-il pas de la commission qui décerna en 1950 la médaille Fields à Laurent Schwartz pour sa théorie des distributions. [42]

3.3.1 De nouvelles questions mathématiques

L'intérêt de Schwartz pour le colloque d'analyse harmonique ne se limite pas à ses distributions tempérées. Les discussions qui ont eu lieu entre les participants du colloque ont donné lieu à la publication par Schwartz, d'un résultat de synthèse harmonique l'année suivante. Le 12 juillet 1948, Schwartz fait en effet paraître une note aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, intitulée : « Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts » [Schwartz 1948b]. Cette note sera suivie un peu plus tard d'un article, en 1951, « Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions. » [Schwartz 1951a].

Cette note aux *Comptes-Rendus* répond à deux problèmes duaux, de Wiener et Beurling, qui étaient tous les deux présents au colloque. Schwartz donne une preuve par les distributions et une preuve élémentaire de la réponse négative qu'il apporte à ces deux problèmes. [43]

Puis Whitney publie un article en 1948, intitulé « On ideals of differentiable functions » dans lequel il répond à la question de Schwartz. [Whitney 1948].

Il précise dans son introduction (p.635) :

> It was conjectured by Laurent Schwartz (personal communication) [44] that an ideal

42. Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz. Comité Secret du 4 novembre 1974. Rapport sur les travaux de M. Laurent Schwartz (né en 1915). Professeur à l'Ecole Polytechnique. Par S. Mandelbrojt

43. Malgrange présente, lui aussi, ce joli résultat [Malgrange 2011, p.41-42]

> Il n'en va pas de même d'un autre problème, celui de la synthèse harmonique dans $\mathcal{S}'$, l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$. Le problème ici est le suivant : soit $V \subset \mathcal{S}'$ un sous-espace fermé invariant par translation ; alors V est-il engendré par les exponentielles polynômes $p(x_1, ..., x_n)expi(\xi_1 x_1 + ...\xi_n x_n)$ qu'il contient ? Ici, il faut prendre évidememnt $\xi_1, ..., \xi_n$ réels. La transformation de Fourier et le théorème de Hahn-Banach ramènent au problème suivant : soit $\mathcal{I}$ un sous-espace fermé de $\mathcal{S}$, invariant par multiplication (donc un idéal) ; alors $\mathcal{I}$ est-il déterminé par les distributions à support ponctuel qui lui sont orthogonales ? Il est équivalent de demander si $\mathcal{I}$ est déterminé par les idéaux de séries formelles $\hat{\mathcal{I}}_a$ qu'il détermine en chaque point $a \in \mathbb{R}^{\ltimes}$.
>
> Ici, en passant à la sphère, on voit qu'on a un problème de nature locale, et qu'on peut se poser le même problème pour les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^n$. La question fut résolue par Whitney, à la demande de Schwartz, donnant du même coup une réponse positive à son problème de synthèse harmonique. C'est, je crois, le premier exemple où la théorie des distributions amène à se poser un problème entièrement définissable en termes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et qui n'avait pas été considéré antérieurement.
>
> Ce problème de la synthèse harmonique dans $\mathcal{S}'$ inspire aussi le contre-exemple remarquablement simple à la synthèse harmonique dans L^∞ ; prenons la masse unité μ répartie uniformément sur la sphère ; en dimension $\leqslant 3$ la tranformée de Fourier de $\frac{\partial \mu}{\partial x_1}$ est bornée ; et elle ne peut pas être limité uniformément, ni même dans $\mathcal{S}'$ de sommes d'exponentielles de son spectre. En effet, $\frac{\partial \mu}{\partial x_1}$ ne peut être limite de sommes mesures de Dirac portées par la sphère (on a besoin de leurs dérivées). Cet exemple a été étendu plus tard à $L^\infty(\mathbb{R})$ par Malliavin mais c'est bien plus difficile.

44. Cartan se rappelle de cette conversation entre Whitney et Schwartz :

> C'est à la fin de ce colloque qu'eut lieu la première rencontre entre Schwartz et Whitney, venu

> is determined by its set local ideals, provided that the ideal is closed (we use the topology described below). The main object of this paper is to prove this conjecture (see Theorem I). There is a rather obvious generalization of the theorem to the case where E^n is replaced by a manifold of class C^r.

Schwartz écrit la recension de cet article.

Il a aussi donné des exposés au séminaire Bourbaki sur les travaux de Whitney : « Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables », exposé n°45, mars 1951. Il y expose notamment les résultats de cet article de 1948 de Whitney

Lorsque Szolem Mandelbrojt présente un rapport sur les travaux de Schwartz à l'Académie des Sciences, il identifie les liens entre la thèse de Schwartz, ses travaux sur les fonctions moyenne-périodiques au résultat de synthèse harmonique qu'il obtient :

> L'étude des sommes exponentielles le conduit à la théorie des fonctions moyenne-périodiques, fonctions introduites dans l'Analyse par Delsarte. Mais les théorèmes taubériens de Wiener, notamment la condition formulée dans ces taubériens portant sur la transformée de Fourier, permettent à Schwartz - auteur de recherches sur les sommes de Fourier - d'introduire une définition intrinsèque - frappante par sa simplicité et sa richesse, de la moyenne-périodicité : une fonction f d'un espace vectoriel topologique $\mathcal{C}$ de fonctions est moyenne-périodique si le sous-espace $\mathcal{C}'$ engendré par les translatées $f(x+y)$ de f n'est pas l'espace entier $\mathcal{C}$ (la convergence étant définie comme la convergence uniforme sur tout segment.
>
> On devine alors comment les résultats obtenus avec cette définition (qui est, bien entendu, plus générale que celle de Delsarte) permettent de lier les énoncés de Schwartz concernant les polynomes exponentiels aux taubériens de WIener et d'aborder de ce fait aussi bien l'analyse que la synthèse harmonique.
>
> Peut-on, par exemple, approcher une fonction moyenne-périodique par les exponentielles ou plutôt exponentielles-polynomes, les exponentielles étant formées avec le spectre de cette fonction ? Schwartz donne une réponse négative à cette question ; en, en faisant varier l'espace fonctionnel, il aborde le problème général de synthèse dans L^1 et L^∞. Il faut noter qu'un nombre important de mathématiciens de réputation mondiale s'occupaient de ce problème depuis la naissance des taubériens. Schwartz donne, aussi à cette question, une réponse négative : la synthèse harmonique n'est pas possible dans l'espace à n dimensions, lorsque $n \leqslant 3$. Il a fallu, il est vrai, une approche basée sur des principes bien différents pour permettre à Malliavin de résoudre, quelques années plus tard, ce problème dans toute sa généralité : la synthèse n'est possible pour aucun $n \leqslant 1$. Mais, c'est grâce aux résultats de Schwartz qu'on commençait à chercher une réponse plutôt négative au problème général posé. [45]

Livrer cette longue analyse telle qu'elle permet d'insister sur les liens ténus qui existent entre les participants de ce colloque de 1947, entre leurs mathématiques, avant et après ce colloque. Dans les articles cités, on trouve de petits indices permettant de relier ces travaux au colloque d'analyse harmonique de 1947, à la rencontre et aux discussions qui ont été rendues possibles. C'est une première manière de comprendre une conséquence possible d'un tel colloque.

> en France pour participer à un colloque de topologie qui allait se tenir à Paris quelques jours plus tard. Schwartz voulait poser à Whitney un problème difficile relatif aux idéaux ponctuels de fonctions différentiables. Réponse de Whitney : « Je crois pourvoir la solution en un quart d'heure ». Il la trouva en effet, mais après plusieurs semaines.
>
> [Cartan 2003, p.25-26]

45. Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz. Rapport sur les travaux de Laurent Schwatz. Professeur à l'Ecole Polytechnique (né en 1915) par M. S. Mandelbrojt. Comité secret du 21 janvier 1974

Figure 3.3 – Invitations et conférences 1947-1950

1947	Copenhague, Danemark	Bohr, Jessen	
1947	Lund, Suède	Lars Gårding	
1948	Londres	Loève	
	Oxford	WHitehead	
1949	Canada		Rencontre avec Dirac.
1950	Allemagne	G. Köthe	
1950	ICM, USA		Bohr lui remet la médaille Fields

3.3.2 Des voyages : internationalisation de la carrière et des distributions de Laurent Schwartz

Pour Schwartz, outre la diffusion de ses distributions tempérées, qui participe plus largement à la réception de sa théorie des distributions, et l'étape sur la synthèse harmonique permise par sa réponse aux questions de Wiener et Beurling, l'une des conséquences principales de ce colloque a été l'internationalisation de sa carrière, qui renforce celle de la réception de sa théorie des distributions. Nous décrivons ici ses premiers voyages, qui sont très directement liés aux mathématiciens qu'il a rencontrés en 1947.

Les premiers voyages de Schwartz sont à l'image des participants de ce colloque d'analyse harmonique de 1947 : Europe du Nord, Angleterre, Amérique du Nord. Nous présentons brièvement ces séjours, du point de vue des archives et récits de Schwartz.

Premières invitations scandinaves

Ce « premier voyage universitaire d'envergure » [Schwartz 1997, p.309], celui que Schwartz fait au Danemark et en Suède, est assez bien documenté grâce à des sources d'archives diverses (archives privées de la famille Schwartz, archives Jessen). « Autant que le colloque d'analyse harmonique, cela aura été une grande expérience et un grand événement dans ma vie », écrit Schwartz à sa femme le 5 novembre 1947, de retour à Paris [46]

Harald Bohr et Borge Jessen écrivent à Schwartz dès le 14 juillet 1947 [47] afin de l'inviter à venir parler à Copenhague. Ainsi qu'ils le mentionnent au début de leur lettre, cela concrétise l'invitation informelle dont ils avaient discuté lors du colloque d'analyse harmonique de Nancy, en juin 1947. Il s'agit là d'une invitation conjointe des Instituts de Mathématiques de l'Université et de l'Ecole Polytechnique de Copenhague, qui souhaitent entendre Schwartz présenter sa théorie des distributions, dont ils louent l'intérêt dans les mathématiques pures et appliquées ; et ce, dès le mois de septembre ! Ils y décrivent l'enthousiasme de tous :

> all our colleagues (...) got enthusiastic about the possibility of seeing you here and of hearing some lectures of you on you extraordinary theory of distributions.

Bohr et Jessen ont été frappés à Nancy du don extraordinaire de simplicité et de clarté avec lequel expose Schwartz (« From your lecture in Nancy we got a strong impression of your extraordinary gift for clear and simple exposition »). Ils lui demandent néanmoins de proposer un premier exposé sans aucun prérequis pour un public hétérogène. Ils ont obtenu

46. Cette lettre est reproduite en partie dans un article de la *Gazette des mathématiciens* par Claudine Schwartz [Schwartz 2007]. Claudine précise que Schwartz est resté quelque temps à Paris à son retour en France, alors que Marie-Hélène est à Nancy avec Marc-André, 4 ans, et Claudine, 3 mois. Il assiste en effet au congrès Bourbaki, « Congrès de Paris », qui a lieu à Paris du 8 au 11 novembre 1947.

47. Source : Archives Jessen.

une bourse afin de payer ses frais de transport et de séjour. Schwartz accepte l'invitation avec plaisir, et se rend à Copenhague du 27 octobre au 2 novembre. Il est logé par Borge Jessen dans sa famille. Il y donne trois conférences, dont il donne les titres dans sa lettre du 13 octobre 1947 :

1°) Généralités sur la théorie des distributions Cette conférence n'entrerait dans aucun détail et se bornerait à l'énoncé des principaux résultats, sans démonstration.

2°) Les produits de distributions et leurs applications

3°) Transformation de Fourier et Analyse harmonique

Durant les échanges de courrier avec Jessen, Schwartz est invité par Lars Gårding à profiter de son voyage pour se rendre à Lund donner deux conférences, qu'il planifie les lundi et mardi 3 et 4 novembre 1947. Les exposés de Schwartz ont été préparé par Bohr, qui a beaucoup travaillé sur l'article de Schwartz [Schwartz 1945] et les a un peu enseignées, ainsi que le raconte Schwartz à sa femme [48] :

> J'ai eu une agréable surprise. Bohr avait tellement travaillé sur l'opuscule des annales de Grenoble qu'il en est jaune (l'opuscule, pas Bohr) et il a fait dessus son cours à la Faculté et... aux professeurs des lycées. Les étudiants de l'université se sont passionnés pour le sujet et sont venus me parler en connaisseurs ; je suis de plus en plus honteux de mon retard. [49]

Le séjour de Schwartz au Danemark est un grand succès. Les Danois sont enchantés, ainsi que cela transparaît dans les remerciements de Jessen à la fin du séjour de Schwartz :

> Les auditeurs ont déjà par leurs applaudissements exprimé leur reconnaissance des merveilleuses conférences que nous avons écouté.
>
> Il me reste seulement d'exprimer à M.Schwartz les remerciements très cordiaux de la part de l'Ecole polytechnique et de l'Institut mathématique de l'Université d'avoir fait le long [50] voyage pour venir nous expliquer son idée.
>
> Cela vous avez fait avec un tel esprit et une telle ardeur que nous n'oublierons jamais vos conférences.
>
> Vous avez obtenu que nous savons maintenant tous ce que c'est, une distribution, et que nous avons une impression très claire des nombreuses applications que l'on peut faire de ces êtres nouveaux dans l'analyse.
>
> Naturellement il faut s'accoutumer à cette nouvelle technique pour pouvoir l'appliquer, mais de ce que vous avez dit –ainsi que de ce que vous n'avez pas dit– vous avez créé en nous une très grande curiosité d'en savoir plus, et nous attendrons avec le plus grand intérêt la publication finale de vos belles recherches.
>
> Par l'amour avec lequel vous avez présenté votre sujet, et par toute votre personnalité ces conférences ont été une grande inspiration.
>
> Encore mille fois merci.

Jessen reconnaît donc à Schwartz, encore une fois, son talent d'orateur, qui va de pair avec les beaux objets mathématiques que sont les distributions.

Jessen précise ensuite qu'ils ont arrangé « une rencontre tout-à-fait informelle avec M.Schwartz à l'Institut mathématique de l'Université, Begdamnsvey 15, le samedi à 11 heures du matin ».

Schwartz écrit quant à lui à sa femme que ses distributions connaissent un succès exagéré au Danemark :

48. Lettre du 5 novembre 1947, archives privées de la famille Schwartz

49. Retard pour publier son traité, 1950 et 1951. Retard légendaire, déjà mentionné lors du premier chapitre.

50. Un jour et demi de train : pour le retour, Scwhartz prend le train à Copenhague le mercredi à 10h05 du matin et arrive à Paris le lendemain après 16h00.

> Mais je reste très troublé du succès excessif des distributions. Le succès au Danemark dépasse les bornes permises. Cela risque d'amener des déceptions plus tard ! Mon nouveau-né est beau et bien fait, il est sympathique et aura peut être un bel avenir, mais il faut le laisser grandir. Ce n'est tout de même pas Jésus-Christ, et les compliments des rois Mages venus de toute la terre m'inquiètent un peu ; s'il est plus tard crucifié ?

Il précise dans cette même lettre la circulation, déjà internationale, de sa théorie des distributions, telle qu'elle lui a été relatée :

> (Pense donc que Riesz en a entendu parler par Steinhaus et Stone en Amérique, Gårding en Suède, Bohr au Danemark ; un polonais de Copenhague en a entendu un exposé de Weyssenhoff à Cracovie !)

Néanmoins, ainsi que le raconte Schwartz, Riesz est beaucoup plus « raisonnable ». A Lund, où il se rend juste après Copenhague en profitant de l'occasion, il est accueilli par Lars Gårding, Riesz, ainsi que les autres élèves de Riesz. Schwartz ne parle pas anglais lors de ce premier voyage (il précise même à Jessen que ce voyage l'a décidé de s'entraîner, ses premiers essais n'ayant pas été très réussis). Schwartz donne donc sa conférence en français, et Riesz résume et traduit toutes les 20 minutes en suédois.Riesz a aussi invité Schwartz chez lui, avec ses élèves, « à de somptueux repas, mais sans dames, et tout se passant plus en famille et plus simplement ». Les discussions se sont prolongées parfois jusqu'à deux heures du matin.

Ce premier voyage a une grand importance, à la fois pour la diffusion et la réception de la théorie des distributions de Schwartz, mais aussi pour la conscience qu'il a de l'insertion de ses travaux sur une scène internationale. Cela réalise bien l'objectif préconisé par la Fondation Rockefeller, qui souhaite que les scientifiques français prennent l'habitude de voyager afin de partager leurs recherches. Schwartz paraît surpris que ses distributions circulent en Amérique, au Danemark, en Pologne...Ainsi qu'il le redit à Jessen, il s'agit certes de son premier voyage à l'étranger, mais il a bien « le désir de continuer ! » [51] L'importance de ce premier voyage et de ces nombreuses rencontres apparaît très clairement dans les dires de Schwartz. Et l'on voit bien que cela ne se limite pas à l'exposition de sa théorie, mais que les échanges, dîners, discussions prennent une place primordiale pour lui et donc dans ce qu'il retranscrit dans ses lettres.

Angleterre, Allemagne, Canada

Dans son autobiographie, Schwartz mentionne quelques autres voyages. Je me limite à la période 1947-50. Il écrit ainsi :

> La même année, Michel Loève, qui avait assisté au colloque d'analyse harmonique, m'invita à Londres pour janvier 1948, tandis qu'un de ses collègues, J.H.C. Whitehead, me conviait à Oxford.

Il raconte aussi avoir fait un bref séjour à Mainz en 1950, où il a rencontré Gottfried Köthe, spécialiste des espaces vectoriels topologiques, avec qui il a discuté.

Enfin, Schwartz se rend au Canada en 1949 [52], au Second Congress il fait une intervention sur « Les mathématiques en France pendant et après la guerre » mais aussi avant un cours sur les distributions, qui paraît rédigé par Israël Halperin [Halperin 1952]. La préface, par Schwartz :

51. Archives Jessen. Lettre de Schwartz à Jessen du 11 novembre 1947.

52. Lors de ce voyage, Schwartz renonce à se rendre aux États-Unis, ainsi qu'à Mexico, parce qu'il n'a pu obtenir un visa à cause de ses engagements politiques antérieures. L'histoire du visa de Schwartz mobilise un grand nombre de mathématiciens, français et américains.

> The Theory of Distributions was the subject of a course of lectures given in the Seminar of the Canadian Mathematical Congress held in Vancouver, August-September 1949. Since then my books have appeared and it does not seem useful to give a sumamry reproducing exactly my Canadian lectures. Instead, this pamphlet gives a detailed introduction, in terms of classical analysis, for applied mathematicians and physicists. Further study, with my books, requires some knowledge of funtional-theoretic analysis. This explains the length of the basic ideas and the brief mentions of convolution and Fourier series.
>
> The pamphlet was written by Professor Halperin whom I thank very much. He was led to think through the main problems again and many conceptions here are more Professor Halperin's than mine.

Ce cours ressemble au début de son ouvrage de 1950.

Conclusion

On pourrait terminer l'histoire de ce colloque par l'attribution de la médaille Fields à Schwartz pour sa théorie des distributions en 1950. Harald Bohr est le président du Comité Fields, c'est lui qui décerne la médaille et fait un discours à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens de 1950 qui a lieu à Harvard. C'est le premier Congrès International après la guerre, qui revêt donc une importance particulière pour la communauté internationale des mathématiques. Schwartz lui-même relie ces deux événements dans ce souvenir, en se rappelant de Bohr [53] :

> J'ai bien reçu récemment le troisième volume des oeuvres complètes de Harald Bohr. Je ne peux que vous féliciter de cette édition, tant du point de vue organisation d'ensemble que du point de vue présentation. Et c'est un réel plaisir pour moi des les avoir dans ma bibliothèque, d'autant plus que j'avais pour Bohr une exceptionnelle sympathie ; il reste aussi lié pour moi à mon premier colloque international, à mon premier voyage à l'étranger, et à la médaille Fields !

Outre l'intérêt que peut avoir l'étude du colloque pour lui-même, on peut aussi conclure que ce colloque particulier a eu une importance particulière dans la réception de la théorie des distributions de Schwartz. Il a permis à Bohr, alors président du comité Fields, de se familiariser avec cette théorie qui vaut à son auteur à la médaille Fields en 1950 ; il a entraîné une pénétration très précoce et efficace de ses idées au Danemark et en Suède (d'où seront issus d'autres travaux, dont les plus connus sont ceux d'Hörmander) ; et il a lancé l'internationalisation de la carrière de Schwartz et avec elle celle de ses distributions.

Le projet des colloques internationaux du C.N.R.S. s'inscrit à la fois dans une longue tradition de congrès scientifiques de plus en plus spécialisés et dans un programme de reconstruction d'après-guerre proposé par la Fondation Rockefeller, assistée par le C.N.R.S.. La forme spécifique prise par ces colloques constitue un type de congrès particulier, dont les principaux aspects sont leurs institutionnalisation, la spécialisation et les géographies (Paris-province, France-international). De la même manière que les mathématiciens ont organisé des congrès internationaux, ils se saisissent des colloques internationaux du C.N.R.S.. On a regardé en détail le colloque d'analyse harmonique qui a eu lieu à Nancy en juin 1947. La spécialisation se fait à deux niveaux entremêlés : les participants (dont un certain nombre de jeunes chercheurs) et thème se définissent simultanément. Au point de vue géographie, le colloque a lieu à Nancy et la participation est de moitié internationale.

L'expérience obtenue par Schwartz en terme d'organisation de la vie collective des mathématiques et conception du colloque dans le début d'une carrière mathématique

53. Lettre de Schwartz à Jessen, 26 décembre 1953. Archives Jessen, Copenhague.

l'amènent à réinvestir les colloques ultérieurs auxquels il participe. Il y fait figure d'expert, et jouer un rôle actif pour que le colloque soit pour ses étudiants un tremplin comme celui de 1947 l'a été pour lui. De plus, en tant que participant parmi d'autres, encore jeune chercheur, ce colloque est l'une des manières fortes de prendre conscience de sa place et de celle de sa théorie dans la vie collective des mathématiques. C'est en ce sens que le colloque joue un rôle de tremplin dans l'internationalisation de sa carrière et de sa théorie des distributions. Cela permet de comprendre le fonctionnement concret d'un aspect de la réception de la théorie des distributions dont on a esquissé les grandes lignes au chapitre 2. Le prochain chapitre nous permettra de saisir cette réception au travers du prisme de différents collectifs par les pratiques d'écriture.

Chapitre 4

Pratiques d'écriture autour du théorème des noyaux.

> Il convient d'insister à ce point sur la contribution peut-être la plus importante apportée par Schwartz à la théorie (et qui, elle, est entièrement originale), le <u>théorème des noyaux</u>. [1] [2]

Le théorème des noyaux, énoncé par Schwartz en 1950, est un résultat important, dans le cadre de sa théorie des distributions. On peut l'énoncer ainsi, selon les termes de [Schwartz 1952a, p.221, p.223] :

> *Tout noyau-distribution K définit une transformation linéaire $f \to K.f$ continue de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{D}')$.*
> *Toute transformation linéaire continue de $(\mathcal{D})_y$ (muni de la topologie forte) dans $(\mathcal{D}')_x$ (muni de la topologie faible) peut être défini par $f \to K.f$ où K est un noyau, c'est-à-dire une distribution sur $X^m \times Y^n$, déterminé d'une manière unique*

1. Dieudonné, Comité Secret du 4 novembre 1974 ; Compléments au rapport sur les travaux de M. Laurent Schwartz in Archives de l'Académie des Sciences, dossier biographique Laurent Schwartz.
2. Cet avis est largement partagé, notamment par le mathématicien François Trèves, pour qui les distributions tempérées et le théorème des noyaux sont l'essentiel de l'apport de Schwartz :

> Si on suppose que quelqu'un d'autre que Schwartz aurait pu inventer les distributions, qu'est-ce qui peut être considéré comme sa contribution principale ? Je peux mentionner au moins deux résultats dont la robustesse est garantie :
>
> 1) décider que l'espace de Schwartz des fonctions rapidement décroissantes à l'infini est le « bon » cadre pour l'analyse de Fourier,
>
> 2) le théorème des noyaux de Schwartz.
>
> [Trèves 2003, p.117]

Car en effet, la principale activité d'un mathématicien est d'énoncer des théorèmes [3] et de les démontrer ; bien plus souvent que de créer de nouvelles théories. Comment parler de cette activité ? Fait-elle partie de la vie collective des mathématiques ? De nombreux travaux d'historiens des mathématiques proposent l'histoire d'un théorème. Écrire une telle histoire suppose de se poser la question de l'unité du théorème sur lequel on travaille ; cette unité n'est en effet pas évidente ([Gilain 1991], [Brechenmacher 2006], [Turner 2013]). Je parle ici uniformément de « théorème des noyaux », alors cependant que les énoncés, et parfois même le contenu, de ce théorème changent. L'unification provient de l'identification au théorème des noyaux de Schwartz qui est faite par les acteurs eux-mêmes. Goldstein étudie les différentes lectures, historiennes et mathématiciennes, d'un théorème [Goldstein 1995] ; elle explique que ces lectures sont « situées ». Ici, nous allons présenter non pas l'unité de notre théorème ni les différentes lectures qui en sont faites, mais les pratiques d'écriture qui l'accompagnent. Le terme « pratiques » [4] est utilisé ici dans un sens technique pour désigner les mathématiques qui entrent en jeu ; les pratiques d'écriture désignent ainsi l'étude fine des énoncés du théorème, de ses formulations, du vocabulaire utilisé et des notations choisies, ainsi que son insertion dans le texte mathématique où il se trouve, telle qu'elle est présentée par l'auteur. Car l'auteur, justement, n'est pas « mort » dans cette étude [5] ; tel serait le cas [6] si l'on s'intéressait uniquement aux contenus des théorèmes et à leurs preuves, universellement acceptées [7]. S'intéresser aux pratiques d'écriture autour du théorème des noyaux, c'est questionner la place de l'auteur. La « fonction-auteur »,

3. Dhombres parle d'« événement-théorème » :

> Dans l'ordre mathématique, le théorème paraît un candidat événementiel idéal. De même qu'une histoire, celle de la Révolution par exemple, se bâtit sur des événements qui se succèdent et que l'on repère dans le discours historien, de même étymologiquement et pratiquement parlant, une théorie mathématique aligne dans un ordre préétabli des résultats, en rehaussant ses théorèmes pour mieux les individualiser. À telle enseigne d'ailleurs qu'un théorème est sans doute le seul lieu mathématique qui loge de l'histoire sous une forme explicite.
>
> [Dhombres 1992, p.191]

Le discours mathématique permet effectivement de retrouver assez facilement le théorème, car celui-ci est généralement bien identifié.

4. Je n'utilise pas le mot « pratiques » comme le fait par exemple [Brechenmacher 2011], c'est-à-dire comme caractérisant ce qui est partagé par un certain réseau de textes, établi suivant la méthode de [Goldstein 1999], [Goldstein et Schappacher 2007]). Pour une discussion des différents usages du mot « pratiques », on peut consulter [Aubin 1998, p.11-21]. Aubin définit la notion de « modeling pratices » (pratiques « modelantes ») de la manière suivante :

> I thus define a specific modeling practice by the assumptions that are used in order to start modeling (what to study, which data to consider, etc.), the tools that are used during the process (specific mathematical techniques, but also tables, lists, graphs, computer programs, etc.), and the sort of predictions or explanations that it will provide. Modeling practices, in this sense, are the set of all the techniques that enable scientists to build models of natural phenomena.
>
> [Aubin 1998, p.14]

Cette définition est adaptée à l'étude qu'il fait de l'histoire des catastrophes et du chaos.

5. Pour reprendre le titre de [Barthes 1984] : « La mort de l'Auteur ».

6. Ainsi le résume Muriel Lefebvre [Lefebvre 2007, p.225] :

> En mathématiques, il existe toute une rhétorique qui vise à exclure l'auteur, ou plutôt à minimiser son rôle, même si l'auteur reste celui qui signe l'article (...) Ce sont les objets mathématiques qui semblent être mis en scène à travers des théorèmes et des démonstrations. Le recours à l'écriture formelle donne l'impression que le « monde mathématique » semble se proposer de lui-même et que la vérité mathématique est énoncée par un énonciateur universel, par quelqu'un qui pourrait être tous les autres. (...)

7. Il existe une littérature abondante et intéressante sur la sociologie de la preuve et sur son acceptation, voir par exemple [Mackenzie 2001], [Rosental 2003], [Rosental 2009].

telle qu'introduite par Foucault [8] a pour dernière caractéristique sa pluralité. L'auteur est multiple, et pour l'illustrer, il prend l'exemple du traité de mathématiques, et écrit :

> En fait tous les discours qui sont pourvus de la fonction-auteur comportent cette pluralité d'ego. L'ego qui parle dans la préface d'un traité de mathématiques –et qui en indique les circonstances de composition– n'est identique ni dans sa position ni dans son fonctionnement à celui qui parle dans le cours d'une démonstration et qui apparaît sous la forme d'un « Je conclus » ou « Je suppose » : dans un cas, le « je » renvoie à un individu sans équivalent qui, en un lieu et un temps déterminés, a accompli un certain travail ; dans le second, le « je » désigne un plan et un moment de démonstration que tout individu peut occuper, pourvu qu'il ait accepté le même système de symboles, le même jeu d'axiomes, le même ensemble de démonstrations préalables. Mais on pourrait aussi repérer un troisième ego ; celui qui parle pour dire le sens du travail, les obstacles rencontrés, les résultats obtenus, les problèmes qui se posent encore ; cet ego se situe dans le champ des discours mathématiques existants ou à venir. La fonction-auteur n'est pas assurée par l'un de ces ego (le premier) aux dépens des deux autres, qui n'en seraient plus alors que le dédoublement fictif. Il faut dire au contraire que, dans de tels discours, la fonction-auteur joue de telle sorte qu'elle donne lieu à la dispersion de ces trois ego simultanés.
>
> [Foucault 1969]

L'auteur en tant que personne est celui qui écrit la préface, dans laquelle il situe temporellement et contextuellement son écrit. Il y a un « je » plus universel, celui qui lit la preuve et suit les arguments, les conclusions et en est convaincu (ce « je » là, même s'il semble être universel, est lui aussi situé historiquement : le bagage mathématique partagé, ce qui est prouvé rapidement ou ce sur quoi l'on insiste dans la démonstration, les non-dits...tout cela est situé historiquement, et on le voit bien dans le travail de [Goldstein 1995]). Le dernier « je » qu'il propose, est celui qui se situe dans les « champ des discours mathématiques », donne un sens à ce qui est démontré, énonce des problèmes : il ouvre sur les mathématiques. Ce « je » là, auquel on attribue souvent une intention de l'auteur, et qui lui est associé dans le récit, a une portée plus générale et permet de rentrer plus en avant, plus techniquement, dans la vie collective des mathématiques.

Nous verrons au cours du chapitre que la pluralité des « je », leur multiplicité, est parfois très complexe. Ainsi, lorsque Schwartz démontre le théorème des noyaux pour la première fois (sous forme publiée) dans un séminaire [Schwartz 1954d] destiné à exposer la thèse de son étudiant, Alexandre Grothendieck : qui est l'auteur de ces exposés ? de ces textes ? La considération de ces questions permet de préciser l'expression des pratiques d'écriture dans la vie collective des mathématiques.

Dans l'activité mathématique, on redémontre aussi parfois des théorèmes. L'ensemble des preuves, quand celles-ci diffèrent, est important. Ce point est l'un des enjeux autour du théorème des noyaux : en effet, on n'en a pas la preuve originale ; la preuve que je viens de mentionner utilise des résultats issus de la thèse de Grothendieck [9], qui est postérieure au premier exposé de ce théorème par Schwartz en 1950. Cette absence de preuve originelle a même donné lieu à l'écriture d'une fiction historique par Jean-Pierre Ferrier [Ferrier

8. Il définit la « fonction-auteur » par quatre caractéristiques, qu'il résume ainsi :

> la fonction auteur est liée au système juridique et institutionnel qui enserre, détermine, articule l'univers des discours ; elle ne s'exerce pas uniformément et de la même façon sur tous les discours, à toutes les époques et dans toutes les formes de civilisation ; elle ne renvoie pas purement et simplement à un individu réel, elle peut donner lieu simultanément à plusieurs ego, à plusieurs positions-sujets que des classes différentes d'individus peuvent occuper.
>
> [Foucault 1969]

9. Grothendieck soutient sa thèse en 1953 ; nous verrons le détail de ses publications plus loin.

à paraître. p.85-94] dans laquelle il propose une preuve avec les éléments et résultats mathématiques dont il suppose que Schwartz avait connaissance à l'époque. La preuve du théorème des noyaux n'est pas collaborative, comme dans le cas de la théorie des groupes [Steingart 2012], mais les pratiques d'écriture autour des différents énoncés et preuves sont un travail éminemment collectif comme nous allons le voir.

Afin d'étudier ces pratiques d'écriture, le théorème est utilisé comme une sonde [10], il est un révélateur des différents collectifs [11] mis en jeu. Ces pratiques d'écritures sont associées à des images [12] : la partie visuelle étant particulièrement éclairante à mon sens, j'ai choisi en effet de mettre des images – des photographies – représentatives de chacun de ces énoncés. Car ce théorème se trouve à l'intersection de plusieurs collectifs, qu'il va me permettre d'étudier en détail. Le résultat mathématiques change, mais le théorème demeure bien identifié. Il peut paraître étrange de vouloir parler du collectif en s'intéressant à un seul théorème. Mais en dépassant l'étude du théorème pour lui-même, et en le considérant comme une sonde parmi les différents collectifs en jeu, on peut mettre en évidence les frontières entre collectifs qui en ressortent. En rentrant dans les détails techniques des énoncés mathématiques et des preuves, on voit apparaître différentes caractéristiques de ces collectifs que je préciserai, ou plus précisément des confrontations entre différents collectifs identifiés par les auteurs. Outre son intérêt mathématique et anecdotique, ce théorème est un bon révélateur, de par l'hétérogénéité des mathématiques mises en jeu, l'implication mathématique des acteurs notamment, ainsi que la diversité des collectifs représentés. Je mène une étude très détaillée des textes, une analyse fine de l'apparition de collectifs dans le texte, que je confronte avec des études plus générales contextualisantes.

Ce chapitre s'organise autour de trois acteurs, qui représentent trois aspects différents et importants. Ce ne sont pas les uniques acteurs de cette histoire, nous en verrons d'ailleurs bien d'autres au cours de ce chapitre. Mais cela permet d'avoir un panorama de différentes écritures, motivations et utilisations de ce théorème. Ces trois acteurs sont Schwartz, Grothendieck et Hörmander. Schwartz est celui qui a énoncé le premier le théorème des noyaux en 1950. Grothendieck a construit une théorie des espaces nucléaires, dont je

10. L'idée de considérer un théorème comme une « sonde » pour étudier un sujet plus vaste n'est pas nouvelle. L'un des chapitres de la thèse de Renaud Chorlay, [Chorlay 2007, Chapitre 4. Une sonde : la notion de maximum. (p.235-300)] considère ainsi le principe du maximum, afin de saisir un point précis d'articulation entre le local et le global, en particulier dans les manuels d'enseignement. Il écrit ainsi que « le jeu consistera bien sûr à lire les formulation et reformulations en feignant d'oublier que nous "savons" ce que ce théorème dit » (p.238). Le théorème devient un moyen, et non une fin. La manière dont nous considérons le théorème des noyaux comme une sonde est ici différente : la considération de ce que le théorème dit est liée à la manière dont il est formulé.

11. Par « collectifs », j'entends rendre compte de la présentation de l'auteur qui, par des notations et des formulations explicites ou implicites, associe le théorème ou le distingue d'autres résultats mathématiques.

12. A propos de l'image comme pratique d'écriture, on peut lire les travaux de Muriel Lefebvre [Lefebvre 2003], [Lefebvre 2007], qui a réalisé une étude ethnographique parmi les mathématiciens afin d'étudier le statut de l'image dans leurs publications et leurs pratiques. Elle conclue ainsi, sur l'ambivalence entre la pratique usuelle et les normes de publications :

> Finalement, plusieurs niveaux de pratiques et de significations interfèrent. Ils permettent d'articuler des discours et des représentations collectives d'un côté et de l'autre des usages et des cultures. « Être mathématicien », aujourd'hui, c'est jongler avec ces différents registres de discours, de représentations et de pratiques. Il n'est pas malvenu d'être iconophile dans la pratique, en développant une sensation de prise sensorielle sur des objets abstraits ; mais il convient également de refuser cette prise en effaçant toute esquisse visuelle des publications mathématiques, afin de se conformer à la *doxa* mathématique.
>
> [Lefebvre 2003, p.28]

Les « images » présentées ici ne sont pas des dessins réalisés par le mathématicien, mais ce sont des photographies du théorème dans les textes étudiés. Les notations choisies par l'auteur ainsi que les normes d'édition donnent un résultat visuel particulier, et intéressant à comparer suivant les cas traités.

montrerai le lien étroit avec ce théorème des noyaux. Le choix de parler d'Hörmander est moins naturel, mais cependant justifié. Nous avons vu au chapitre 2 l'importance d'Hörmander dans la diffusion de la théorie des distributions. Dans son livre très célèbre sur les opérateurs linéaires, Hörmander choisit – il le justifie explicitement – de parler des distributions sans topologie ; ce qui le conduit à énoncer, dans une version ultérieure de ce livre, un théorème des noyaux sans égalité topologique, qui se place du coup à l'extrême opposé de l'énoncé donné par Grothendieck.

4.1 Le théorème des noyaux de Laurent Schwartz

La première publication du théorème des noyaux se trouve dans les *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Harvard, 1950* [Schwartz 1952a]. Car Schwartz l'expose en effet à l'occasion de ce Congrès International des Mathématiciens qui a lieu à Harvard en 1950. C'est le premier Congrès qui a lieu après la guerre, et c'est surtout, pour Schwartz le Congrès à l'occasion duquel il reçoit la médaille Fields, pour sa théorie des distributions [13]. Du fait de cette distinction, Schwartz est parmi les mathématiciens qui donnent une conférence semi-plénière lors de ce Congrès [14]. Le sujet proposé par Schwartz est, sans surprise, un exposé de ses distributions et des principales applications, ainsi que cela est indiqué en note de [Schwartz 1952a]. Mais Schwartz change le titre de son exposé, et présente finalement sa « théorie des noyaux » ; il énonce donc son théorème des noyaux (qui n'en porte pas encore le nom) ; dans le cadre de sa théorie des distributions . Après avoir énoncé son théorème d'existence de noyau, Schwartz s'intéresse aux propriétés éventuelles de ces noyaux.

Voici l'énoncé de ce théorème, issu de [Schwartz 1952a], p. 221 et 223 :

13. Harald Bohr, dans le discours qu'il prononce pour la remise de cette médaille Fields à Atle Selberg et Laurent Schwartz présente ainsi ce dernier :

> (...) one of the greatest merits of Schwartz's work consists on the contrary in his creation of new and most fruitful notions adapted to the general problems the study of which he has undertaken. While these problems themselves are of classical nature, in fact dealing with the very foundation of the old calculus, his way of looking at the problem is intimately connected with the typical modern development of our science with its highly general and often very abstract character. Thus once more we see in Schwartz's work a confirmation of the words of Felix Klein that great progress in our science is often obtained when new methods are applied to old problems.
>
> [Bohr 1952, p.130]

14. Pour un récit français du Congrès International des Mathématiciens de 1950, on peut consulter celui que fait Arnaud Denjoy, lors de la séance de l'Académie des Sciences du 18 septembre 1950 [*Comptes-Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 1950, p.557-559]. Il raconte ainsi que l'« affluence des Congressistes atteignit des proportions antérieurement inconnues » (1400 participants, 2300 avec leurs familles, dont une vingtaine de français). Il donne à l'Académie « l'importance de la participation française » :

> A la cérémonie inaugurale, où M. Hadamard fut l'objet d'une vibrante ovation, il fut procédé à la proclamation des deux lauréats de la *Médaille Fields*, qui récompense les progrès les plus remarquables accomplis en mathématiques depuis le précédent Congrès. Avec le norvégien Selberg, théoricien des nombres, c'est notre jeune compatriote M. Laurent Schwartz qui fut distingué pour ses travaux sur les fonctions de distribution.

Il précise ensuite que « chacun de nous s'est fait entendre au moins une fois », notamment Schwartz, Henri Cartan et Weil dans une séance semi-plénière. Après avoir loué l'ampleur du Congrès, et le « sentiment général de cordialité » (notamment des échanges qui auraient été impossibles quelques années auparavant) –malgré l'absence de représentant d'Europe de l'Est– il termine en regrettant « le déclin marqué par la connaissance de notre langue à l'étranger ».

Théorème I. *Tout noyau-distribution K définit une transformation linéaire $f \to K \cdot f$ continue de $(\mathfrak{D})$ dans $(\mathfrak{D}')$.*

Théorème II. *Toute transformation linéaire continue de $(\mathfrak{D})_\tau$ (muni de la topologie forte) dans $(\mathfrak{D}')_\sigma$ (muni de la topologie faible) peut être définie par $f \to K \cdot f$, où K est un noyau déterminé d'une manière unique.*

On a l'impression à ce stade que le théorème des noyaux s'inscrit a priori de manière linéaire dans les travaux de Schwartz sur les distributions, à la suite de ses rédactions sur le sujet. Après les premiers article, il termine la rédaction de ses livres [Schwartz 1950c] et [Schwartz 1951d] ; il renvoie d'ailleurs à [Schwartz 1950c] pour tout ce qui concerne « les fondements de la théorie des distributions », qu'il suppose connus dans son exposé. On peut imaginer que c'est au cours de cette rédaction qu'il s'est intéressé à ce résultat de noyau.

Mais pourquoi alors se concentrer sur ce théorème, alors qu'il ne semble être qu'un résultat parmi tous ceux énoncés dans la théorie des distributions ? Nous verrons plus loin qu'il est le nœud sur lequel s'articulent plusieurs recherches. Dans cette première partie le théorème est considéré dans cette histoire linéaire de la théorie des distributions de Schwartz.

On peut penser en effet que le théorème des noyaux fait partie de ces conséquences directes qui suivent l'invention d'une nouvelle théorie, et que Schwartz choisit de l'exposer en 1950 lors du Congrès, parce qu'il s'agit d'un joli résultat à présenter. Cette supposition ne peut pas véritablement être contredite par une éventuelle preuve, étant donné qu'on n'en a pas. Néanmoins, par la présentation qu'il en fait, Schwartz semble énoncer en fait un résultat de théorie des équations intégrales, ce que l'on remarque visuellement tout d'abord, et en regardant les énoncés et problèmes posés ensuite. Visuellement et mathématiquement donc, ce théorème semble apporter une solution satisfaisante à un problème de noyau. Mais les arguments avancés par Schwartz, les exemples qu'il choisit, sont présentés comme provenant directement d'un article de Dirac, ce qui permet à Schwartz d'opposer et de rapprocher les mathématiciens des physiciens théoriciens, dans un sens que l'on va préciser.

Le théorème des noyaux s'insère donc dans le cadre de la théorie des distributions de Schwartz, mais de manière complexe, et donne lieu à des choix de notations et d'argumentations intéressants de la part de Schwartz.

4.1.1 « Théorie des noyaux »

Dans son histoire de l'analyse fonctionnelle [Dieudonné 1981, p.97-105], Dieudonné fait jouer un rôle important aux articles de Fredholm [Fredholm 1900], [Fredholm 1903] qui donnent une méthode générale pour résoudre les équations intégrales, par analogie avec les équations linéaires . [Fredholm 1903] propose ainsi une méthode pour déterminer les fonctions φ vérifiant (avec des conditions sur f) :

$$\lambda\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \Phi(x)$$

Dieudonné précise (p.105) qu'ensuite : « almost overnight the theory of integral equations became a favorite topic among analysts ».[15]

15. En fait, dans son article de 1903, Fredholm ne parle pas de « noyau » ni d'« équation intégrale », mais d'« équation fonctionnelle ». [Dieudonné 1981, p.97,98,106] attribue l'expression d'« équation intégrale » (« Integralgreichungen ») à du Bois-Reymond dans un article de 1888 [du Bois-Reymond 1888, p.228-229].

Cependant, tous les opérateurs linéaires ne peuvent pas être représentés par de tels opérateurs intégraux : l'opérateur identité lui-même ne le peut pas [16]. Le théorème des noyaux permet de représenter un très grand nombre d'opérateurs linéaires, si l'on se place dans le cadre de la théorie des distributions, c'est-à-dire si l'on accepte que le « noyau » soit un « noyau-distribution » :

> Ever since Hilbert's and F. Riesz's work, it had been realized that integral operators $f \mapsto K.F$ defined by a « kernel function » $K(x,y)$, as $(K.f)(x) = \int K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$; were very far from exhausting the general concept of linear operator, since not even the identity could be expressed in that manner ! It is therefore very remarkable that if one replaces « kernel functions » by « kernel distributions » in that definition, one practically obtains <u>all</u> linear operators which one meets in problems of Analysis.
>
> [Dieudonné 1981, p.231-232]

L'exposé de Schwartz s'est donc finalement appelé « Théorie des noyaux ». La manière dont Schwartz énonce et présente son résultat, ainsi que les notations choisies, intègrent en effet son théorème à la suite des résultats sur les noyaux et les équations intégrales. Le tableau 4.1 montre bien les analogies en termes de notations, désignation et formulation des théorèmes : le travail de Schwartz s'énonce au plus proche de la « théorie des noyaux » pour reprendre sa propre expression ; ainsi que nous allons les commenter plus longuement. Après avoir rappelé ce que sont les opérateurs intégraux et la représentation à l'aide de noyaux, Schwartz introduit les noyaux-distributions, donne quelques exemples, et donne un théorème exprimant le fait qu'un grand nombre d'opérations linéaires peuvent être

---

La terminologie est précisée par Hilbert dans sa série d'articles entre 1904 et 1906 sur le sujet aux *Göttingen Nachrichten*. Dans [Hilbert 1904], il écrit ainsi :

> Es sei $K(s,t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s,t ; $f(s)$ sei eine gegebene Funktion von s und $\varphi(s)$ werde als die zu bestimmende Funktion von s angesehen ; jede der Veränderlichen s,t möge sich in dem Intervalle a bis b bewegen : dann heisse
>
> $$f(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$
>
> eine *Integralgleichung erster Art* und
>
> $$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$
>
> eine *Integralgleichung zweiter Art* ; dabei bedeutet λ einen Parameter. Die Funktion $K(s,t)$ heisse der *Kern der Integralgleichungen*.
>
> [Hilbert 1904, p.49]

16. Ainsi par exemple, si l'on considère l'application identité $I : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, on peut montrer qu'elle n'est pas de type intégral, comme cela est fait en annexe de ce cours [Leborgne 2012, p.37-38] sur les « noyaux intégraux ». En effet, si elle l'était, il existerait un noyau K tel que, pour tout $f, g \in L^2([0,1])$:

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \iint_0^1 K(x,y)f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Si l'on prend $f = \mathbb{1}_{[c,d]}$ et $g = \mathbb{1}_{]a,b[}$ pour $]a,b[\times[c,d] \subset [0,1]^2$ et $]a,b[\cap]c,d[= \emptyset$, l'intégrale de gauche est alors nulle. On a donc :

$$0 = \iint_0^1 K(x,y)\mathbb{1}_{[c,d]}\mathbb{1}_{]a,b[}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$0 = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d K(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et ce pour tout pavé $]a,b[\times[c,d] \subset [0,1]^2$ tel que $]a,b[\cap]c,d[= \emptyset$. Donc dans le triangle supérieur $y > x$ on a K nulle (presque partout), idem dans le triangle inférieur $y < x$. Donc K est nulle presque partout dans le carré $[0,1]^2$, donc $Lf = 0$ pour tout f, avec ici $L = I$, donc $f = 0$ pour tout $f \in L^2$ ce qui est absurde.

représentées par des noyaux.

Schwartz lui-même, dès le début de son exposé, met l'accent sur les notations [17] qu'il utilise

> La question des notations est fondamentale dans cet article.
> [Schwartz 1952a, p.220]

Il justifie ainsi son choix de notation pour les distributions, qu'il écrit ainsi :

$$T.\varphi = \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} T_x \varphi(x) \mathrm{d}x$$

Ce n'est pas une vraie intégrale ici, ainsi qu'il le précise, car T n'est pas une vraie fonction mais une distribution, mais il choisit cette notation, qu'il qualifie de « lourde », pour éviter « toute confusion ». Cela lui permet d'être au plus proche des notations classiques des équations intégrales.

Schwartz commence par faire des rappels sur les « opérateurs intégraux » et les « noyaux », avant de nous définir les « noyaux-distributions » (qu'il désigne parfois uniquement comme « noyaux » une fois qu'il les a définis.). Un « noyau » est une fonction localement sommable sur $X^m \times Y^n$, où X^m et Y^n sont deux espaces vectoriels réels isomorphes à $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Un « noyau-distribution », qu'il introduit et définit ici, est une distribution $K_{x,y}$ sur $X^m \times Y^n$: $K_{x,y} \in (\mathcal{D}')_{x,y}$ est donc une forme linéaire sur $(\mathcal{D}_{x,y})'$. La notation et l'appellation sont choisies très proches.

Un tel noyau $K(x, y)$ définit un « opérateur intégral » qui à toute fonction continue à support compact sur Y^n $f(y)$ fait correspondre une fonction $g(x)$ localement sommable sur X^m :

$$\begin{cases} g = K.f \\ g(x) = \displaystyle\int_{Y^n} K(x, y) f(y) \mathrm{d}y \end{cases}$$

Un « noyau-distribution » définit une « transformation linéaire », qu'il note sous forme intégrale, suivant ainsi le choix préliminaire de ses notations. C'est le théorème I (p.221) :

> THÉORÈME I. *Tout noyau-distribution K définit une transformation linéaire $f \to K.f$ continue de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{D}')$.*

Cela s'écrit donc ainsi :

$$\int_{X^m} [K.f]_x \varphi(x) \mathrm{d}x = \iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y} \varphi(x) f(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{4.1}$$

La partie importante du théorème de Schwartz est la réciproque de ce Théorème I. Schwartz rappelle ainsi (p.220-221) qu'« [i]l est bien connu que toutes les opérations linéaires ne peuvent pas être représentées par de tels noyaux » et que « [l]e but de cet article est de montrer comment la théorie des distributions permet de réaliser correctement une telle représentations, pour toutes les opérations linéaires rencontrées dans la pratique ». Il s'agit dans l'article du Théorème II (p.223) :

> THÉORÈME II. *Toute transformation linéaire continue de $(\mathcal{D}_y)$ (muni de la topologie forte) dans $(\mathcal{D}')_x$ (muni de la topologie faible) peut être définie par $f \to K.f$, où K est un noyau déterminé d'une manière unique.*

La suite de l'article de Schwartz s'intéresse à différentes propriétés des noyaux. Ainsi, il traite des problèmes de support et des noyaux compacts ; des problèmes de régularité

17. La visualisation des notations étant précieuse ici, je reproduis celles qu'utilise Schwartz le plus fidèlement possible. C'est le cas tout au long de ce chapitre. Les quelques images issues directement des articles mentionnés offrent un effet visuel plus marquant encore.

<table>
<tr><th>noyau</th><th>noyau-distribution</th></tr>
<tr><td>$K(x,y)$</td><td>$K_{x,y}$</td></tr>
<tr><td>fonction localement sommable sur $X^n \times Y^n$</td><td>distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$</td></tr>
<tr><td>opérateur intégral</td><td>transformation linéaire (sous forme "intégrale")</td></tr>
<tr><td>Tout noyau K définit un opérateur intégral $f \to g = K.f$, qui à toute fonction continue à support compact $f(y)$ sur Y^n fait correspondre une fonction continue à support compact $g(x)$ localement sommable sur X^m :
$\begin{cases} g &= K.f \\ g(x) &= \int_{Y^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \end{cases}$</td><td>Théorème I Tout noyau distribution K définit une transformation linéaire $f \to K.f$ continue de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{D}')$:
$\int_{X^m}[K.f]_x\varphi(x)\mathrm{d}x$
$= \iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\varphi(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Réciproquement :</td></tr>
<tr><td>Il est bien connu que toutes les opérations linéaires ne peuvent pas être représentées par de tels noyaux.</td><td>Théorème II. Toute transformation linéaire continue de $(\mathcal{D})_y$ (muni de la topologie forte) dans $(\mathcal{D}')_x$ (muni de la topologie faible) peut être défini par $f \to K.f$, où K est un noyau déterminé d'une manière unique.</td></tr>
</table>

Figure 4.1 – Analogie entre les opérateurs intégraux et les noyaux-distributions ([Schwartz 1952a]).

locale et des noyau réguliers ; ainsi que du produit de composition de Volterra. Schwartz conclue sur les futures applications de la « théorie des noyaux » :

> Cette théorie des noyaux a des applications à la théorie des opérateurs différentiels elliptiques et hyperboliques, que nous développerons ailleurs.
>
> [Schwartz 1952a, p.230]

L'exposé de Schwartz semble donc être une application de la théorie des distributions aux équations intégrales : les distributions se trouvant être le cadre dans lequel on peut exprimer les opérateurs linéaires (vérifiant certaines conditions pas trop restrictives) avec un noyau-distribution. Nous allons voir néanmoins que la justificiation principale que Schwartz donne de son résultat ne se trouve pas uniquement là.

4.1.2 Confrontations entre les mathématiques et la physique

La première référence donnée dans [Schwartz 1952a] – outre le rappel de [Schwartz 1950c] pour les notations et les fondements de la théorie des distributions – est celle d'un article de physique, publié par Dirac en 1926-27, intitulé « The physical interpretation of the quantum dynamics » [Dirac 1927]. Schwartz mentionne ce mémoire, dans lequel Dirac « introduit sa célèbre "fonction" δ » [Schwartz 1952a, p.220]. Il mentionne aussi Dirac dans [Schwartz 1945], et ce, dès l'introduction :

> Depuis l'introduction du calcul symbolique, les physiciens se sont couramment servis de certaines notions dont le succès était incontestable, alors qu'elles n'étaient pas justifiées mathématiquement. C'est ainsi que la fonction $\gamma(x)$ de la variable réelle x, égale à 0 pour $x \leqslant 0$, à 1 pour $x > 0$, est couramment considérée comme ayant pour dérivée la « fonction de Dirac » $\gamma'(x) = \delta(x)$, nulle pour $x \neq 0$, égale à $+\infty$ pour $x = O$, et telle que, de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = +1$. Un tel « abus de langage » est malgré tout incompatible avec la notion habituelle de fonction et de dérivation ! Et que penser alors de la considération des dérivées successives de la fonction de Dirac ! Et pourtant de telles expressions rendent de constants services en électricité et sont très adaptés à l'étude de la transformation de Laplace ou de Fourier et de la mécanique ondulatoire. Le but de cet article est de faire un très bref résumé (et sans démonstrations) d'un travail qui sera publié ultérieurement sous forme de mémoire ou de monographie et qui apportera une justification complète au langage précédent.
>
> [Schwartz 1945, p.57]

Les notions utilisées en physique ne sont pour lui qu'un « langage » que la théorie des distributions vient justifier mathématiquement. La relation entre les mathématiques et la physique est souvent perçue dans un sens, à savoir celui de l'application des mathématiques à la physique, ainsi que l'explique [Lützen 2011a] [18]. Il remet en cause à la fois l'idée d'un champ des mathématiques qui devient subitement applicable à la description de la nature aussi bien que l'idée d'un royaume physique non-mathématique auquel les mathématiques peuvent être appliquées [19]. Il propose donc de parler de confrontations, de rencontres entre les mathématiques et la physique :

18. On peut aussi consulter [Lützen 2011b].
19. Dans les deux cas, il parle de mythe :

> Thus the idea of a completely a priori field of mathematics that suddenly turns out to be applicable to the description of nature is often a myth.
>
> [Lützen 2011a, p.20]

et, à propos de la nature de la physique :

> So the idea of a non-mathematical realm to which mathematics can be applied is often a myth.
>
> [Lützen 2011a, p.20-21]

> A piece of mathematics meets a piece of physics; they interact and out comes a new mathematical description (model) of this piece of physics. In most of the cases the interaction also leads to a developement of the ingoing piece of mathematics as well as the more general view of physics. (...) In most of the cases I shall highlight the changes that mathematics underwent as a result of the meetings.
>
> [Lützen 2011a, p.21]

Parler de rencontre [20] permet de rendre la relation entre les mathématiques et la physique plus réciproque : ils en ressortent mutuellement transformés. Le dernier exemple que présente Lützen est précisément celui de la théorie des distributions. Il conclue ainsi :

> Thus the theory of distributions was developed as a remedy of problems that had arisen in connection with physical applications of mathematics, either directly as in the case of the improper δ-function or indirectly as in connection with the attempts to generalize the notion of solution of a differential equation and the Fourier transform, attempts that were in turn made necessary by physical applications. But the solution of the problems was found in the highly structural field of functional analysis.
>
> [Lützen 2011a, p.37]

Si pour Lützen, la physique est à l'origine du problème résolu par la théorie des distributions, elle en justifie aussi la nécessité en étant un cadre où l'appliquer. Nous allons considérer plus avant cette confrontation entre la théorie des distributions et la physique, et la complexifier en prenant en compte différents cadres dans lesquels cette théorie est énoncée et appliquée.

Une justification par les travaux de Dirac

La nécessité de la justification apportée par la théorie des distributions semble tout d'abord évidente, ainsi qu'on peut le voir dans les premiers articles de Schwartz. [21]. Dans [Schwartz 1945], la « fonction » δ de Dirac est prise comme exemple suivi, qui justifie la « généralisation de la notion de fonction » que propose Schwartz. Suivons les étapes qu'il propose pour arriver à la définition de ses distributions. Schwartz commence par affirmer :

> Les éléments sur lesquels il faut raisonner sont plus généraux que des fonctions.
>
> [Schwartz 1945, p.58]

Car ainsi « $\delta(x)$ n'est pas une fonction », mais une « *mesure* ou *distribution de masses* ». On peut en effet la définir comme la distribution de masse +1 placée à l'origine. Schwartz rappelle la définition de mesure, et indique qu'une telle mesure μ permet de définir une fonctionnelle $\mu(\varphi)$, définie au moins pour toute fonction continue $\varphi(x)$, nulle en dehors d'un intervalle fini, par :

$$\mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}\mu$$

Une mesure est une première généralisation de la notion de fonction, ou, en d'autres termes, une fonction est un cas particulier de mesure. En effet, à une fonction f on peut associer la mesure de densité f. La fonctionnelle que l'on vient de donner s'écrit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

20. C'est le thème plus général de l'ouvrage dans lequel s'insère l'article de Lützen, qui s'intitule « Mathematics meets physics » [Schlote et Schneider 2011b]. De nombreux articles, portant sur le XIX$^{\text{ème}}$ et la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle illustrent cette interaction, cette rencontre, à tous les niveaux : individuel, local, institutionnel, disciplinaires, global [Schlote et Schneider 2011a].

21. [Lützen 2011a, p.35-36] décrit les fonctions impropres (il rappelle l'histoire de ce qu'il nomme δ-function) comme étant l'une des sources d'inspiration pour l'invention par Schwartz de la théorie des distributions.

On peut alors parler de la « *distribution de Dirac* », formée d'une masse +1 à l'origine, ainsi :

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}\delta = \varphi(0)$$

Pour « définir des distributions plus générales », Schwartz a recours à l'exemple des doublets d'électrons. Après avoir défini l'ensemble Φ des fonctions indéfiniment dérivables et nulles en dehors d'ensembles bornés, Schwartz introduit des distributions :

> *Définition 2.* On appellera « distribution » de l'espace à n dimensiosn toute fonctionnelle ou forme linéaire $T(\varphi)$ définie pour toutes les φ de Φ, et vérifiant de plus la condition de continuité suivante :
>
> Si une suite de fonctions φ_i ont leurs noyaux [22] contenus dans un compact fixe et si elles convergent uniformément vers 0, ainsi que chacune de leurs dérivées, alors les $T(\varphi_i)$ convergent vers 0. [Schwartz 1945, p.60]

Comme la notion de mesure généralise celle de fonction, la notion de distribution généralise celle de mesure. Cela signifie qu'une mesure est un cas particulier de distribution, ainsi que Schwartz l'explicite :

> Une distribution T peut être, comme cas particulier, une mesure μ ; cela signifie que $T(\varphi_i)$ converge vers 0 si les φ_i, gardant leurs noyaux contenus dans un compact fixe, convergent uniformément vers 0, aucune hypothèse n'ayant besoin d'être faite sur la convergence des dérivées des φ_i. Comme cas plus particulier encore, cette mesure μ peut être une fonction f, sommable dans toute la région bornée (et définie à un ensemble de mesure nulle près).
>
> [Schwartz 1945, p.60]

Ainsi, lorsque Schwartz présente sa généralisation de la notion de fonction et définit les distributions, il prend comme exemple suivi celui de la « fonction » δ de Dirac. Son discours lui aussi vise à présenter les distributions comme une justification nécessaire des calculs des physiciens.

Une relation trop évidente ?

En parcourant, notamment, les *Annales des Télécommunications*, nous allons questionner cette relation, évidente à première vue, de dépendance entre les distributions et la physique, à savoir la justification qu'apportent les distributions aux calculs physiques. S'agit-il de préoccupations de mathématiciens ? Quelle est la réaction des physiciens ? Ce besoin créé par les applications physiques est-il aussi un besoin des physiciens ? Sans traiter ces questions dans leur globalité, nous pouvons apporter des éléments consistants de réponse grâce à ces *Annales* dont les articles peuvent être écrits par des mathématiciens, des ingénieurs électriciens, ou des physiciens.

On apprend tout d'abord que Schwartz donne une conférence le 4 décembre 1946, à la Société des Radio-électriciens. La théorie des distributions est présentée comme une théorie mathématique, permettant de justifier des procédés utilisés par les physiciens :

> Cet article expose brièvement une théorie des « distributions », qui a été développée dans ses grandes lignes à une Conférence faite à la Société des Radio-électriciens, le 4 décembre 1946. Cette théorie permet de justifier complètement certains procédés utilisés en calcul symbolique (électricité) et en mécanique ondulatoire. (...) Naturellement la théorie des distributions ne se borne pas à justifier certaines formules ; elle est une théorie autonome, ayant ses règles de calcul, utilisable dans la théorie de la transformation de Fourier ou Laplace, ou dans celle des formes différentielles.

22. Ce que Schwartz désigne par « noyau » d'une fonction φ, et qu'il appellera plus tard « support », désigne l'ensemble compact dont le le complémentaire est le plus grand ensemble ouvert sur lequel $\varphi \equiv 0$.

> [Schwartz 1948a, p.135]

Schwartz propose, en conclusion, le « maniement systématiques des distributions » car celui-ci « permet d'évoluer avec beaucoup d'aisance et moins de chances de commettre des erreurs ». À l'attention des physiciens, il précise même que « compliquée d'apparence, la théorie est en réalité très simple et ne demande que peu de connaissances mathématiques. » [Schwartz 1948a, p.140]

L'exposé de Schwartz, ainsi que sa théorie des distributions, ne passe pas inaperçue parmi ceux qui publient dans les *Annales des Télécommunications*. On peut mentionner quelques articles qui citent soit la conférence de Schwartz publiée dans ces *Annales* [Schwartz 1948a], soit le traité de Schwartz [Schwartz 1950c] : [Colombo 1949], [Colombo 1953], [Raymond 1954]. La théorie des distributions est parfois citée de manière abstraite, comme résolvant les problèmes, sans pour autant que l'on rentre dans les détails :

> Toutefois, la généralisation de la notion de fonction fondée par Laurent SCHWARTZ sur sa théorie des distributions lève cette difficulté.
>
> [Colombo 1949, p.362]

La justification du calcul symbolique est décrite comme étant l'une de leurs préoccupations des physiciens théoriciens. Ainsi Serge Colombo [23] écrit-il, dans un article intitulé « La fonction de Dirac et son utilisation en physique mathématique » :

> Les mathématiques constituent incontestablement l'outil essentiel de toute recherche théorique ; mais ses différents modes d'utilisation peuvent susciter parfois des controverses.
>
> Fréquemment, les physiciens théoriciens adoptent certaines définitions qui constituent de téméraires généralisations analytiques, intervertissent arbitrairement certains passages à la limite, utilisent des séries et des intégrales sans trop se préoccuper de leurs éventuelles convergences... Le caractère plausible et concret des résultats auxquels ils parviennent ainsi constitue leur principale excuse face à la juste indignation des mathématiciens. D'autre part, ceux de leurs objecteurs qui acceptent de procéder à un examen plus approfondi des points litigieux sont parfois amenés à reconsidérer avec sympathie des modes de calcul qu'ils avaient initialement dénoncés comme scandaleux. Il reste, dès lors, à entreprendre la tâche ingrate des justifications rigoureuses, ainsi que celle (plus ingrate peut-être) de les rendre intelligibles sans exiger d'efforts excessifs. Bien souvent, de telles tâches sont allègrement abandonnés aux générations futures ; d'autant plus que la plupart des théoriciens de la physique professent, comme Eddington, l'opinion que les mathématiques sont une drogue qu'il leur faut quelquefois ingurgiter, tandis que « le cœur de la théorie est ailleurs » –quand ils ne s'exclament pas, comme le faisait Heaviside en atteignant un résultat valable au moyen de calculs incertains : « Je ne vois pas de raison à un échec alors que nous parvenons à la perfection ! » Mais si ces tâches peuvent, dans une certains mesure, être différées, elles ne sauraient en aucun cas être éludées. (...)
>
> La « fonction introduite pas Dirac en mécanique quantique doit être considérée comme l'une de ces généralisation hardies auxquelles les physiciens ont recours.
>
> [Colombo 1953, p.131]

Schwartz est donc en contact avec des physiciens mathématiciens, pour qui la justification de leurs calculs est importante. Outre cette conférence en 1946, on peut aussi rappeler que Schwartz donne un cours de Méthodes mathématiques pour la physique (MMP), qui est très apprécié des étudiants [24]. Il raconte par ailleurs dans son autobiographie [Schwartz

23. Serge Colombo (1911-2000), ainsi qu'il est présenté dans le « Carnet » de la *Gazette des Mathématiciens* lors de son décès [Vallée 2000], est ingénieur électricien en Turquie avant de revenir en France faire une thèse sur le calcul symbolique et les fonctions discontinues sous la direction du mathématicien Pierre Humbert (1891-1953), qu'il soutient en 1947. Il publie notamment, avec Pierre Humbert, un livre intitulé *Le calcul symbolique et ses applications à la physique théorique* [Humbert et Colombo 1947].

24. Leurs souvenirs ont été rappelés au chapitre 2.

1997, p.253-254] les différentes perceptions de sa théorie des distributions parmi les mathématiciens et les physiciens. Si les physiciens sont satisfaits de la justification des calculs incluant la « fonction » de Dirac, les mathématiciens, quant à eux, sont plus à l'aise avec la définition d'une distribution comme une forme linéaire continue sur un l'espace $\mathcal{D}$. Il écrit ainsi :

> Quand j'introduisis les distributions auprès des étudiants physiciens en 1953, je partis de la fonction de Dirac qui leur était familière, leur montrant qu'elle n'existait pas et que les distributions étaient une généralisation à peu près inévitable de la fonction de Dirac et de ses dérivées successives. C'est ainsi qu'ils comprenaient alors la nécessité d'introduire les distributions. Lorsque j'ouvris, à la faculté des sciences de Paris, mon cours sur les distributions pour des jeunes, j'utilisai la même démarche. Mais ces jeunes n'avaient jamais entendu parler de la fonction de Dirac et de ses dérivées et trouvaient mon introduction plutôt curieuse. Tandis qu'au contraire, quand je les initiais aux formes linéaires continues sur l'espace $\mathcal{D}$, ils respiraient : « Enfin on comprend vraiment de quoi il s'agit. »
>
> [Schwartz 1997, p.253-254]

Il précise même qu'il leur introduit la « notation fonctionnelle des distributions » uniquement ensuite. Il s'agit de noter $\int T(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$, pour exprimer $< T, \varphi >$; cette notation est proche des notations des physiciens concernant la « fonction » de Dirac.

On ne peut néanmoins pas s'arrêter à une vision caricaturale de la théorie des distributions comme étant le cadre justifiant la dérivation de la « fonction » de Dirac. Les auteurs des *Annales des Télécommunications* reconnaissent les avantages de la théorie des distributions, mais lui trouvent « un caractère trop abstrait » [Colombo 1953, p.131]. Colombo donne, en conclusion, son avis, suivant lequel à la fois le rôle joué par la fonction de Dirac et la théorie des distributions est exagéré :

> Il nous semble que l'importance du rôle joué par la fonction de Dirac a été quelque peu exagéré par les physiciens. Il paraît même possible de l'ignorer dans des problèmes où elle a apporté de notables simplifications : en particulier, dans le problème des chocs entre particules en mécanique quantique, comme Titchmarsh l'a récemment montré.
>
> Cependant, l'importance primordiale de la notion de distribution et des théories qui en résultent est évidente. Mais il faut convenir que cette notion n'est pas toujours indispensable pour la justification de certains calculs : cet exposé se propose précisément de répondre à l'affirmation suivant laquelle les physiciens n'auraient appliqué le calcul symbolique qu'avec mauvaise conscience, et cela jusqu'au jour où la notion de distribution serait venue mettre de l'ordre et lever les difficultés. Vraie malheureusement dans plusieurs cas, cette affirmation semble peu justifiée en règle générale ; la théorie des intégrales singulières de Lebesgue et Hobson, évoquée ici, quoique bien plus restreinte que celle des distributions, si brillamment développée par M. Laurent Schwartz, suffit largement, croyons-nous, à rassurer le physicien sur la légitimité de certains de ces calculs ; et il convenait d'autant plus de le faire que l'on ne diminue en rien les mérites de la seconde théorie en rappelant les services quelque peu ignorés, bien qu'anciens, rendus par la première.
>
> [Colombo 1953, p.138]

Un autre des auteurs, François-Henri Raymond, qui donne un cours sur le calcul symbolique en tant que professeur à l'École Supérieure de l'Armement, précise ainsi que l'on peut l'enseigner de manière plus simple et néanmoins rigoureuse :

> En invoquant le fait d'une bonne intention, on nous pardonnera, pensons-nous, de revenir ici sur le calcul symbolique.
>
> Ayant eu à enseigner ce sujet à l'École Nationale Supérieure de l'Armement, nous nous sommes rendu comptes – est-ce une bévue ? – que, s'il existait un bon nombre d'ouvrages, les méthodes par leurs auteurs manquaient de clarté. Il nous semble, en

> effet, que l'enseignement des mathématiques aux ingénieurs doive mettre en évidence le côté naturel – les Américains disent banal– des théories sans perdre, ou en perdant le minimum, de rigueur. L'importance du calcul symbolique est assez grande pour que la rigueur inspire confiance.
>
> Bien entendu, on trouverait de belles généralisations et des procédés plus puissants dans la théorie des distributions de SCHWARTZ : ne peut-on penser raisonnablement s'arrêter à mi-chemin entre une théorie qu'il est moins aisé de rendre familière aux ingénieurs (peut-être à cause des programmes d'enseignement des mathématiques) et un calcul symboliques à la CARSON.
>
> [Raymond 1954, p.194]

Outre ces utilisateurs et enseignants du calcul symbolique, la critique de la place donnée à la « fonction » dans l'introduction de Schwartz est critiquée par Bochner, qui écrit la recension de [Halperin 1952] (il s'agit des notes d'un cours donné par Schwartz au Canada en 1949 ; le texte est très proche des articles de Schwartz) :

> Our one criticism of the exposition is this -that Halperin follows Schwartz too closely in claiming the "Dirac function" all-out for the theory of distributions, whereas in fact the Dirac function has been used by other theories of representation of linear functionals to illustrate their points at issue with equal fitness.
>
> [Bochner 1952a, p.680]

Or Schwartz remet lui-même en cause l'influence, trop évidente, qu'aurait eue la « fonction » de Dirac sur l'invention de la théorie des distributions. Artefact du discours, cette interprétation se veut une rumeur parmi les étudiants, comme le relate Roubaud :

> Il avait pris en charge un certificat tout à fait adéquat à son personnage, qui s'appelait Méthodes mathématiques de la physique (MMP ; soit < èmèmpé >, pour les intimes), puisqu'il était auréolé de sa toute récente couronne de lauriers « FIelds », et que celle-ci lui avait été donnée pour l'invention d'une théorie, la Théorie des Distributions, qui (selon les apprentis mathématiciens qui suivaient ce cours) avait été créée de toutes pièces pour donner un sens précis et rigoureux à certaines élucubrations irresponsables des physiciens, comme les mystérieuses fonctions de Dirac et Heaviside. On disait tenir cette interprétation de Schwartz lui-même car (semblait-il), sans émettre explicitement une telle hypothèse, il laissait entendre qu'elle était correcte à qui savait écouter (je n'irai pas jusqu'à affirmer la vérité de telles affirmations, n'en ayant pas été moi-même témoin auriculaire). (...)
>
> [Roubaud 1997, p.90]

Mais Schwartz l'écrit – lorsqu'il répond à Synowieg, en 1977, à propos de l'invention des distributions : [25] :

> Je crois me rappeler que je n'avais pas d'autre motivation et en particulier pas de motivation relative à la physique et à la fonction de Dirac.

Dans un article intitulé « La "fonction" delta et les noyaux », il dit aussi [26] :

25. Archives de l'École Polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, B.I.1.1.102, lettre de Schwartz à J. Synowieg (1977).

26. Dans cet article, Schwartz commence par rappeler sa première rencontre avec la « fonction » delta :

> C'est en 1935 que j'entendis parler pour la première fois de la fonction S ; j'étais étudiant, et un camarade venait d'entendre une conférence de physique théorique, et m'en a parlé en ces termes : 'Ces gens-là introduisent une soi-disant fonction S, nulle partout sauf à l'origine, égale à $+\infty$ à l'origine, et telle que $\int \delta(x)\mathrm{d}x = 1$. Avec des méthodes de ce genre, aucune collaboration n'est possible.' Nous y avons un peu réfléchi ensemble, et avons abandonné ; je n'y ai plus repensé jusqu'en 1945. A ce moment, c'est dans un but tout-à-fait différent que j'ai défini les distributions.
>
> [Schwartz 1972, p.179]

> C'est seulement après que je me suis aperçu qu'elles donnaient la solution des difficultés rencontrées dans la fonction de Dirac ; celle-ci devenait la distribution de Dirac.
>
> [Schwartz 1972, p.179]

Schwartz caricature les calculs effectués par les physiciens en ces termes :

> J'ai alors regardé un certain nombre de travaux de physique théorique, et me suis aperçu avec effroi de l'énorme 'percée' qu'avaient faite les physiciens dans la manipulation des distributions, sans que les mathématiciens leur en 'donnent le droit'.
>
> [Schwartz 1972, p.179-180]

Il semble donc que la justification des calculs avec la « fonction » de Dirac ne soit venue qu'après coup. En jouant sur les mots, on peut dire que ce n'est pas la théorie des distributions qui justifie les calculs des physiciens mais bien plutôt que les références données par Schwartz justifient sa théorie en ce sens qu'elles en donnent une application évidente.

Le cas du théorème des noyaux

Revenons plus spécifiquement à l'énoncé du théorème des noyaux. Car cette fois, Schwartz revendique l'influence des travaux de Dirac. Il écrit en effet :

> Ce n'est pas seulement pour la fonction de Dirac elle-même que Dirac s'était lancé en avant, ni même pour toutes les fonctions singulières ; il avait l'idée des distributions comme noyaux. (...)
>
> Ce théorème, que j'ai démontré en 1950, est directement inspiré de la lecture de Dirac.
>
> [Schwartz 1972, p.180]

Rappelons tout d'abord que l'enjeu de son article est de représenter certains opérateurs linéaires sous la forme d'un opérateur intégral à noyau, problème qu'il n'est pas toujours possible de résoudre, dans le cadre des fonctions continues et localement intégrables.

Schwartz donne trois exemples d'opérateurs linéaires pour lesquels il est impossible de trouver un noyau les représentant, au sens qu'il vient de définir. Il s'agit des opérateurs identité, multiplication par une fonction et dérivation. Et il précise qu'une telle représentation est rendue possible avec l'usage de la « fonction » de Dirac. [27] Voici la représentation en question (telle que Schwartz dit la trouver chez Dirac), qui, pour le moment, n'a pas encore de sens mathématique : [28]

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi \tag{4.2}$$

$$\alpha(x) f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [\alpha(x)\delta(x-\xi)] f(\xi) \mathrm{d}\xi \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}^n} [\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(x-\xi)] f(\xi) \mathrm{d}\xi \tag{4.4}$$

Ces trois exemples sont repris plus tard, lorsque Schwartz introduit ses *noyaux-distributions*. Il reprend les trois opérateurs, et définit les noyaux-distributions permettant de donner sens aux expressions utilisées par Dirac :

1. On définit le noyau $I_{x,\xi}$ par

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} I_{x,\xi} \varphi(x,\xi) \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t,t) \mathrm{d}t$$

27. Je mets le mot « fonction » entre guillemets, conformément à l'usage qu'en fait Schwartz. Les guillemets veulent signifier qu'il ne s'agit pas véritablement d'une fonction, au sens où on ne peut pas la définir point par point. Mais Dirac l'utilise comme s'il s'agit d'une fonction, d'où l'emploi de ce terme.

28. [Dirac 1927] ne parle pas de noyau, ni n'énonce un résultat comme le théorème des noyaux. Mais il présente des propriétés de δ, permettant notamment de telles représentations.

I est la mesure portée par la diagonale $x = \xi$. On a $I.f = f$ (I est l'opérateur identique). En effet, en se rappelant la définition du noyau-distribution (4.1), on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} [I.f]_\xi \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} I_{x,\xi} f(x) \varphi(\xi) \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On a ainsi l'expression correcte de (4.2) qui est bien l'opérateur identité.

2. Soit $S_x \in (\mathcal{D}')_x$. On définit le noyau $K_{x,\xi}$ par

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} K_{x,\xi} \varphi(x, \xi) \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} S_t \varphi(t, t) \mathrm{d}t$$

On a $K.f = Sf$ (multiplication par f). En particulier, si $S_x = \alpha(x)$ est une fonction continue, $K_{x,\xi} = \alpha(x) I_{x,\xi}$, ce qui justifie (4.3).

3. Soit D un polynôme de dérivation sur $\mathbb{R}^n$. L'opération de dérivation $f \mapsto Df$ définie par D correspond au noyau $(D\delta)_{x-\xi}$.

Concernant la lecture par Schwartz de Dirac, il peut s'être plongé de lui-même, dans la lecture de Dirac, enhardi par les succès engendrés par la théorie des distributions. Il est aussi possible qu'il ait profité de cours et de discussions avec Dirac lui-même. Schwartz a en effet été invité en même temps que Dirac à Vancouver au Canada en 1949 pendant un mois et y a donné des cours sur les distributions ; juste avant le congrès annuel des mathématiciens canadiens, où Dirac et Schwartz ont parlé de l'histoire de la mécanique quantique et de celle des mathématiques en France pendant et après la guerre respectivement [29]. On peut mentionner l'influence des écrits de Dirac, ainsi qu'il le reconnaît lui-même, sur la formulation de son théorème des noyaux ; mais cependant, la rencontre entre les mathématiques et la physique semble principalement être construite pour les enjeux du discours.

La théorie quantique des champs

Néanmoins, l'importance de la confrontation entre la théorie des distributions et la physique ne se limite pas à l'influence qu'a pu avoir un article de Dirac sur le théorème des noyau de Schwartz. Si Malgrange déclare que « Schwartz a toujours été préoccupé des rapports entre les mathématiques et la physique », à une époque où cela n'était pas si courant, il précise que « Les utilisations les plus raffinées de la théorie des distributions en physique ont trait, bien sûr, à la théorie quantique des champs » [Malgrange 2003, p.73] [30] « Quelle a été (...) la répercussion de l'œuvre de Schwartz en physique ? » Telle est la question que pose Alfred Kastler, lorsqu'il écrit un rapport sur Schwartz pour sa candidature à l'Académie des sciences [32]. Il y répond en expliquant comment la théorie des

29. Le cours de Schwartz a été rédigé par Halperin [Halperin 1952]. Les exposés de Schwartz et Dirac sont publiés : [Schwartz 1951b], [Dirac 1951].

30. Ce texte est issu, au départ, de la conférence que donne Malgrange à l'occasion du colloque en l'honneur de Laurent Schwartz, qui est organisé à Palaiseau en 1985. Les actes du colloque sont publiés [*Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz. Vol. 1* 1985], [*Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz. Vol. 2* 1985]. En ce qui concerne la théorie quantique des champs [31], Malgrange renvoie à l'exposé du physicien Arthur S. Wightman, dont nous allons reparler, [Wightman 1985]. Malgrange termine sur ces mots :

> Je crois aussi que l'École de physique mathématique, dont A.S. Wightman est un des fondateurs, a reçu une impulsion considérable de la théorie des distributions, sans doute pourrait-il le confirmer.
>
> [Malgrange 2003, p.73]

32. Archives de l'Académie des Sciences, dossier biographique Laurent Schwartz, Comité secret du 17 février 1975, « L'œuvre de Laurent Schwartz et la physique ».

distributions « a rendu possible ce qu'on appelle aujourd'hui « la théorie quantique des champs », c'est-à-dire la mécanique quantique des champs à un nombre infini de degrés de liberté » :

> Le livre de Schwartz, paru en 1950 et qui lui a valu de la part des mathématiciens la médaille Fields, a créé au bon moment l'outil mathématique pour aborder en physique l'étude des systèmes quantiques à un nombre infini de particules. Ainsi, à l'époque de la mécanique quantique ordinaire qui s'est développée de 1925 à 1950 a succédé l'épopée de la théorie quantique des champs qui marque la physique théorique du dernier quart de siècle. Pour mettre en lumière le rôle de Schwartz dans ce développement, il suffit d'ouvrir le livre consacré au « Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs », publié par le CNRS en 1959. Ce livre contient les rapports présentés en 1957 au Colloque international de Lille. Le premier article de cet ouvrage est une revue générale rédigée par l'un des meilleurs experts de la théorie quantique des champs, l'américain Wightman. Il montre le rôle fondamental des travaux de Schwartz dans cette nouvelle branche de la physique théorique. [33]

Le colloque qu'il mentionne est un colloque international du C.N.R.S., sur les « Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs », qui a lieu à Lille du 3 au 8 juin 1957, dont les actes sont publiés [*Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs* 1959]. L'introduction des organisateurs René Deheuvels et Louis Michel, présente avec emphase ce colloque, le premier qui est commun à des mathématiciens et à des physiciens :

> Ce colloque a été l'un des premiers à grouper à la fois des mathématiciens et des physiciens autour des difficiles problèmes de la théorie quantique des champs.
>
> Cette théorie, au succès spectaculaire dans le domaine de lélectrodynamique, manque encore de fondements mathématiques solides.
>
> Il nous a semblé que le moment était opportun pour tenter de renouer avec la fructueuse tradition de la physique mathématique illustrée par les grands noms de H. Poincaré, E. Cartan, H. Weyl et J. von Neumann.
>
> Le succès de la rencontre nous fait espérer que des réunions semblables seront périodiquement organisées.
>
> [*Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs* 1959, Introduction]

La particularité de ce colloque mixte se traduit par exemple dans une note de bas de page, qui compare les niveaux de rigueur des articles de mathématiques et de ceux de physique :

> Dans ces deux démonstrations, le niveau de rigueur mathématique est aussi élevé que les éditeurs de revues de Physique le permettent, mais ce n'est pas le niveau habituel exigé par les mathématiciens. Il est facile d'ajouter les détails manquants.
>
> [Wightman 1959, p.20]

Schwartz est l'un des participants à ce colloque, ainsi que Kastler et Wightman, parmi de nombreux autres. La place des distributions dans les exposés qui sont donnés lors de colloque est en effet intéressante. Elle est conséquente dans l'exposé de [Wightman 1959], ainsi que l'a mentionné Kastler. [Wightman 1959, p.19] utilise par exemple « un théorème de L. SCHWARTZ », qu'il désigne par « Théorème Nucléaire » et utilise de la manière suivante :

> Soient Ψ_0 l'état du vide et $f_1...f^n$ les fonctions d'essai sur l'espace-temps. Alors une valeur moyenne dans le vide d'ordre n est définie comme la fonctionnelle multilinéaire :
>
> $$F^{(n)}(f_1, ..., f_n) = (\Psi_0, \varphi(f_1)...\varphi(f_n)\Psi_0)$$

33. Ibid.

> En vertu de l'axiome I, $F^{(n)}$ est une distribution pour chaque variable séparément et, d'après un théorème de L. SCHWARTZ, a un prolongement unique en tant que distribution dans un espace de distribution $4n$ et donne un sens précis au symbole utilisé habituellement
> $$(\Psi_0, \varphi(x_1)...\varphi(x_n)\Psi_0)$$

On trouve des références aux distributions tempérées [Wightman 1959, p.21] ou bien encore une traduction du langage usuel dans la désignation de Schwartz :

> Il a été souligné plusieurs fois dans les exposés précédents que les champs quantifiés $\psi(x)$ sont des opérateurs impropres (selon M.Schwartz des distributions à valeurs vectorielles) [Valatin 1959, p.179-181]

L'un des articles, [Bremermann, Oehme et Taylor 1959], mentionne les « méthodes de la théorie des distributions » et la complexité qu'elle engendre.

Wightman est aussi l'auteur d'un article, parmi d'autres, intitulé « How It Was Learned that Quantized Fields Are Operator-Valued Distributions » [Wightman 1996], dans lequel il décrit l'émergence de la notion du concept mathématique de champ quantifié,. Le résumé précise que cela peut être considéré comme une interaction fructueuse entre la physique et les mathématiques. S'il explique que le formalisme de Sobolev n'a pas eu d'influence sur le développement de la mécanique quantique (p.168), il consacre un long paragraphe à la théorie des distributions de Schwartz (p.173) :

> Just at the end of this period there occured a mathematical event that was important for the development of relativistic quantum field theory, the appearance (1950-51) of LAURENT SCHWARTZ's treatise *Théorie des distributions*. Schwartz argued convicingly that the theory of distributions provides a natural setting for problems of linear functional analysis. He provided a systematic, well-organized account of the general theory as well as a rich family of applications. In the application to quantum field theory, it turner out that results on the amplitudes associated with Feynman graphs could be expressed as statement about linear functionals defined on an appropriate space of test functions – distributions.
>
> [Wightman 1996, p.173]

Wightman se demande quels sont les attributs mathématiques nécessaires à la définition des champs quantifiés (p.174). Il conclue son article en énonçant un théorème qui lui permet de donner de bonnes raisons pour lesquelles les champs quantifiés sont des distributions à valeurs vectorielles (« operator valued distributions ») (p.176) justifiant ainsi la place primordiale des distributions dans ce développement de la physique.

On peut noter aussi que Pierre Cartier donne deux exposés, sur les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs, au séminaire Bourbaki [Cartier 1971], [Cartier 1974].

On voit ainsi que la confrontation entre les mathématiques et la physique peut être perçue à plusieurs niveaux. Elle est utilisée comme outil rhétorique, la fonction de Dirac [34] étant un fil directeur montrant la justification mathématique des calculs physiques ou bien justifiant en tant qu'application la nécessité de la théorie. Le théorème des noyaux, pour lequel l'influence des travaux du physicien de Dirac est mentionnée, mais dont la présentation est conforme à celle de la théorie des distributions dans laquelle il se place, se situe à la frontière entre cette utilisation rhétorique et une transformation profonde d'un domaine de recherches telle qu'on peut la voir dans la théorie quantique des champs.

34. Pour une autre confrontation entre les mathématiques et la physique, autour des travaux de Dirac, on peut lire [Borrelli 2010], qui étudie notamment certaines notations utilisées par Dirac. Elle montre en particulier que l'histoire de la mécanique quantique offre plusieurs cas où de nouvelles mathématiques et de nouvelle physique émergent simultanément.

4.2 Grothendieck et les espaces nucléaires

Les premières mentions du théorème des noyaux, après son annonce en 1950, se trouvent dans un résumé de la thèse de Grothendieck [35] [Grothendieck 1952, p.74,99-100], et sont même mentionnés dans une note antérieure aux *Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences* [Grothendieck 1951b], intitulée « Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion », dont le résumé précise :

> La théorie dont nous énumérons ci-après quelques résultats, a été inspirée par la théorie des noyaux-distributions de L. Schwartz, et permet de donner, même pour les espaces tels que $(\mathfrak{E})$ et $(\mathfrak{S})$ considérés par cet auteur, des propriétés topologiques nouvelles.
>
> [Grothendieck 1951b, p.1556]

C'est dans cette note qu'il définit les espaces nucléaires, qui sont développés dans le résumé.

Les espaces nucléaires sont exposés dans le séminaire Schwartz 1953-54, et publiés. Cette année de séminaires est « essentiellement consacré à l'étude de la Thèse de M. Alexandre GROTHENDIECK » [36]. Schwartz précise que certains exposés sont des « résumés d'un travail personnel qui paraîtra ultérieurement » [37] ; le théorème des noyaux en fait partie et est l'objet de l'exposé n°11 [Schwartz 1954a].

Énoncé dans le résumé de la thèse de Grothendieck [Grothendieck 1952, p.100] :

> On voit donc que de façon générale, *l'assertion que l'on a* $E \hat{\otimes} F = E \hat{\otimes} F$ *pour deux espaces donnés* E *et* F, *doit être regardé comme un équivalent algébrico-topologique du théorème des noyaux de L. Schwartz*. Dans la suite nous étudions les espaces E, tels que $\mathcal{E}(R^m)$, pour lesquels on ait $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$ pour *tout* espace localement convexe F : ce sont les *espaces nucléaires*.

Énoncé [Schwartz 1954a, p.5] :

> Le théorème général des noyaux. Il s'énonce :
>
> Théorème 2 - Toute application linéaire continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{D}'_x$ est définie par un noyau, déterminé d'une manière unique. Soit L l'application, $\varphi(\xi) \in \mathcal{D}_y$ et $N_{x,y}$ le noyau de L, nous avons $L(\varphi(\xi)) = \int N_{x,y} \varphi(y) dy$
>
> L'unicité du noyau est évidente, car L détermine N sur $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y$, dense dans $\mathcal{D}_{x,y}$.

On constate que ces deux formulations du théorème sont assez différentes, et que Grothendieck introduit la notion d'« espaces nucléaires » ; le nom provenant du théorème des noyaux. Grothendieck a fait sa thèse avec Dieudonné et Schwartz à Nancy. Il n'est pas le seul étudiant de Schwartz qui cite le théorème des noyaux. Jacques-Louis Lions [38], lui aussi, le mentionne, par exemple [Lions 1955b, p.172] ou [Lions 1955a, p.16, 100] [39] ou bien

35. La vie et l'œuvre de Grothendieck fascinent mathématiciens et historiens. De nombreux textes biographiques sont recensés sur le site http ://www.grothendieckcircle.org/ (Page consultée le 4 septembre 2013). Ce site proposait aussi des textes de réflexion écrits par Grothendieck lui-même – ils ont dû, à sa demande, être retirés.

36. [Schwartz 1954b, Introduction]

37. Ibid

38. Sur Jacques-Louis Lions (1928-2001), voir [Dahan Dalmedico 2005].

39. Lions énonce, dans [Lions 1955b], des problèmes existants, dans le cadre de la théorie des distributions. Il utilise ainsi le théorème des noyaux [Lions 1955b, p.172] en l'appliquant à l'opérateur de Green : « Grâce au théorème des noyaux de Schwartz, cet opérateur est défini par une distribution $G(x, y)$ sur $\Omega_x \times \Omega_y$; c'est le noyau de Green. » Il en fait la même utilisation dans sa thèse.

encore Malgrange, dans sa thèse [Malgrange 1955–1956, p.347-] [40]. Mais Grothendieck ne se contente pas d'appliquer le théorème des noyaux. Il transforme un théorème énoncé dans le cadre des espaces de distributions en une propriété structurelle, topologique, d'un grand nombre d'espaces, dont les espaces de distributions. C'est pour cette transformation du théorème des noyaux en espaces nucléaires que nous allons nous attarder un peu sur ses travaux [41].

4.2.1 Du théorème des noyaux aux espaces nucléaires

Des jeunes mathématiciens à Nancy.

En octobre 1949 [42] Grothendieck arrive à Nancy [43], ainsi qu'il l'écrit dans le récit de ses réflexions, *Récoltes et semailles* [44] :

> Suivant une suggestion de Weil, j'ai passé les trois années suivantes à Nancy, qui à ce moment était un peu le quartier général de Bourbaki, avec Delsarte. Dieudonné, Schwartz, Godement (et un peu plus tard aussi Serre) y enseignant à l' Université. Il n'y avait là avec moi qu'une poignée de quatre ou cinq jeunes gens (parmi lesquels je me rappelle de Lions, Malgrange, Bruhat, Berger, sauf confusion), donc on y était nettement moins « noyé dans le tas »qu'à Paris. L'ambiance était d'autant plus familière, tout le monde se connaissait personnellement, et on se tutoyait tous je crois.
>
> [Grothendieck 1986, p.145]

Nancy est alors un lieu très vivant pour l'analyse [45], et notamment les espaces vectoriels topologiques. Schwartz et Dieudonné y animent un séminaire auquel viennent assister des

40. Malgrange résume les propriétés de noyaux dont il se sert (p.347 et suivantes). Il se sert en particulier de résultats issus de la thèse de Grothendieck, qui a précédé la sienne.

41. On peut mentionner, plus tard, l'écriture qu'en donne François Treves, lui aussi étudiant de Schwartz, dans son livre *Topological vector spaces, distributions and kernels* [Treves 1967]. Erik Thomas, élève de Schwartz, qui a par exemple parlé d'« Espaces nucléaires » au Séminaire Brelot-Choquet-Deny en 1966-67, a aussi donné un exposé récent (le papier est daté de 2001. On pouvait le trouver ici : http ://www.math.rug.nl/˜thomas/ le 01/09/2009 ; la page n'existe plus) sur « Nuclear spaces and topological tensor products », qui se termine par la démonstration du théorème des noyaux. Il est ainsi présenté :

> The present notes purport to be a relatively concise exposition of the theory of nuclear spaces and topological tensor products. (...) I hope the notes will help to bridge the gap between the Analysis and Algebra points of view, by the introduction of the appropriate completions of algebraix tensor products. The chief goal of these notes is the exposition of Laurent Schwartz' kernel theorem, and its compact formulation
>
> $$\mathcal{D}(X \times Y) = \mathcal{D}(X)\overline{\otimes}\mathcal{D}(Y)$$
>
> .

42. Laurent Schwartz, dans son autobiographie [Schwartz 1997, p.292], donne la date d'octobre 1951. Mais Grothendieck et Dieudonné se rappellent de 1949...

43. [Dieudonné 2007, p.1] La version racontée par Dieudonné, dans un article publié dans l'ouvrage en l'honneur des 60 ans de Grothendiek diffère un peu : « il était plus attiré par ce qu'il avait entendu dire sur l'Analyse Fonctionnelle, et sur les conseils de Cartan, il arrivé à Nancy en Octobre 1949. A ce moment là, Delsarte, Godement, Schwartz et moi-même y avions organisé un Séminaire sur les espaces vectoriels topologiques, théorie où nous travaillions tous dans diverses directions. »

44. Cet ouvrage, [Grothendieck 1986], n'est pas à proprement parler un récit autobiographique, mais plutôt le fruit de ses réflexions sur sa vie mathématique. Alain Herreman introduit les différentes phases de la rédaction de *Récoltes et semailles* (p.36-40). Son travail consiste en une analyse textuelle de ce récit visant à exposer la « dimension collective des mathématiques » telle qu'elle y est présentée [Herreman 1999].

45. On a un peu parlé de Nancy au chapitre 3.

normaliens [46]. Ils viennent de publier un important article, intitulé « Sur les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$. » Dieudonné a publié de très nombreux articles sur le sujet. [47]. C'est pour cela que Cartan envoie de jeunes normaliens passer quelques mois à Nancy, comme cela sera le cas pour Berger, Lions, Malgrange, Bruhat dans ces années là. Malgrange et Lions feront leur thèse avec Schwartz en même temps que Grothendieck d'ailleurs. Malgrange se souvient de ces années là [48] :

> Il savait très peu d'algèbre à l'époque.

et confirme avoir vu Grothendieck, qui voulait travailler sur les espaces vectoriels topologiques, lors de son premier passage à Nancy en 1949.

L'article de 1949 écrit par Dieudonné et Schwartz [Dieudonné et Schwartz 1949] a pour but d'étudier les relations entre les différentes topologies qu'on peut mettre sur le dual d'un espace, dans le cas des espaces $\mathcal{F}$ (Fréchet) et $\mathcal{LF}$ (espaces qui « jouent un grand rôle dans la théorie des distributions » notamment). Dieudonné et Schwartz donnent alors à Grothendieck à lire cet article , à la fin duquel se trouvent 14 questions à laquelle ils n'ont pas de réponse. Grothendieck trouve rapidement plusieurs réponses à ces questions, et généralise certains résultats, ainsi qu'on peut le lire dans ses notes aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* [Grothendieck 1950c],[Grothendieck 1950b], [Grothendieck 1950a], [Grothendieck 1951a] [49].

Un sujet de thèse

Laurent Schwartz lui propose alors un sujet de thèse, dont le point de départ est le suivant : étant donné deux espaces vectoriels topologiques E et F, mettre une topologie sur leur produit tensoriel. Ce sujet est directement inspiré des travaux de Schwartz à cette date ; il est alors en train de rédiger [Schwartz 1955b]. Sur les espaces sur lesquels Schwartz travaille, une topologie est naturelle, écrit-il. Mais Grothendieck trouve rapidement 2 topologies sur le produit tensoriel ! Ce qui rend Schwartz bien perplexe, comme il le décrit dans son autobiographie (il y a pourtant bien une topologie naturelle !). Grothendieck , encore une fois, résout ce problème en montrant que sur certains espaces vectoriels topologiques, dont ceux utilisés par Schwartz, ces deux topologies coïncident. Il introduit ainsi la notion d'espaces nucléaires. Voici le récit donné par Schwartz :

> La recherche d'un sujet de thèse s'imposait. Je lui en proposai un, au printemps 1952, juste avant de passer l'été au Brésil : placer sur un produit tensoriel $E \otimes F$ d'espaces localement convexes E, F, une bonne topologie. Je commençais alors la rédaction des distributions à valeurs vectorielles, où une bonne topologie était évidente pour $\mathcal{D}'(F) = \mathcal{L}(\mathcal{D}; F)$ (espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}$ dans F), de sorte qu'il induisait une bonne topologie sur son sous-espace dense $\mathcal{D}' \otimes F$, et que $\mathcal{D}'(F)$ devenait le complété de $\mathcal{D}' \otimes F$ muni de cette topologie. Mais je n'y parvenais pas

46. Pierre Dolbeault se souvient ainsi être venu à Nancy, un samedi sur deux, pour y assister. (Entretien avec Pierre Dolbeault, 4 mars 2013)

47. L'ouvrage de Pierre Dugac [Dugac 1995] donne un bon aperçu des travaux mathématiques de Dieudonné, notamment dans le domaine des espaces vectoriels topologiques, et plus particulièrement la notion de dualité.

48. Entretien avec Bernard Malgrange, IMJ, 11 décembre 2009

49. [Grothendieck 1950b] répond partiellement à des questions de [Dieudonné et Schwartz 1949]. [Grothendieck 1950a] infime simultanément, pour des espaces ($\mathcal{LF}$) réflexifs et séparables, les conjectures de 1, 2, 3, 4, 9 et 10. [Grothendieck 1950c] : l'une des propriétés de [Dieudonné et Schwartz 1949] est un cas particulier du théorème montré par Grothendieck. Et [Grothendieck 1951a] « résout par la négative la question 4 de la fin de l'article. De même les questions 5,6,8 ont maintenant une réponse négative (la dernière question a été résolue en collaboration avec M. G. Köthe). Si l'on tient compte des résultats annoncés dans deux Notes antérieures, toutes les questions de sont maintenant résolues. » (p.839)

> vraiment, preuve que je ne manipulais pas encore assez bien les espaces vectoriels topologiques. Grothendieck était l'homme tout désigné pour trouver une telle topologie tensorielle. Je reçus fin juillet, au Brésil, une lettre de lui, très déçue : il existait sur $E \otimes F$ deux topologies localement convexes, aussi naturelles l'une que l'autre, et différentes ! Je ne savais quoi lui répondre. Pourtant il y avait bien sur $\mathcal{D}' \otimes F$ une seule topologie qui s'imposât. Mais difficultés ou défaites peuvent être sources de victoires. Deux semaines plus tard, je reçus un nouveau courrier triomphant, ces deux topologies coïncidaient dans le cas de $\mathcal{D}' \otimes F$. Il existe des espaces localement convexes E, qu'il appela « nucléaires », tels que, pour tout F, les deux topologies sur $E \otimes F$ coïncident.
>
> [Schwartz 1997, p.293]

Une première note aux *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences* introduit ces espaces nucléaires [Grothendieck 1951b] dès 1951. Sa thèse décrit notamment ces espaces, leur application à la théorie de Fredholm. Un résumé paraît dès 1952 [Grothendieck 1952], et sa thèse est publiée aux *Memoirs of the American Mathematical Society* [Grothendieck 1955]. On peut lire dans l'introduction de la thèse de Grothendieck très précisément à quelles questions il répond dans sa thèse, ainsi que les problèmes qu'il s'est posé. On y apprend notamment que l'objet du travail est ([Grothendieck 1955, p.3]) « une étude systématique du produit tensoriel, convenablement topologisé, de deux espaces topologiques localements convexes (Chap.1), et d'une nouvelle classe remarquable d'espaces localements convexes, les espaces nucléaires, liée à cette notion (Chap.2) ». Il généralise notamment la théorie de Fredholm.

Quel est le lien avec le théorème des noyaux ? C'est ce que nous allons voir en détail maintenant. Grothendieck écrit que le point de départ de sa thèse [Grothendieck 1955, p.3] est « d'éclaircir et de généraliser les propriétés très spéciales que semblaient posséder certains espaces de fonctions indéfiniment différentiables en vertu du "théorème des noyaux" de L. Schwartz ». Le mot nucléaire vient en effet du théorème des noyaux.

Avant de regarder ces travaux plus précisément, nous pouvons mentionner les éloges que Dieudonné et Schwartz font sur les travaux de leur étudiant, par exemple :

> J'y appris quantité de choses nouvelles. Ce fut la plus belle de « mes » thèses. Je connaissais depuis longtemps les plaisirs de l'enseignement et de la recherche personnelle, mais la collaboration avec ce jeune homme si talentueux a constitué une expérience fascinante et enrichissante. Grothendieck fut aussitôt reconnu à l'échelle mondiale comme le grand maître des espaces vectoriels topologiques.
>
> [Schwartz 1997, p. 294]

C'est d'ailleurs ce qui a motivé Laurent Schwartz à passer du temps pour comprendre cette thèse, et à la choisir comme thème de son séminaire pendant l'année 1953-54 à Paris :

> Début 1953, sa thèse était entièrement rédigée. C'est un monument de pus de trois cent pages, un chef-d'œuvre de première grandeur. Je la lui fis soutenir vers la fin de l'année. Il fallait la lire, l'apprendre, la comprendre, car tout était difficile et profond. J'y mis six mois à plein temps. Quel travail, mais quelle joie !
>
> [Schwartz 1997, p. 294]

Ce séminaire présente les travaux de Grothendieck, ainsi que certains résultats obtenus par Schwartz sur les distributions [Schwartz 1954b], notamment la première preuve connue de son théorème des noyaux.

Théorème des noyaux - espaces nucléaires

La thèse de Grothendieck a pour titre : « Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires ». Grothendieck y définit la propriété de nucléarité, qui traduit le résultat du théorème des noyaux. Comme le titre l'indique, il s'agit d'un travail sur les topologies.

Le travail de Grothendieck généralise la théorie de Fredholm, que l'on a mentionnée lors de la définition des opérateurs intégraux, ainsi que le théorème des noyaux. Ces deux aspects sont mis en avant par Grothendieck dans l'introduction du résumé de sa thèse [50]. Cela insère la théorie de Fredholm, celle des opérateurs intégraux que nous avons mentionnés plus haut, dans un cadre plus général :

> La notion de produit tensoriel topologique est à la base d'une bonne formulation générale et simple de la *théorie de Fredholm*, englobant en plus du cas classique d'un opérateur intégral défini par un noyau continu, beaucoup d'autres opérateurs définis dans les espaces fonctionnels les plus importants.
>
> [Grothendieck 1952, p.73]

Et cela explique, étend et précise le théorème des noyaux de Schwartz (explique car montre que cela vient d'une propriété de nucléarité vérifiée par les espaces de distributions ; étend car cette propriété est vérifiée par une classe très large d'espaces fonctionnels ; précise car met le doigt sur la propriété topologique en jeu) :

> Du point de vue du travail actuel, la plus importante application des produits tensoriels topologiques est la théorie des *espaces nucléaires*. On y parvient à explique, à généraliser de façon étendue, et à préciser en même temps le fameux « théorème des noyaux » de L. Schwartz, et de plus on trouve des propriétés nouvelles jusque dans les espaces les plus classiques.
>
> [Grothendieck 1952, p.74]

Grothendieck définit ainsi les espaces nucléaires :

> [U]n espace localement convexe est dit *nucléaire*, si pour tout espace localement convexe F, l'application canonique de $E\widehat{\otimes}F$ dans $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ est un isomorphisme vectoriel topologique du premier espace sur le second (ou, ce qui revient au même, si ces deux espaces induisent la même topologie sur $E \otimes F$.
>
> [Grothendieck 1952, p.100]

Cette définition vient caractériser la propriété, vérifiée notamment par les espaces de distributions, qui donne le théorème des noyaux. Grothendieck explicite la propriété de ces espaces à l'origine de sa définition d'espace nucléaire :

> Par exemple, l'essentiel du « théorème des noyaux » de L. Schwartz affirme que l'espace des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m) \times \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ est identique à l'espace des formes bilinéaires définies par les distributions à support compact sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ [51] . Ces dernières sont a priori les formes linéaires continues sur $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n)$, or on voit directement (cas particulier du lemme ci-dessus) que $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n)$ s'identifie à l'espace
>
> $$E\widehat{\widehat{\otimes}}F = \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s) \text{ où } E = \mathcal{E}(\mathbf{R}^m) \text{ et } F = \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$$
>
> donc a priri, les distributions sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ sont les formes bilinéaires *intégrales* (chap. 1, n°8) sur $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m) \times \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. Le théorème des noyaux, qui dit qu'on obtient ainsi *toutes* les formes bilinéaires continues sur $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m) \times \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, i.E. que l'application transposée de l'application canonique de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m)\widehat{\otimes}\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m)\widehat{\widehat{\otimes}}\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ est une application *sur*, signifie donc aussi (par un théorème classique de la théorie des espaces $(\mathcal{F})$) que l'on a en fait
>
> $$\mathcal{E}(\mathbf{R}^m)\widehat{\otimes}\mathcal{E}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{E}(\mathbf{R}^m)\widehat{\widehat{\otimes}}\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$$

50. A propos de ce résumé, Pierre Cartier le juge plus important et surtout plus connu que sa thèse elle-même. Il écrit ainsi [Cartier 1998, p.26] : « Rappelons seulement que Grothendieck s'intéressa de 1950 à 1957 à l'Analyse Fonctionnelle, que sa thèse [Grothendieck 1955] est un monument, mais que l'article qui a eu le plus d'influence dans la suite fut sans doute [Grothendieck 1952], point de départ de la théorie géométrique des espaces de Banach. »

51. Les noyaux compacts sont définis par Schwartz [Schwartz 1952a, p.225-226]

En fait, la démonstration de ce théorème montre même que

$$\mathcal{E}(\mathbf{R}^m)\widehat{\otimes}F = \mathcal{E}(\mathbf{R^m})\widehat{\widehat{\otimes}}F$$

(espace isomorphe, quand F est complet, à l'espace des applications indéfiniment différentiables de $\mathbf{R}^m$ dans F) pour *tout* espace localement convexe F.

On voit donc que de façon générale, *l'assertion que l'on a $E\widehat{\otimes}F = E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ pour deux espaces donnés E et F, doit être regardé comme un équivalent algébrico-topologique du théorème des noyaux de L. Schwartz.* Dans la suite nous étudions les espaces E, tels que $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m)$, pour lesquels on ait $E\widehat{\otimes}F = E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ pour *tout* espace localement convexe F : ce sont les *espaces nucléaires.*

[Grothendieck 1952, p.99-100]

Mais que sont ces notations ? On ne reconnaît pas l'énoncé donné par Schwartz ! Aucune trace, en effet, de la notation intégrale avec laquelle Schwartz énonce son théorème des noyaux : le résultat est transformé en terme d'égalité topologique de deux espaces. On trouve dans la figure (4.2) les différentes topologies définies par Grothendieck.

Grothendieck travaille sur des espaces vectoriels topologiques généraux, dont les espaces de distributions sont des cas particuliers, ou des exemples illustratifs.

La propriété des espaces nucléaires – c'est ce qu'affirme le théorème des noyaux – les rend proche des espaces de dimension finie, ainsi que le note Dieudonné :

Sa plus remarquable découverte fut celle des espaces nucléaires, obtenue par comparaison entre deux topologies possibles sur des produits tensoriels ; cette catégorie d'espaces, jusque là totalement insoupconnée, se révéla être la plus proche possible, par ses agréables propriétés, des espaces de dimension finie ; et Grothendieck montra que les beaux résultats connus pour les espaces de distributions (notamment le fameux "théorème des noyaux" de Schwartz) provenaient tout simplement de ce que ces espaces sont nucléaires.

[Dieudonné 2007, p.2]

ainsi que Trèves :

Le théorème des noyaux de Schwartz affirme une propriété assez miraculeuse des espaces de distributions habituels, à savoir que d'un certain point de vue ils ressemblent plus à des espaces euclidiens de dimension finie qu'à des espaces de Banach de dimension infinie.

[Trèves 2003, p.117]

Par ailleurs, ces espaces sont utilisés en physique, en probabilités, ou encore ouvrent la voie à la géométrie dans les espaces de Banach [52]. Cartier écrit ainsi

Dans sa thèse, écrite en 1953 et publiée en 1955, il crée de toutes pièces une théorie des produits tensoriels pour les espaces de Banach et leurs généralisations, et invente la notion d'« espace nucléaire ». Cette notion, créée pour rendre compte d'un important de Laurent Schwartz sur les opérateurs fonctionnels (le « théorème des noyaux »), sera exploitée par l'école russe autour de Gelfand, et sera une des clés de l'application des techniques de probabilités aux problèmes de physique Mathématique (mécanique statistique, théorie « constructive » des champs quantiques). Il quittera ce sujet, après un article, dense et profond, sur les inégalités métriques, qui alimentera les recherches de toute une école (G. Pisier et ses collaborateurs) pendant 40 ans.

[Cartier 2000, p.2]

Et Dieudonné présente les applications qui ont suivi :

52. Outre les citations données ici, cela est aussi mentionné par [Godefroy 2011].

$E\widehat{\otimes}F$

C'est ici la première topologique mise par Grothendieck sur le produit tensoriel $E \otimes F$.
Il la construit donc au début de son travail , à l'aide du théorème suivant [Grothendieck 1952, p.76] :

Théorème 4.2.1. *On peut munir $E \otimes F$ d'une topologie localement convexe et d'une seule telle que pour tout espace localement convexe G, les applications bilinéaires continues $E \times F \to G$ correspondent aux applications linéaires continues $E \otimes F \to G$.*

On l'appelle la topologie de produit tensoriel projectif. On note $E\widehat{\otimes}F$ le complété pour cette topologie.

$E\widehat{\widehat{\otimes}}F$

On considère cette fois $E \otimes F$ comme un espaces de formes bilinéaires sur $E' \times F'$, on le munit de la topologie de la convergence biéquicontinue (ie la topologie ed la convergence uniforme sur les produits d'une partie équicontinue de E' par une partie équicontinue de F'). Le complété de $E \otimes F$ pour cette topologie sera noté $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$.
[Grothendieck 1952, p.81-82]

$\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$

Espace des formes bilinéaires séparément continues sur $E'_s \times F'_s$, où E'_s et F'_s sont les duals faibles de E et F.

Dual de $E\widehat{\otimes}F$

Le dual de $E\widehat{\otimes}F$ est par définition l'espace des formes bilinéaires continues sur $E\times F$, noté $B(E,F)$.

Dual de $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$

Pour le caractériser, on définit les formes bilinéaires intégrales, à partir des caractérisations suivantes :

Théorème 4.2.2. *Soit E et F deux espaces localement convexes et v une forme bilinéaire séparément continue sur $E \times F$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $u \mapsto < u, v >$ est une forme linéaire sur $E \otimes F$ continue pour la topologie induite par $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$

b) v est contenue dans l'enveloppe disquée fermée dans $\mathcal{B}_s(E,F)$ (espace $\mathcal{B}(E,F)$ muni de la topologie de la convergence simple) d'un ensemble $M \otimes N$ où M est une partie équicontinue deE' et N est une partie équicontinue de F'

c) Il existe une mesure μ sur l'espace produit d'une partie équicontinue faiblement compacte M de E' par une partie équicontinue faibement compacte N de F' telle que :

$$v = \int_{M\times N} x' \otimes y' \mathrm{d}\mu(x', y')$$

d) Il existe un espace compact muni d'une mesure positive μ de norme $<= 1$, une application linéaire continue α de E dans $L^\infty(\mu)$

Si on note $J(E,F)$ l'espace des formes bilinéaires intégrales (qui vérifient les 4 conditions équivalentes précédentes), alors on a (d'après a)) :

$$E\widehat{\widehat{\otimes}}F = J(E,F)$$

FIGURE 4.2 – Liste de topologies définies par Grothendieck, issues de [Grothendieck 1952]

Depuis lors, les espaces nucléaires ont trouvé bien d'autres applications, notamment en Calcul des Probabilités. Une autre idée tout b fait nouvelle est l'étude des applications linéaires continues entre espaces localement convexes qui se factorisent à travers un espace $L^p(\mu)$ pour une mesure μ convenable. Grothendieck leur a consacré un mémoire spécial intitulé « Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques », qui est devenu la source de toute une théorie consacrée à l'étude de la géométrie des espaces de Banach.

Ainsi, en moins de trois ans était créée une œuvre dont l'impact sur la théorie des espaces vectoriels topologiques ne peut, à mon avis, être comparé qu'à celui des travaux de Banach.

Mais déjà, après un cours donné à Sao Paulo en 1953, Grothendieck va s'en éloigner.

[Dieudonné 2007, p.2]

Un style, une généralisation à l'extrême

On a vu plus haut que le travail de Grothendieck permet une formulation, dans un cadre général, de la théorie de Fredholm. Le point d) de l'introduction de son résumé expose plus précisément en quoi consiste la généralité des notions qu'il introduit :

De façon générale, il me semble que les notions de produit tensoriel topologique sont tout indiquées pour fournir un *langage* suggestif et maniable, qui a intérêt à être utilisé dans beaucoup de situations en Analyse fonctionnelle, d'autant plus que nous avons à notre disposition des théorèmes (dont certains non triviaux) pour tirer profit de ce langage.

[Grothendieck 1952, p.74]

Dieudonné reconnaît, dans la thèse de Grothendieck, un style propre –sa « patte »—- qu'il garde ensuite, qu'il caractérise par la recherche de définitions naturelles, et de théorèmes dont la portée est la plus générale possible –des contre-exemples en précisant la portée précise :

Il y abordait un sujet entièrement nouveau, l'étude des topologies « raisonnables » sur le produit tensoriel de deux espaces localement con- vexes ; seul le cas des espaces de Banach avait fait l'objet de travaux antérieurs.

Dans l'étude aussi originale que profonde qu'il en fit, on reconnait déjà sa « patte » ; bien qu'à cette époque on ne parlât guère encore de catégories, c'est déjà leur esprit qui domine, dans la recherche constante de définitions « naturelles » et de propriétés « fonctorielles », qui deviendra systématique dans ses travaux ultérieurs. Mais à côté de grands théorèmes généraux, c'est à chaque instant qu'apparait un ingénieux contre-exemple, pour délimiter exactement la portée de ces théorèmes.

[Dieudonné 2007, p.2]

La recherche de la généralité se retrouve donc dans le choix des définitions, données par Grothendieck. C'est le cas notamment de la définition d'espace nucléaire qu'il choisit, et justifie ainsi dans l'introduction de sa thèse :

Ces recherches avaient pour origine d'éclaircir et de généraliser les propriétés très spéciales que semblaient posséder certains espaces de fonctions indéfiniment différentiables en vertu du « théorème des noyaux » de L. Schwartz (...) Mais la bonne formulation de la notion générale d' « espace nucléaire » correspondant à ces propriétés, était encore assez cachée.

[Grothendieck 1955, p.3]

Une thèse exposée au séminaire Schwartz

La première année du séminaire Schwartz 1953-54 est presque entièrement consacrée à l'étude de la thèse de Grothendieck. Dès cette date d'ailleurs, le séminaire parisien de Schwartz est publié (ronéotypé).

Année 1953-1954 PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES NUCLEAIRES. (tous exposés sont de Laurent Schwartz)
- Introduction (1p.)
- Produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques Exposé No. 1, 3 p.
- Cas des espaces normés. Produit tensoriel d'applications linéaires Exposé No. 2, 5 p.
- N° 1. Rappels sur les espaces L^p Exposé No. 3, 4 p.
- L'espace $L^1\widehat{\otimes}E$ (suite et fin) Exposé No. 4, 8 p.
- L'espace $L^p(\mu)$ associé à une famille de mesures ($1 \leq p < \infty$) Exposé No. 5, 5 p.
- Suite de la démonstration (cf exposé n° 5) Exposé No. 6, 5 p.
- I. Divers espaces normés associés à un espace localement convexe séparé E Exposé No. 7, 8 p.
- Le produit tensoriel $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ comme espace d'applications linéaire Exposé No. 8, 7 p.
- L'espace $C(K; E)$ Exposé No. 9, 3 p.
- Sur certains espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles Exposé No. 10, 7 p.
- Les opérateurs de convolution. Le théorème des noyaux Exposé No. 11, 7 p.
- La théorie des opérateurs nucléaires Exposé No. 12, 7 p.
- Caractérisation des opérateurs nucléaires dans certains cas particuliers Exposé No. 13, 5 p.
- Généralités sur les problèmes d'approximation et de biunivocité Exposé No. 14, 9 p.
- Exemples d'espaces vérifiant la propriété d'approximation Exposé No. 15, 10 p.
- Formes bilinéaires intégrales et opérateurs intégraux Exposé No. 16, 5 p.
- Espaces nucléaires Exposé No. 17, 6 p.
- Espaces nucléaires. Propriétés de permanence et exemples Exposé No. 18, 5 p.
- Propriétés de $E\widehat{\otimes}F$ pour E nucléaire Exposé No. 19, 4 p.
- Distributions à valeurs vectorielles Exposé No. 20, 6 p.
- Les distributions sommables Exposé No. 21, 7 p.
- A. Définition intégrale de la convolution de deux distributions Exposé No. 22, 7 p.
- Accouplement des distributions à valeurs vectorielles Exposé No. 23, 6 p.
- Opérations algébriques sur les distributions à valeur vectorielle. Théorème de Künneth Exposé No. 24, 6 p.

FIGURE 4.3 – Liste des exposés du séminaire Schwartz 1953-54

Le titre du séminaire, « Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. », précise l'orientation générale du séminaire : il s'agit de topologie. Ainsi que l'introduction le précise, il s'agit d'étudier la thèse de Grothendieck et de la présenter :

> Ce séminaire est essentiellement consacré à l'étude de la Thèse de M. Alexandre GROTHENDIECK : « Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires », à paraître aux Mémoires de l'American Mathematical Society. (Voir aussi un résumé de cette thèse (...)
>
> La plupart des exposés sont donc tirés directement de ce travail, avec seulement certaines modifications dans l'ordre ou dans les méthodes. Un petit nombre d'exposés (n° 9, 10, 11, 20, 21, 22, 23, 1° moitié du 24) sont des résumés d'un travail personnel qui paraîtra ultérieurement. (...)
>
> [Schwartz 1954b, Introduction]

4.2.2 La « EVT-isation » du théorème des noyaux et de la théorie des distributions

Nous venons de voir que Laurent Schwartz s'est beaucoup impliqué dans la compréhension et la diffusion de la thèse de Grothendieck, notamment en organisant son séminaire en 1953-54 pour la présenter. Il écrit que ce séminaire a pour but principal de présenter les travaux de son thésard, mais que certains exposés contiennent ses travaux personnels. C'est le cas notamment de son théorème des noyaux, ainsi que de la preuve qu'il en donne.

Il publie ensuite plusieurs articles, où figure cette preuve -un peu différemment, étant donné le statut de l'article, qui est différent de celui du séminaire, même publié.

Les articles ultérieurs, dans lesquels cette preuve est présente, sont très fortement modelés par la théorie nouvellement introduite par Grothendieck. Schwartz écrit d'ailleurs qu'en un sens, Grothendieck lui avait joué un mauvais tour, et qu'il était en quelque sorte responsable des années passées par Schwartz à rédiger sa théorie des distributions à valeurs vectorielles [53] ouvrage qui sera ensuite très largement critiqué, pour sa généralité qui le rend difficile d'application.

Énoncés ultérieurs du théorème des noyaux. Théorie des distributions à valeurs vectorielles.

Schwartz publie tout d'abord un très long article intitulé « Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles ». Ce travail s'ouvre par ces mots :

> Le présent mémoire est une étude systématique des espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, à la lumière de la notion de produit tensoriel topologique, développée par Grothendieck. Bien que beaucoup de démonstrations soient relativement faciles, il nous a paru utile de les écrire in extenso, car toutes les fois qu'interviennent les espaces vectoriels topologiques, il y a des tels « pièges » qu'une grande rigueur est nécessaire ; d'autre part il nous semble que le langage des fonctions à valeurs vectorielles, encore trop peu utilisé, est essentiel en analyse moderne, et apporte de considérables simplifications d'écriture et de démonstration. (...) Nous terminons ce mémoire par une démonstration du théorème des noyaux, que nous approfondirons ultérieurement.
>
> [Schwartz 1955b, p.88]

Il s'agit donc de la première preuve publiée dans un article de recherche, du théorème des noyaux. Schwartz a en effet exposé et rédigé la preuve dans son séminaire, mais la publication d'un exposé a un statut différent d'un article de recherche.

Schwartz consacre la dernière partie de son article (p.138-145) à la « Représentation d'applications linéaires continues par des noyaux ». Regardons une image de sa présentation des « noyaux » (il s'agit de « noyaux-distributions », qu'il nomme simplement « noyaux ») [Schwartz 1955b, p.138] :

---

53. Il écrit ainsi :

> Dans une certaine mesure, il me joua un mauvais tour : enhardi par sa thèse, disposant des produits tensoriels topologiques, je voulus traiter les distributions à valeurs vectorielles dans le cadre le plus général, y consacrant trop d'énergie et de temps.
>
> [Schwartz 1997, p.294]

> **Représentation d'applications linéaires continues par des noyaux.**
> Soit $N_{x,y} \in \mathbf{D}'_{x,y}$ une distribution sur $X^h \times Y^k$. On l'appellera aussi un noyau. Elle définit une forme linéaire continue sur $\mathbf{D}_{x,y}$ donc a fortiori une forme bilinéaire hypocontinue relativement aux parties bornées sur $\mathbf{D}_x \times \mathbf{D}_y : (u, v) \to N_{x,y} \, . \, u(x)\, v(y)$. Elle définit donc une application linéaire continue de $\mathbf{D}_y$ dans $\mathbf{D}'_x$ fort par:
> (4.8) $v \to \Phi(v) = N \cdot v$, avec, pour $u \in \mathbf{D}_x$, $(N \cdot v)_x \, . \, u(x) = N_{x,y} \, . \, u(x)v(y)$.
> Naturellement elle définit aussi une application linéaire continue de $\mathbf{D}_x$ dans $\mathbf{D}'_y$ fort, transposée de la précédente ;
> (4.9) $u \to {}^t\Phi(u) = u \cdot N$, avec pour $v \in \mathbf{D}_y$, $(u \cdot N)_y \, . \, v(y) = N_{x,y}\, u(x)\, v(y)$.
> Le "théorème des noyaux", que nous démontrerons plus loin, dit que réciproquement toute application linéaire continue de $\mathbf{D}_y$ dans $\mathbf{D}'_x$ faible peut être définie par un noyau N (évidemment unique, puisqu'alors la

On remarque qu'il n'écrit plus le théorème dans une représentation intégrale comme dans le premier énoncé [Schwartz 1952a]. Par ailleurs, lorsqu'il démontre des cas particuliers de ce théorème, avant de donner la démonstration du résultat général, il utiliser le « théorème 3 », qui est un résultat de topologie, utilisant les travaux de Grothendieck. Voici une image [Schwartz 1955b, p.127] :

> **Théorème 3.** Pour qu'une application linéaire Φ de E' dans $\mathbf{H}^m$ soit une application $L_{\vec{\varphi}}$: $\vec{e}' \to \langle \vec{\varphi}, \vec{e}' \rangle$, $\vec{\varphi} \in \bar{\mathbf{H}}^m(E)$, il faut et il suffit qu'elle soit C-continue.
> Les applications $\vec{\varphi} \leftrightarrow L_{\vec{\varphi}} \leftrightarrow {}^tL_{\vec{\varphi}}$ établissent des isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques entre $\bar{\mathbf{H}}^m(E)$, $\mathbf{L}_\varepsilon(E'_c\,; \mathbf{H}^m)$ et $\mathbf{L}_\varepsilon(\mathbf{H}'^m_c\,; E)$.

Même s'il utilise les travaux de Grothendieck, Schwartz n'énonce cependant pas son résultat en terme d'espaces nucléaires. On remarque ainsi que Schwartz transforme à la fois ses travaux et ceux de Grothendieck, donnant une écriture hybride entre les deux. Voici ensuite l'énoncé du théorème des noyaux [Schwartz 1955b, p.143] :

> **Le théorème général des noyaux.** (39)
> Bien que le théorème général des noyaux n'ait pas sa place normale ici, car il rentre dans une théorie plus générale que nous exposerons ailleurs (en liaison avec la théorie des espaces nucléaires développée par Grothendieck), nous en donnerons une démonstration.
> **Théorème des noyaux.** Toute application linéaire continue de $\mathbf{D}_y$ dans $\mathbf{D}'_x$ faible peut être définie comme l'application $v \to N \cdot v$ associée à un noyau convenable N, déterminé d'une manière unique.

La démonstration suit l'énoncé du théorème (p. 143-145). La notation intégrale a disparu, mais l'énoncé mentionne toujours le « noyau ».

La « Théorie des distributions à valeurs vectorielles » est développée de manière générale dans [Schwartz 1957], [Schwartz 1958d]. [54]

> Le présent ouvrage étend aux distributions à valeurs vectorielles les principales propriétés des distributions ordinaires ou distributions à valeurs scalaires.
>
> [Schwartz 1957, p.1-3]

Il précise, que suivant les résultats, « les théorèmes sont ceux auxquels on s'attend, les démonstrations se déroulent de façon naturelle » ; ou bien les opérations sont « beaucoup plus difficiles ; elles ne sont possibles que moyennant des hypothèses supplémentaires, souvent inattendues. » Schwartz avertit le lecteur que « les démonstrations sont généralement longues et pénibles » ; mais néanmoins « les théorèmes obtenus sont des outils assez fort, et permettent de résoudre simplement beaucoup des problèmes. »

Il écrit les sources et applications :

> La théorie des distributions à valeurs vectorielles a été déjà exposée dans un séminaire [55], mais les démonstrations y ont été très écourtées, et sont, dans la plupart des cas, insuffisantes. Les produits tensoriels topologiques de Grothendieck y jouent un rôle essentiel. Parmi les principales applications déjà publiées, nous signalerons, outre la thèse de Bruhat déjà mentionnée, celle de Lions ainsi que les travaux ultérieurs du même auteur. La physique théorique utilise constamment des distributions à valeurs dans des espaces d'opérateurs (sous le nom de champs).
>
> [Schwartz 1957, p.3]

Il énonce le théorème des noyaux [Schwartz 1957, p.93] :

> **Le théorème des noyaux.**
>
> Proposition 25. — *(Théorème des noyaux). $\mathfrak{D}'_{x,y}$ est identique, algébriquement et topologiquement, à $\mathfrak{D}'_x(\mathfrak{D}'_y) = \mathfrak{D}'_x \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathfrak{D}'_y$.*

Cette fois, l'énoncé est encore plus différent de l'énoncé original. Il s'agit une égalité algébrique et topologique de deux espaces ; le théorème ne mentionne pas le noyau. L'énoncé fait intervenir la topologie ε sur le produit tensoriel (introduite par Grothendieck).

On voit ainsi que les énoncés du théorème des noyaux, et plus généralement les mémoires sur la théorie des distributions écrits par Schwartz, portent la marque des travaux de Grothendieck sur les produits tensoriels topologiques.

Critiques

Cette théorie des distributions à valeurs vectorielles est critiquée pour sa complexité. Ainsi Choquet écrit-il :

> Se sachant moins bon stratège que tacticien, il s'est parfois fixé un objectif et l'a poursuivi avec obstination sans avoir examiné avec soin la validité de son choix. Ainsi par exemple (ce qu'il m'a confié), il a perdu un temps considérable à construire une

54. Il s'agit de deux articles, publiés dans les *Annales de l'Institut Fourier*, mais Schwartz écrit qu'il faut le considérer comme un livre.

> Ce travail, bien que paraissant dans un périodique, a le caractère d'un livre. Il n'est absolument pas destiné à être lu de façon continue, mais plutôt à être consulté ; il contient l'énoncé des conditions dans lesquelles on a le droit de faire, avec les distributions vectorielles, les diverses opérations qu'on souhaite naturellement faire.

En pratique, dans les bibliothèques, on trouve ces articles – des tirés à part – reliés sous forme de livres.

55. [Schwartz 1954b, Exposés 20 à 24]

> théorie des distributions à valeurs vectorielles, si complexe qu'elle s'est ensuite révélée inutilisable.
>
> [Choquet 2004]

Malgrange remet en cause le rôle des espaces vectoriels topologiques et leur place dans la théorie des distributions [56] :

> Quel a été vraiment le rôle des espaces vectoriels topologiques dans toute cette affaire ? Cela se discute, et je suis de ceux qui pensent que Schwartz a eu tendance à exagérer leur importance. En fait, seuls un petit nombre de théorèmes, dus essentiellement à Banach, ont été d'usage courant dans les travaux sur et autour des distributions auxquels je fais allusion plus haut.
>
> [Malgrange 2004a, p.99]

Conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons montré comment la transformation du théorème des noyaux en propriété de nucléarité de certains EVT entraîne une confrontation beaucoup plus importante des distributions avec les EVT ; et même aboutit à une transformation de la théorie des distributions elle-même et à la création de la théorie des distributions à valeurs vectorielles. La transformation du théorème des noyaux passe par des pratiques d'écriture particulières, les travaux de Grothendieck, mais aussi ceux de Bourbaki, Dieudonné et Schwartz mentionnés au premier chapitre. Elle aboutit à la notion d'espaces nucléaires, et à la considération de topologies nouvelles. Les objets considérés ne sont plus des distributions, que l'on représente par des noyaux, mais des espaces de distributions, dont on donne une propriété structurelle de nucléarité. En développant la théorie des distributions à valeurs vectorielles, Schwartz intègre en quelque sorte les pratiques d'écriture autour des EVT – notation et vocabulaire, objets considérés notamment – dans sa théorie des distributions. Ce faisant, il s'isole d'autres collectifs plus proches de la théorie des distributions originelle. On peut expliquer les pratiques d'écriture de la partie suivante, autour d'Hörmander, par une volonté de se saisir de la théorie des distributions sans les pratiques d'écriture collectives autour des EVT.

4.3 Les distributions sans topologie chez Hörmander

Le rôle d'Hörmander dans la diffusion de la théorie des distributions, aperçu au chapitre 2, est l'une des raisons de l'analyse de ses travaux ici. On se rappelle en effet qu'Hörmander a choisi de présenter la théorie des distributions dans ses livres, alors que Schwartz juge que celle-ci étant déjà connue, il n'est plus nécessaire d'en donner un exposé introductif [57].

Néanmoins, Hörmander ne s'est pas particulièrement intéressé au théorème des noyaux, et la première mention qu'il en fait n'apparaît que tardivement, dans un livre, et pas dans un article de recherche. Et pourtant, regarder ce livre, l'énoncé et la preuve qu'il donne du théorème des noyaux, dans les détails techniques, permet de saisir les enjeux de la présentation des distributions qu'il a adoptée dans son livre. Ce choix est à l'opposé des travaux de Grothendieck, puisqu'Hörmander présente la théorie des distributions sans aucune topologie ! En un sens, Hörmander veut épargner l'apprentissage de toutes ces

56. On a parlé au chapitre 1 des espaces vectoriels topologiques, notamment chez Bourbaki, et de l'influence jouée par Schwartz et les besoins de la théorie des distributions, dans le volume correspondant des *Éléments de Mathématique*.

57. Le livre d'Hörmander est paru en 1963 [Hörmander 1963] puis augmenté en 4 volumes, dont le premier paraît en 1983 [Hörmander 1983]. On cite une réédition de 2003 [Hörmander 2003] ici.

notions à son lecteur, en argumentant qu'elles ne sont pas nécessaires à la compréhension et l'utilisation de la théorie des distributions.

4.3.1 Retour sur des preuves simplifiées du théorème des noyaux

Avant de présenter le théorème des noyaux chez Hörmander, regardons trois articles isolés, qui proposent chacun une preuve du théorèmes des noyaux de Schwartz. Le terme « isolé » veut signifier que ce sont les premières, et les seules, preuves de ce théorème qui font l'objet d'un article pour elles-mêmes. Voici donc ces trois preuves :

- 1956 Ehrenpreis « On the theory of kernels of Schwartz » [Ehrenpreis 1956]
- 1960 Gask « A proof of Schwartz's kernel theorem » [Gask 1961]
- 1961 Bogdanowicz « A proof of Schwartz's theorem on kernels » [Bogdanowicz 1961]

L'article d'Ehrenpreis donne une « démonstration très élémentaire » du théorème, selon Schwartz qui en est rapporteur aux *Mathematical Reviews* (Schwartz, MR0082637). L'idée se trouve dans l'utilisation de séries de Fourier. Il donne une expression explicite de la topologie utilisée. Son résultat peut se généraliser. [Ehrenpreis 1956] Il s'agit d'une simplification de la démonstration du théorème des noyaux. Voici le théorème :

Theorem 1. *Let $t: {}_2\mathfrak{D}' \to J$ be the map which assigns to each $S \in {}_2\mathfrak{D}'$ the $L \in J$ such that S is a kernel representing L. Then t is a topological isomorphism onto.*

Et voici surtout son explication :

any continuous linear map of $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$; then L. Schwartz has shown (see [3] for a summary of Schwartz' results, the details will appear in a series of articles in the Journal D'Analyse (Jerusalem)) that L can be represented by a kernel, i.e. there exists a distribution S on $R \times R$ so that we may write (symbolically)

$$(Lf)(x) = \int S(x, y) f(y) dy$$

for any $f \in \mathfrak{D}$. The purpose of this paper is to give a simple proof of this fact and to prove the following result: Let us give the space of continuous linear mappings of $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ the compact-open topology (see [1]); then this topology is the same as that of the space ${}_2\mathfrak{D}'$.

La preuve [58] de Gask repose sur les mêmes idées, mais il sépare le résultat d'existence et d'unicité de l'égalité topologique, ce qui en rend la preuve plus simple à suivre. D'un théorème, il en fait deux ! Hörmander, lui, ne va garder que la première partie. [Gask 1961]

58. Ces preuves ont été présentées en détail dans mon mémoire de Master 2 sur le théorème des noyaux [Paumier 2009].

THEOREM 1. *For any separately continuous functional A on $\mathscr{D}(O_x) \times \mathscr{D}(O_y)$ there exists precisely one distribution T in $\mathscr{T}$ such that*

$$(\Lambda T)(f,g) = \langle T, f(x)g(y)\rangle = A(f,g) \tag{8}$$

for all (f,g) in $\mathscr{D}(O_x) \times \mathscr{D}(O_y)$.

THEOREM 2. *The mapping Λ defined by* (8) *is a linear homeomorphism.*

Bogdanowicz, par contre, ne démontre pas vraiment le théorème de Schwartz, mais un résultat plus général. Il dit démontrer un cas particulier du théorème de Grothendieck. Ce qu'il démontre ressemble plus à la nucléarisé de Grothendieck, qu'il cite d'ailleurs. Mais il donne une preuve dans un cas particulier usuel ([Bogdanowicz 1961, p.77]) :

> The purpose of this paper is to give a simple proof of Grothendieck's theorem for a special case which often occurs in applications. The proof is based on elementary propertys of (F)-spaces $((B_0)$-spaces in the Polish terminology) and (LF)-spaces.

Il commence par lister les propriétés sur les espaces vectoriels topologiques dont il va se servir, avant de donner sa démonstration.

THEOREM. *For every bilinear functional $B(\varphi, y)$ on the space $D(\Omega)\times Y$ which is continuous with respect to each variable separately there exists one and only one linear continuous functional T on the space H such that*

$$B(\varphi, y) = T(\varphi \cdot y) \quad \text{for all} \quad \varphi \in D(\Omega) \text{ and } y \in Y. \tag{A}$$

Avec les explications de ce qui est démontré, en se référant aux travaux de Schwartz et de Grothendieck.

Since every such functional corresponds to a linear continuous map L of $D(\Omega_1)$ into $D'(\Omega_2)$ defined by

$$(L\varphi_1)(\varphi_2) = B(\varphi_1, \varphi_2),$$

equality (1) may be written symbolically in the form

$$L(\varphi_1)(x_2) = \int T(x_1, x_2)\varphi_1(x_1)dx_1 \quad \text{for any} \quad \varphi_1 \in D(\Omega_1) \tag{2}$$

and therefore Schwartz's theorem may be interpreted as a theorem concerning representation of linear continuous operations by kernels. The theorem is a special case of a general theorem of A. Grothendieck on topological tensor products.

The purpose of this paper is to give a simple proof of Grothendieck's theorem for a special case which often occurs in applications. The proof is based only on elementary properties of (F)-spaces $((B_0)$-spaces in the Polish terminology) and (LF)-spaces.

On peut se rapporter au tableau en annexe M, p.357 pour comparer les différents énoncés proposés par ces auteurs.

4.3.2 Le théorème des noyaux d'Hörmander

Il s'agit d'une autre preuve assez simple du théorème des noyaux, qui est contenue dans son livre [Hörmander 2003].

Il y donne les raisons pour lesquelles la topologie est quasiment absente de sa présentation des distributions [Hörmander 2003, p.53] :

> The topology in $\mathcal{C}_0^\infty(X)$ defined by the semi-norms in the right-hand side of (2.1.3) is the inductive limit of the topology in $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ when the compact set K increases to X, so it is a $\mathcal{LF}$ topology (see [Dieudonné et Schwartz 1949]). We have avoided this terminology in order not to encourage the once common miscunception that familiarity with $\mathcal{LF}$ spaces is esential for the understanding of distribution theory.

Hörmander a reçu la médaille Fields en 1962, pour ses travaux dans la théorie des équations aux dérivées partielles [59]. La théorie des distributions de Schwartz, que Gårding identifie comme un nouvel outil en analyse [60] permet à ce dernier de formuler ou de reformuler un certain nombre de problèmes d'opérateurs différentiels. Les thèses des premiers élèves de Schwartz, Malgrange et Lions notamment, portent sur ce domaine. Mais c'est Hörmander qui en résout le plus grand nombre, et ce dès sa thèse. Son livre paru en 1963 [Hörmander 1963] présente tout cela.

La raison pour laquelle Hörmander choisit de partir de zéro et donner toutes les définitions et théorèmes en théorie des distributions dont il a besoin est exprimée en partie dans la citation donnée plus haut. Il n'a pas besoin d'une compréhension fine de la topologie de $\mathcal{C}_0^\infty(X)$ (ce que Schwartz note $(\mathcal{D})$). On peut voir aussi quelques différences dans l'ordre des définitions introduites. Par exemple, contrairement à Schwartz, Hörmander définit le produit de convolution avant le produit tensoriel des distributions. Cela modifie la preuve de l'unicité dans le théorème des noyaux par exemple (voir Annexe L).

L'énoncé qu'Hörmander donne du théorème des noyaux est nécessairement une forme plus faible que Grothendieck, et même que Schwartz, puisqu'il ne comprend que l'existence et l'unicité du noyau, et plus aucune mention de l'égalité topologique qui l'accompagne. Cet énoncé, dont on voit l'image ici, est plus proche – visuellement et mathématiquement – de l'énoncé original de Schwartz.

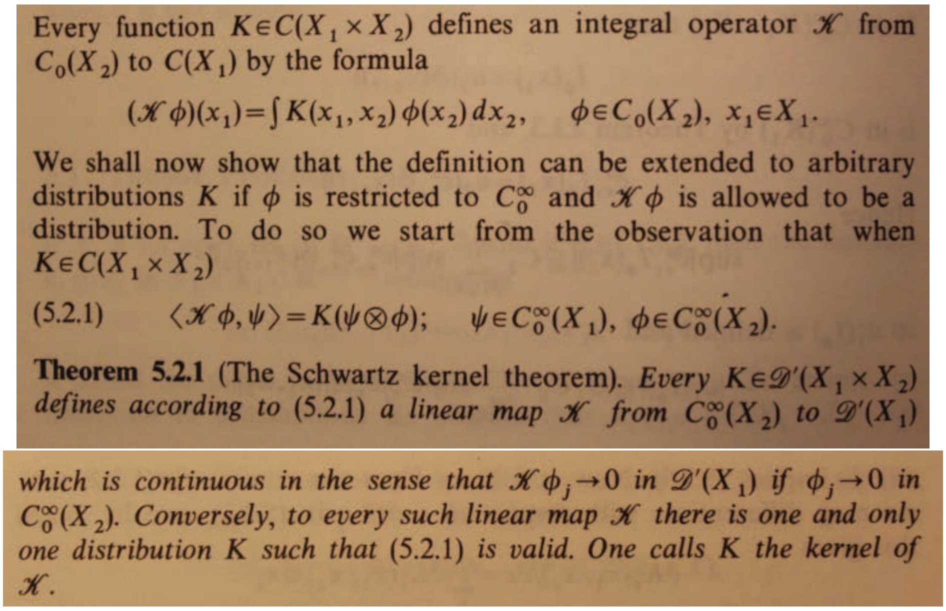
Le principe de la preuve est un peu similaire à celui de la preuve de Gask, à savoir qu'on construit le noyau à la main. Ici, il s'agit de définir une fonction K_ε qui nous donnera le noyau quand on passera à la limite $\varepsilon \to 0$. Dans le cas de Gask, on décompose en série de Fourier et on définit le noyau sur les coefficients de Fourier. L'unique résultat d'analyse fonctionnelle qu'il utilise est une conséquence classique du théorème de Banach-Steinhaus qu'il cite de la manière suivante [Hörmander 2003, p. 129] :

> Every separately continuous bilinear form in a product of a Frechet space is continuous.

La preuve est détaillée en annexe L, p.351.

Ce que traduisent l'énoncé et la preuve du théorème des noyaux par Hörmander, c'est plus généralement une certaine utilisation et compréhension de la théorie des distributions de Schwartz. Hörmander propose une théorie des équations aux dérivées partielles, et résout certains problèmes d'opérateurs différentiels à l'aide des distributions. Les objets « distributions » sont très importants, mais la structure, notamment topologique, des espaces considérés n'est pas essentielle dans son travail. C'est pourquoi il limite les considérations topologiques, afin de rendre la lecture de son texte à la fois plus simple et plus indépendante d'autres textes. On n'a pas besoin ici d'avoir lu et compris l'article de

59. Voir le discours prononcé par Lars Gårding lors de la remise de la médaille Fields [Gårding 1963].
60. « a new tool in analysis », [Gårding 1963, p.xlv].



Every function $K \in C(X_1 \times X_2)$ defines an integral operator $\mathscr{K}$ from $C_0(X_2)$ to $C(X_1)$ by the formula

$$(\mathscr{K}\phi)(x_1) = \int K(x_1, x_2)\,\phi(x_2)\,dx_2, \qquad \phi \in C_0(X_2),\ x_1 \in X_1.$$

We shall now show that the definition can be extended to arbitrary distributions K if ϕ is restricted to C_0^∞ and $\mathscr{K}\phi$ is allowed to be a distribution. To do so we start from the observation that when $K \in C(X_1 \times X_2)$

(5.2.1) $$\langle \mathscr{K}\phi, \psi \rangle = K(\psi \otimes \phi); \qquad \psi \in C_0^\infty(X_1),\ \phi \in C_0^\infty(X_2).$$

Theorem 5.2.1 (The Schwartz kernel theorem). *Every $K \in \mathscr{D}'(X_1 \times X_2)$ defines according to* (5.2.1) *a linear map $\mathscr{K}$ from $C_0^\infty(X_2)$ to $\mathscr{D}'(X_1)$ which is continuous in the sense that $\mathscr{K}\phi_j \to 0$ in $\mathscr{D}'(X_1)$ if $\phi_j \to 0$ in $C_0^\infty(X_2)$. Conversely, to every such linear map $\mathscr{K}$ there is one and only one distribution K such that* (5.2.1) *is valid. One calls K the kernel of $\mathscr{K}$.*

Figure 4.4 – « The Schwartz kernel theorem », [Hörmander 2003, p.128-129]

Dieudonné et Schwartz [Dieudonné et Schwartz 1949] ; ni, plus particulièrement pour le théorème des noyaux, les espaces nucléaires de Grothendieck.

Conclusion

Ce que montre ce chapitre, c'est que le collectif de la vie des mathématiques se trouve dans la technicité des mathématiques elles-mêmes, dans les pratiques d'écriture qui font le théorème. Rentrer dans les détails mathématiques permet donc d'appréhender la vie collective « du point de vue du théorème ». On a ici dépassé l'approche plus directe du chapitre 2 qui présente une conception collective – parfois reconstruite – de l'activité mathématique. Il s'agit ici de voir que l'écriture même du théorème – et non uniquement son contenu – est une pratique collective, et révélatrice de collectifs. L'auteur multiple d'un théorème de mathématiques est encore démultiplié lorsqu'on en considère comme ici différents énoncés. Mais surtout, c'est en recherchant l'auteur du théorème et de sa preuve que l'on a fait réapparaître le collectif. On pourrait alors ajouter à la « fonction-auteur » de Foucault un quatrième « ego », celui qui ne dit pas « je » mais témoigne de l'insertion de l'auteur dans un collectif particulier, nous permettant ainsi de caractériser la relation entre l'individu, auteur, et le collectif. L'étude que nous venons de faire présente un tableau de la vie collective des mathématiques en son acception la plus technique et même visuelle, dépassant ainsi une vision unitariste d'un résultat mathématique. L'écriture d'un théorème participe de la vie collective des mathématiques.

On peut relire les quatre premiers chapitres comme donnant une image de la vie collective d'une théorie mathématique, la théorie des distributions que l'on a choisi de suivre, à travers différentes manifestations. L'interaction individu-collectif, celle de Schwartz avec Bourbaki, se modèle autour de cette théorie. D'un côté, on constate que Schwartz est « formé » par Bourbaki, mais, conjointement, les besoins qu'il exprime pour développer sa théorie, plus précisément les résultats d'espaces vectoriels topologiques qui lui sont nécessaires, impactent les rédactions de ce sujet par Bourbaki. Le second chapitre aborde la réception de la théorie des distributions à travers son historiographie, et montre que cette dernière participe à la vie collective de cette réception. Les acteurs de la réception, Schwartz lui-même, se saisissent de lieux et de moyens particuliers pour la diffusion de la théorie. Les chapitres 3 et 4 consistent en des incursions très précises dans la théorie des distributions, à savoir les distributions sphériques (tempérées) et le théorème des noyaux. Le chapitre 3 ainsi la réception de la théorie permise par un colloque, celui d'analyse harmonique de Nancy en 1947, dont on montre qu'il est un tremplin dans l'internationalisation de la théorie comme de la carrière de Schwartz. Le chapitre 4 montre que les pratiques d'écriture autour d'un théorème particulier, le théorème des noyaux, sont elles aussi révélatrices de la vie collective des mathématiques en ce sens qu'elles traduisent des enjeux propres à des collectifs différents, dont elles révèlent ainsi certaines caractéristiques.

Nous entrons maintenant dans une seconde temporalité de cette étude, nous éloignant de la réception de la théorie des distributions et des premières années de la carrière de Schwartz. Les chapitres suivants étudient la place de la vie collective des mathématiques dans la longue durée pour Schwartz. Nous nous intéressons à deux formes particulières de la vie collective des mathématiques, le séminaire et le laboratoire, dont allons pouvoir comparer les enjeux avec la forme du colloque présentée au chapitre 3. Le dernier chapitre définit l'engagement mathématicien comme une manière particulière de réinvestir certaines formes de vie collective des mathématiques afin de défendre les droits de l'homme, en tant que mathématiciens.

Chapitre 5

Le séminaire de mathématiques : un lieu d'échanges défini par ses acteurs

> Il ne faudrait tout de même pas imaginer qu'un type qui connaît un sujet ça fait un cours, et un tas de types qui ne connaissent pas un sujet ça fait un séminaire... [1]

En 1902, le journal *L'Enseignement Mathématique* lance son enquête sur les conditions de travail et de vie des mathématiciens [2]. De manière étonnante, le séminaire en est complètement absent, que ce soit dans les questions ou dans les réponses apportées par les nombreux mathématiciens participant à l'enquête. En fait, cela ne surprend guère lorsque l'on sait que le séminaire est absent de la pratique mathématique en France à l'époque.

Si l'on relançait une telle enquête aujourd'hui, le séminaire devrait occuper une place première dans la présentation de l'activité de recherche mathématique [3]. J'en veux pour preuve le survol d'un mois d'annonces mathématiques – et extramathématiques – sur news, la liste de diffusion commune à l'Institut de Mathématiques de Jussieu [4]. Pendant ce mois de janvier 2012, 66 mails ont été envoyés. Presque la moitié, 31 mails, concernent l'annonce d'un séminaire – le mot étant pris pour le moment au sens large. Le reste des mails se répartit entre des informations concernant la communauté mathématique ou la vie interne de l'Institut : boycott de journaux électroniques, annonce concernant le thé de

1. Lettre d'André Weil à Henri Cartan, 14 juillet 1947, in [Audin 2011, p. 242-243]
2. Cette enquête a été présentée plus en détail dans l'introduction.
3. Cela n'est néanmoins pas le cas dans l'enquête réalisée par le sociologue Bernard Zarca [Zarca 2012] dans laquelle le séminaire n'est mentionné qu'au moment d'analyser l'importance que les mathématiciens accordent au « plaisir partagé de l'échange », au même titre que les discussions informelles ou les conférences (p. 280-284). Il existe par contre une étude sociologique uniquement centrée sur un séminaire de mathématiques à Cambridge, celle de Michael Barany et Donald MacKenzie [Barany 2010], [Barany et MacKenzie 2014] qui est mentionnée plus loin.
4. Sur cette liste sont inscrits tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, laboratoire de recherche de mathématiques commun aux universités de Paris VI (Université Pierre et Marie Curie) et Paris VII (Université Denis Diderot), ainsi qu'un très grand nombre d'autres membres, dont il est difficile de connaître l'identité. Les archives sont publiques sur internet, à l'adresse suivante : https ://mail.math.jussieu.fr/tools/pipermail/news/ (page consultée le 7 décembre 2012). Les messages des membres de la liste ne sont pas modérés. Cette recension a été effectuée sur le mois de janvier 2012.

l'Institut, annonce de soutenance de thèse... ou bien en sont un peu plus éloignés : annonce d'élections à l'Université Pierre et Marie Curie, voire commentaires sur l'actualité politique ou encore de nombreux mails de recherche d'appartements (en provenance de chercheurs, doctorants, ou toute autre personne). De ce rapide examen, on voit ressortir très clairement l'importance du séminaire dans la vie de cet Institut.

Commençons par caractériser brièvement ces multiples annonces. Il y a dans cette liste 21 séminaires différents, qui n'en portent pas nécessairement le nom. On trouve les désignations suivantes : groupe de travail, conférence, colloque, colloquium, school, cours, journée, ou encore rencontre. Il s'agit à chaque fois d'un événement mathématique, autour d'un thème et d'un ou plusieurs orateurs, auquel le mail invite les destinataires à participer. Il faut aussi savoir que les séminaires réguliers de l'Institut ne sont pas nécessairement annoncés sur cette liste : chaque équipe organise en son sein un ou plusieurs séminaires, certains chercheurs créent des groupes de travail spécifiques, et les annonces ne sont ensuite envoyées qu'à ceux qui en ont fait la demande – participants réguliers, ou personnes intéressées –. La liste de diffusion n'est alors parfois utilisée qu'au moment de prévenir lorsqu'une nouvelle activité de séminaire est lancée.

Si l'on s'intéresse à la vie mathématique parisienne, le contraste avec le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle est frappant en effet. Ainsi, à Paris en 1912, la seule trace de séminaire mathématique est le cours d'Hadamard au Collège de France. A Paris en 2012, il serait très difficile de dresser une cartographie des centaines de séminaires mathématiques qui ont lieu chaque semaine !

Bien sûr, l'accroissement du nombre de mathématiciens y est pour beaucoup. Mais force est de constater que peu de travaux ont pris le séminaire de mathématiques en France comme objet d'étude historique. Il en existe cependant quelques uns, qui portent sur des séminaires particuliers. Le « séminaire Hadamard » tout d'abord. Initié avant la première guerre mondiale, ainsi que le décrivent Jean-Luc Chabert et Christian Gilain [Chabert et Gilain À paraître] suite à leur étude des archives du Collège de France, il devient officiel en 1920, et est présenté, dans l'étude pionnière réalisée par Liliane Beaulieu dans sa thèse de doctorat [Beaulieu 1989, p.60-65] comme « une tribune internationale en France ». Ce séminaire dure jusqu'en 1937. Ces études le présentent comme le « séminaire Hadamard », ou encore le « cours-séminaire Hadamard » ; mais il n'en a pris le nom qu'a posteriori, baptisé par Hadamard lui-même, quelques années plus tard. Juliette Leloup [Leloup 2009, p.250, 294, 321, 425] analyse l'importance qu'a pu avoir le séminaire Hadamard dans les sujets de thèse et l'apprentissage de nouveaux domaines par les doctorants. Entre les deux guerres, se crée aussi à Paris le séminaire Julia . Beaulieu [Beaulieu 1989, p.133-137] le considère comme étant le « laboratoire d'une équipe restreinte », celui des premiers membres de Bourbaki qui sont à l'origine de sa création. Ce séminaire est publié (ronéotypé) – on peut le trouver dans les bibliothèques parisiennes – et dure de 1933 à 1939. Il est étudié aussi à l'occasion des notes de l'édition de la correspondance Cartan-Weil, rédigées par Michèle Audin [5]. Dans [Herreman 2005], Alain Herreman analyse la réception de deux livres à travers le séminaire Julia. Beaulieu, outre les renseignements factuels, donne une analyse de la place de ces séminaires dans la vie mathématique française ainsi que dans les centres d'intérêt des participants. Elle compare aussi les deux séminaires, et invoque le modèle allemand pour la forme du séminaire Julia. Leloup mentionne rapidement aussi le séminaire Borel, qui a été notamment étudié par Bernard Bru [Bru 2002].

Au début du vingtième siècle, nous assistons donc aux premiers balbutiements du sé-

5. On trouve dans l'index de [Audin 2011] la liste des lettres et des notes mentionnant le séminaire Julia, ainsi d'ailleurs que quelques unes sur le séminaire Hadamard. Michèle Audin est en train de rédiger un ouvrage sur le séminaire Julia, qui devrait paraître en 2014.

minaire, qui va se développer de manière fulgurante après la seconde guerre mondiale – ce que va traduire l'expérience de Schwartz, décrite dans la suite –, pour devenir omniprésent aujourd'hui. Un drôle d'objet historique que le séminaire ! Très rapidement considéré comme évident, voire nécessaire à la structuration de la communauté mathématique, les acteurs ne cherchent néanmoins pas à analyser ce phénomène. Il n'est pas aisé d'en faire l'histoire, parce qu'il laisse peu de traces matérielles, et parce que les traces qu'il laisse – le plus souvent les notes, publiées ou non, des exposés, voire uniquement le programme – donnent peu d'informations sur son rôle structurant dans la vie collective des mathématiques. On trouve par contre de très nombreux récits d'acteurs, dans lesquels ce rôle structurant du séminaire est mis en scène.

Dans la vie mathématique de Schwartz, le séminaire est très présent [6]. Schwartz donne 12 exposés au séminaire Bourbaki entre 1948 et 1971, 10 exposés au séminaire de probabilités de Strasbourg entre 1981 et 1996, 2 exposés au séminaire Jean Leray en 1969-70. Il organise lui-même un séminaire, dit « séminaire Schwartz », entre 1953 et 1961, au cours duquel il donne 45 exposés. Il lance avec Maurey un séminaire d'analyse fonctionnelle, dit « Maurey-Schwartz » ou « séminaire rouge » entre 1969 et 1981, au cours duquel il donne des exposés entre 1969 et 1980 (13 exposés et une conférence en 1969-70 puis 7 exposés répartis les autres années). Il participe aussi au lancement du séminaire d'Equations aux Dérivées Partielles de l'Ecole Polytechnique, qui existe toujours, et porte le nom de « Goulaouic-Schwartz » les premières années. Il y donne 2 exposés en 1969-70. Plus d'une centaine d'exposés donc, et je n'ai mentionné ici que les sources publiées. Il assiste à de très nombreuses autres séances des séminaires mentionnés, ainsi qu'à d'autres séminaires dont il n'est pas possible de faire une liste exhaustive.

Afin de se faire une idée du développement fulgurant du séminaire mathématique parisien dans la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle, j'ai regroupé en annexe N p.359 les séminaires publiés mentionnés par Schwartz. Cela ne constitue pas une liste complète, mais cela permet de se faire une idée de l'évolution du paysage formé par les séminaires autour de Schwartz. Schwartz est tout d'abord témoin de ces débuts du séminaire, car il traverse la période intéressante pour notre étude. Ainsi que l'écrit Guichardet :

> Il aimait dire que, lorsqu'il était plus jeune, le nombre restreint de séminaires existants lui permettait de comprendre ce qui était exposé dans chacun d'eux, mais que cela lui était devenu impossible à cause de la plus grande diversité des sujets traités.
> [Guichardet 2011, p.5]

Non seulement Schwartz a suivi l'évolution du développement du séminaire de mathématiques en France, mais surtout il participe pleinement au séminaire lui-même, ainsi qu'à la construction de la place du séminaire dans la vie mathématique. De plus, Schwartz décrit ainsi la place structurante qu'il accorde au séminaire dans la communauté mathématique, dans la constitution d'une activité de recherche :

> Godbillon pense comme moi que la clé du développement des mathématiques à Panama serait la création progressive d'un climat de recherche dans le corps enseignant universitaire, par l'organisation d'un séminaire annuel. C'est une tâche difficile pour les mathématiciens panaméens, mais si on ne s'y attelle pas un jour, cela ne viendra jamais. Si donc Valdivia vient à Strasbourg ou à Dijon, le principal but du projet ne devrait pas être seulement des contacts et une formation supplémentaire car cela ne permettrait pas de progresser, mais franchement et directement la préparation pour la prochaine année académique d'un séminaire à l'université de Panama. [7]

6. En témoignent la présentation faite par Alain Guichardet dans les *Œuvres scientifiques de Laurent Schwartz, volume II*, intitulée « Laurent Schwartz et les séminaires »[Guichardet 2011], et le grand nombre d'exposés donnés par Schwartz qui y sont publiés (près d'une cinquantaine).

7. Archives de l'Ecole Polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, A.III.2.9 Panama (1980, 1983).

Schwartz accorde ici au séminaire une place primordiale dans la construction d'une activité de recherche. Pour Schwartz, la structuration d'une communauté de recherche au Panama semble passer nécessairement par l'organisation d'un séminaire sur place. Et ceci s'apprend par un contact avec ceux qui ont déjà organisé un séminaire [8].

Qu'est-ce que le séminaire ? S'il ne s'agit pas uniquement de regrouper « un tas de types qui ne connaissent pas un sujet » [9], comme le suggère la citation en exergue de ce chapitre, comment le définir ? D'où vient-il ? Définir, cadrer et historiciser l'objet séminaire est donc l'objet des trois premières parties Après un premier jalon pour définir le séminaire de manière actuelle, nous partons des premières expériences de Schwartz, qui nous montrent que la forme séminaire n'est pas encore identifiée. Nous revenons ensuite sur les idées reçues et les récits des acteurs faisant remonter l'origine du séminaire au séminaire allemand, dont nous donnons les caractéristiques. Nous décrivons ensuite les deux premiers modèles de séminaire de mathématiques à Paris au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

La compréhension du séminaire passe par l'étude des séminaires. Afin de comprendre comment et en quoi le séminaire, objet éminemment collectif, devient constitutif de la vie mathématique, nous allons étudier les séminaires côtoyés par Schwartz, ceux auxquels il assiste, ceux auxquels il parle, ceux qu'il organise. Car c'est véritablement ces trois différents rôles qui nous permettent de caractériser le séminaire de mathématiques.

Car si le séminaire est un lieu où l'on expose des mathématiques et dont les exposés sont ensuite parfois publiés, s'il a, par ailleurs, toujours lieu au sein d'une institution, le séminaire est avant tout composé d'acteurs. Schwartz est alors un bon témoin – et ce dans les deux sens définis en introduction – pour l'étudier car il a joué tous les rôles (ces différents rôles seront parfois tenus par d'autres acteurs au cours du chapitre). Nous le verrons donc tour à tour dans le rôle d'auditeur, d'orateur et d'organisateur de séminaire afin de déterminer l'influence que le séminaire a sur une activité de recherche, et même d'enseignement, ainsi que la place que Schwartz a prise à ces différentes rôles.

Le récit n'est pas rigoureusement chronologique mais construit autour de la manière dont Schwartz se positionne dans chacun de ces rôles. Comment, dans le séminaire, peut-on définir un travail de recherche, ainsi qu'un partage des connaissances ? Il ne s'agit plus uniquement d'une diffusion écrite d'un résultat publié, ni d'une conférence ponctuelle. Pour l'auditeur du séminaire, il va assister, être présent et entendre l'orateur. Il va pouvoir aussi relire la version publiée du séminaire. Il va enfin pouvoir rencontrer l'orateur, ainsi que le reste du public. Pour l'orateur, il s'agit d'un travail de réécriture d'un article ou de ses recherches, qu'il faut ensuite exposer et rédiger. Pour l'organisateur ou le créateur, il s'agit de structurer les séances de séminaire, de définir la forme qu'on lui donne, et de choisir un ou plusieurs thèmes. L'interprétation des sources particulières du séminaire nous permet de définir précisément ces rôles.

5.1 Qu'est-ce-que le séminaire ? Premières rencontres de Schwartz avec le séminaire, formation mathématique

Le séminaire est très présent tout au long de l'autobiographie de Schwartz [Schwartz 1997]. Que ce soit au moment de sa formation et de ses premiers pas dans la recherche

8. On pourrait introduire ici la notion de savoir tacite, telle qu'elle est développée par [Collins 2010], qui est présent à deux niveaux : à la fois pour la conception et l'organisation d'un séminaire (que l'on apprend par l'expérience du séminaire), mais aussi au niveau des échanges mathématiques permis par le séminaire. Néanmoins, nous avons préféré centrer la discussion autour des questions des échanges eux-mêmes, de l'oralité/écrit, et surtout de la description des différents acteurs du séminaire.

9. [Audin 2011, p.242-243]

mathématique, ou bien plus tard dans sa carrière mathématique, les séminaires sont omniprésents dans la vie de Schwartz.

Déjà, quand il parle de ses études précédant son entrée à l'Ecole Normale en 1934, il attribue au séminaire, de manière rétroactive, un rôle clef dans les débuts d'une carrière de recherche. Alors qu'il était en taupe [10], Laurent Schwartz a choisi de ne présenter qu'un seul concours, celui de l'École Normale. Malgré ce choix qu'il qualifie de « risqué » —seuls une vingtaine de candidats étaient reçus en sciences chaque année—, il explique que sa carrière n'aurait pas été différente s'il n'avait pas été reçu. Et l'explication provient du rôle très important qu'il fait jouer aux séminaires, en parallèle des relations avec les normaliens, qui deviennent donc plus important que la réussite au concours en elle-même :

> En taupe, j'avais décidé de m'inscrire uniquement pour le concours d'entrée à l'Ecole normale supérieure de la rue d'Ulm. On recevait à ce moment-là, vingt élèves en sciences et vingt en lettres. (...) Je faisais donc un pari risqué. N'ayant trouvé que très peu d'intérêt dans les cours de taupe, j'étais bien décidé, si je n'étais pas reçu, à ne pas redoubler. Je serais, dans ce cas-là, entré à l'université. Mon destin aurait probablement été un peu différent, mais j'aurais été amené à côtoyer les normaliens, puis plus tard à fréquenter les séminaires de l'Ecole normale comme auditeur libre et je serais revenu vers la même voie.
>
> [Schwartz 1997, p.72]

Mais cette importance relative donnée aux séminaires, aussi bien aux connaissances mathématiques qu'on y développe qu'aux personnes qu'on y rencontre ne vient qu'a posteriori. Ce qui nous intéresse ici est la rencontre entre un jeune étudiant et le séminaire, qui est quelque chose de nouveau pour lui. Et plus précisément dans un contexte particulier où cette forme est assez nouvelle non seulement pour un étudiant qui débute, mais plus généralement en France et à Paris en mathématiques. Ainsi que nous le verrons plus loin, le séminaire Hadamard a fait ses premiers pas juste avant la Première Guerre Mondiale, avant de reprendre en 1920.

5.1.1 Vers une définition actuelle du séminaire.

Essayons tout d'abord définir le séminaire en tant qu'objet d'étude de la vie collective des mathématiques actuelle. Afin de donner des critères pour définir le séminaire, on peut par exemple partir de ce qu'en dit Adrien Douady en 2004 [11] :

> Nowadays, there are two kinds of seminars : the *colloquia*, in which a prestigious visitor is invited to talk on a topic of his or her own choice, and *groupes de travail* (work groups) in which a small team decides to study some question, to fully understand an important article.

On retrouve ces deux types de séminaires dans les annonces présentées en introduction, à partir desquelles on peut cependant donner des critères plus précis. A partir de ceux qui définissent les événements annoncés ici, ainsi que les séminaires plus réguliers, j'ai choisi plusieurs critères. Cela me permet de donner une première définition, telle qu'on peut la concevoir aujourd'hui, un premier jalon par rapport auquel se positionner tout au long de ce chapitre.

– La régularité : toutes les semaines, tous les mois par exemple. Il ne s'agit pas d'un événement ponctuel.

10. Deuxième année de classes préparatoires aux concours de l'École Normale, de l'École Polytechnique et des Écoles d'ingénieurs.

11. Exposé donné en l'honneur du 100ème anniversaire de Cartan, en ligne sur le site de l'ENS. Extraits publiés dans les Notices. [Cartier et al. 2010, p. 965]

- La durée de l'exposé : une heure, deux heures, un après-midi. Il ne s'agit pas d'une semaine de conférences par exemple.
- La durée du séminaire : un semestre ou une année universitaire. Souvent reconduit l'année suivante.
- La diversité des orateurs : il ne s'agit pas d'un cours, où l'orateur serait toujours le même.
- Le sujet ou thème du séminaire peut être de nature variée.
  Le séminaire peut en effet avoir un thème d'année (il peut s'agir par exemple d'un groupe de travail avec un objectif très précis), ou bien une orientation globale (séminaire d'une équipe particulière de recherche, théorie des nombres, ou analyse complexe et géométrie...). Enfin, il peut s'agir d'un séminaire sans thème, l'orateur étant invité à présenter les travaux de son choix (colloquium, séminaire des thésards.
- Le public : ouvert à tous ou plus restrictif (cela apparaît moins facilement sur cette liste de diffusion très large)
- La publicité qui en est faite est plus ou moins large.
- Un éventuel choix de publication.

Pour certains de ces points, l'organisateur a le choix. Par exemple en ce qui concerne la publication, l'organisateur peut choisir de publier le séminaire ou non. Il ne s'agit d'ailleurs pas nécessairement d'un choix, mais plutôt d'une possibilité, dépendante de conditions matérielles. Cette pratique de publication est très présente depuis le séminaire Julia, mais a tendance à disparaître ou à être de moins en moins utilisée avec l'augmentation du nombre de séminaires. Je mentionne ce critère de publication néanmoins, car il est plus facile de s'appuyer sur ce qui a été publié : support pérenne, traces plus complètes. Même s'il convient de les regarder avec prudence , cela permet d'avoir beaucoup plus d'informations que lorsque le séminaire n'est pas publié et que les traces ont alors presque entièrement disparu. La publication est d'ailleurs l'un des critères qui a guidé le choix des quelques séminaires présentés en annexe.

Ces critères constituent une première tentative de caractérisation du séminaire de mathématiques tel qu'il existe actuellement et permettent de donner un premier cadre dans lequel on va rendre compte de l'évolution de la forme du séminaire.

5.1.2 Quelle(s) rencontre(s) pour Schwartz ?

Lorsque Schwartz rencontre le « séminaire », il s'agit de différentes formes que nous allons présenter. Schwartz rentre à l'Ecole Normale en 1934, et y reste trois ans, avant de partir pour son service militaire. Dès ses premières années d'élève en mathématiques, il est amené à côtoyer, fréquenter, participer voire même organiser des séminaires de mathématiques. Laissons le raconter sa première rencontre avec le séminaire Hadamard :

> Le séminaire Hadamard, qui avait remplacé son cours, était suivi par des mathématiciens venus du monde entier, déjà professeurs pour la plupart. Je n'y assistai qu'au début, découragé par un article très récent de Polya qu'Hadamard m'avait confié le soin d'exposer. J'étais habitué aux livres, aux cours complets, pas à cette forme de publication pourtant indispensable à la vie d'un scientifique, et à laquelle je finis évidemment par m'adapter plus tard. Peu familier de ces articles qui condensent un sujet en une dizaine de pages, j'essayai en vain de comprendre son intérêt avant de baisser les bras. Sans doute aurais-je dû ne pas m'arrêter à cela et reprendre le séminaire en deuxième et troisième année. [Schwartz 1997, p. 75-76]

Le premier contact de Schwartz avec le séminaire ne semble donc pas facile. Il s'agit d'une forme de publication que ne connaît pas encore l'élève qui sort de classes préparatoires : l'article, qui résume des recherches en quelques pages. Schwartz est, quant à lui, habitué au livre ou au cours rédigé « complet », qui n'omet aucun détail. La forme d'exposition est différente aussi. Enfin, la difficulté des mathématiques récentes constitue aussi un changement radical pour le jeune normalien.

Beaulieu mentionne différent tomes de l'*Annuaire du Collège de France*, dans lesquels on peut trouver quelques informations supplémentaires [Beaulieu 1989, p.60-65]. Ainsi, en 1934, le mathématicien Georges Kurepa est venu assister au séminaire. Polya est venu lui-même exposer, en 1928-1929, ses résultats sur le prolongement analytique et la distribution des singularités d'une série de Taylor. Durant l'année 1934-35 interviennent notamment les mathématiciens Jean Leray (né en 1906, normalien de la promotion 1926) et Claude Chevalley (né en 1909, lui aussi normalien de la promotion 1926) . Il est probable que Schwartz, encore novice, ne se soit pas senti à l'aise parmi ses aînés.

Schwartz est par contre plus élogieux des cours donnés à l'École Normale. Il décrit des cours nombreux et intéressants – ce qui explique sans doute que le séminaire Hadamard ne lui ait pas paru indispensable – auxquels il donne encore le nom de « séminaire », sans doute parce qu'ils étaient réservés aux normaliens, et donc à un très petit nombre d'élèves, et se distinguaient en cela des cours professés à la Sorbonne ou au Collège de France :

> Nous avions aussi des « séminaires » à l'Ecole, dispensés par des professeurs à la faculté des Sciences de Paris, détachés temporairement et pour des horaires limités. Tradition vivace, l'ENS n'avait et n'a toujours pas de professeurs à proprement parler (et c'est un bien). réservés aux normaliens et à quelques auditeurs libres, ils traitaient de sujets, parfois réellement ardus, complémentaires des cours. Je suivis ainsi, avec profit les enseignements de Georges Valiron, René Garnier, Joseph Pérès, Francis Perrin et Georges Darmois. [12] (...)
>
> La théorie des fonctions entières, traitée au séminaire Valiron, fut également un sujet d'enthousiasme, notamment les résultats sur l'ordre des fonctions entières, qui, par la décroissance des coefficients de la série de Taylor, la croissance du maximum du module sur des cercles concentriques, la répartition des zéros, forment un ensemble de théorèmes que je trouvai fort stimulant. [Schwartz 1997], p.75-76

Georges Valiron a en effet travaillé sur les fonctions entières, qui sont l'objet de sa thèse de doctorat passée en 1914, sous la direction d'Emile Borel : *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière.* Il puble de nombreux articles sur le sujet, notamment aux *Nouvelles Annales*, dans les années qui suivent. On peut penser que ce sont ces travaux qui ont fait l'objet du « séminaire » mentionné par Schwartz. Valiron est ensuite le directeur de thèse de Schwartz, ainsi que cela a été présenté au chapitre 1.

12. On peut trouver quelques informations supplémentaires sur ces professeurs, pour la période concernée. Georges Valiron (1884-1954) est à la Faculté des Sciences de Paris à partir de 1931, et y occupe la chaire de calcul différentiel et intégral à partir de 1941 [Milloux 1956]. Cette notice nécrologique écrite par Henri Milloux (qui a été un moment collègue de Valiron) commente aussi ses résultats de mathématiques Valiron publie de nombreuses notes autour des fonctions entières notamment. René Garnier (1887-1984) possède une notice dans le dictionnaire biographique des professeurs de la Faculté des Sciences de Paris (1901-1939) de Christophe Charle et Eva Telkes [Charle et Telkes 1989]. René Garnier est ainsi maître de conférences à l'Ecole Normale Supérieure (1928) puis à la Faculté des Sciences de Paris en remplacement de Denjoy (octobre 1931), puis professeur sans chaire et enfin professeur de mathématiques générales en remplacement de Fréchtt (janvier 1936). Georges Darmois (1888-1960), ainsi que cela est indiqué dans sa notice à l'Académie des Sciences, est chargé de cours à la Faculté des Sciences de Paris à partir de 1933, professeur sans chaire à partir de 1936 puis titulaire, et enfin titulaire de la chaire de physique mathématique et calcul des probabilités à partir de 1949, à la suite de Fréchet [Barillon 1960] [*Notices et discours. Tome quatrième (1957-1962). Académie des Sciences. Institut de France* 1964, p.92-94,p.388-412].Joseph Pérès (1890-1962) devient maître de conférences à la Sorbonne en 1932 [Costabel 2008]. Francis Perrin (1901-1992) est nommé en 1933 Maître de Conférences à la Sorbonne (théories physiques) puis professeur sans chaire en 1935.

L'avis de Schwartz diffère des récits donnés par d'autres membres de Bourbaki. Ainsi André Weil, qui entre à l'Ecole Normale en 1922, parle-t-il lui aussi des cours qu'il a suivis, mais leur donne une importance bien moindre qu'au séminaire Hadamard, ainsi qu'à ses lectures personnelles :

> C'est entre la « bibli » et le séminaire Hadamard que je suis devenu mathématicien cette année-là et les suivantes.
>
> [Weil 1991, p.38]

Henri Cartan, normalien de la promotion 1923, est lui aussi venu au séminaire Hadamard, un peu plus tardivement que Weil, ainsi que le raconte Szolem Mandelbrojt dans ses souvenirs :

> Weil était un enfant prodige, il venait au séminaire Hadamard en culottes courtes, il avait peut-être dix-sept ans au début de son Ecole Normale. Cartan, tout en étant plus âgé que Weil, est venu plus tard au séminaire.
>
> [Mandelbrojt 1985, p.23]

Nous verrons en effet plus loin que Weil notamment, les premiers membres de Bourbaki plus généralement, étaient très impliqués dans le séminaire Hadamard, ainsi que dans le séminaire Julia, depuis sa création.

Les cours donnés à l'École Normale sont reçus différemment par les membres de Bourbaki. La critique des cours et traités d'analyse, notamment le traité de Goursat [13], participe à l'origine de l'entreprise de Bourbaki. On peut aussi lire le récit de Dubreil :

> Dans les cours que nous suivions à Normale ou à la Sorbonne, mes camarades et moi, qu'y eut-il d'orienté un peu nettement vers l'algèbre, la théorie des nombres ou la géométrie algébrique ? D'abord quelques leçons de Vessiot sur la théorie de Galois, présentée à peu près comme dans le traité d'analyse de PIcard (chapitre XVI du tome III du *Traité d'analyse*, Paris (Gauthiers-Villars), 2e éd. 1908, 3e éd. 1928) puis deux ou trois conférences, de Vessiot également, sur la géométrie des nombres, selon Minkowski, et encore deux conférences d'Hadamard, aux élèves de premi§re année (dont j'étais) et de seconde année, sur la fonction $\zeta(s)$: notre formation était insuffisante pour en tirer vraiment profit.
>
> [Dubreil 1982, p.78]

Le « séminaire Hadamard » et les « cours-séminaires » constituent les deux types de « séminaires » avec lesquels Laurent Schwartz a été mis en contact pendant ses études. Cependant, il ne s'arrête pas là. Avec Gustave Choquet, son camarade de promotion, il organise des « séminaires » pour ses camarades de promotion :

> Assez rapidement, Choquet et moi-même avons pris l'initiative d'élaborer des séminaires pour notre promotion. J'axai le mien sur la théorie des fonctions harmoniques, des potentiels, du problème de Dirichlet, de l'intégrale de Lebesgue, directions de recherche que je n'ai jamais abandonnées depuis. Choquet l'orienta vers les classes de Baire et la théorie fine des ensembles, sujets qui n'ont cessé également de l'intéresser.
>
> [Schwartz 1997, p.76]

Choquet se rappelle lui aussi avoir tellement aimé les livres de Cantor sur le transfini et de Baire sur les fonctions discontinues [14] qu'il les a exposés devant ses camarades :

13. A propos du cours de Goursat, Julia écrit :

> Si j'en juge par l'expérience d'une génération de normaliens que j'ai bien connue, la prise de contact de ces jeunes gens avec l'Analyse moderne était sévère.
>
> [Julia 1970c, « Allocution de Gaston Julia à l'occasion du Jubilé sientifique de M. Edouard Goursat », p.25-32]

14. Il s'agit sans doute du mémoire *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, Traduction de F. Marotte, Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux Tome III (5e

> Ce fut une révélation. Je devins amoureux de ces deux livres, et j'en fis quelques exposés oraux devant mes camarades de promotion.
>
> [Choquet 1974, p.8]

Ce point positif est confirmé par Valiron, lorsque Schwartz est candidat (refoulé) à l'Ecole Polytechnique en 1948 [15]. Lors de la séance du Conseil d'Instruction du 12 juin 1948, Valiron donne ainsi son avis sur Schwartz : [16]

> M. VALIRON signale qu'il connaît M. SCHWARTZ depuis son entrée à l'Ecole Normale où il a été un élève extrêmement brillant et remarquable, entraînant ses camarades, organisant des conférences entre camarades sur le calcul des probabilités alors qu'il était élève de seconde année.

Cette organisation de séminaire est facilitée par la proximité des élèves de l'Ecole Normale, ce qui nuance le jugement de départ de Schwartz : le cadre d'études des normaliens permet des initiatives de ce type, qui ne seraient pas possibles ailleurs ! Déjà en 1928, Weil écrit à Cartan :

> Je suis principalement préoccupé en ce moment de mettre sur pied, à l'Ecole, un séminaire arithmétique. J'aurai le concours de Dubreil, ainsi que celui de Herbrand et Chevalley, et aussi celui de Grandjot de Göttingen, que tu as dû rencontrer à Bologne, et qui est boursier Rockefeller à Paris en ce moment. [Audin 2011, p.13]

Ainsi Jean-Pierre Serre organisera quelques années plus tard (en 1947 et 1948) le « séminaire de la thurne 100 », ainsi que l'écrit Martin Andler [Andler 1994, p.373], auquel assisteront notamment Jacques-Louis Lions, Bernard Malgrange et André Blanchard [Dahan Dalmedico 2005, p.26].

Cette forme particulière d'enseignement n'est pas nouvelle à l'Ecole Normale Supérieure. Ainsi Favard, qui y fut élève à partir de 1921 écrit-il, à l'occasion du Jubilé scientifique de Julia :

> Lorsque j'entrai à l'Ecole Normale, en 1921, M. Julia y était déjà Maître de Conférences ; mes camarades et moi fûmes tout de suite séduits par son dynamisme, par la clarté de ses exposés, où il nous apprenait à aller au but aux moindres frais, tout en nous montrant que les Mathématiques n'étaient pas du tout ce que nous pensions, nous taupins satisfaits, fiers de notre science, heureux d'un calcul astucieusement mené, ou d'une propriété élégantes, mais cachée, d'une courbe aux multiples accidents.
>
> En deuxième année, M. JULIA nous laissait la parole sur des sujets de Géométrie, de Cinématique ou d'Analyse ; nous nous essayions au métier de professeur, à l'art de composer une leçon à partir d'un exposé figurant dans un livre ou un mémoire classique.
>
> Après la leçon, la discussion était toujours fort animée ; il nous fallait dire pourquoi nous avions choisi de présenter tel résultat, pourquoi nous avions laissé tel autre dans l'ombre, et les critiques pertinentes du Maître ne manquaient pas, non plus que les encouragements, plus ou moins mérités d'ailleurs.
>
> Ainsi nous avons soupçonné, puis compris, qu'enseigner c'est choisir, en constituant des synthèses de plus en plus vastes en vue d'une approche rapide des voies où la science d'aujourd'hui s'est engagée. Nous tous, ses élèves à l'Ecole Normale, avons de ce faire contracté envers M. Julia une dette qu'on ne peut pas éteindre : nous portons sa marque et nous aimons à le dire.
>
> [Julia 1970c, Allocution de M. Favard, p.361]

série), 1899 et des *Leçons sur les fonctions discontinues* données par Baire lors de son cours au Collège de France, rédigées par Arnaud Denjoy, et publiées en 1905.

15. Pour Schwartz à l'Ecole Polytechnique, on pourra en lire plus dans le chapitre sur le Centre de Mathématiques.

16. Archives de l'Ecole Polytechnique, Conseil d'Instruction, séance du 12 juin 1948.

Le rôle de Julia, et son choix de manière d'enseignement, montre les prémices du séminaire qui porte son nom et qui aura lieu de 1933 à 1939. Ce séminaire est présenté plus bas.

Par rapport aux critères permettant de définir le séminaire de mathématiques aujourd'hui, les premières rencontres décrites par Schwartz sont très partielles. Avant de discuter en 5.3 sur les différentes formes de séminaires de mathématiques parisiens existant au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, nous allons revenir sur des idées reçues et éléments historiques sur les origines du séminaire.

5.2 Idées reçues et éléments historiques sur le séminaire allemand

5.2.1 Étymologie

Le mot « séminaire » vient du latin « seminar », qui signifie « semer ». Littéralement, il veut donc dire « pépinière ». Le premier usage du mot « séminaire » est la désignation de la maison ecclésiastique où l'on forme les jeunes clercs à recevoir les ordres. Par extension, les mots « pépinière » et « séminaire » désignent un lieu de formation à une profession quelconque. Un sens particulier de cette extension est précisé dans *Le Littré* (1863-1877) : il s'agit du « Nom que portent en Allemagne divers établissements d'instruction publique et spécialement les écoles normales » – c'est-à-dire les institutions qui forment les professeurs. Nous allons voir en effet l'introduction du séminaire comme modèle d'organisation pour la formation des futurs enseignants des les universités prussiennes au XIX$^{\text{e}}$.

Une deuxième extension est proposée, et plus ou moins détaillée suivant les éditions du dictionnaire [17]. Le séminaire désigne non seulement l'institution mais aussi l'ensemble de ses membres ou le temps passé avant de devenir prêtre. Le séminaire est en fait à la fois un lieu, une institution, une formation particulière, un ensemble de personnes, une durée d'études. On va retrouver ces différentes acceptions au début du XX$^{\text{e}}$ dans les différentes mentions du séminaire en français, son sens n'étant pas figé.

De manière plus actuelle – anecdotique peut-être, néanmoins marquante – on constate que, parmi les pages de Wikipedia consacrées au « séminaire » en français, anglais, allemand, si la plupart présentent les différents sens du mot – notamment celui de séminaire d'enseignement – une page décrit les « French Mathematical Seminars » [18]. L'article vise à présenter cette institution française particulière, depuis le séminaire Hadamard jusqu'au séminaire Grothendieck, en passant par les séminaires Julia, Bourbaki et Cartan, et donnent une liste de quelques autres séminaires notables. L'existence de cette page particulière entre en résonance avec les différences essentielles de structure entre le séminaire allemand et ce qui se crée en France au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle que nous allons présenter.

De cette incursion dans l'étymologie et les définitions du mot « séminaire », on peut retenir deux aspects. Tout d'abord, la référence à une institution allemande ; mais aussi une allusion à une forme particulière de séminaire mathématique, en France au XX$^{\text{ème}}$ siècle. Afin de comprendre ce qui se crée à Paris au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, nous revenons ici sur la place du séminaire allemand à la fois dans les récits des acteurs et l'historiographie générale, avant de présenter les études historiques qui traitent spécifiquement du séminaire allemand.

17. On peut consulter de nombreux dictionnaires en ligne : http ://portail.atilf.fr (Page consultée le 01/09/2013).
18. http ://en.wikipedia.org/wiki/French_ mathematical_ seminars (Pages consultée le 01/09/2013)

5.2.2 Idées reçues et récit des acteurs

Dans l'histoire de la seconde moitié du XIX$^{\text{e}}$, on trouve des mentions de ce « séminaire allemand ». Dans son livre sur *Les scientifiques*, Jean-Jacques Salomon exprime ainsi les réformes dans les universités allemandes qui ont amené à la création [19] du séminaire :

> C'est en Allemagne que l'innovation a été aussitôt reprise et surtout diffusée, grâce d'ailleurs à un ancien élève de l'École polytechnique, Justus von Liebig (1803-1873), chimiste de génie, qui développa à l'Université de Giessen la méthode d'enseignement au laboratoire et réussit à convaincre d'autres universités à l'adopter en l'étendant à d'autres disciplines (...) La professionnalisation du scientifique passe alors par un système nouveau de *formation* qui est en même temps une *pratique*, l'une et l'autre débouchant sur des compétences reconnues, en particulier par le doctorat, qui pourront être exercées soit à l'université, soit dans l'industrie, soit encore dans les arsenaux.
>
> La généralisation de l'innovation en Allemagne a été favorisée par la décentralisation de l'autorité publique et par la compétition entre institutions universitaires. Dans le sillage des expériences multipliées par Liebig, la grande réforme introduite par Guillaume de Humboldt transformera la fonction des universités, qui deviendront le lieu par excellence de l'avancement de la connaissance en modifiant à la fois les conditions de travail de l'enseignant et celles de l'étudiant : « L'un et l'autre, dit-il, doivent être conjointement au service de la science. » L'université selon Humboldt doit enseigner et transmettre, avec le contenu de la science, la méthode et la pratique de la recherche : il s'agit non seulement de *connaître* la science, mais encore de la *faire*. L'abandon du cours magistral pour le laboratoire et le séminaire, dont l'École polytechnique avait été pionnère sans lendemain au XIX$^{\text{e}}$, sera généralisé en Allemagne, et bientôt en Angleterre, dans la plupart des pays européens et dans les grandes universités privées de États-Unis : Harvard, MIT, Berkeley, Stanford.
>
> Mais pas en France, ce qui s'explique par un ensemble de facteurs dont les effets continuent malheureusement à peser jusqu'à aujourd'hui sur notre système de recherche. (...)
>
> [Salomon 2006, p.40-41]

Nous allons donc nous intéresser ici aux aperçus français du séminaire allemand.

Des extraits de deux publications francophones du début du siècle, à savoir *La Revue du Mois* et *L'Enseignement Mathématique* vont nous permettre de saisir la conception du séminaire en France au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. La *Revue du Mois* mentionne ainsi le séminaire, dans un article qui commente « L'enseignement technique supérieur américain et l'école d'ingénieurs de l'Illinois »

> Nous arrivons à la dernière année, qui est celle de la thèse, travail personnel complété par ce qu'on appelle le séminaire (suivant l'expression allemande) et où le jeune homme, présente et lit des études qui sont discutées à l'assemblée de ses camarades (...) [Bellet 1911, p.340]

« L'enseignement mathématique aux Etats-Unis » est aussi décrit dans *L'Enseignement Mathématique* :

> Les étudiants sont répartis, dans quelques universités, en séminaires, à l'exemple de ce qui se fait en Allemagne, pour les habituer aux recherches personnelles et faciliter la préparation de leurs thèse.
>
> [Maillet 1901, L'enseignement mathématiques aux Etats-Unis, p. 162]

Plus généralement, le séminaire est mentionné lors des études présentant l'enseignement des mathématiques en Allemagne, Etats-Unis et Grèce. Le séminaire apparaît donc dans ce journal ; il s'agit du séminaire allemand, que l'on présente plus loin, qui est plutôt

19. Il est intéressant de noter qu'il associe le séminaire au laboratoire, dont il attribue les premiers essais, non transformés, à l'École polytechnique.

considéré et construit comme une activité d'enseignement qu'une activité de recherche, ce qui peut expliquer qu'il soit absent de l'enquête mentionnée en introduction.

En ce qui concerne les facultés françaises, et les années ultérieures, on peut consulter par exemple les *Annales de l'Université de Paris*[20], dans lequel l'apparition du mot séminaire semble avoir deux significations : celle d'une salle de travail comportant une bibliothèque, ainsi qu'on peut le lire par exemple ici :

> Les salles de travail qui correspondent aux séminaires des Universités allemandes continuent à se développer à la Faculté de Droit. Elles sont fréquentées par des étudiants de plus en plus nombreux. Il y a ainsi une tendance marquée, au moins pour les meilleurs, à ne pas se borner à assister aux cours, mais à se lives à des études personnelles cous la direction de leurs maîtres. Ces salles de travail sont au nombre de dix, elles correspondent aux différentes branches du Droit, de l'Histoire du Droit et de l'Economie Politique. Chacune de ces salles doit avoir sa bibliothèque comprenant des livres, des revues, des collections.
>
> [*Annales de l'Université de Paris* 1926, Chroniques de la Société des Amis de l'Université, p. 234-235]

ou bien de groupe de conférences, pour lequel l'influence allemande n'est plus revendiquée aussi clairement, par exemple en 1933, où l'on a la description et le programme du séminaire d'histoire et philosophie des sciences

> Fondé en novembre 1932, ce séminaire groupe une trentaine d'étudiants (...) Chaque conférence du séminaire est suivie de discussion. Toute recherche personnelle donne lieu, après discussion, à une rédaction sommaire (note, bibliographie, éléments de dossier) dont un exemplaire est versé aux Archives de l'Institut pour constituer l'amorce d'une documentation plus systématique.
>
> [*Annales de l'Université de Paris* 1933, Institut d'Histoire des Sciences et des Techniques, Rapport du directeur sur son organisation et son activité, p. 228]

Lors de l'inauguration de l'Institut d'études germaniques en 1931, Henri Lichtenberger prononce un discours dans lequel le « séminaire germanique » est précisément décrit :

> Séminaire germanique, c'est-à-dire un centre où l'étudiant trouve une salle de travail ouverte toute la journée, avec une bibliothèque contenant les livres de travail dont il a besoin, où il peut acquérir aisément la connaissance pratique de la littérature avec laquelle il doit se familiariser pour s'élever à la connaissance de la langue et de la civilisation allemandes, où il lui est loisible de travailler à toute heure en contact permanent avec ses camarades, en collaboration avec eux, en liaison avec ses maîtres. [Poincaré et Lichtenberger 1931, p. 57]

Il continue son discours en expliquant les moyens mis en œuvre pour en créer à la Sorbonne :

> Depuis longtemps nous sentions cruellement le manque d'une organisation de ce genre, dont l'importance capitale au point de vue des études ne fait doute pour personne. Malheureusement, chacun sait l'exiguïté de la place dont nous disposons à la Sorbonne et l'impossibilité où nous nous trouvions jusqu'à ces derniers temps de concéder à chaque discipline l'espace nécessaire à la création d'un institut spécial. C'est au cours de ces dernières années seulement que nous avons pu, petit à petit, rassembler les éléments essentiels de cet organisme. [Poincaré et Lichtenberger 1931, p. 57]

Il précise ensuite les détails pratiques, les acquisitions de bibliothèques ou encore les spécificités par rapport au modèle allemand.

20. J'ai consulté ici les années 1926 à 1941. La publication reprend néanmoins après la guerre, jusqu'en 1968. Le séminaire est présent à de nombreuses reprises dans cette publication. Surtout dans les premières années. Mais très rarement, on peut noter comme exception la mention d'une participation d'Henri Cartan à un séminaire allemand, lorsqu'il s'agit de mathématiques. Ne sont mentionnés que les conférences faites par des professeurs étrangers, ou bien celles données par des professeurs de la Faculté à l'étranger.

Nous avons donc ici quelques aperçus français du séminaire allemand. En s'attachant maintenant au séminaire de mathématiques plus particulièrement, le récits des acteurs est celui d'un héritage, ainsi que nous allons le voir.

Le récit d'un héritage par les acteurs.

Liliane Beaulieu insiste sur le décalage qu'il existe entre les multiples séminaires ayant lieu en Allemagne et les deux seuls exemples en France au début du $XX^{\text{ème}}$ siècle :

> En Allemagne, les séminaires scientifiques florissaient dans les universités, depuis le dix-neuvième siècle, où ils servaient à la fois à l'enseignement, à la formation des chercheurs à l'échanges de résultats scientifiques. En France, on ne trouvait pas ce genre de forum avant 1920 et, entre les deux guerres, il n'y eut que deux séminaires de mathématiques, celui d'Hadamard au Collège de France et celui de Julia à l'Institut Henri Poincaré, qui jouirent tous deux d'une relative indépendance institutionnelle.
>
> [Beaulieu 1989, p.60]

Quel serait donc le mode de transmission par lequel le séminaire allemand serait arrivé en France ? Une première piste est celle des instituts de mathématiques, financés par la fondation Rockefeller. [21] Cependant, dans le projet de fondation de l'université de Göttingen, ainsi que celle de l'Institut Henri Poincaré, de telles traces ne semblent pas être explicites. Certes, le choix de Göttingen pour le financement d'un tel projet a certainement été influencé par l'existence de séminaires, suite à l'impulsion de Klein [22], ainsi que l'écrit Siegmund-Schultze, qui le reprend du journal de Wickliffe Rose :

> Runge called attention to advantages of Göttingen for study of mathematics ; (1) they have a group of mathematicians here in 1 Institute ; (2) this brings together here specialists from different countries in different fields ; (3) these men meet in a club they have here and discuss, with stimulating results.
>
> [Siegmund-Schultze 2001, p.144]

Cependant, la construction de l'Institut Henri Poincaré ne semble pas mentionner explicitement une place qui serait donnée au séminaire. Voici l'avis de Borel, repris par Trowbridge en 1926 :

> Borel was glad to learn that the project would not have to be built up with a building dominating the whole situation, which was evidently what he thought when he came. He thinks that a small and very modest building on the site on the new University centre here in Paris would be advisable, something with one lecture room, library space for a technical library in Mathematics and Physics and a few offices for professors...Roughly that would call for a modest building as stated above and foundation of three or four new chairs in Mathematical Physics, Applied Mathematics, etc.
>
> [Siegmund-Schultze 2001, p.159]

Ses attentes sont donc celles d'un petit centre de mathématiques [23], et surtout de chaires de mathématiciens. En pratique, l'Institut Henri Poincaré sera plus grand que cela, et le nombre de chaires plus faible (en fait trois).

La place du séminaire n'est pas encore véritablement là, semble-t-il. Ainsi Maurice Fréchet, dans un article sur l'inauguration de l'Institut Henri Poincaré, écrit-il :

---

21. Pour une analyse précise du rôle de la Fondation Rockefeller dans la vie mathématique internationale entre les deux-guerres, on pourra consulter [Siegmund-Schultze 2001], auquel je me réfère de nombreuses fois ici.

22. Pour plus de détails, on pourra consulter notamment [Rowe 1989]

23. On se réfère au chapitre suivant pour les prémices et premiers pas des laboratoires de mathématiques dans la seconde moitié du siècle.

> In November, 1928, there was formally inaugurated in Paris a new institute of mathematics. It was both the official opening of a new building and the beginning of new courses of lectures, all to be part of the Faculty of Sciences of the University of Paris. (...)
>
> The activities of the Institute Henri Poincaré will not be confined, however, to the new courses. It aims to be international in scope. The attendance at these courses is very cosmopolitan indeed. But the Institute will also have an international staff of lecturers. In addition to the permanent courses, single lectures of brief series of lectures will be given by distinguished scientists.
>
> [Fréchet 1929]

Il prévoit donc des enseignements, des conférences internationales, dans ce centre pour l'enseignement et la recherche en physique mathématique et calcul des probabilités [24]. La place du séminaire n'est pas encore explicite dans la conception de la vie scientifique [25].

La transmission, si transmission il y a eue, ne semble pas être passée, au départ, par les institutions. Néanmoins, nous comprendrons au cours du chapitre à quel point il est important qu'une telle institution soit en place pour que le séminaire puisse exister. Cela lui donne un cadre, une salle, un secrétariat, une reprographie, un lieu central pour réunir les mathématiciens...C'est par exemple à l'Institut Henri Poincaré qu'aura lieu le séminaire Julia, que nous présentons en détail plus loin, de 1933 à 1939, dans l'amphithéâtre Darboux. Avec le séminaire Hadamard déjà mentionné, qui a lieu au Collège de France, ce sont les deux premiers séminaires de mathématiques en France.

Du point de vue de certains acteurs – je pense notamment aux récits d'André Weil et Paul Dubreil – la transmission semble plutôt venir de voyages d'études [26]

> Göttingen est, pour les mathématiciens de tous pays, un de ces centres. Notre Barrès dirait qu'il est, comme la Sorbonne, un « haut-lieu où souffle l'esprit ». (...)

qu'ils ont effectué en Allemagne. André Weil se réfère ainsi au séminaire allemand :

> The teaching of mathematics must be a source intellectual excitement. This can be achieved, at the higher stages, by taking the student to the brink of the unknown; at earlier stages, by making him solve for himself questions of theoretical or practical importance.
>
> This is the method followed in the « seminars » of the German Universities, first organized by Jacobi a century ago, and even now the most prominent feature of the German system; division of labor between students in the study of a given group of questions is a common practice in these seminars, and proves to be a powerful incentive to work.
>
> [Weil 1979 (1954), p. 119]

Il mentionne par ailleurs dans ses *Souvenirs d'apprentissage* la fréquentation des séminaires allemands lors de ses voyages et de ceux de ses camarades :

> J'avais fréquenté les universités allemandes; plusieurs de mes camarades m'y avaient suivi. Les séminaires y formaient une part essentielle de l'enseignement.
>
> [Weil 1991, p. 100]

24. C"est ce qu'écrit Fréchet [Fréchet 1929, p. 198] l'Institut aura en fait une place centrale pour toutes les mathématiques

25. Il semble que cela soit différent après la guerre. Ainsi Siegmund-Schultze écrit-il [Siegmund-Schultze 2001, p. 176] : « Immediately after the war, the ROCKEFELLER FOUNDATION finances seminars through the CNRS which also included conférences on topics within pure mathematics ». J'ai parlé dans un chapitre précédent du financement conjoint des colloques internationaux par la Fondation Rockefeller et le CNRS, il semble ici que des financements aient aussi été prévus pour des séminaires.

26. Gaston Julia, dans une « Allocution prononcée par M. Gaston Julia à Göttingen, le 27 juin 1937 », publié dans ses OC volume VI, p.51-53, compare le voyage en Allemange au tour de France des compagnons ou aux centres de métier des apprentis...

Dans le récit que fait Paul Dubreil de son séjour en Allemagne et Italie de 1929 à 1931, en tant que boursier de la fondation Rockefeller [Dubreil 1982], les séminaires sont omniprésents : séminaire d'Artin à Hambourg, séminaire Francfort (où il a dû exposer ses propres travaux), séminaire d'Emmy Noether à Göttingen [27]. Finalement, la Fondation Rockefeller, qui finance ces boursiers, peut avoir joué un rôle, même s'il est plus indirect.

Le séminaire allemand serait donc, aux dires des acteurs, à l'origine du séminaire de mathématiques français. L'emploi du conditionnel veut ici signifier néanmoins qu'au vu des séminaires dont on parle, de la forme pratique et des objectifs qu'on lui attribue, il n'est pas clair qu'il s'agisse du même objet. Néanmoins, ce que les récits des acteurs mettent en avant, c'est la nécessité d'une vie collective, rendue possible par le format des universités allemandes. Le terme « séminaire » semble être caractéristique de ces universités, ce qui explique que ce soit ce qu'ils retiennent, et essayent de reproduire, de créer à leur façon.

5.2.3 Le séminaire allemand ; un modèle ?

Le séminaire en Allemagne dans l'historiographie.

Le séminaire allemand est étudié dans l'historiographie allemande, et nous allons en dégager ses principales caractéristiques. L'ensemble des publications de Gert Schubring sur le séminaire dans les universités prussiennes au XIX$^{\text{ème}}$ siècle permet de comprendre à la fois ses caractéristiques précises et son fonctionnement, mais aussi la place qu'il prend dans la restructuration des universités à cette date [28].

À l'origine pour la philologie, le séminaire a rapidement été institué dans les universités prussiennes au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. A partir de 1834, on commence à voir se développer des séminaires de mathématiques, à la suite de l'exemple de celui de Jacobi à Königsberg. Les principales caractéristiques sont les suivantes. Tout d'abord, à un séminaire est attribué un budget, nécessaire pour attirer les meilleurs étudiants, et constituer une bibliothèque spécialisée dans la discipline. Un examen d'entrée sélectionne les admissions au séminaire. Chaque séminaire élabore des rapports annuels destinés au ministère. Enfin, une certaine pratique lui est associée, celle du « Vorträge », c'est-à-dire l'exposé oral d'un mémoire présenté par un étudiant. Il s'agit au départ d'« Oberseminar » pour les étudiants avancés,mais l'on assiste rapidement à la création d' « Unterseminar » pour les débutants. La forme du séminaire est directoriale : un professeur est responsable du séminaire, et détient les clefs de la salle qui lui est associée. Le séminaire sert à la formation des enseignants. Les travaux présentés dans le volume d'*Osiris* veulent montrer une

27. Il raconte même les pratiques sociales suivant le séminaire d'Emmy Noether, il ne s'agit pas de thé...mais d'un promenade en sa compagnie :

> A Göttingen aussi, il était de tradition, après la séance du séminaire, de faire de temps à autre une promenade à laquelle Emmy NOETHER participait. Nous allions dans de belles collines boisées, à l'est de la ville et nous nous arrêtions dans de petits restaurants champêtres pourvus d'attractions diverses. Avec simplicité et gentillesse, Emmy NOETHER se mettait au diapason...et posait pour la photo, assise sur un tourniquet. [Dubreil 1982, p.73]

28. Mentionnons ainsi ses travaux sur les séminaires de Bonn [Schubring 1989], [Schubring 1985b], sur les séminaire de mathématiques de Münster [Schubring 1985a] ou bien ses synthèses [Schubring 1990], [Schubring 2000]. Afin de comparer avec la France, il est important de comprendre la construction des institutions allemandes de manière plus générale. On peut consulter [Schubring 1991], [*Osiris 5 : Science in Germany : The Intersection of Institutional and Intellectual Issues.,* 1989] et particulièrement [Olesko 1989] et [Rowe 1989]. Katryn Olseko a aussi étudié le séminaire de physique de Königsberg [Olesko 1991]. Gert Schubring a en particulier donné un exposé au séminaire de l'équipe Histoire des Sciences Mathématiques de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, le 8 février 2011, sur « Réaliser l'idéal du "forschendes Lernen" : la naissance des séminaire des mathématiques en Prusse et leur développement dans l'Allemagne du XIX$^{\text{ème}}$ siècle ».

nouvelle manière d'écrire l'histoire institutionnelle de l'Allemagne, en utilisant les fonds d'archives propres aux institutions. [29] Grâce à ces sources, on peut notamment se faire une idée très précise des séminaires qui s'y tenaient. Le but d'un séminaire de physique étudié par Olesko est de

> trained physic students in part through skill-based exercises that encapsulated the essential of experimentation and measuring operations
> [Olesko 1989]

A propos du séminaire de Bonn (natural science), Gert Schubring écrit :

> The origin or rationale of the Bonn seminar was neither pure learning nor industry, but teacher education.
> [Schubring 1989, p. 59]

Le but du séminaire est alors de :

> providing guided exercises for students in order to introduce them to independent studies in natural science

Il décrit ensuite très précisément la forme de ce séminaire, et les trois années pendant lesquelles les étudiants passent par plusieurs étapes. D'abord « Auskultant », qui doit assister et participer aux séances, répondre à des question sur ses lectures, l'étudiant doit ensuite, en deuxième année, donner des exposés qui sont des résumés d'un domaine, puis deviennent plus détaillés. Enfin, en troisième et dernière année, il doit préparer des travaux personnels qui sont présentés et défendus devant le séminaire. Il participe alors, avec le professeur, à l'instruction des plus jeunes. Le séminaire en Prusse au XIX^{e} siècle constitue une deuxième tentative de caractérisation du séminaire de mathématiques.

Un modèle allemand non adopté

Au sujet des réformes de l'université en France, cherchant à s'inspirer du modèle allemand après la défaite de 1870, nous allons regarder notamment les travaux de Christophe Charle : il n'est finalement pas si évident que le résultat se rapproche véritablement du modèle allemand. On cherche peut-être à le copier, mais s'en approche-t-on vraiment ? Les conclusions de Charle, qui portent sur le recrutement, et l'origine des professeurs, montrent qu'on aurait plutôt tendance à s'en éloigner. Cela semble être la même chose en ce qui concerne le séminaire. On voit aussi dans les travaux de Christophe Charle, que le séminaire allemand est toujours remarqué et apprécié. Ce qui est moins évident est la transmission du modèle allemand à la France.

Un numéro de la revue *Histoire de l'éducation*, écrit sous la direction de Christophe Charle, est consacré aux universités germaniques aux XIXème et XXème siècles. Dans un premier article [Charle 1994c], Christophe Charle regrette le vide de la bibliographie française sur le sujet, les travaux historiques ne s'intéressant aux universités allemandes qu'autour des discussions après la guerre de 1870, où la France déplore sa défaite et l'attribue à une supériorité de la formation allemande. Il cite un article de Gert Schubring [Schubring 1991] ;

> G. Schubring en vient ainsi à contester un autre lieu commun de l'image des universités germaniques : leur précocité à assumer une fonction de recherche et leur souplesse d'organisation facilitant la différenciation disciplinaire. Il ne s'agit pas de nier la position dominante en matière de recherche des universitaires allemands à l'échelle internationale au XIXe siècle, ni leur rôle fondateur dans certains domaines ainsi que l'influence

29. Afin de traiter l'approche institutionnelle, il faudrait un travail aussi détaillé portant sur un grand nombre d'universités pour l'étude en France. Nous nous concentrons ici surtout sur les formes prises par le séminaire et ses différentes caractéristiques.

> du modèle du séminaire et du laboratoire. La vision révisionniste porte plutôt sur la chronologie des phénomènes et les liaisons causales trop vite reçues.
>
> [Charle 1994c, p.13]

Notamment, il précise plus loin l'intérêt des séminaires :

> la mise en place d'enseignements spécialisés d'initiation aux méthodes de recherche est un moyen pour attirer les étudiants les plus mobiles et les plus motivés – et qui sont prêts à verser des droits suppléments, gage de prospérité de l'université et du professeur et d'élévation de son statut social.
>
> [Charle 1994c]

Le problème pour la France est alors une question de modèle social, qu'elle ne peut imiter. Dans un deuxième article [Charle 1994d], il propose, à partir d'une étude prosopographique, une comparaison du statut social d'un professeur en Allemagne et d'un professeur en France. Sa conclusion montre que les systèmes, plutôt que de ressembler, semblent s'éloigner. Il propose enfin une bibliographie commentée sur le sujet [Charle 1994a]. Dans son livre déjà cité, il analyse les réformes venues de l'Allemagne : la création d'un diplôme supérieur intermédiaire et celle d'instituts de recherche [Charle 1994b, p. 49], et les limites du transfert, notamment d'un point de vue social.

On peut mentionner l'histoire de la création de l'École Pratique des Hautes Études en France en 1868. La section de mathématiques n'a existé que de 1868 à 1896, et propose des « conférences » comme cours de préparation à l'agrégation. Charle écrit :

> Le point le plus unanimement loué du système allemand est en effet l'existence des séminaires où se forment les futurs savants allemands. (...) On sait par ailleurs que ce fut l'une des premières innovations introduites par les ministres réformateurs, notamment par le biais d'une école à part fonctionnant sur ce modèle, l'Ecole pratique des hautes études de Victor Duruy (1868). La pratique du séminaire a été généralisée avec les maîtrises de conférence, dix ans plus tard. Dans ces séminaires, les auteurs louent avant tout des communautés de travail qui réunissent maîtres et disciples, la possibilité d'un apprentissage concret des méthodes de travail et de recherche, les habitudes laborieuses qu'ils imposent aux étudiants.
>
> [Charle 1994b, p. 43]

Pour Charle, le séminaire allemand est reconnu comme une forme d'enseignement à imiter. Il lui prête comme conséquence non la création de séminaires en France, mais celle de maîtrises de conférences, une certaine manière d'organiser l'enseignement.

Lorsqu'est inaugurée l'Université de Strasbourg en 1919 [30], Maurice Fréchet fait un discours « Leçon d'ouverture du Cours d'analyse supérieure de l'Université de Strasbourg, le 17 octobre 1919 » [Fréchet 1920], dans lequel il explique comment l'organisation de l'enseignement a été conçue. Pour cela, les meilleures méthodes ont été retenues, qu'elles soient françaises ou allemandes. Il écrit ainsi que « l'enseignement allemand, dans les universités, met tout en œuvre pour développer le goût des recherches originales » [31]. Cette qualité de la méthode allemande se manifeste par deux aspects : tout d'abord l'« existence de cours plus nombreux portant sur les parties les plus élevées de la science » mais aussi l'« exigence imposée aux candidats aux examens universitaires de produire un mémoire original » [32]. Cela a pour lui l'avantage de mettre l'étudiant en contact « avec la science qui se fait ». Nulle mention du séminaire dans ce discours, qui pourtant s'appuie sur une enquête comparant les méthodes françaises et allemandes dans les universités. Même dans ce cadre, à l'université de Strasbourg qui aurait pu être le vecteur de l'introduction du séminaire comme mode d'enseignement en France, on n'en trouve nulle trace.

30. Sur l'histoire de l'Université de Strasbourg, voir [Crawford et Olff-Nathan 1970].
31. [Fréchet 1920, p.338].
32. [Fréchet 1920, p.339].

Il me semble donc que l'on peut remettre en cause, en ce qui concerne le séminaire de mathématiques, ces liens de causalité et de chronologie. Je ne suis pas convaincue que le séminaire de mathématiques en France soit si simplement un héritier du séminaire en Allemagne, car il prend une forme très différente ainsi que nous allons le voir.

Il reste néanmoins un problème ouvert. On a présenté le séminaire dans les universités prussiennes au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Mais que sait-on sur le XX$^{\text{ème}}$ siècle et sur le cas des autres pays ? Le séminaire semble se développer un peu partout, et rapidement devenir essentiel. On peut voir par exemple, dès les années 30, dans les bulletins de l'Institute for Advanced Studies mentionnés de nombreux séminaires. À Princeton, le séminaire a une forme multiple. La dénomination et la délimitation sont encore floues. Il y a les cours (« lectures »), prolongés par des séminaires, qui sont donnés par des professeurs de l'IAS, et servent à l'instruction, et ce qui est appelé le « mathematical club », qui est plutôt présenté comme un lieu de rencontre hebdomadaire, au même titre que le rendez-vous quotidien du thé :

> Once a week the mathematical club, conducted by Princeton University and the School of Mathematics of the Institute, meets. A paper is presented, followed by informal discussion and questionning. Daily at 4 :30 in the afternoon, tea is served for both the University and the Institute, and professors and workers thus assemble at their pleasure.
>
> [*Bulletin n°3. Institute for Advanced Studies.* 1934, p.6]

En partant à la recherche des origines du séminaire en France, nous avons trouvé le séminaire allemand. Modèle unanimement loué et cité par les acteurs, et qui a fait l'objet de nombreuses études, le séminaire devient une pratique bien diffusée dans les universités prussiennes au XIX$^{\text{e}}$ siècle. Mais le mode de transmission par lequel ce modèle serait arrivé en France est moins évident. La France a en effet cherché à copier les institutions allemandes, mais on ne trouve pas véritablement le modèle du séminaire allemand, tel qu'il existait au XIX$^{\text{`eme}}$ siècle. Les acteurs eux-mêmes ont participé à des séances de séminaire et peuvent avoir contribué de manière plus individuelle à cette transmission. Les séminaires qui existent en France au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, à savoir le séminaire Hadamard, puis le séminaire Julia et ensuite le séminaire Bourbaki ont des caractéristiques très différentes, et ne ressemblent pas vraiment au modèle allemand du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Mais que peut-on dire du séminaire de mathématiques en Allemagne au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle ? Il s'agit encore d'une question non encore étudiée.

Si l'on relit les deux premières parties, deux jalons ont été présentés, deux objets finalement très différents, à savoir le séminaire mathématique en France aujourd'hui, objet aux contours assez vagues, et le séminaire des universités prussiennes au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Dès lors qu'on s'intéresse aux débuts du séminaire mathématique en France, l'objet « séminaire » est un objet qui évolue, se construit progressivement. Les deux jalons présentés ici servent à en délimiter un cadre très large.

Nous allons maintenant nous intéresser spécifiquement aux premiers séminaires mathématiques à Paris, au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, et essayer de les caractériser.

5.3 Quelle(s) forme(s) ? Premiers séminaires de mathématiques parisiens au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle

Les formes très différentes que prennent les trois séminaires présents dès les toutes premières années de formation mathématique de Schwartz, et qu'il prend le temps de mentionner, se font l'écho du début des séminaires de mathématiques en France. Le séminaire n'est pas encore institutionnalisé, la forme est encore à fixer, à créer. Détaillons tout d'abord les séminaire Hadamard et Julia, pour lesquels les sources sont très nombreuses.

Il s'agit des deux premiers séminaires parisiens [33], ils méritent donc une attention toute particulière.

Deux modèles : le séminaire Hadamard et le séminaire Julia

L'intérêt d'une comparaison entre ces deux séminaires est justifiée par le fait que la création de séminaires après la guerre se réfère à ces deux modèles, dans un besoin de justification, de mimétisme ou d'opposition. On trouve ainsi, dans la correspondance entre Weil et Cartan [Audin 2011], des discussions sur la création du séminaire Bourbaki. Par exemple, dans une lettre de Cartan à Weil du 15 juin 1947 , on peut lire :

> J'ai oublié, dans ma lettre précédente de répondre à Dieudonné (et à toi aussi je suppose) au sujet du séminaire Bourbaki de l'an prochain. Il faut s'entendre : entre le séminaire Hadamard et le séminaire Julia il y a tout une gamme intermédiaire ; c'est une question de nuances. [Audin 2011, p.238]

Dans cette première analyse de séminaires, on cherche à mettre en lumière les différentes caractéristiques de chaque séminaire dans leur ensemble, à savoir les horaires, lieux, thèmes, personnes, mathématiques – ce qui est constitutif de chaque séminaire – tout ceci dans le but de comprendre comment le séminaire devient structurant dans la vie collective des mathématiques. Le chapitre s'organise ensuite sur les différents rôles, que l'on aperçoit ici, tenus par Schwartz dans les séminaires.

La question de la dénomination

La question de la dénomination est intéressante et révélatrice, surtout en cette période des débuts du séminaire de mathématiques à Paris. On constate en effet un certain flou dans le récit que livre Schwartz de cette période d'avant-guerre, concernant son usage du mot « séminaire ». Le « séminaire » semble désigner alors des choses a priori très différentes, à la fois le cours d'Hadamard au Collège de France, un format de cours particulier à l'Ecole Normale ou bien encore des séances informelles d'exposés entre étudiants.

On peut se demander si Schwartz se contente de projeter ce qu'il connaît à la date où il écrit son autobiographie, et d'appeler « séminaire » ce qui en a les principales caractéristiques, ou bien si, au contraire, il se contente de reproduire un mot qui est à l'époque banal, et utilisé fréquemment pour désigner des choses diverses. Plus généralement, quand on utilise le mot « séminaire », désigne-t-on une organisation particulière d'enseignement ? de recherche ? un type de réunion ? un espace (au sens géographique) ? Utilise-t-on la terminologie des acteurs de l'époque ou bien de leurs récits ultérieurs ? La distinction que j'ébauche ici est particulièrement importante en ces premières années. Sans prétendre trancher entre ces différences possibilités, nous allons néanmoins regarder très précisément la dénomination des deux séminaires qui sont l'objet de notre étude ici.

Le « séminaire Hadamard » n'en porte en effet jamais officiellement le nom. L'analyse de Chabert et Gilain [Chabert et Gilain À paraître, p.16-17,p.22-24] parle d'« esprit du séminaire Hadamard » pour les années 1911-1914, et de « cours-séminaire d'Hadamard » après la guerre, clairement institué à partir de 1920. Beaulieu, dans sa thèse, parle aussi de « séminaire Hadamard » [Beaulieu 1989, p.60-65]. Néanmoins, dans les numéros de l'*Annuaire du Collège de France* qui sont mentionnées par ces auteurs, on ne trouve pas cette désignation de « séminaire ». On trouve néanmoins les mots suivants « exposé, par un auditeur », « discussion de cet exposé » (1911-1912), « série de conférences », « étude

33. On peut mentionner aussi le « séminaire Borel », dont parle Juliette Leloup dans sa thèse [Leloup 2009], intitulé « Exposés et Discussions sur le calcul des Probabilités » p. 417. Elle mentionne notamment les travaux de Bernard Bru sur ce séminaire [Bru 2002]

de mémoires mathématiques importants » (1912-1913), « analyse de Mémoires récents, avec la collaboration de nombreux auditeurs » (1913-1914). A partir de 1920, cela semble plus institutionnalisé, puis que le terme d'« analyse de mémoires scientifiques » apparaît chaque année jusqu'en 1937. Chabert et Gilain précisent que de 1922 à 1927, l'une des deux séances hebdomadaire reste consacrée à un cours plus traditionnel, l'autre à cette analyse de mémoires ; ensuite les deux séances sont réservées aux mémoires. Ce qui nous permet d'identifier le séminaire, ce sont les mots que j'ai mentionnés, ce vocabulaire propre au séminaire,qui sera l'objet de discussions ultérieures.

Il semble que la première désignation par le terme de séminaire soit d'Hadamard luimême, quelques années plus tard , en 1936, à l'occasion de son Jubilé scientifique [Hadamard 1937], ainsi que cela est mentionné par Chabert et Gilain : « ce fut le premier séminaire mathématique de France ». En 1965, Mandelbrojtj et Schwartz concluent leur notice sur Hadamard par ces mots :

> Mathematical life in Paris in the twenties and early thirties was for the large part described by two words : « Séminaire d'Hadamard. »
> [Mandelbrojt et Schwartz 1965, p.117-118]

dans lesquels ils accolent le nom d'Hadamard à celui de séminaire. On retrouve ensuite l'appellation de « séminaire Hadamard » dans des récits, notamment celui de Weil déjà mentionné plus haut.

En ce qui concerne le « séminaire Julia », les exemplaires publiés et conservés à l'Institut Henri Poincaré permettent de voir que dès 1933-34, il porte le nom de séminaire de mathématiques. Le séminaire dure 6 années, un volume par année, mentionnant Gaston Julia comme auteur (dans la reliure du volume conservé à l'Institut Henri Poincaré). La sixième année, il porte le nom de « cercle de mathématique de l'Ecole Normale Supérieure ».

Rôles d'Hadamard et de Julia dans la création du séminaire.

Quels ont été les rôles respectifs de ceux qui ont donné leur nom à ces séminaires ? Les réponses vont être assez différentes dans ces deux cas, mais néanmoins semblent assez comparables en ce qui concerne leur création. Un premier point commun est celui de l'affiliation institutionnelle, qui semble nécessaire a priori à la tenue d'un séminaire. Hadamard est professeur au Collège de France (1897-1937, suppléant puis titulaire à partir de 1908). Son séminaire a donc pris place dans le cadre de son cours ainsi que cela vient d'être décrit, et a lieu les mardi et vendredi de l'année scolaire [Beaulieu 1989, p.60-65]. Julia, quant à lui, est professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Le séminaire qui porte son nom – Beaulieu indique que c'est sur une suggestion de Chevalley et Weil que Julia et Elie cartan ont créé ce séminaire – a lieu à l'Institut Henri Poincaré, sauf la dernière année où il prend place à l'École Normale Supérieure, les deuxième et quatrième lundis de chaque mois [Beaulieu 1989, p.133-138]. Weil explique le nécessaire patronage d'un professeur pour organiser un séminaire :

> L'idée nous vint d'en organiser un à Paris, qui serait pour nous un point de réunion. Ce fut le « séminaire Julia », car à une telle entreprise, à cette époque, il fallait un « patron », ne fût-ce que pour disposer d'une salle à la Sorbonne ; Julia, qui avait été le plus jeune de nos maîtres à l'Ecole, s'y prêta volontiers.
> [Weil 1991, p.100-101]

Julia rend en effet hommage à Elie Cartan à l'occasion de son Jubilé Scientifique :

> Je ne puis pas non plus oublier qu'il y a sept ans, cherchant à réaliser un mode de travail en commun plus souple que le cours, plus précis et plus soutenu que la conférence, pour

> entraîner les jeunes à la recherche, par l'exemple et l'exposé du progrès de chaque jour, en maintenant avec eux ce contact personnel que facilitent les libres propos échangés autour d'une tasse de thé, je me suis ouvert à vous d'un projet de cercle mathématique, auquel je vous ai demandé de collaborer, comme je le demandais aux meilleurs des jeunes gens que nous avions connus à l'Ecole Normale. Vous avez accepté sans balancer et le succès a été très net.
> [Julia 1970a, p.61-62]

On voit ici la motivation précédant la création de ce séminaire, à savoir une volonté personnelle de réformer un enseignement traditionnel. On ne connaît pas explicitement celle d'Hadamard, mais Julia s'exprime très clairement sur le sujet :

> Dans ces années 1925 à 1939, il était pourtant devenu nécessaire d'enseigner de nouvelles branches en plein développement, pour y amener des jeunes qui ne demandaient qu'à s'y intéresser. L'Administration avait alors d'autres soucis ; j'étais d'avis qu'il ne fallait pas l'attendre, et qu'il fallait, sans craindre les initiatives, démontrer « en marchant » la possibilité du mouvement. Pour cela, rien de mieux que l'enseignement mutuel et bénévole par un groupe homogène d'amis. Ce groupe existait : c'était tous mes anciens élèves de l'Ecole Normale devenus professeurs d'Université, ou préparant des thèses. Ils partagèrent mes vues dès que je les leur expliquai et nous fondâmes ensemble ce Séminaire dont vous avez apprécié l'action, mon cher CHEVALLEY, en termes si vivants, dont je vous remercie.
> [Julia 1970b]

Ainsi pour Julia, la création de ce séminaire s'inscrit dans une dynamique venant à combler un manque de l'enseignement. Nous avons vu précédemment dans le récit de Favard qu'il avait déjà expérimenté une forme d'enseignement proche du séminaire dans ses cours à l'Ecole Normale. Il y a ici une différence sur le contenu des exposés : il souhaite étudier ce qui est nouveau.

André Weil raconte quant à lui que Julia était « assidu », mais que le séminaire ne lui doit rien, sauf le nom et la salle. [Weil 1991, p.100-101]. La place de Julia en tant que créateur de ce séminaire est néanmoins attestée par les récits de Dubreil [Dubreil 1970] et Chevalley [Chevalley 1970b].

Auditeurs, orateurs, organisateurs.

Les récits des acteurs permettent d'avoir une vision assez vivante de l'organisation concrète des ces deux séminaires. Les sources diffèrent concernant les acteurs de ces deux séminaires. Ainsi, on trouve dans des récits et annuaires du Collège de France un grand nombre d'informations, déjà étudiées et mentionnées, sur le séminaire Hadamard. Le séminaire Julia, quant à lui, est publié. Une grande partie des exposés sont donc rédigés et regroupés par année, ce qui nous permet de connaître les différents orateurs. On y retrouve les membres du futur Bourbaki. Pour ces deux séminaires, on a des récits des acteurs impliqués – en bien plus grand nombre pour le séminaire Hadamard toutefois.

Qu'en est-il du rôle d'organisateur de séminaire ? Hadamard, nous le verrons à de nombreuses reprises, est vraiment l'âme de son séminaire. C'est lui qui choisit les thèmes pour toute l'année, qui distribue les exposés, qui anime les séances pose des questions, et fait aller plus loin. Dans le cas du séminaire Julia, nous avons vu que les récits divergent un peu en ce qui concerne sa création.

En tout cas, on ne trouve guère de récit sur Julia comme il peut en exister sur Hadamard, qui est très présent à toutes les étapes du séminaire ainsi que nous allons le lire : il choisit les articles à lire en fonction des domaines des mathématiques récentes qui lui paraissent intéressantes, désigne les orateurs, fait des commentaires pendant les exposés, propose des généralisations... Le public au séminaire d'Hadamard est constitué à la fois d'étudiants, de mathématiciens plus confirmés et d'orateurs ou invités étrangers. Pour les étudiants, laissons Weil raconter comment Hadamard organise son séminaire en début d'année :

> Au début de l'année on se réunissait à son domicile rue Jacques-Dolent [34], dans sa bibliothèque, pour la distribution des mémoires à analyser. C'étaient en premier lieu les tirés à part qu'il avait reçus de toutes les parties du monde, ou du moins ceux qui lui avaient paru dignes d'un compte-rendu. Il y joignait des titres variés puisés de droite et de gauche et acceptait volontiers qu'on lui en proposât d'autres. Le plus souvent il s'agissait de travaux parus dans les deux ou trois dernières années, mais il n'y avait pas de règle fixe à cet égard. Quant aux sujets, son désir était de fournir un panorama aussi étendu que possible des mathématiques contemporaines ; s'il n'y parvenait pas, c'était du moins le but vers lequel il tendait. A chaque titre qu'il annonçait il cherchait un preneur ; souvent il disait brièvement pourquoi tel mémoire excitait sa curiosité. Une fois la distribution terminée on fixait des dates ; puis on bavardait avant de se séparer.
>
> Le séminaire avait lieu une fois par semaine ; par la suite ce fut deux fois. Parmi les collaborateurs figuraient des mathématiciens chevronnés aussi bien que des débutants ; Paul Levy, qui avait été élève d'Hadamard, était l'un des plus assidus.
>
> [Weil 1991, p.38-39]

Mandelbrojt, dans ses souvenirs, raconte sensiblement la même chose. On apprend donc comment se faisait le choix des exposés, et comment les étudiants ou participants réguliers étaient sollicités par Hadamard. Cela nous renseigne aussi sur le but d'Hadamard, qui était d'exposer les « mathématiques contemporaines ».

En ce qui concerne les orateurs étrangers, Mandelbrojt raconte qu'« on les invitait » :

> On demandait à Birkhoff, à Polya, à Plancherel de venir de loin pour faire une conférence, le plus souvent sur le sujet qu'ils connaissaient le mieux et qu'ils choisissaient.
>
> [Mandelbrojt 1985, p.17]

Tout ceci confirme l'expression de « tribune internationale » utilisée par Liliane Beaulieu [Beaulieu 1989, p.60-65] pour caractériser le séminaire Hadamard : les orateurs étrangers sont invités à partager leurs mathématiques. Menchov, de passage à Paris en 1927, raconte le séminaire Hadamard lui aussi :

> Dès lors, je suivis régulièrement le célèbre séminaire de J. Hadamard au Collège de France. Là, on faisait des exposés sur des questions les plus diverses des mathématiques et de leurs applications, dont on discutait ensuite. Par exemple, un chercheur français y fit une communication sur les travaux de E. Schrödinger en mécanique quantique. Personnellement, je fis deux exposés sur mes travaux dans ce séminaire - sur la théorie des représentations conformes et sur la théorie des séries orthogonales. Je me rendis compte, à cette occasion, qu'Hadamard connaissait mal la théorie des fonctions modernes : il me demanda de rappeler la définition de la mesure d'un ensemble.
>
> [Menchov 1985]

On voit le passage de l'auditeur à l'orateur. La citation de Weil, confirmée par Mandelbrojt, explique comment procédait Hadamard, en distribuant des articles à lire, et des exposés à faire aux différents participants. La procédure était différente pour les orateurs étrangers, qui parlaient de leur propre sujet, de leurs recherches personnelles ou de recherches récentes. Il s'agit d'un grand honneur de parler au séminaire Hadamard, ainsi que cela est expliqué dans [Chabert et Gilain À paraître]. Fréchet, qui a lui aussi participé au séminaire, analyse le rôle spécifique d'Hadamard :

34. Dans la dernière lettre de Cartan à Weil, datée du 8 mai 1991, Cartan, qui a lu *Souvenirs d'apprentissage*, précise : « P.S. 2.- Je n'ai pas su trouver de faute d'orthographe dans ton livre. Cela le distingue de beaucoup d'autres ! Je te signale, page 38, une petite erreur : c'est rue Jean-Dolent qu'habitait Hadamard (et que se trouve toujours le siège de la Ligue des Droits de l'Homme). » [Audin 2011, p.445]

(...) une conception toute différente de son propre rôle le hantait et dès 1913, il avait fait analyser quelques Mémoires par ses auditeurs. C'était une première approche vers l'institution d'un « séminaire », institution déjà répandue dans plusieurs pays étrangers. Mais notre confrère allait donner au nom de Séminaire un sens personnel tout nouveau, qui allait rendre son séminaire partout célèbre. Mais la guerre vient et arrêta ce premier essai. La guerre finie, Hadamard revint à son idée. A l'étranger, les séminaires étaient généralement spécialisés. Grâce à son érudition et à son aptitude à dominer tous les domaines, Hadamard étend à toutes les parties des mathématiques l'activité de son séminaire.

[Fréchet 1963, p.4085]

Si les rôles sont bien séparés, il n'est pas évident de les décrire de manière séparée. Il est clair qu'Hadamard occupe une place très importante dans la totalité de son séminaire. Il est plus difficile de caractériser la place de Julia dans le séminaire qui porte son nom. Si on a moins de récits, on dispose néanmoins de la forme publiée du séminaire. C'est là une nouveauté qui instaure une longue tradition : à savoir cette de la publication des exposés, qui en suppose une rédaction détaillée. Nous revenons sur cette source particulière dans notre analyse du rôle d'orateur à un séminaire.

Thèmes traités

On constate que les formes prises par ces deux séminaires sont en fait assez différentes : si le séminaire Hadamard est un séminaire général de mathématiques, sur des thèmes très variés [35], le séminaire Julia est par contre consacré, chaque année, à un thème particulier.

Le séminaire Hadamard, de par la forme choisie et que nous allons décrire, devrait être, aux dire des acteurs, le seul méritant l'appellation générique de « séminaire de mathématiques » (et non de séminaire de théorie des nombres, d'algèbre, ou autre spécialité), de par la diversité des sujets traités qui couvrent les mathématiques :

Le séminaire d'Hadamard n'était pas un séminaire comme de nos jours : sur la théorie des fonctions, ou le calcul fonctionnel, ou la topologie ou l'algèbre. C'était un séminaire des mathématiques.

[Mandelbrojt 1985, p.17]

La question des thèmes traités est l'occasion pour les acteurs de différencier ces deux séminaires. En effet :

Le seul que nous eussions connu jusque là en France avait été celui d'Hadamard, modèle inimitable. L'idée nous vint d'en organiser un à Paris, qui serait pour nous un point de réunion. Ce fut le « séminaire Julia » (...) à la différence de celui d'Hadamard, chaque année y fut consacrée à un thème central, « Groupes et Algèbres » en 1933-34, puis successivement l'espace de Hilbert, l'œuvée d'Elie Cartan, etc. ; des rédactions polycopiées s'en conservent à la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré. Julia y fut assidu, et ce fut là sans doute qu'il prit l'idée de consacrer à l'espace de Hilbert le restant de sa carrière scientifique.

[Weil 1991, p.100-101]

Chevalley distingue l'initiative du séminaire Julia de celle, existant déjà depuis quelques années d'Hadamard :

La création en 1933 du Séminaire qui porte votre nom répondait à un besoin urgent. Il n'existait alors, en effet, en dehors des cours réguliers de la Faculté des Sciences, qu'un seul Séminaire, celui de M. HADAMARD au Collège de France, dans

35. Dans les récits que j'ai cités, on trouve les thèmes de hydrodynamique, logique mathématique, théorie des fonctions, topologie [Mandelbrojt 1985], travaux de Poincaré, Noether, théorie des nombres, topologie algébrique, [Chabert et Gilain À paraître], des équations de Schrödinger [Fréchet 1963]

> lequel on analysait les publications de l'année dans tous les domaines. Ce type de Séminaire, très utile aux spécialistes pour se tenir au courant, offre l'inconvénient de présenter une vue quelque peu kaléidoscopique des mathématiques et de ne pas permettre d'approfondir les questions. De plus, l'orateur qui se fixe pour tâche d'exposer en une heure tel ou tel Mémoire bien spécialisé n'a que peu de chances d'exprimer là sa pensée, ou, si l'on préfère, son tempérament personnel.
>
> Vous comprîtes alors, M. JULIA, le rôle que pourrait être amené à jouer un Séminaire qui serait au contraire fortement structuré, un Séminaire qui permettrait, tant par le choix des matières que par la manière dont elles seraient traités, non seulement de rendre compte du déjà fait, mais de le clarifier et de l'acheminer vers la création du neuf.
>
> [Chevalley 1970b]

Les différents thèmes ont été analysés notamment dans les analyses déjà mentionnées [Beaulieu 1989], [Chabert et Gilain À paraître] et sont mentionnés dans les récits des acteurs [36]. Notons les deux approches retenues, à savoir analyse de mémoires variés ou bien séminaire thématique.

Le fonctionnement du séminaire Julia, autour d'un thème annuel, est décrit par Chevalley, qui rappelle aussi l'intérêt de la publication des exposés :

> Pour répondre à ces desiderata, le Séminaire Julia fonctionnait de la manière suivante. Chaque année était choisi un thème central autour duquel se groupaient les exposés ; un plan d'études assez précis était dressé, et le travail était réparti entre un certain nombre d'orateurs, à chacun desquels il était demandé de rédiger son exposé ; la publication, sous forme miméographiée, des textes ainsi obtenus permettait les références ultérieures et avait aussi pour avantage d'assurer la continuité du travail au cours de l'année. Enfin, il convient de se souvenir des thés qui marquaient la fin des séances et qui donnaient aux auditeurs l'occasion de discuter entre eux des idées qui venaient d'être exposées.
>
> [Chevalley 1970b]

Le thé au séminaire Julia est mentionné plusieurs fois par les acteurs Chevalley (discussion des orateurs entre eux à propos des idées exposées), Julia : « Vous n'avez pas oublié, bien entendu, la tasse de thé qui suivant chacune de nos réunions, et dont l'effet fut de resserrer notablement les liens de ce cercle d'amis. Pour moi, qui n'ai jamais pu travailler que dans la confiance et l'amitié, je les ai trouvées dans notre Séminaire, comme, je l'espère, beaucoup des participants. » [Julia 1970b]. Michèle Audin [Audin 2011] indique que cela serait la première institutionnalisation du thé —pratique aujourd'hui largement répandue— après le séminaire.

On voit donc ressortir ici différents aspects, humains, mathématiques et matériels. Les acteurs de ce séminaire tout d'abord : Elie Cartan et Gaston Julia, professeurs à la Sorbonne, ainsi que des jeunes gens, leurs étudiants.

---

36. Voici un exemple de tel récit : Dubreil [Dubreil 1982, p.76] écrit, à propos d'Albert Châtelet :

> Entre temps, son activité scientifique s'est manifestée par plusieurs exposés au Séminaire Hadamard et à l'Université de Bruxelles, dont son fils François Châtelet a pu retrouver les traces, qu'il a bien voulu me communiquer. Les sujets en furent :
> - au Séminaire Hadamard, un article de Mazoni, *Sulla teoria delle equazioni algebrische secondo Galois* (Math. Ann., t.83, 1921, p.24-66) ; Louis Sartre, son ancien camarade de Normale (promotion 1911), secrétaire du Séminaire, lui écrit à ce sujet : « Il est entendu que tu diras ce que c'est que les idéaux. Nous l'ignorons quasi-absolument. » ;

Impacts

Mandelbrojt accorde au séminaire une importance primordiale dans la constitution de la vie collective des mathématiques : le séminaire permet en effet le « travail en commun » ; il compare le séminaire Hadamard à l'entreprise Bourbaki en celà qu'ils sont un espace où cela est rendu possible :

> Maintenant on parle beaucoup des mathématiques ou d'autres sciences faites en commun. Bourbaki est fait par une dizaine de personnes. A l'époque, il n'y avait pas de travail en commun et le séminaire Hadamard était en quelque sorte le pré-Bourbaki ; c'est Hadamard qui était en quelque sorte l'éditeur, si j'ose dire abstrait, l'éditeur moral de Bourbaki. C'était d'une importance capitale, je crois, aussi bien pour les mathématiques françaises que pour les mathématiques tout court.
>
> [Mandelbrojt 1985]

Juliette Leloup analyse quelques uns des impacts qu'a pu avoir le séminaire Hadamard. A plusieurs reprises, elle mentionne des sujets exposés au séminaire Hadamard, et fait l'hypothèse que les doctorants y ont appris le sujet sur lequel porte leur thèse. Elle s'interroge aussi sur la diffusion des nouveaux travaux en théorie des fonctions de la variable complexe en France [Leloup 2009, p.351] et se demande comment les séminaire y ont contribué, en premier lieu le séminaire Hadamard. Voici une de ses conclusions [Leloup 2009, p.351] : « on peut mentionner le rôle particulier du séminaire Hadamard pour le domaine de la théorie des fonctions de la variable complexe. On constate ainsi que les sujets des conférences et des mémoires analysés, tels qu'ils sont rapportés dans l'Annuaire du Collège de France, concernent fréquemment le type de questions abordées dans les thèses que j'ai ici considérées : sur les propriétés générales des fonctions complexes, beaucoup plus souvent que d'autres problèmes de théorie des fonctions, sur les séries ou les fonctions réelles par exemple, ou sur d'autres domaines des sciences mathématiques. » Elle précise aussi que les quelques mathématiciens étrangers cités dans les thèses sont justement ceux qui ont exposé au séminaire Hadamard. On voit ici l'intérêt de regarder précisément les thèmes de ce séminaire, et de confronter aux travaux mathématiques en cours. Plus que les thèmes, cela nous éclaire sur la portée que peut avoir un séminaire. On aperçoit surtout la place importante qu'acquiert très rapidement le séminaire dans la vie mathématique.

Il existe une courte étude en ce qui concerne le séminaire Julia. Alain Herreman examine en effet, [Herreman 2005], la diffusion de deux ouvrages et leur réception à travers ce séminaire Julia. Comme le séminaire est publié, Alain Herreman peut regarder les sources citées dans le domaine de l'exposé. On s'intéresse ici à la partie écrite du séminaire, qui reflète les sources connues et exploitées sur un sujet précis à une période donnée.

Les récits mentionnent aussi les conséquences des séances du séminaire sur la vie collective des mathématiques. Le séminaire ne s'arrête pas à la séance qui lui est consacrée. Pour le séminaire Julia, la publication sert de postérité. Pour le séminaire Hadamard, certains exposés ont été suivis de notes aux *Comptes Rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences* par exemple. Mandelbrojt [Mandelbrojt 1985] analyse même cela comme étant le seul « travail en commun » de l'époque ! Il raconte aussi l'« effet boule de neige » de ce séminaire : il écrit une note, qu'Hadamard expose en donnant une nouvelle démonstration... Il parle aussi d'interactions entre différents domaines des mathématiques, permis par la grande diversité des exposés donnés au séminaire Hadamard. Et enfin, il considère qu'à cette époque-là, « tout le monde était l'élève d'Hadamard ».

Néanmoins les acteurs reconnaissent aussi une influence aussi du séminaire Julia. Ainsi Châtelet indique-t-il :

> je n'ai guère insisté sur l'influence profonde que tu as exercée et que tu exerces encore (...) par ton Séminaire qui a été à l'origine d'une jeune école de mathématiques

> [Chatelet 1970]

Ou encore Dubreil

> Entre temps vous avez créé un Séminaire qui a heureusement prolongé votre influence sur nos générations. De 1934 à 1939, le « Séminaire Julia » a joué un rôle de premier plan dans la diffusion de la culture mathématique moderne.
>
> [Dubreil 1970]

Ou enfin Chevalley

> En tout cas, cette ébullition intellectuelle n'a pas empêché le Séminaire Julia de rendre aux mathématiques et aux mathématiciens de grands services ; nombreux sont je crois, ceux, Français ou étrangers venus à Paris, qui peuvent, comme je le fais moi-même, associer la conception de nouvelles idées, l'infléchissement de leurs recherches dans de nouvelles directions, à la stimulation qu'ils ont reçue au Séminaire Julia
>
> [Chevalley 1970a]

Tous déclarent que le séminaire « a tenu un rôle de premier plan pour l'orientation de jeunes mathématiciens » [Pérès 1970, p.319]. Ces trois citations ne mentionnent pas d'éventuel effet du séminaire Julia sur sur le travail en commun comme c'est le cas pour le séminaire Hadamard. Elles restent assez vagues sur l'analyse de cette nouvelle structure, tout en reconnaissant que le séminaire participe à la construction des mathématiques, à l'apprentissage et à la diffusion de nouvelles idées.

Avant de conclure cette présentation préliminaire, nous pouvons regarder une dernière citation, extraite d'une notice nécrologique sur Jacques Hadamard, écrite par Szolem Mandelbrojt et Schwartz. Le ton de la rédaction est nécessairement approprié à la circonstance : louanges, mise en avant des qualités d'Hadamard...mais le texte est relativement précis dans sa description du séminaire.

> Those of us who had the privilege of attending Hadamard's Seminars at the Collège de France, where he taught from 1909 to 1937 would probably be unable to recall more inspiring hours of mathematical thought. Well-known mathematicians all over the world considered it as an honor, and sometimes as a redoubtable task, to be asked to state and to prove their recent results, or the results in their fields just discovered by others. But, without trying to diminish the contribution of the talent of the lecturers, we must say that the bulk of our feelings, of the richness of our inspiration, and our desire to continue to work, or at least to think, on the subject just treated in the Seminar, came from Hadamard's analysis of the lecture, from his critical views, from his interruptions, simple remarks and some prophecies on the future of the subject.
>
> One of the characteristics of Hadamard's Seminar was its variety. It was not a Seminar on one branch of mathematics-it was one on Mathematics, pure and applied, on the philosophy of mathematics and numerical analysis as well. Often the lecture was an important mathematical event, where for the first time a very significant result was expounded. Sometimes new results were born at the Seminar, and published a few weeks later in the C.R. Acad. Sci. Paris.
>
> Mathematical life in Paris in the twenties and early thirties was for the large part described by two words : « Séminaire d'Hadamard. »
>
> [Mandelbrojt et Schwartz 1965, p.117-118]

On retrouve dans ce récit les questionnements de notre étude. Pour comprendre l'objet séminaire en étudiant des séminaires, il faut pour chaque séminaire en donner des dates précises, la fréquence, s'intéresser aux thèmes choisis. On voit aussi les rôles des acteurs s'affirmer : Hadamard en est l'instigateur, les orateurs sont eux aussi mentionnés, un peu plus implicitement le public de ce séminaire. On peut voir aussi les objectifs d'un tel séminaire, son choix de s'intéresser à toutes les mathématiques par exemple. La fin de la citation esquisse un début de réponse à notre problématique : le séminaire structure effectivement la vie collective des mathématiques à Paris dans les années 20 et 30. La portée du séminaire ne s'arrête pas aux seuls exposés, on voit qu'il porte la publication d'articles.

On voit des ressemblances, et surtout beaucoup de différences à plusieurs niveaux entre ces séminaires . Mais, ce qu'il est plus intéressant de constater pour notre étude, on a réussi à identifier de manière assez précise ces deux séminaires dans le cadre général du questionnaire proposé sur l'objet séminaire : on en recherche les principales caractéristiques techniques et idéologiques, ce qui nous permet ensuite de parler des rôles des différents acteurs, dans le but de caractériser la place et le côté structurant du séminaire dans la vie collective des mathématiques. Le plan pour la suite sera organisé autour des acteurs du séminaire : auditeur, orateur, créateur et organisateur.

Finalement, on peut se demander précisément ce qui définit le séminaire. Si la terminologie utilisée à l'époque n'est pas suffisamment précise pour le dire, si le contenu mathématique ne suffit pas à le déterminer, si la production même peut différer (il y a toujours un exposé, mais il peut être publié ou ne pas l'être), nous avons constaté ici que ce sont la mise en scène des différents rôles exercés par différents acteurs qui font le séminaire. Nous avons en effet un (ou plusieurs) organisateurs, des auditeurs, des orateurs. Chacun de ces acteurs est présent, joue son rôle. Et l'ensemble forme ce que l'on appelle et ce qui est identifié par ces acteurs : « séminaire ». C'est pourquoi dans la suite je vais m'attacher à définir très précisément ces différents rôles.

5.4 Laurent Schwartz, auditeur. Assister à un séminaire

On a vu que Schwartz, étudiant, ne fait qu'effleurer le séminaire Hadamard. Au vu de la période spécifique de la formation de Schwartz et du développement du séminaire de mathématiques en France, considérer Schwartz dans le rôle d'auditeur à un séminaire devrait chronologiquement passer en dernière partie. Schwartz est en effet organisateur de séminaires et orateur en premier lieu, il ne découvre pas le séminaire comme simple auditeur. Est-ce à dire que pour lui, l'assistance à un séminaire se limite alors à une dimension sociale et n'a pas vocation à être considéré comme une formation ou un apprentissage ? Cela ne semble pas être le cas, étant donné l'importance qu'il accorde au séminaire en général dans son récit déjà présenté en introduction. De plus, la formation est permanente : lorsque Schwartz s'intéresse aux probabilités, que peut signifier d'assister au séminaire de probabilités de Strasbourg ?

5.4.1 Qu'est-ce qu'assister à un séminaire ?

Assister à un séminaire, c'est :
- être présent, écouter l'orateur
- prendre des notes
- poser des questions
- rencontrer et parler avec des gens
- éventuellement relire ses notes, ou bien le texte polycopié. Les réécrire, se les réapproprier.

Même si, dans le cas particulier de Schwartz, l'assistance à des séminaires a lieu en même temps qu'il donne des exposés et organise ses propres séminaires, on trouve dans les séminaires de nombreux étudiants venant y compléter leur formation – ainsi que cela a pu être décrit plus haut dans le cas du séminaire Hadamard. Grothendieck se souvient ainsi des usages en vigueur, qui ne l'arrêtaient pas à l'époque :

> Je doute qu'en cette année cruciale où je découvrais le monde des mathématiciens, un d'eux, pas même Cartan dont j'étais un peu élève mais qui en avait beaucoup d'autres (et des moins largués !), percevait en moi cette même passion qui les habitait. Pour eux, je devais être un parmi une masse d'auditeurs de cours et de séminaires, prenant des notes et visiblement pas bien dans le coup. Si peut-être je me distinguais en quelque façon des autres auditeurs, c'est que je n'avais pas peur de poser des questions, qui le plus souvent devaient dénoter surtout mon ignorance phénoménale aussi bien du langage que des choses mathématiques. Les réponses pouvaient être brèves, voire étonnées, jamais l'hurluberlu ébahi que j'étais alors ne s'est heurté à une rebuffade, à une "remise à ma place", ni dans le milieu sans façons du groupe Bourbaki, ni dans le cadre plus austère du cours Leray au Collège de France.
>
> [Grothendieck 1986, p.141]

La dimension sociale du séminaire La dimension sociale du séminaire, parfois un peu désavouée, est très présente dans les récits sur des séminaires particuliers. Voilà ce qu'en dit Serre, à propos du séminaire Cartan – dont on reparle plus loin – qu'il juge différent des séminaires habituels [37] :

> Ce genre de séminaire a un rôle assez différent des séminaires auxquels vous êtes certainement habitués, les séminaires que l'on voit annoncés dans l'Officiel des spectacles, ou l'officiel des spectacles mathématiques. Bon ils ont un rôle mathématique bien sûr, mais essentiellement, ils ont un rôle social ; le rôle social consistant à ce que les gens se rencontrent et bavardent entre eux. Et puis quelqu'un est au tableau, il explique ses derniers théorèmes, il ne donne en général aucune démonstration, et le travail sérieux ne se fait pas dans le séminaire ; s'il y a du travail sérieux, il se fait après ou avant en conversation. (...) Donc le séminaire Cartan, il avait certainement aussi un rôle social, l'occasion de se rencontrer, par exemple Borel et moi une certaine année, et bien d'autres...mais il avait vraiment un contenu mathématique parfaitement clair et ça, il n'y a pas eu beaucoup de séminaires malheureusement qui continuent cette tradition. Il y en a eu, Chevalley a fait quelques séminaires, mais très peu et surtout, la postérité du séminaire Cartan, c'est le séminaire Grothendieck, le fameux SGA, dans lequel la philosophie était essentiellement la même, c'est-à-dire qu'on démontrait tout. Et ça prenait le temps que ça prenait, et dans le cas de Grothendieck, ça prenait beaucoup de temps !

Le rôle social du séminaire existe, est important, mais ne doit pas prendre pas le dessus sur son contenu mathématique. Grothendieck présente quand à lui le séminaire Bourbaki en ces termes :

> et les jours des Séminaires Bourbaki (réunissant une petite vingtaine ou trentaine à tout casser, de participants et auditeurs), on y voyait débarquer, tel un groupe de copains un peu bruyants, les autres membres de ce fameux gang Bourbaki : Dieudonné, Schwartz, Godement, Delsarte. Ils se tutoyaient tous, parlaient un même langage qui m'échappait à peu près totalement, fumaient beaucoup et riaient volontiers, il ne manquait que les caisses de bière pour compléter l'ambiance - c'était remplacé par la craie et l'éponge.
>
> [Grothendieck 1986, p.140]

Il y relate une ambiance particulière, une intimité partagée, une reconnaissance des pairs.

On a encore le récit d'un étudiant, qui écrit à Schwartz, énervé que celui-ci ait refusé de faire partie de son jury de thèse, en essayant de deviner les raisons de son refus. Son hypothèse tient en quelques mots [38] :

37. On peut écouter son exposé sur le site http ://www.diffusion.ens.fr/index.php ?res=cycles& idcycle=98 (Page consultée le 01/09/2013) , enregistrement de l'exposé donné par Serre lors de la journée Henri Cartan le 28 juin 2004, intitulé « Le rôle des séminaires Cartan ».

38. Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, B.I.1.2.43, 1976.

> Je suis inconnu au séminaire Maurey-Schwartz.

Le rôle social a ici une importance qui dépasse le portrait de camaraderie tracé par Grothendieck mais donne à la présence au séminaire une importance dans l'insertion dans la communauté mathématique.

Schwartz auditeur Schwartz se considère comme « un mauvais auditeur », car il n'assimile pas directement ce qu'il entend. Il écrit même :

> Je ressens toute lecture, toute audition d'un séminaire comme une agression. C'est mon château qu'on tente de démolir. Généralement, je ne comprends pas tout de suite, je prends des notes et je dois réfléchir à la maison pour y comprendre quelque chose.
>
> [Schwartz 1997, p.260]

Mais, comme nous l'avons déjà vu dans notre rapide étude sur les séminaires Hadamard et Julia, le séminaire ne se limite pas à l'heure de la séance. Nous en avons là une première illustration : il continue bien à vivre après. On peut le voir, dans le cas particulier traité ici, à la fois au travers des notes manuscrites de Schwartz – il s'agit de notes prises pendant un exposé ou bien suite à sa lecture ou relecture du séminaire publié – que ces notes sont retravaillées, relues, réorganisées, appropriées, personnalisées ; bref, que le séminaire continue de vivre sous la plume de Schwartz. On peut le voir aussi dans des travaux publiés : les séminaires sont cités ; le contenu d'un exposé de séminaire est prolongé, soit par un autre exposé complémentaire au séminaire, soit par un article publié.

On peut considérer un cas particulier de Schwartz auditeur à un séminaires, à savoir celui de sa participation au séminaire de probabilités de Strasbourg – complété éventuellement par d'autres séminaires de probabilités. Peut-on dire que Schwartz se forme aux probabilités – celles de Paul-André Meyer [39] notamment – par son « assistance » au séminaire de probabilités ? [40] Nous proposons ici une ébauche de réflexion sur cette question en considérant les notes manuscrites issues des archives de Schwartz qui s'y raccordent. Ces notes manuscrites [41] forment une importante partie du Fonds Laurent Schwartz des Archives de l'École polytechnique. Une partie de ces notes sont numérotées par Schwartz lui-même – il en tenait une liste mise à jour. De nombreuses autres ont été triées lors de l'inventaire des archives, et regroupées par thème. Elles concernent majoritairement la période 1970-1993. Ces notes sont numérisées et accessibles [42]. Il ne s'agit pas de notes spontanées. Comme en témoignent les nombreux collages et raturages, ces notes sont réécrites et retravaillées par Schwartz. Elles sont écrites au stylo plume bleu pour la plupart ; quelques ajouts sont écrits au crayon de bois. Les notes numérotées par Schwartz lui-même sont en général datées, ce qui n'est pas toujours le cas pour les autres parfois difficiles à identifier.

---

39. Paul-André Meyer (1934-2003) est un mathématicien français, spécialiste de théorie du potentiel et calcul des probabilités. On lui reconnaît d'être l'un des fondateurs de « l'école de probabilités française » (Marc Yor, http ://www.academie-sciences.fr/academie/membre/Meyer_ PA.htm) (Page consultée le 01/09/2013). Les hommages publiés à sa mort, offrent souvenirs, présentation de son œuvre mathématique et réflexions sur son influence dans le développement des probabilités en France [Attal 2003], [Emery et Yor 2006], [Azéma et al. 2006]. Marc Yor associe le nom de Schwartz à celui de Meyer pour les probabilités dans son article « Deux maîtres es-probabilités » [Yor 2003].

40. Schwartz probabiliste est présenté par Michel Émery [Emery 2011].

41. Un exemple récent d'étude de notes de cours manuscrites – celles de Borel sur un cours de Paul Langevin– est proposée par Martha Cecilia Bustamante ; [Bustamante A paraître].

42. https ://bibli-aleph.polytechnique.fr (Page consultée le 01/09/2013)

5.4.2 Séminaires de probabilités et notes manuscrites : ébauche descriptive.

Nous présentons ici rapidement les notes manuscrites conservées par Schwartz, qui traduisent son assistance à des séminaires de probabilités. Il n'est pas toujours possible à la consultation de ces notes de savoir si Schwartz assistait en personne au séminaire, mais elles traduisent néanmoins une relecture des exposés publiés, qu'il commente et annote, ainsi qu'une réappropriation personnelle voir des corrections si nécessaire. Parfois même, le contenu de sa note dépasse l'exposé qu'il étudie et amène à l'écriture d'un résultat nouveau. Le séminaire le plus majoritairement cité, et auquel Schwartz participe, est le séminaire de probabilités de Strasbourg.

Quelques mots sur le séminaire de probabilités de Strasbourg Le séminaire de probabilités de Strasbourg ainsi que sa publication dans les *Lecture Notes* à partir de 1967 ont joué un rôle très important dans l'activité des probabilistes, ainsi que le relatent notamment Stéphane Attal [Attal 2003] et Marc Yor [Yor 2006]. Le rôle de Meyer dans sa réécriture et la composition des volumes publiés est particulièrement mis en avant, ainsi que l'utilité de ceux-ci comme outils de travail pour les probabilistes (« working tool ») [43]. Marc Yor analyse le contenu des premiers volumes publiés du séminaire (les 15 premières années), et décrit longuement le séminaire ainsi que le travail de Meyer et de ses collaborateurs :

> Not only was Paul André Meyer a virtuoso of probability theory, potential theory, and so on, but he also had his own deep vision of establishing an easily accessible body of knowledge, essentially by concentrating his own publications, as well as those of his students, collaborators, etc., in Séminaire Notes. Here he was following the tradition of the Brelot-Choquet-Deny mimeographed volumes.
>
> This led to the birth of the Séminaire de Probabilités, which appeared annually from 1967 onwards, each volume totalling between 200 and 500 pages, within the Springer Lecture Notes in Mathematics series. In each S´eminaire, Meyer systematically discussed the main developments of the moment, at an international level, of research in probability.
>
> This really was a titanic work, into which Meyer threw himself, with all his intellectual strength and enthusiasm, together with the help of C. Dellacherie and M.Weil. He often presented much clearer versions than the original works, he extended the results of many authors, from the continuous to the discontinuous case, from the integrable to the non-integrable case, and so on . . . , so that the Séminaire became an indispensable working tool for any researcher concerned with stochastic processes. In fact, Meyer always insisted on this aspect of the Séminaires, and often compared them to the « working book » of a general medical doctor, the pages of which need to be replaced as medicine evolves. With each volume, Meyer provided some comments, improvements, and corrections to previous articles, always closely related to the most recent developments in the subject.
>
> [Yor 2006, p.15-16]

Schwartz « assiste » à ce séminaire de probabilités, il y participe de plusieurs manières. Il donne des exposés à partir de 1981, mais ses travaux sont mentionnés bien plus tôt, notamment par Meyer en 1973, puis Meyer et Stricker en 1979. Il lit le séminaire au moins à partir de 1972, ainsi que l'examen de ses notes manuscrites l'indique.

Une liste des notes manuscrites sur les probabilités On trouve 22 notes qui parlent de séminaires de probabilités, dont je donne une liste ici (5.1), à partir desquelles on peut

43. [Yor 2006, p.16].

préciser l'usage que Schwartz fait de sa lecture de l'exposé.

Schwartz indique en général les références précises lorsqu'il travaille sur un exposé publié, mais celles-ci ne sont pas toujours exactes. Il mentionne parfois les « lacunes » de l'article qu'il lit et commente, et corrige certaines erreurs (« un peu obscur, avec une erreur », écrit-il à propos de l'une des exposés »). Il écrit par exemple : « Cela contredit ce que dit Neveu, séminaire nov 1974 page 4 en haut » et donne ensuite un contre-exemple. Il prend en compte non seulement les résultats ponctuels de l'exposé, mais aussi l'« esprit de l'ensemble des exposés », ainsi qu'il le note. Il caractérise parfois son travail d' « Etude non profonde » et précise qu' « il y a peut-être qqs erreurs ». Lorsque le sujet de l'exposé est proche de certains de ses travaux, il essaye parfois d'en reformuler le contenu. Par exemple on lit qu'il veut « fabriquer à partir de là un processus de Markov avec les axiomes de [s]on article Fourier 1977, page 212 » (il s'agit de [Schwartz 1977]). Parfois on voit que les articles qu'il étudie citent certains de ses articles (comme [Schwartz 1973]), prouvant ainsi son appartenance au séminaire (il s'agit là de celui de Strasbourg). Il peut commenter le contenu de l'exposé en lien avec son propre travail : « Ceci est la partie connue, non démontrée dans mon article sur les martingales conformes ». Parmi les modifications qu'il effectue en reprenant l'exposé, il peut adapter le vocabulaire, transformant ainsi par exemple « mesure de Radon ≥ 0 » au lieu de « mesure de probas ».

Ainsi, pour Schwartz, assister au séminaire de probabilités de Strasbourg peut notamment être considéré comme un marqueur de son intégration dans une certaine communauté probabiliste, celle qui se construit autour de Paul-André Meyer et dont le séminaire est un trait primordial de définition.

De manière plus générale, assister à un séminaire se fait en plusieurs temps. La présence au séminaire tout d'abord, qui a une forte dimension sociale, celle du groupe qui se réunit régulièrement. Durant l'exposé, l'auditeur écoute l'exposé, et peut-être prend des notes ; il peut aussi poser des questions. Vient ensuite un temps ultérieur, celui de la relecture de ses notes, voire de la réécriture, de la prolongation éventuelle de l'exposé, de la mise en place de ses propres idées le cas échéant. Il est particulièrement difficile de saisir ce rôle d'auditeur, pourtant essentiel dans un séminaire puisque c'est pour lui que parle l'orateur. La rapide incursion dans les notes de Schwartz permet de saisir un peu de ce processus actif, et de sa place dans la vie de recherche quotidienne de Schwartz.

5.5 Laurent Schwartz, orateur. Exposer à un séminaire.

5.5.1 Qu'est-ce qu'exposer ? Le rôle d'orateur.

Commençons par définir le rôle d'orateur. Qu'englobe l'action de parler à un séminaire ? Comment décrire le rôle de l'orateur ? Comme pour celui qui assiste au séminaire, cela ne se réduit pas à la seule heure de présence lors du séminaire. Il y a un travail avant, pendant et après, que l'on peut décrire ainsi :

– préparer un exposé (à partir d'un article qu'on lit – la lecture étant alors une étape préliminaire –, ou bien de ses propres recherches ; puis le préparer : il y a là une réorganisation du contenu)
– exposer, parler
– rédiger son exposé (éventuellement). Cette étape peut parfois être réalisée par une tierce personne. [44]

44. La personne qui rédige l'exposé peut être celle qui l'a faite, ou bien l'un des auditeurs.

A.I.1.1.22 (37 feuilles) Paris, janvier 1972. Processus bien mesurables et prévisibles, et temps d'arrêt, d'après Dellacherie, séminaire Strasbourg, V, p.232. Dernière feuille (37) : Lacunes diverses.
A.I.1.1.153 (14 feuilles) Séminaire Neveu-Kipnis 1974-75. Exposé Neveu, novembre 1974.
A.I.1.1.157 (4 feuilles) Autouillet, août 1975. Séminaire KGB sur les marches aléatoires. Lecture du séminaire, et Schwartz écrit ses remarques.
A.I.1.1.206 (91 + 18 feuilles) Gresse en Vercors, juillet 1976. Intégrale stochastique dans le cadre L^2, d'après le cours de P.A.Meyer, Séminaire de Strasbourg, 1976. Compléments aux espaces $\mathcal{H}^p$ et BMO de martingales et cas hilbertien.
A.I.1.1.236 (12 feuilles) Berkeley, avril 1978. Article de Knight sur la prédiction (Séminaire Strasbourg, X, 1974-75, n°511,p.86).
A.I.1.1.254 (2 feuilles) Madison, avril 1980. Un théorème sur les temps d'arrêt. (P.A.Meyer et Stricker, Sur les semi-martingales au sens de L.Schwartz, Séminaire Strasbourg, 1979).
A.I.1.1.256 (10 feuilles) Canaries (Ténérife ?), février 1981. Séminaire Probas, Strasbourg, VII, 321, 1973, p. 198. Limites médiales de Mokobodzki.
A.I.1.1.268 (18 feuilles) Autouillet, Pâques 1982, fin à Montréal, avril 1982. Commentaire sur l'article de P.A.Meyer : *Flot d'une équation différentielle stochastique*, Séminaire Strasbourg, 1979-80, XV, n°850 et sur la thèse d'Emery.
A.I.1.1.321 (2 feuilles) Autouillet, été 1984 ? Les travaux de Zheng, Darling, Meyer, etc...sur la convergence des martingales à un temps d'arrêt T, Séminaires Strasbourg, 1983, XVII, en 1984, XVIII.
A.I.1.1.376 (1 feuille) Sur $\mathbb{R}_+ barre$, semi-martingale locale = semi-martingale, dans le cas continu. Séminaire probas XV, corollaire (6.4) page 52. Plus simple qu'en 1980.
A.I.1.2.1.1.2 (4 feuilles) Séminaire Fortet, 1972. Désintégrations régulières.
A.I.1.2.4.1.1 (4 feuilles) Séminaire Fortet, 1972. Désintégrations régulières et Markov.
A.I.1.2.4.1.2 (5 feuilles) Séminaire Neveu, octobre 1979. Equations différentielles stochastiques.
A.I.1.2.4.1.3 (6 feuilles) Exposé séminaire Neveu, 24 février 1976. Processus de Markov et désintégrations régulières. Phocotopie.
A.I.1.2.4.1.4 (11 feuilles) Résumé pour le groupe de travail Géométrie-Probabilités. Photocopie.
A.I.1.2.4.1.5 (6 feuilles) Séminaire Fortet 1972. Désintégrations régulière. Exposé de Schwartz ? Photocopie.
A.I.1.2.4.1.10 et 11 (5 feuilles) X, 15 janvier 1987 : Semi martingales. Séminaire 1983 : Probabilité sans proba. (note 114 ?) cf 248B.
A.I.1.2.4.1.20 (4 feuilles) Ruth Williams, brownian motion, Fukushima. Séminaire Neveu, 17 octobre 1989. Notes moitié en anglais, moitié en français.
A.I.1.2.9.3.1 (7 + 6 + 9 + 2) Mouvements browniens et potentiels. Suppléments. Temps d'arrêt pour un processus décalé. Processus markovien à accroissements aléatoires indépendants. Démonstration du corollaire 3.2 de l'exposé 5, page 5.11.
A.I.1.2.9.3.12 (10 feuilles) Exposé Séminaire Strasbourg. Principe de dualité pour des espaces de suites associés à une suite de variables aléatoires. Document tapé et notes manuscrites (photocopiées) de quelqu'un d'autre.
A.I.1.2.9.3.16 (6 feuilles) Séminaire Fortet 1972. Désintégrations régulières. Photocopie.

Figure 5.1 – Liste des notes manuscrites sur des séminaires de probabilités, Archives de l'École polytechnique, fonds Laurent Schwartz.

Il est en fait difficile de rendre compte du rôle d'orateur, englobant ces trois aspects. L'oralité [45] ne laisse pas – ou peu – de traces, et l'on ne dispose pas d'enregistrements des exposés. Même un enregistrement ne rend pas compte de l'utilisation de l'espace, du tableau noir, de la salle, du contact que l'orateur peut avoir avec l'assistance. Des études ethnomathématiques ont été réalisées, qui visent à traduire et analyser certains de ces aspects. Par exemple, Christian Greiffenhaguen [Greiffenhagen 2008] analyse des vidéos d'un séminaire de troisième cycle, et présente notamment dans son article des photos des tableaux sur lesquels les mathématiques sont exposés. Michael Barany, dans sa dissertation « Mathematics in context » [Barany 2010] analyse des séances de séminaire, et s'est intéresssé plus particulièrement, avec Donald MacKenzie [Barany et MacKenzie 2014], à la craie et au tableau noir [46] Aujourd'hui, l'exposé au séminaire semble avoir un rôle spécifique dans une carrière mathématique, un peu comme le serait – à un niveau plus élevé – la soutenance de thèse ; mais cet aspect n'est pas discuté ici.

Attachons-nous pour le moment aux commentaires du public sur Schwartz orateur. Il parlait bien, ses exposés ainsi que ses cours sont célèbres. Les qualités de Schwartz enseignant tout comme celles de Schwartz orateur à un séminaire sont unanimement louées. Jacques Roubaud se souvient :

> J'ai connu, étudiant, un autre exemple d'orateur mathématique éblouissant, Laurent Schwartz [10]. [Roubaud 2011]

Nous disposons ainsi parfois des commentaires des acteurs, même si c'est rare qu'ils expriment sur quoi repose la qualité de l'orateur. Nous avons surtout la chance de posséder, quand les exposés ont été publiés, une trace écrite. Cette trace écrite prend dans le cas du séminaire une forme particulière qu'il est intéressant d'étudier. Le mode de publication d'un exposé de séminaire, ainsi que sa forme rédigée, diffèrent de celles d'un article, et en étudiant cela, l'on dévoile – au moins partiellement – ce que signifie « exposer à un séminaire ». Il s'agit d'une publication rapide assez immédiate, à un temps t donné qui peut conserver des fautes, et est en général rédigée de manière à introduire un sujet, et non uniquement pour des spécialistes. Le style est plus direct, on trouve peu de références biobliographiques, et l'exposé publié n'a pas la même valeur dans la bibliographie. Ce mode de publication particulier est parfois commenté :

> 13. Pendant de nombreuses années, il y eut à l'Institut Henri Poincaré, l'I.H.P. de notre jeunesse, un séminaire Bénabou, où il parla de très nombreuses fois. J'ai devant moi en ce moment où j'écris, un des quelques fascicules qui enferment des transcriptions de certains de ces 'talkings' [11]. Le titre : Sur la logique des catégories, est précédé d'une note préliminaire, de ton caractéristique, d'où j'extrais ceci :
>
> Ceci n'est pas, je dis bien, n'est pas une rédaction mathématique, c'est la transcription presque mot à mot de trois exposés de séminaire (juin 1975).
>
> C'est à la fois faute de temps qu'une rédaction complète au sens classique du terme, n'a pas été faite, mais aussi pour faire l'essai de ce pourrait donner la transcription d'un exposé avec ses défauts quant à la présentation, en essayant de garder si c'est possible, certain aspect de spontanéité [12]. [Roubaud 2011]

45. On peut se référer aux travaux de Florence Waquet [Waquet 2003] ou d' Erwin Goffman qui étudie « La conférence » [Girin et Goffman 1987].

46. Ils écrivent ainsi :

> Chalk, here, functions both as a metaphor and as a literal device in the construction and circulation of new concepts. We begin, after a brief review of extant literature, by describing the quotidian contexts of such work. We then explore the blackboard as a site of mathematical practice before finally expanding on its metaphorical and allusive significance in other forms of research.
>
> [Barany et MacKenzie 2014, p.2]

On en apprécie la « spontanéité » qui ressemble à celle de l'exposé qui a été donné. Stéphane Attal présente l'esprit particulier de la publication du séminaire de probabilités de Strasbourg

> Cette édition annuelle a constitué à une époque une véritable référence. Certains articles ou cours qui y figurent ont influencé toute une génération de mathématiciens. C'est une publication, originale à plus d'un titre, à laquelle Meyer était très attaché. D'abord parce que c'était son enfant, mais aussi pour le vent de liberté qui y soufflait. Ces volumes contenaient bien entendu des articles fondamentaux qui restent des références 30 ans plus tard, mais aussi des remarques, des mises au point, des cours, et tout un joyeux mélange qui a été le ferment de la progression des idées et de la communication entre chercheurs de toute une époque.
>
> Ce mélange a aussi porté du tort à l'image de cette publication auprès des mathématiciens non probabilistes, qui l'ont considérée comme une publication pas très sérieuse. On connaît des exemples de commissions de spécialistes qui ne comptent pas les articles publiés dans cette série comme de véritables publications.
>
> Il est certainement dommage que l'esprit scientifique au sens large de cette revue, cette liberté d'écrire ce que l'on jugeait important, loin de la pression des commissions, du comptage des publications, aient été contraints de reculer.
>
> [Attal 2003, p.30]

La « liberté » possible dans cette publication apporte quelque chose de différent par rapport à un mode de publication plus classique.

Nous allons nous intéresser ici à Schwartz en tant qu'orateur à un séminaire particulier, afin de caractériser l'instantanéité de l'exposé au séminaire ; ce, à travers la lecture de ses exposés publiés. Il ne s'agit bien évidemment pas du seul séminaire auquel il ait parlé, mais cela semble révélateur de ce rôle particulier de l'orateur. Schwartz est ici orateur à un séminaire qu'il n'organise pas, tout du moins pas du tout seul. Nous présentons ici un exemple bien documenté et précis, à savoir deux exposés donnés par Schwartz au séminaire Bourbaki en 1950.

5.5.2 Un exposé au séminaire Bourbaki

En 1998, Armand Borel écrit ainsi :

> Those first encounters quickly changed my vision of Bourbaki. All these people - the elder ones, of course, but also the younger ones - were very broad in their outlook. They knew so much and knew it so well. They shared an efficient way to digest mathematics, to go to the essential points, and reformulate the math in a more comprehensive and conceptual way. Even when discussing a topic more familiar to me than to them, their sharp questions often gave me the impression I had not really thought it through. That methodology was also apparent in some of the lectures at the Bourbaki seminar, such as Weil's on theta functions (Exp. 16, 1949) or Schwartz's on Kodaira's big *Annals* paper on harmonic integrals (Exp. 26, 1950).
>
> [Borel 1998, p.374]

Armand Borel a été membre de Bourbaki de 1949 à 1973, et il écrit dans cet article ses souvenirs, ainsi que sa rencontre avec le collectif de mathématiciens. Cette citation est particulièrement intéressante par la présentation qu'elle donne du séminaire Bourbaki. On y voit ressortir plusieurs aspects, que ce soit sur le style du séminaire Bourbaki, ou la méthodologie propre à ses orateurs. Notamment, en ce qui concerne l'exposé mentionné de Schwartz, en paraphrasant la citation de Borel, nous allons essayer de voir comment Schwartz a digéré l'article de Kodaira, est allé à l'essentiel et l'a reformulé de manière plus compréhensible et conceptuelle.

digérer... Schwartz a en effet digéré les 79 pages, en anglais, du mémoire de Friedrich Kodaira, paru en 1949 dans *The Annals of Mathematics* et intitulé « Harmonic Fields in Riemannian Manifolds (Generalized Potential Theory) » [Kodaira 1949]. Il a ensuite donné deux exposés au séminaire Bourbaki en mars et mai 1950. Il s'agit des exposés 26 et 32. Les exposés ont été ronéotypés, on peut supposer que le texte a été distribué directement aux participants comme c'est l'habitude au séminaire Bourbaki. Ils ont ensuite été réédités en 1958, avec ajout de commentaires de l'auteur. C'est la comparaison de cette édition de 1958 [Schwartz 1958b], [Schwartz 1958c] avec l'originale [Schwartz 1950a], [Schwartz 1950b] qui va nous intéresser ici.

aller à l'essentiel... Kodaira introduit son mémoire, en décrivant les résultats présents dans chaque partie. Schwartz, lui, ne le fait pas. Mais l'essentiel de son exposé semble être la présentation des « formes différentielles harmoniques sur un espace de Riemann compact » [47], Aller à l'essentiel, c'est présenter le résultat loué par Weyl, à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens de 1954, lorsqu'il décerne la médaille Fields à Kodaira :

> In an impressive paper « Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory) » published in the Annals of Mathematics 1949 immediately after his arrival in the United States, Kodaira proves the existence of harmonic forms with prescribed singularities (and periods). (...) In the same paper Kodaira also gave the analog of Riemann-Roch's theorem for harmonic forms on a compact Riemannian manifold.
>
> [Weyl 1954-1957, p.169]

reformuler... Les exposés publiés de Schwartz et le mémoire de Kodaira sont très différents. Le vocabulaire utilisé n'est pas le même, et Schwartz reformule tout ce qu'il présente dans le cadre de ses noyaux-distributions et de ce qu'il nomme les « distributions-formes différentielles ». Nous allons étudier en détail ces reformulations et leurs limites.

En quoi les exposés de Schwartz diffèrent-t-ils du mémoire original de Kodaira ?

Schwartz précise en note au début de son premier exposé qu'il « s'éloigne assez considérablement de KODAIRA ». Ses préliminaires portent en effet sur la théorie des noyaux, les noyaux-distributions, qui sont des notions extraites de ses propres travaux.

Revenons aux deux exposés proposés par Schwartz. Deux questions se posent. On se demande tout d'abord pourquoi Schwartz commence par introduire une très longue partie préliminaire sur sa théorie des noyaux -qui n'est pas traitée par Kodaira dans son article- jusqu'à en faire le cadre principal de son premier exposé. Le deuxième exposé semble plus proche des travaux de Kodaira. Il semble donc que Schwartz insère ses propres travaux et réécrit complètement le mémoire de Kodaira.On se demande enfin pourquoi Schwartz considère en 1958, lors de la réédition du séminaire Bourbaki, que ses travaux exposés ici, ainsi que l'article de Kodaira, sont « archaïques » .

Premières lectures de ces deux textes

A première vue, l'article de Kodaira et l'exposé de Schwartz ont donc l'air très différents. Il nous faut analyser cette première impression, confirmée par Schwartz, précisant

47. [Schwartz 1958b, p. 26-13]. Ce que Schwartz appelle espace de Riemann compact et Kodaira « Riemannian manifolds » sont des variétés analytiques complexes.

KODAIRA

Chapter I Fields of Tensors and Tensor Densities in Analytic Manifolds

1. Combinatorial Topology
2. Fields of Tensors and Tensor Densities
3. Théorems of G. de Rham

Chapter II Harmonic Fields in Riemannian Manifolds

4. Fundamental Decomposition Formulae
5. A Theorme of W. V. D. Hodge

Chapter III Fundamental Theorem

6. Fundamental Theorem
7. Elementary Solutions
8. The Proof of the Fundamental Theorem
9. Some Formulae for Modified Elementary Solutions
10. A Proof of the Theorem 2

Chapter IV Harmonic Fields with Singularities

11. General Existence Theorem
12. Harmonic Fields of the 3rd kind
13. Convergence Théorem
14. Harmonic Fields of the 2nd kind
15. Singular Points of Finite Orders

Chapter V Harmonic Fields in Closed Riemannian Manifolds

16. Summary of Some Results Obtained

Figure 5.2 – Plan de Kodaira

en note au début de son premier exposé qu'il « s'éloigne assez considérablement de KODAIRA » [Schwartz 1958b, p. 26-01].

Kodaira écrit un mémoire de 79 pages, en anglais, qu'il publie en 1949 dans *The Annals of Mathematics* alors que Schwartz donne deux exposés, en mars et mai 1950, au séminaire Bourbaki, qui donnent lieu à une réédition en 1958, de deux textes, de 19 et 12 pages respectivement, écrits en français. Il s'agit d'une seconde édition, dans laquelle Schwartz a ajouté quelques notes de bas de page, ainsi que de nouvelles références bibliographiques., que nous étudierons un peu plus loin.

Le titre est le même, et Schwartz se réfère explicitement au mémoire de Kodaira. Par contre, le vocabulaire employé par Schwartz, ainsi que le plan de ses exposés, diffèrent totalement de l'article de Kodaira. Pour s'en convaincre, voici les deux plans (Figures 5.2 et 5.3).

Le contenu même de l'exposé de Schwartz contient de nombreux éléments qui n'existent pas chez Kodaira. On se demande tout d'abord pourquoi Schwartz commence par introduire une très longue partie préliminaire sur sa théorie des noyaux -qui n'est pas traitée par Kodaira dans son article- jusqu'à en faire le cadre principal de son premier exposé. Schwartz commence en effet par des « Préliminaires sur la théorie des noyaux », dans

SCHWARTZ
Exposé 1

1. Préliminaires sur la théorie des noyaux
    1. Noyaux distributions
    2. Exemples
    3. Prolongement de l'application $\mathcal{L}(K)$
    4. Produit de composition de Volterra
    5. Noyaux compacts, réguliers, etc.
2. Les distributions sur un espace de Riemann
    6. Définition des distributions sur une variété
    7. Multiplication, différentiation extérieure
    8. Homologie, théorèmes de de Rham
    9. Distributions sur un espace de Riemann
    10. L'opération $\star$ locale
    11. Différentiations, laplacien
    12. Homologie et $\star$-homologie
    13. Noyaux sur un espace de Riemann
3. Les formes différentielles harmoniques sur un espace de Riemann compact
    14. La décomposition fondamentale de $\mathcal{H}$
    15. Noyau élémentaire du laplacien Δ
    16. Paramétrix
    17. Prolongement de la décompositin fondamentale
    18. Les théorèmes de Hodge, etc. (V^n compact)
    19. Le noyau de Green

Exposé 2

1. Nombre algébrique d'intersections (De RHAM)
2. Formes différentielles de singularités données
3. Variété compacte connexe holomorphe à 1 dimension complexe
4. Différentielles holomorphes de degré 1 ou différentielles abéliennes de 1re espèce
5. Différentielles méromorphes de degré 1
6. Fonctions holomorphes, méromorphes
7. Théorème de Riemann-Roch
8. Théorème d'Abel

Figure 5.3 – Plans des exposés de Schwartz.

lesquels il expose – pour la première fois semble-t-il – ses « noyaux distributions » [48] Il continue par définir les « distributions sur un espace de Riemann ». Il précise cependant ici que « les paragraphes 6,7,8, sont donnés pour mémoire, mais inutiles dans la suite. » [Schwartz 1958b, p.7]. Il définit au paragraphe 9 ce qu'il appelle une « distribution-forme différentielle » [49].

Comparaison des références bibliographiques

Kodaira donne une courte bibliographie à la fin de son article, mentionnant notamment des travaux de Hodge, ainsi que la thèse de de Rham. Il écrit aussi que les personnes qui ont relu son article lui ont indiqué d'autres références, auxquelle il n'avait pas eu accès, notamment un autre article de Hodge, mais surtout les travaux de de Rham sur « les formes différentielles harmoniques ». La bibliographie proposée par Schwartz ne contient que des références postérieures à 1950 ; elle a été rajoutée à la seconde édition du séminaire publié, parue en 1958.

Analyse de ce qui est dit « périmé »

Schwartz précise aussi dans une note [Schwartz 1958b, p.26-01], lors de la deuxième édition du séminaire en juillet 1958, qu' « aussi bien le mémoire de KODAIRA que l'exposé présenté ici sont aujourd'hui devenus "archaïques" et n'ont plus d'intérêt à être consultés, sauf pour des points très particuliers », et il donne des références plus récentes. Il précise ensuite [Schwartz 1958b, p.26-04] qu'« On trouvera sur les courants comme sur la théorie des formes harmoniques, développées dans la suite, des exposés modernes et complets dans les ouvrages signalés plus haut (...) » [50].

On remarque que l'exposé de Schwartz est déjà périmé, archaïque, selon ses propres termes, au moment où il est republié (8 ans après). Le séminaire est un lieu vivant, avec un ancrage particulier dans le présent. Qu'on y présente des mémoires anciens pour lesquels on a un regain d'intérêt , ou bien des travaux en cours de recherche sur lesquels on veut l'avis du public, le séminaire présente un instantané de l'instant présent, qui révèle les intérêts de l'orateur, et donne une certaine cartographie bibliographique. Afin de préciser la place de cet instantané, nous allons nous intéresser aux courants de Georges de Rham qui semblent être au cœur de la reformulation de l'article.

Les courants de Georges de Rham

Georges de Rham (1903-1990) est un mathématicien suisse. Il présente sa thèse en 1931 « Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions » [Rham 1931] dont le contenu est analysé dans la thèse de Juliette Leloup, qui la décrit brièvement et la replace dans le contexte de l'analysis situs :

> Georges de Rham reprend l'analysis situs combinatoire d'Hermann Weyl et la théorie des intersections et des enlacements pour étudier les propriétés du champ d'intégration et des intégrales multiples dans une variété close à n dimensions. Il donne les démonstrations de théorèmes énoncés par Élie Cartan dans une note aux Comptes

48. Il est intéressant de constater qu'il expose ici sa théorie des noyaux avant le Congrès International de 1950. Le contenu mathématique est sensiblement le même, la présentation diffère cependant : toutes les considérations de physique sont écartées, la fonction de Dirac n'est par exemple pas mentionnée. Nous renvoyons au chapitre 4 pour plus de détails sur la théorie des noyaux.

49. Ce que de Rham appellera « courant », nous revenons là-dessus plus loin.

50. On peut noter qu'une autre des questions posées par l'exposé est résolue dans la thèse de Malgrange, ce qui est mentionné par Schwartz [Schwartz 1958b, p. 26-15].

> rendus de l'Académie des sciences « Sur les nombres de Betti des espaces de groupe clos » en 1928. C'est à l'occasion de ces démonstrations que de Rham introduit sa notion de courant, dont il affirme qu'elle a guidé ses recherches depuis 1928. D'après de Rham, cette notion lui permet, dans une variété à n dimensions, de faire le lien entre un champ d'intégration à p dimensions et une forme différentielle extérieure de degré $n-p$, qui apparaissent comme deux aspects de cette même notion.
>
> [Leloup 2009, p. 218-219]

Pour un récit autour de l'analysis situs à l'époque, qui s'appuie d'ailleurs sur les souvenirs de de Rham [Rham 1980], on pourra lire l'article de Michèle Audin, « Cartan, Lebesgue, de Rham et l'analysis situs dans les années 1920. Scènes de la vie parisienne. » [Audin 2012a]. Leloup précise aussi, à propos de la notion de courant, que le rapport de la thèse de de Rham est déclaré manquant aux archives, et donc qu'on ne peut pas savoir « comment Elie Cartan, rapporteur du mémoire d'après [Rham 1980, p.26] rend compte de cette notion et juge de son importance et de sa portée » [Leloup 2009, p.219].

Ainsi que l'écrit déjà Henri Cartan lorsqu'il expose « Les travaux de Georges de Rham sur les variétés différentiables » en l'honneur de son soixante-cinquième anniversaire [Cartan 1970, p.1-11], l'idée des courants chez de Rham est présente depuis sa thèse, mais leur définition prendra plusieurs formes et la formulation ne sera définitive qu'après la découverte des distributions par Schwartz.

> L'idée qu'une chaîne de dimension p et une forme différentielle de degré $n-p$ (dans une variété différentiable de dimension n) sont deux aspects d'une même notion plus générale apparaît dans les travaux de De Rham dès sa Thèse ; puis il y revient à plusieurs reprises. Par analogie avec les phénomène électromagnétiques, De Rham propose le nom de « courant » pour cette notion plus générale, qui reste à définir avec précision. (...)
>
> Ce ne sera qu'après que L. Schwartz aura introduit avec précision la notion de *distribution* que de Rham trouvera la forme exacte à donner à la définition d'un *courant.*
>
> [Cartan 1970, p.4-5]

De Rham soutient sa thèse en 1931, « Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions. » On trouve la première définition des courants en 1936, mais l'idée de dualité est déjà présente dès ses premiers articles [Rham 1928], [Rham 1929] ; et de Rham précise, dans l'introduction de son livre *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques.* écrit en 1955, que cela guide ses recherches dès ce moment là :

> Le concept de *courant*, en tant que notion générale comprenant comme cas particuliers les formes différentielles d'une part et les chaînes d'autre part, est la clé qui permet de comprendre comment les propriétés d'homologie d'une variété se manifestent à la fois dans l'étude des formes différentielles et dans celle des chaînes. Cette idée a guidé mes recherches dans ce domaine dès 1928.
>
> [Rham 1955, p.v]

Voilà donc la première définition des courants qu'il donne en 1936 :

> **Définition.** Un $p-$*courant élémentaire* est l'ensemble (c^{p+k}, ω^k) d'un $(p+k)$-champ et d'une k-forme ω (définie au moins sur c^{p+k}. p est la dimension du courant. Comme $0 \leq p+k \leq n$ et$0 \leq k \leq n$, l'entier k ne peut prendre que les $n-p+1$ valeurs $0, 1, ..., (n-p)$; il y a $(n-p+1)$ types de p-courants élémentaires.
>
> Un p-*courant* est la réunion d'un nombre fini de p-courants élémentaires.
>
> [Rham 1936]

Il précise plus haut d'où lui est venue l'idée et la dénomination de courant :

> On voit que, dans l'espace ordinaire, une même entité physique (le courant électrique), est représentée dans un cas par un champ à une dimension (courant linéaire), dans un autre cas par une forme de degré deux (courant de volume). Cela suggère l'idée que dans une variété à n dimensions V, un p- champ et une $(n-p)$-forme doivent être deux aspects d'une même notion plus générale, que j'appellerai courant à p-dimensions.
>
> [Rham 1936, p.220-221]

Cette notion de courant semble déjà très importante à André Weil, en séjour à Genève, ainsi qu'il le décrit dans ses « Souvenirs d'apprentissage » :

> A Genève les sources de distraction étaient moindres, et les conférences d'Elie Cartan et de Georges de Rham ne faillirent pas à m'impressionner. Déjà quelques années auparavant, j'avais été frappé de l'application que de Rham avait faite de ses théorèmes à la géométrie algébrique ; à Genève j'achevai de me convaincre de l'importance capitale de ces théorèmes, et de la notion de « courant » telle que de Rham l'introduisait alors ; notion provisoire du reste, car les « distributions » de Laurent Schwartz n'étaient même pas encore en gestation. Là aussi c'était l'anneau de cohomologie qui faisait son apparition, sous un aspect moins général que chez Alexander et Kolmogorov, mais que rendait plus concret l'intervention des formes différentielles. Celles-ci allaient devenir l'un de mes outils favoris dans l'étude des variétés.
>
> [Weil 1991, p.115]

Mais, ainsi que de Rham l'écrit à Schwartz en 1983 [51] :

> Mon cher Schwartz,
>
> Merci beaucoup de votre lettre du 20 août. En effet, votre article de 1945 aux Annales de Grenoble a été pour moi une véritable illumination.
>
> Auparavant, déjà en faisant ma thèse, excité par la Note d'Elie Cartan aux CR 1928 (Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos), j'avais senti que sur une variété à n dimensions, un champ à q dimensions et une forme différentielle extérieure de degré n-q sont deux aspects d'une même notion plus générale, que j'ai appelée courant et que j'ai exposée dans l'Ens. math. (1936). Mais c'est votre article qui a fourni la définition plus générale et très simple.
>
> Avec mes meilleures amitiés

De Rham écrit en fait à Schwartz dès 1949 pour lui demander s'il peut exposer les distributions. Il doit en effet donner un cours à Harvard en 1949, qu'il reproduira ensuite à Princeton en 1950 [52], puis en Suisse dans les universités de Genève et Lausanne :

> Je dois faire des cours à Harvard. Je me propose d'y parler des fonctionnelles linéaires et des formes linéaires sur les variétés. Naturellement, il est impossible de le faire maintenant sans parler de distributions. J'espère que vous ne voyez pas d'inconvénient à ce que je le fasse ? Je ne voudrais pas empiéter sur votre domaine réservé. En tout cas je ne toucherai pas à ce qui se rapporte aux transformations de Fourier ou de Laplace et au calcul symbolique, et il va bien sans dire que je n'oubliera pas de citer, chaque fois que l'occasion s'en présentera, non seulement vos travaux publiés, mais aussi nos conversations et le manuscrit que vous m'avez prêté.

Ce cours de de Rham est publié en 1955 et de Rham attribue une large place aux distributions dans son introduction :

> Mais c'est seulement la notion de *distribution*, introduite en 1945 par L. Schwartz, qui a fourni la définition précise adoptée ici. Dans notre terminologie, les distributions sont les courants de degré zéro, et un courant peut être considéré comme une forme différentielle dont les coefficients sont des distributions.
>
> [Rham 1955, p.v]

Voici la définition des courants qu'il donne alors :

51. Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz, B.I.1.1bis.
52. De Rham évoque à propos de ce séjour le séminaire Lefschetz. Cf souvenirs

1948/49	Exposé n°11.	Sur un mémoire de Petrowsky : "Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partiellerDifferentialgleichungenimgebietenichtanalytischenFunktionen"
	Exposé n°15.	Sur un deuxième mémoire de Petrowsky : "Über das Cauchysche Problem für System von partiellen Differentialgleichungen"
1949/50	Exposé n°26.	Sur un mémoire de K. Kodaira : "Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory)" I
	Exposé n°32.	Sur un mémoire de K. Kodaira : "Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory)", II
1951/52	Exposé n° 43.	Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables
	Exposé n°67.	Les travaux de L. Gårding sur les équations aux dérivées partielles elliptiques
1953-54	Exposé n° 87.	Solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants d'après B. Malgrange
1957-58	Exposé n°161.	La fonction aléatoire du mouvement brownien
1961-62	Exposé n°238.	Sous-espaces hilbertiens et antinoyaux associés
1963-64	Exposé n°269.	Les travaux de Seeley sur les opérateurs intégraux singuliers sur une variété
1979-71	Exposé n°386.	Produits tensoriels gp et dp, applications p-sommantes, applications p-radonifiantes

FIGURE 5.4 – Liste des exposés de Schwartz au Séminaire Bourbaki.

> Dans une variété à n dimensions V, un courant est une fonctionnelle $T[\varphi]$, définie sur l'espace vectoriel de toutes les formes φ, C^∞ avec un super compact dans V, qui est linéaire et continue, dans le sens suivant :
>
> Si φ_h $(h = 1, 2, ..)$ est une suite de formes C^∞ dont les supports sont tous contenus dans un même compact intérieur au domaine d'un système de coordonnées locales $x^1, ...x^n$, telle que chaque dérivée de chaque coefficient de la forme φ_h (représentées à l'aide de $x^1, ...x^n$) tende uniformément vers zéro pour $h \to \infty$, alors $T[\varphi_h] \to 0$ [53]
>
> [Rham 1955, Chapitre III, par.8]

L'exposé au séminaire, un instantané

En 1950, de Rham et Kodaira se rencontrent à Princeton. A la suite de leurs exposés (la majorité, 4 sur les 5, étant de de Rham) ils publient [Rham et Kodaira 1950]. Cela donne en quelque sorte une « nouvelle » version de l'exposé [54]. De Rham publiera une théorie plus complète des courants notamment en 1955 [Rham 1955]. L'exposé de Schwartz se situe donc entre l'article de Kodaira et le cours de de Rham, publié par de Rham et Kodaira. Il donne donc un instantané, une photo de l'écriture en train de s'écrire, la notion en train d'être définie. Il ne parle pas de courants, mais de fonctions-distributions.

5.5.3 Exposés de Schwartz au séminaire Bourbaki

Les différents exposés de Schwartz au séminaire Bourbaki permettent de suivre un peu l'évolution de ses préférences mathématiques, des distributions aux probabilités. On remarque aussi l'importance que prennent les travaux de ses étudiants, faisant ainsi écho à ce qui a été mentionné plus tôt.

Contrairement à l'idée généralement admise qui est celle qu'au séminaire Bourbaki, on n'expose généralement pas ses propres travaux, cela ne semble pas complètement vérifié dans le cas des exposés de Schwartz, même si au vu des titres, cela semble au moins formellement le respecter. [55]. Voici plusieurs cas que l'on trouve en analysant les exposés faits par Schwartz, et qui permettent de préciser la nature des exposés faits par Schwartz. On peut distinguer plusieurs cas. Tout d'abord, celui où Schwartz dit exposer les travaux de quelqu'un mais reformule complètement l'exposé, en partant de ses propres recherches. Nous l'avons constaté pour ses exposés des travaux de Kodaira [Schwartz 1950a], [Schwartz 1950b] ; c'est aussi le cas lorsqu'il expose les travaux de Petrowski [Schwartz 1949b], [Schwartz 1949a]. Schwartz expose aussi les travaux de plusieurs de ses étudiants : ceux de Malgrange [Schwartz 1953c] et de Glaeser, à l'occasion de son exposé sur les fonctions différentiables de Whitney [Schwartz 1951c]. Il peut aussi exposer ses travaux personnels, comme dans [Schwartz 1962], [Schwartz 1970] ; ou encore ses travaux associés à ceux d'un autre [Schwartz 1964]. Enfin, l'un de ses exposés ne contient pas de sources. Il s'agit de [Schwartz 1958a]. C'est le premier exposé portant sur les probabilités [56] au séminaire Bourbaki ; il ne s'agit pas là d'exposer les travaux de quelqu'un mais plutôt d'une introduction d'un domaine non familier au séminaire.

On retrouve dans cette étude deux niveaux de la vie collective des mathématiques. Tout

53. Nous pouvons ici, ainsi que le fait d'ailleurs de Rham dans son ouvrage, renvoyer au livre de Schwartz [Schwartz 1950c] qui introduit les distributions et cette même notion de continuité nécessaire à leur définition.

54. Le récit de Pierre Dolbeault comme « témoin » de cette année à Princeton permettrait de prolonger, dans un autre travail, la description des mathématiques qui s'y construisent.

55. On voit plus bas que les exposés, dans certains cas, portent sur les travaux personnels de l'orateur. Mais ce n'est pas la majorité.

56. L'histoire des probabilités en France dans la seconde moitié du XX^{e} siècle reste à faire. A propos de Bourbaki et des probabilités, Schwartz écrit :

> Dans l'évaluation des probabilités, Bourbaki a commis de franches erreurs. (...)
>
> Bref, Bourbaki s'est écarté des probabilités, les a rejetées, les a considérées comme non rigoureuses et, par son influence considérable, a dirigé la jeunesse hors du sentier des probabilités. Il porte une lourde responsabilité, que je partage, dans le retard de leur développement en France, du moins pour tout ce qui concerne les processus, c'est-à-dire les développements modernes.
>
> [Schwartz 1997, p.172-173]

Le comportement et les choix de Bourbaki concernant les probabilités constituent un sujet d'études intéressant. On peut ainsi noter qu'n 1969, Bourbaki fait paraître un chapitre 9 d'intégration, visant à étendre aux espaces non localement compacts la théorie existante, qui n'y était pas valable, la rendant non applicable par le calcul des probabilités. La note historique précise ainsi :

> Cette méthode oblige à se restreindre aux espaces compacts ou localement compacts, mais ce n'est pas une gêne pour la presque totalité des applications ; bien mieux (...)
> C'est d'une toute autre direction que provient la nécessité d'élargir ce point de vue par la considération de mesures sur des espaces topologiques non localement compacts : peu à peu le Calcul des Probabilités amène à l'étude de tels espaces et fournit de nombreux exemples non triviaux. Peut-être faut-il rechercher la raison de l'influence tardive de ces développements sur la théorie de la mesure dans l'isolement relatif du Calcul des Probabilités, resté en marge des disciplines mathématiques traditionnelles jusqu'à une époque récente.

d'abord, au niveau de l'exposé du séminaire. Un exposé de séminaire présente un résultat en cours, une reformulation ou une réappropriation personnelle de certains travaux ; le travail d'exposition est donc aussi un travail de recherche. La réappropriation dans le cadre d'un exposé de séminaire accentue le rôle actif, présenté au chapitre 2, que Schwartz joue dans la diffusion de la théorie des distributions, de ses propres travaux – ici il s'agit des « noyaux-distributions ». L'exposé est le prétexte dans lequel s'insèrent ses propres recherches dans une reformulation du résultat – celui de Kodaira – qu'il présente. Enfin, l'exposé de séminaire est un instantané de la vie collective des mathématiques. Il donne une image à un instant précis d'un résultat mathématique particulier ; ainsi que nous l'avons perçu en étudiant de près les exposés parlant des travaux de Kodaira, on voit se transformer les textes mathématiques, on les voit vivre.

5.6 L'organisation de séminaires

5.6.1 Créer, organiser un séminaire

Il faudrait a priori distinguer le rôle de créateur de séminaire, de celui d'organisateur. Néanmoins, après cette introduction, je ne m'attarderai plus sur la distinction entre ces deux rôles. Définir et comprendre le rôle de créateur de séminaire suppose de disposer de discussions en amont de la création du séminaire, qui annoncent et justifient cette création. Ces discussions, ou ces réflexions, nous n'y avons pas accès en général ; ne subsistent que les discours a posteriori, avec ce que cela implique de réflexivité et de jugement de la part des narrateurs de récits. Nous verrons néanmoins un exemple pour lequel nous possédons plusieurs échanges avant la création ; à savoir les créations des séminaires Cartan et Bourbaki. Le créateur peut aussi être celui qui lègue son nom au séminaire – même si cela peut n'être le cas que quelques années plus tard. L'organisateur accole aussi son nom parfois au séminaire, comme nous le verrons dans quelques exemples. Les pratiques en terme de dénomination sont assez variées, ainsi que nous le verrons dans les exemples traités.

Organiser un séminaire, c'est :

- en choisir le thème (d'année, de la séance, du séminaire globalement)
- être plus ou moins présent et directif (en fonction de la personnalité de l'organisateur)
- choisir les orateurs
- déterminer le public des auditeurs (séminaire ouvert ou fermé)
- Plus généralement, définir une formule pour le séminaire, décider des modalités.

Pour étudier le rôle d'organisateur de séminaire, nous disposons des exposés lorsqu'ils ont été publiés – là encore, il semble que cette pratique ait aujourd'hui quasiment disparu, exception faite du séminaire Bourbaki – des titres et des orateurs ; des récits qui portent spécifiquement sur l'orateur, et plus particulièrement sur la manière qu'il a d'orchestrer son séminaire (les récits parlant d'un séminaire mentionnent quasiment toujours l'organisateur, mais on ne peut pas toujours en extraire grand chose concernant cette question ; et d'éventuelles correspondances, qui sont utiles car elles sont écrites au présent du séminaire.

Le but de cette partie est triple. Tout d'abord, présenter les sources dans une certaine globalité. On souhaite juger d'un séminaire dans son ensemble pour ensuite – et cette étude n'est pas faite ici – l'insérer de manière plus large dans le paysage mathématique. Ensuite, on aimerait expliciter et comprendre quelle vie collective des mathématiques est souhaitée et recherchée par l'organisateur. Peut-on ensuite juger du résultat ? Observe-t-on des réorientations éventuelles du séminaire afin d'améliorer ces objectifs ? Enfin, se pose la question de l'institution auquel le séminaire – ou son organisateur – est rattachée. Si l'institution est celle qui finance la publication du séminaire par exemple, qui en assure la secrétariat, peut-on pour autant dire qu'elle décide de la forme que prendre le séminaire ?

En présentant Schwartz comme organisateur et créateur de séminaires, l'on ne fait qu'aborder ces questions, qui s'affinent néanmoins. Les documents constitués pour cette présentation, que l'on a inclus en annexe (N p.359, O p.361, P p.377, Q p.383, R p.387) permettent aussi de définir le contour d'une possible étude ultérieure.

5.6.2 Conceptions simultanées des séminaires Cartan et Bourbaki, retour sur des discussions fondatrices

Séminaire Bourbaki préhistorique Le séminaire Bourbaki est publié à partir de 1948. Néanmoins, dans la réédition de 1966 par W.A. Benjamin, on peut voir la préface suivante :

> The Séminaire Bourbaki were presented first at the Ecole Normale Supérieure and more recently at the Institut Henri Poincaré. Publication of each year's seminars did not begin until 1948, when the lecture notes were prepared for distribution by the secretary of N. Bourbaki. The secretarial staff at the Institut Henri Poincaré has been responsible for the typing and reproduction of the notes for the past several years.
>
> There are three seminars presented in Paris during each academic year ; each seminar is given by en invited group of six mathematicians who are asked to report on a particular paper or papers from the current literature, or, in some cases, on their own work. In these lectures, which usually last for an hour or more, the speakers stress the main ideas in the papers rather than the technical details. The notes on each lectures are prepared in advance and distributed at the seminar to all participants. They include a bibliography of related work.
>
> [*Séminaire Bourbaki. vol. 1948-1949, 1949-1950 exposés 1-32* 1966]

L'éditeur mentionne ici des séances du séminaire Bourbaki qui ont lieu avant 1948. Ceci est noté et commenté par Audin [Audin 2011, note 135.4, note 220.3] qui fait le point sur les documents connus sur ce séminaire Bourbaki préhistorique, ainsi qu'elle le nomme. [57]

Cette préface est intéressante de par les aspects qu'elle mentionne : le mode de publication, la nécessaire inscription du séminaire dans une institution , les dates et la fréquence, le choix des sujets, ainsi que le mode d'exposé.

Discussions pendant l'été 1947 Le séminaire Bourbaki publié commencera en décembre 1948. Pendant l'été 1947, on a toute une série de discussions entre Cartan et Weil, auxquelles Samuel et Dieudonné semblent être impliqués à la lecture des lettres. Les lettres concernant cette discussion, et qui ont été publiées dans la correspondances Cartan-Weil éditée par Michèle Audin [Audin 2011] montrent qu'il y a eu débat concernant la (re-)création de ce séminaire : quelle forme doit-il prendre ? Sur quoi doit-on travailler ? Quelles leçons tirer des séminaires Hadamard et Julia ? Je n'ai pas trouvé de discussions concernant la durée et la fréquence des exposés. Le séminaire Bourbaki a néanmoins la particularité d'avoir lieu sur 3 jours , et ce deux ou trois fois par an. Cela semble avoir été le cas dès le « séminaire pré-historique », pour reprendre l'expression de Michèle Audin (p. 570, Note 220.3), et p.526, note 107.1, dans laquelle elle précise que « Le séminaire Bourbaki commença sans doute, en tout cas se tint les 19, 20 et 21 janvier 1946 (avec des exposés de Pauc, Ehresmann, Dieudonné et Schtzenberger) et les 9,10 et 11 mars (avec Colmez, Choquet, Lichnérowics et Hervé) –comme nous l'apprend un des cahiers d'Henri Cartan. ». Cette faible fréquence et longue durée, ce regroupement de plusieurs exposés permet aux mathématiciens qui sont en province de venir y assister.

57. On peut citer notamment deux documents issus des Archives Bourbaki, hcsb_ 001 et hcsb_ 002.

A l'été 1947, donc après deux années de ce séminaire, les avis sont toujours partagés sur la forme que doit prendre ce séminaire. Les acteurs, Weil et Cartan en l'occurrence, trouvent tout d'abord nécessaire de se positionner par rapport aux acquis – intérêts et défauts – des séminaires Hadamard et Julia, ainsi que nous l'avons transcrit plus haut.

Ce à quoi lui répondent Weil le 14 juillet 1947 et Dieudonné le 15 juillet 1947 [58] :

> Bref, il me semble que votre choix même des sujets prouve abondamment que vous vous condamnez à un échec complet, alors que la formule « séminaire Hadamard » représente quelque choses de nécessaire et de viable.

La critique que faisait Cartan à cette formule concernait le choix des mémoires. Ainsi qu'il l'écrit le 15 juin 1947 :

> Ce que nous voulons éviter, ce sont les exposés de mémoires américains sans intérêt choisis par $X^\star$ ou autres, à qui on ne peut pas faire confiance pour nous dire : c'est sans intérêt et je n'en parle pas. Ce que nous voudrions au contraire, c'est par exemple comprendre quelque chose à la série des mémoires de Siegel ; ceci ne peut se faire que dans le cadre d'exposés qui se suivent avec un minimum de cohérence. Si vous avez des suggestions à faire pour atteindre ce but, elles seront les bienvenues.

Dieudonné reproche à Cartan son extrême rigueur, d'être trop bourbakiste. Weil donne des suggestions, qui seront ensuite suivies comme on peut le voir.

Mais Cartan va lui aussi lancer son séminaire, qui sera sur un thème suivi, et dont l'extrême rigueur fera le succès, ainsi qu'en témoignent les nombreux récits enthousiastes des acteurs, Serre notamment.

Deux séminaires au lieu d'un En effet, à la rentrée 1948, il y a en fait deux séminaires ! Celui de Bourbaki, qui recommence en décembre 1948 – c'est à partir de ce moment là que les exposés vont être numérotés et publiés – et celui de Cartan. Le séminaire Bourbaki a lieu sur trois jours, trois fois par an (décembre 1948, mars et mai 1949), alors que le séminaire Cartan a lieu plus fréquemment : dix-sept exposés la première année, une vingtaine les années suivantes. Ils ont lieu tous les deux à l'Ecole Normale Supérieure. Le séminaire Bourbaki se déplacera ensuite à l'Institut Henri Poincaré. On peut lire l'importance du Secrétariat Mathématique dans les récits qui accordent une grande importance à ce secrétariat qui imprimait les séminaires [59].

5.6.3 Séminaires organisés par Schwartz

La liste n'est pas exhaustive. Par exemple Schwartz, en tant que membre de Bourbaki, a contribué à l'organisation du Séminaire Bourbaki. Il n'était néanmoins pas présent à sa création, il est difficile de caractériser son rôle d'organisateur, même si nous venons de voir l'exemple de la création du séminaire Bourbaki, parallèlement à celle du séminaire Cartan.

Un séminaire nancéien : l'absence de sources

On apprend que Schwartz organise un séminaire à Nancy dans les récits des acteurs. Paul Malliavin (1925-2010) se souvient ainsi :

> Je suivis pendant un an le séminaire de Laurent Schwartz à Nancy où je pus me familiariser avec les applications de l'Analyse complexe aux transformées de Fourier et avec la théorie de Delsarte des fonctions moyenne-périodiques.
>
> [*Notice sur les travaux*, p.4]

58. Toutes ces lettres sont issues de [Audin 2011] qui est présentée par ordre chronologique.
59. [*Séminaire Bourbaki. vol. 1948-1949, 1949-1950 exposés 1-32* 1966] notamment

Pierre Dolbeault[60] précise que le séminaire est organisé par Dieudonné et Schwartz. Il raconte y être allé en alternance avec Jacques-Louis Lions, le samedi après-midi, après avoir déjeuné chez les Schwartz.

Le Séminaire Schwartz (1953-1961) : un premier essai parisien.

Il s'agit d'un séminaire à thème annuel ; c'est l'un des premiers séminaires parisiens d'après-guerre[61]. Dans le chapitre précédent, on a étudié tout particulièrement la première année, 1953-54, au cours de laquelle Schwartz expose la thèse de son étudiant, Grothendieck, ainsi que ses résultats personnels sur le théorème des noyaux et les espaces de distributions comme espaces vectoriels topologiques. Ce séminaire connaît une interruption entre 1956 et 1959, avant de reprendre en 1959-1960. On donne en annexe (P, p.377) une liste des thèmes choisis par Schwartz ou Malgrange ainsi que les orateurs qui présentent les exposés. On note aussi la présence de « rédacteurs » de séminaire. L'importance de ces rédacteurs dans les séminaires organisés par Schwartz réapparaît lorsqu'il organise des séminaires à l'École polytechnique. Nous verrons même au chapitre 6 que la rédaction de séminaires ou de cours est considéré par Schwartz comme faisant partie de l'initiation à la recherche et pouvant être considérée comme un point de l'évaluation du travail fourni.

Une année au Séminaire Cartan (1963-64)

En 1963-64, Schwartz co-organise avec Henri Cartan la dernière année du séminaire Cartan. L'objectif de l'année est la démonstration du théorème de l'indice d'Atiyah. Nous allons revenir plus longuement sur le séminaire Cartan plus loin, et de manière plus générale que cette année pendant laquelle Schwartz l'a animé avec Cartan.

Le Séminaire Cartan est proposé en entier en annexe (O, p.361), c'est-à-dire de 1948 à 1964.

Le « Séminaire rouge » 1969-70

Le premier séminaire de recherche que Schwartz organise à l'École polytechnique est appelé « séminaire rouge »[62]. Il s'agit aussi du premier séminaire ouvrant l'École polytechnique aux chercheurs mathématiciens parisiens. Maurey analyse l'importance de ce séminaire ainsi :

> [I]l a été le premier séminaire mathématique se tenant à l'École polytechnique et largement ouvert au public extérieur. C'est, je crois, l'une des premières occasions où l'École polytechnique est devenue un lieu de l'activité mathématique à Paris.
>
> [Maurey 2003, p.77]

La liste des orateurs et les titres des exposés sont donnés en annexe (Q, p.383). Maurey présente ce séminaire comme étant organisé autour d'un « thème principal » et abordant « chaque question à un niveau assez élémentaire », constituant ainsi une « excellent initiation pour de jeunes chercheurs qui pouvaient y trouver un ensemble assez cohérent de techniques qui leur permettraient par la suite d'avancer dans des directions diverses. » Il s'agit là de caractéristiques communes aux initiatives lancées par Schwartz à l'École polytechnique, que l'on aborde plus en détail au chapitre suivant.

60. Entretiens avec Pierre Dolbeault, mars 2013

61. À titre de comparaison, le séminaire Bourbaki commence, officiellement au moins, en 1948 ; le séminaire Cartan la même année et le séminaire Dubreil d'algèbre et théorie des nombres en 1947.

62. La dénomination, qui lui est restée, vise juste à caractériser la couleur de sa couverture et non un accointance politique.

Maurey précise ensuite (p.78) que le « successeur » de ce séminaire est le séminaire d'Équations aux Dérivées Partielles. Mais il ajoute aussi que les thèmes exposés cette année-là « ont constitué une grande partie du "fonds commun" de l'équipe d'analyse fonctionnelle qui s'est installée au Centre pendant la dizaine d'années qui a suivi ». Ce séminaire semble donc avoir un deuxième successeur, à savoir le séminaire d'Analyse Fonctionnelle, dit « Maurey-Schwartz ».

Le Séminaire Équations aux Dérivées Partielles (1970-)

Ce séminaire, qui existe depuis 1970, est toujours actif aujourd'hui. Il porte le nom de Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, et est dit « Goulaouic-Schwartz » jusqu'en 1980. Il change ensuite de nom, en conservant celui de Schwartz, en fonction des organisateurs les plus impliqués.

Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, dit Maurey-Schwartz 1972-1981

Ce séminaire est animé par l'équipe d'analyse fonctionnelle que Maurey mentionne, formée de jeunes chercheurs du Centre de Mathématiques. Il s'agit, comme pour le séminaire précédent, d'un séminaire ayant une orientation globale, mais plus de thème annuel. La liste des orateurs et des exposés est donnée en annexe (R , p.387).

Séminaire pour ses étudiants de l'École polytechnique

Il faut mentionner ici les séminaires que Schwartz organise pour ses étudiants de l'École polytechnique. Car le séminaire est indispensable de la formation de la recherche et par la recherche que Schwartz souhaite donner à ses élèves. Nous en reparlons au chapitre suivant, car ce séminaire s'insère, lui aussi, dans son Centre de Mathématiques.

Conclusion

La période pendant laquelle s'impose le séminaire de mathématiques en France comme le lieu incontournable de sociabilité des mathématiciens et d'échanges de résultats entre eux, à savoir les années d'après-guerre, fait de Schwartz un acteur important, à tous les niveaux, aussi bien en tant que participant, auditeur, orateur ou organisateur de séminaires. Schwartz a de plus été amené à créer son séminaire très tôt, profitant ainsi de la reconnaissance que lui a accordée la communauté internationale des mathématiciens.

Il n'est néanmoins pas anodin que les thèmes sur lesquels il organise des séminaires concernent ses premières mathématiques, et surtout celles de ses étudiants ; en d'autres termes celles qui lui ont valu reconnaissance. Il n'organise pas de séminaire de probabilités par exemple, mais il y assiste. L'assistance à un séminaire participe de son intégration dans le domaine. L'exposé au séminaire s'étudie par des sources fragiles – publication du séminaire, notes, republication – qui permettent de le considérer comme étant un instantané d'un point de recherche précis. Il fait apparaître de manière significative la réappropriation par les orateurs d'un sujet précis qu'ils interprètent à la lumière d'une conception à la fois personnelle et collective des mathématiques qui est propre au groupe qui se constitue autour d'un séminaire particulier. La création d'un séminaire est, dès cette époque, dépendant de l'institution dont dépend son créateur. L'organisateur joue un rôle, plus ou moins important suivant les cas. Aujourd'hui, les organisateurs changent très fréquemment, par roulement au sein d'une même équipe par exemple. On peut penser que c'est le groupe qui fait vivre le séminaire et l'institution qui en garantit de plus en plus la pérennité.

Comparons dès à présent ces deux formes, que nous avons analysées aux chapitres 3 et 5, qui structurent la vie collective des mathématiques dans la seconde moité du XX$^{\text{ème}}$ siècle, à savoir le colloque – sous la forme des colloques internationaux du C.N.R.S. particulièrement – et le séminaire. Le colloque n'est pas nouveau en France, mais prend une signification particulière dans le contexte de reconstruction d'après-guerre. Il participe notamment à l'internationalisation des mathématiques. Le séminaire, quant à lui, s'il est déjà très présent et institutionnalisé en Allemagne, n'existe en France que sous la forme d'initiatives particulières. Nous avons étudié la forme du colloque en mettant en contexte un colloque particulier, celui d'Analyse Harmonique qui a eu lieu à Nancy en 1947, dans un projet d'étude globale, en examinant ses conséquences pour Schwartz, sa théorie des distributions et sa carrière. Pour comprendre la place du séminaire, nous avons brossé un panorama des sources et expériences existant avant la guerre, avant de caractériser les formes d'échanges mathématiques permises par le séminaire. Pour cela, nous avons examiné Schwartz dans chacun des rôles qui font le séminaire, à savoir auditeur, orateur, organisateur. L'étude porte donc ici sur un grand nombre de séminaires, mais la caractérisation des échanges porte sur des exemples très précis. Ces deux études ne sont pas exhaustives. Mais elles permettent néanmoins de donner des clefs pour comprendre la manière dont ces deux formes, aujourd'hui encore privilégiées des mathématiciens, structurent la vie collective des mathématiques et ses échanges. Le colloque, sous la forme étudiée, est ponctuel, et réunit un nombre plus ou moins grand de mathématiciens, autour d'un sujet précis. Le séminaire est régulier, dépend d'une institution, organisé par un mathématicien (même si cela tend à disparaître), et peut prendre la forme d'un séminaire thématique ou non. La publication liée au séminaire, qui est peut-être aussi une caractéristique de ces premières années du séminaire peut être perçue comme un instantané, permettant de figer l'état d'un sujet très précis à un instant donné. Si le colloque permet des rencontres et des échanges plus larges, s'inscrivant dans un cadre international, le séminaire permet une formation régulière, une présentation de résultats, une mise à jour de connaissances ; un suivi hebdomadaire de l'évolution de recherches.

Chapitre 6

Le Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, ou pourquoi les mathématiques ont besoin de laboratoires.

Le 1$^{\text{er}}$ mai 1965 est créé à l'École polytechnique le « Laboratoire de mathématiques de M. Laurent Schwartz » [1], ainsi que l'entérine la signature de Pierre Messmer, alors ministre des Armées, cinq jours plus tard [2]. C'est le premier laboratoire de mathématiques, à l'École polytechnique, mais aussi en France.

Nous allons étudier ici l'émergence d'un nouveau besoin, celui d'une forme particulière d'organisation collective pour la recherche mathématique, qui se traduit par la création de laboratoires de mathématiques, par Schwartz, à l'École polytechnique, en 1965. Pour cela, nous allons nous concentrer ici sur la création de ce premier laboratoire de mathématiques. À cette date, il existe plusieurs laboratoires de l'École polytechnique, qui ont un statut bien défini depuis quelques années déjà, dans lequel va pouvoir s'insèrer celui de mathématiques. Par ailleurs, les mathématiciens n'ont bien sûr pas commencé à faire de la recherche en 1965 ! On assiste néanmoins à la création de quelque chose de nouveau, répondant à un certain besoin de vie collective des mathématiques. Les rapports de conjoncture (section Mathématiques Pures) du C.N.R.S. se font ainsi l'écho de débats et de la transformation des besoins entre 1959 et 1969 [3].

Aux yeux de ses premiers protagonistes, la création d'un tel Centre de Mathématiques constitue une aventure collective « exaltante » [4]. On possède en effet de nombreux récits d'acteurs concernant les débuts du Centre de Mathématiques, écrits notamment à l'occasion de commémorations, qui sont l'occasion de revenir sur la fondation [5]. Ainsi que le constate Pestre, à propos de son étude sur le laboratoire de Leprince-Ringuet [Pestre 1994], ces auto-histoires présentent tous les traits des « histoires glorieuses et héroïques », qui

1. Il prend très rapidement le nom de « Centre de Mathématiques » et est aujourd'hui rebaptisé « Centre de Mathématiques Laurent Schwartz » ou « CMLS ».

2. Archives de l'École polytechnique, Laboratoire de Mathématiques de M. Schwartz, décision n°18221 MA/CM du 6 mai 1965.

3. Archives du C.N.R.S., Rapports de conjoncture, section de Mathématiques Pures. Les rapports utilisés sont précisés plus tard.

4. [Laudenbach 2002]

5. On a ainsi, outre le récit de Laudenbach déjà cité : [Viterbo 2002], [Schwartz 1994a], [Schwartz 1997, p.358-367].

commencent par « au départ, rien ou presque n'existait... » [6]. S'il reste nécessaire, ainsi que l'explicite Pestre [Pestre 1994, p.336-337], de replacer ces récits dans des « cadres contextuels » précis, afin de ne pas en avoir une interprétation trop centrée sur tel ou tel acteur ou bien une lecture trop rétrospective, il indique néanmoins [Pestre 1994, p.334] que ces récits fournissent « des indications précieuses sur les lieux de la recherche, les équipements, les résultats, les possibles motivations des uns et des autres, ils révèlent des climats, des atmosphères, des connexions parfois difficiles à recomposer à partir des sources d'archives ». Ces récits, qu'ils soient écrits ou bien composés d'entretiens et de discussions informelles, sont plus que cela. Ils donnent vie aux archives, et permettent de constater l'importance que les acteurs attribuent à la création de ce Centre de Mathématiques par Schwartz, à son fonctionnement, et au rôle joué par Schwartz. Les échanges entre chercheurs sont favorisés et stimulés, dans cette expérience nouvelle d'un laboratoire de mathématiques à l'École polytechnique. Ces récits mettent en scène la vie collective des mathématiques du Centre telle qu'elle est perçue par les acteurs. Ils sont donc indispensables ici pour comprendre la naissance des laboratoires de mathématiques dans la structuration de la vie collective des mathématiques à l'époque.

Outre les récits des acteurs, nous allons nous appuyer sur l'exploitation d'archives inédites sur le Centre de Mathématiques [7], d'archives du C.N.R.S. (rapports de conjoncture et rapports scientifiques personnels), ainsi que des Procès verbaux des Conseils d'Instruction et de Perfectionnement de l'École polytechnique. En ce qui concerne l'École polytechnique, on se reporte de plus aux études de Dahan [Dahan Dalmedico 1995], [Dahan Dalmedico 1994] (1945 à nos jours) sur les réformes structurelles de l'École polytechnique et le cas particulier des mathématiques ; et Pestre [Pestre 1994] (1936-1965), sur le Laboratoire de Louis Leprince-Ringuet. Ces études exploitent les archives officielles de l'École polytechnique et discutent notamment l'évolution de la place de la recherche à l'École, ainsi que nous le préciserons au cours du chapitre. Mentionnons dès à présent que si Dahan consacre une page au rôle de Schwartz à l'École polytechnique, notamment à l'enthousiasme qu'il suscite auprès des élèves en faveur des mathématiques, la création de son laboratoire est uniquement mentionnée comme un élément en passant. Le Centre de Mathématiques n'a donc jamais été l'objet d'une étude historique, non plus que le laboratoire de mathématiques de manière plus générale.

Le récit et l'étude de la création du Centre de Mathématiques se proposent ainsi d'approfondir les mutations dans les pratiques collectives en mathématiques. Le dossier documentaire complémentaire rassemblé, en particulier auprès du C.N.R.S., nous permet de bien mettre en contexte cette création. Les documents sont, en particulier, très explicites sur les conditions matérielles qui permettent la pratique collective des mathématiques ou même, plus largement, les conditions de la vie collective nécessaires au travail mathématique.

Le plan de ce chapitre est chronologique. Les deux premières parties explicitent le contexte qui mène à la création du laboratoire. Qu'il s'agisse du point de vue de Schwartz, de l'École polytechnique, ou bien d'un point de vue plus général, notamment en mathématiques, on montre que le centre de recherches est une solution à un besoin. La seconde partie présente concrètement ce Centre, à travers les textes officiels de sa création et ceux de son fonctionnement. Enfin, la dernière partie donne le récit des premières années, de la vie du Centre de Mathématiques et de ses acteurs.

6. Voir par exemple [Schwartz 1981a, p.399-400] ou [Bourguignon, Broué et Vidal-Naquet 2003, p.9-10].

7. Il s'agit des archives personnelles de Laudenbach, prêtées par leur propriétaire. Les archives du Centre de Mathématiques qui font partie du Fonds Laurent Schwartz ne sont pas accessibles avant 2032, sur volonté de Schwartz lui-même.

6.1 Avant la création du Centre : quel cadre pour la recherche à l'École polytechnique ? Le cas des mathématiques

Schwartz devient professeur d'analyse à l'École polytechnique en 1959. Il écrit dans son autobiographie ne pas avoir pensé tout de suite à créer un Centre de Mathématiques :

> En 1965, c'est-à-dire six ans après mon entrée à l'École, je n'avais pas encore songé – je ne saurais trop dire pourquoi – à fonder un centre de recherches mathématiques. [Schwartz 1997, p.358]

On peut lire deux aspects dans cette citation. Tout d'abord, Schwartz s'étonne du délai – six ans – qui a été nécessaire pour qu'il fonde son Centre de Mathématiques. S'il donne comme explication probable avoir « sous-estimé [s]es possibilités, embarrassé [qu'il] étai[t] par les complications » [8], on peut y voir d'autres raisons. Pendant plus de dix ans, Schwartz est candidat à de multiples reprises à divers postes et est refusé à chaque fois. Il n'est pas si évident pour lui d'entrer à l'École polytechnique. Les raisons invoquées, les qualités requises en priorité pour le poste traduisent la place des mathématiques à l'École. Elles montrent notamment que la recherche mathématique, ou plus spécifiquement l'environnement ou la vie de recherche en mathématiques, n'est pas primordiale dans le choix de recrutement. Nous allons regarder les discussions qui entourent chacune des candidatures de Schwartz, afin de cerner la place de la recherche à l'École polytechnique du point de vue du recrutement de ses enseignements.

Le deuxième aspect de cette citation, qui n'est pas mis en avant par Schwartz, est le fait que cette création d'un laboratoire de mathématiques ait lieu au sein de l'École polytechnique. Quels sont les moyens ou le cadre qui ont incité et rendu possible une telle création ? Afin de le déterminer, nous étudions deux marqueurs de la place de la recherche à l'École polytechnique, à savoir le statut officiel des laboratoires et la « botte-recherche », qui instituent le cadre dans lequel Schwartz va insérer son projet. La manière dont il va en redéfinir les contours pour créer l'objet qu'il souhaite est l'objet des parties suivantes (6.3 et 6.4).

6.1.1 Les débuts de Schwartz à l'École polytechnique : entrer et trouver sa place.

Schwartz se porte candidat à plusieurs reprises à divers postes à l'École polytechnique [9]. Son curriculum vitae [10] indique qu'il a fait fonction de « Maître de conférence temporaire » d'octobre 1945 à décembre 1948 [11]. La seule mention que l'on peut retrouver de son activité précoce à l'École polytechnique est une phrase de Paul Levy, lors de la séance du Conseil

8. [Schwartz 1997, p.358]. Les complications mentionnées par Schwartz consistent notamment en sa révocation en 1961 pour avoir signé le « Manifeste des 121 » témoignant de son engagement pendant la guerre d'Algérie. Il est réintégré en 1963.

9. Ceci est relaté par Alain Guichardet [Guichardet 2005], nous rajoutons ici de nombreux détails issus des débats rapportés dans les procès-verbaux des conseils d'instruction et de perfectionnement. Guichardet précise aussi que : « Le registre du concours d'admission pour 1934 mentionne qu'il y fut candidat, mais n'indique pour lui aucune note d'épreuve écrite ; on peut penser que, se sentant rassuré quant à son entrée à l'École normale supérieure, il ne s'est pas présenté à l'écrit de polytechnique. Inutile d'ajouter qu'il a été reçu à l'E.N.S. cette même année. »

10. Archives de l'Académie des sciences, dossier biographique Laurent Schwartz, Curriculum Vitae de Mr. Laurent Schwartz.

11. Alain Guichardet cite les « états de service » de Schwartz, établis lors de son recrutement, avec des dates différentes : 1-10-1946 au 30-9-1948, tout en ajoutant qu'aucun document ne permettait de connaître ses charges d'enseignement.

d'Instruction du 12 juin 1948, précisant que Schwartz a donné des colles, comme les autres, et qu'il (Levy) en a été satisfait. Les diverses candidatures de Schwartz sont refusées en 1948, 1950, 1952, alors qu'il est candidat aux postes d'examinateur en analyse, ou bien maître de conférences en analyse, de 1° ou 2° catégorie ou auxiliaire. En 1959 il est élu professeur d'Analyse, prenant ainsi la succession de Levy qui part en retraite.

Dans son autobiographie, Schwartz ne mentionne pas ces candidatures multiples. Il explique par contre ce qui l'a poussé à poser sa candidature en 1959 au poste de professeur d'Analyse. A cette date, il occupe la chaire de Calcul Différentiel et Intégral depuis 1955 à la Faculté des Sciences de Paris, dans laquelle il a été nommé en 1953. Schwartz écrit ainsi :

> Lorsque Paul Levy prit sa retraite en 1958, les candidats à sa succession ne se bousculèrent pas. Moi-même, je ne le souhaitais pas. La sclérose de l'École atteignait un tel niveau que je tenais à éviter de m'embarquer sur cette galère. Bien qu'ayant toutes mes chances, je désirais continuer une carrière purement universitaire, tant du point de vue de l'enseignement que de la recherche, et ne posai donc pas ma candidature. Aucun des universitaires de renom ne le fit. Un candidat cependant se présenta : Jean Bass [12]. (...) Lorsqu'il vient, avec beaucoup de gentillesse, me demander quelles étaient mes intentions car il ne souhaitait pas se présenter contre moi, je lui affirmai sans hésiter que je n'étais pas candidat. C'est six jours avant la clôture des candidatures, le 31 décembre 1958, que je reçus la visite de Louis Michel, physicien, et de René Deheuvels, mathématicien. Ils étaient maîtres de conférences à l'X. Michel et Deheuvels me supplièrent de poser ma candidature dans le but très précis de faire des réformes énergiques dans l'enseignement, pour ne pas dire de renouveler l'École [13].
>
> [Schwartz 1997, p.334]

On est frappé de la contradiction entre le récit de Schwartz qui semble ne pas pouvoir avoir à faire avec cette institution « sclérosée » et ses multiples tentatives passée sous silence, pour des postes moins importants néanmoins. Schwartz précise uniquement que Bass est venu lui demander ses intentions : cela montre que l'idée de sa candidature est envisagée par Bass à cette date.

Regardons ici plus spécifiquement les débats autour des différentes candidatures, échecs puis réussite, de Schwartz à l'École polytechnique. En s'intéressant à ces débats, on voit se dessiner les contours de la place des mathématiques à l'École, ou tout au moins de ce qui n'est pas du tout primordial à l'époque : à savoir une vie collective des mathématiques centrée autour de la recherche. Le profil des enseignants de mathématiques à l'École polytechnique est en effet l'un des révélateurs de la place des mathématiques à l'École [14].

12. Jean Bass (1913-2007) est un ancien polytechnicien (promotion 1932). Après quelques années pendant lesquelles il se tourne vers l'aéronautique, il soutient finalement une thèse de mathématiques en 1948. Ainsi que l'indique la notice nécrologique rédigée par Jean Dhombres [Dhombres 2007], il est notamment enseignant à l'École des Mines de Paris à partir de 1951, maître de conférences à l'École polytechnique entre 1955 et 1957 et examinateur de sortie pour les mathématiques dans cette École entre 1958 et 1970.

13. Schwartz évoque aussi sa « bataille pour réformer l'École polytechnique » dans un article publié à plusieurs reprises, initialement en 1994 pour le bicentenaire de l'École [Schwartz 1994a], [Schwartz 2003b].

14. C'est l'un des trois thèmes étudiés en détail par Gilain et Chabert [Chabert et Gilain À paraître.] dans leur étude autour de la Première Guerre Mondiale. Ils comparent le type de professeurs recrutés à l'École polytechnique, notamment, autour de la Première Guerre Mondiale, afin de mettre en évidence la place des mathématiques à l'École. Leur étude regarde par exemple la proportion d'enseignants normaliens et polytechniciens, suivant les années. L'argument « on privilégie toujours le candidat local » – c'est-à-dire l'ancien polytechnicien, ou bien l'enseignant déjà en poste depuis des années qui obtient son renouvellement ou une promotion – est un peu simpliste, même si la lecture des procès-verbaux pourrait à première vue en donner l'impression. Les deux autres thèmes qu'ils traitent, très présents dans les procès-verbaux des conseils d'Instruction et de Perfectionnement de l'École polytechnique, sont le contenu des cours (avant l'entrée à l'École, et à l'École), ainsi que les initiatives pour rendre l'enseignement moins abstrait. Cela permet aux auteurs de montrer que la continuité qui apparaît avant et après la guerre en terme de contenu

Dans son étude sur l'École polytechnique « de 1945 à nos jours » [Dahan Dalmedico 1994], Amy Dahan indique que les choix de recrutements occupent l'essentiel des procès-verbaux. Lors de ces recrutements, explique-t-elle, on préfère le candidat local, ayant rendu des services à l'École, et l'on fuit la notoriété − elle cite pour cela les exemples de Picard, non recruté en 1895, et Schwartz, plusieurs fois rejeté [15]. Elle montre dans son article que la caractéristique de l'École à partir de 1945 est de « Rénover sans se renier » [Dahan Dalmedico 1994], en s'intéressant aux réformes structurelles de l'École polytechnique après la Seconde Guerre Mondiale, en ce qui concerne l'enseignement et notamment les mathématiques. Schwartz est d'ailleurs au premier plan dans ces réformes, ainsi que nous le mentionnons plus loin.

Comment classe-t-on les divers candidats et quelles sont les qualités mises en avant pour le poste ? Qui cherche-t-on à recruter ? L'absence de recherche mathématique au sein même de l'École polytechnique pendant cette période n'a pas favorisé Schwartz. Considérer uniquement le cas de Schwartz ne permet pas de dégager une tendance générale, mais néanmoins de montrer les questions posées et les arguments avancés par les différents membres des conseils. Les débats nous donnent aussi une certaine appréciation des travaux mathématiques de Schwartz.

Schwartz est candidat en 1948 aux trois postes proposés, à savoir de maître de conférences de première catégorie, maître de conférences de 2ème catégorie et auxiliaire. Lors de la séance du 12 juin 1948 du conseil d'instruction, les candidatures sont discutées. L'un des membres du Conseil, M. Pomey, a laissé une lettre dans laquelle il explicite ce qui doit déterminer le choix du candidat pour le poste de maître de conférences de 1ère catégorie [16]. Il présente ainsi les divers éléments d'appréciation qui entrent en jeu, à savoir « la valeur scientifique et les qualités pédagogiques », mais encore, comme « éléments secondaires », les « services rendus à l'École », l'« âge » voire au besoin la « situation de famille ». Il est ensuite plus catégorique, en insistant sur le fait que les qualités scientifiques ne doivent pas prendre le pas sur les qualités professionnelles nécessaires à un tel poste :

> A vrai dire, étant donné qu'il ne s'agit pas de pourvoir une chaire magistrale, ce n'est pas la valeur scientifique, consacrée par les travaux publiés, qui doit jouer le rôle primordial, mais bien plutôt les qualités professionnelles, d'autant plus que celles qu'exige l'emploi de maître de conférences de 1ère catégorie sont très spéciales : elles réunissent, en effet, le talent professoral et l'art de l'examinateur ; ce dernier étant étroitement lié à la connaissance directe des élèves et n'étant obtenu que par une expérience éprouvée, est, dans une large mesure, fonction de la maturité du maître de conférences [17].

C'est pourquoi il considère que Schwartz notamment, ainsi que les candidats ayant d'« éminentes qualités mathématiques », sont de moins bons candidats que ceux dont l'« expérience » et les « services antérieurs à l'École » s'ajoutent à « l'excellence de leurs travaux ». Il accorde aussi une grande importance à « l'ancienneté de services », au candidat interne. C'est souvent le critère évoqué pour préférer un candidat : « il y a des questions d'âge et de services rendus à l'École » [18], indique ainsi Valiron lorsqu'il préfère un candidat à Schwartz.

---

des cours, place donnée aux mathématiques dans le cursus polytechnicien et type de professeurs recrutés ne traduit pas le conservatisme mais bien le résultat d'un choix mûrement réfléchi.

15. [Dahan Dalmedico 1994, p.301-302]

16. Archives de l'École polytechnique, Conseil d'Instruction, Séance du 12 juin 1948. Lettre de M. Pomey, lue par M. l'Ingénieur Général Lamothe.

17. Ibid.

18. Archives de l'École polytechnique, Conseil d'Instruction, Séance du 6 mai 1952

Les mathématiques quant à elles ne sont pas primordiales dans le choix, comme en témoigne la réserve suivante (qui suit la citation précédente, privilégiant un autre candidat) :

> Si je me place du point de vue purement mathématique, je crois que les travaux de M. SCHWARTZ sont tout à fait remarquables [19].

Le premier point qui ressort ici, mais aussi des discussions ultérieures, concerne l'appréciation des mathématiques de Schwartz. Il est intéressant de constater que ses qualités de mathématicien sont très souvent mises en avant, mais que, pour autant, les membres du conseil, à l'exception de Levy, ne semblent pas du tout familier avec les mathématiques de Schwartz – à savoir essentiellement sa théorie des distributions. Elles ne sont pas mentionnées pour ainsi dire. On parle d'« originalité des derniers travaux de M. SCHWARTZ », de « choses extrêmement nouvelles ».

Lorsque Schwartz est candidat lors de la séance du 6 mai 1952 à un poste de maître de conférences en analyse, on voit bien dans les discussions que Levy, tout en s'abstenant parfois pour des raisons familiales, est celui qui connaît le mieux Schwartz et ses mathématiques. Il peut ainsi rectifier certains dires, notamment lorsque quelqu'un indique que Choquet a été préféré à Schwartz à la Faculté des sciences de Paris, il ajoute qu'en fait, Schwartz n'était pas candidat [20].

Levy souhaite alors s'étendre un peu plus longuement sur les mathématiques de Schwartz en précisant leur importance dans la communauté mathématique :

> La Théorie des Distributions de SCHWARTZ a été, dans le domaine des Mathématiques, l'événement le plus sensationnel des 10 dernières années. Ses travaux antérieurs, et en particulier sa thèse, lui avaient déjà valu une certaine notoriété, mais l'essentiel de son travail consiste dans les deux volumes qu'il a édité sur la Théorie des Distributions qui ont donné lieu à des travaux ultérieurs très importants dont il reste à la fois le point de départ et l'avant-garde.
>
> Ses travaux ont suscité un gros intérêt à l'étranger puisqu'il a reçu 20 ou 25 invitations d'organismes étrangers lui demandent de venir exposer sa théorie. Enfin une dizaine de Professeurs de l'Université ont pris sa Théorie des Distributions comme programme d'un cours ou d'un séminaire. Il a obtenu en 1950 la médaille Fields qui est une des plus hautes distinctions mathématiques du monde.
>
> Dernier point, je crois que la section de Géométrie de l'Académie des Sciences a proposé M. SCHWARTZ pour être mis sur la liste des six candidats proposés [21] [22].

Enfin, on reconnaît à Schwartz des qualités d'enseignant : Chapelon souligne qu'il « a manifesté des aptitudes pédagogiques remarquables » [23].

Malgré toutes ces appréciations des mathématiques de Schwartz, et de ses « qualités pédagogiques » (décrites à part et en lien avec sa théorie des distributions, Levy rappelle même que sa leçon d'agrégation est « restée particulièrement célèbre »), il n'est pas retenu. Julia précise même que « l'élection en question n'est pas une élection à l'Académie. » [24].

Finalement, c'est lors du départ en retraite de Paul Levy en 1959 que Schwartz va finalement être choisi comme professeur d'analyse. Les points de décision sont les suivants [25] :

19. Archives de l'École polytechnique, Conseil d'Instruction, Séance du 6 mai 1952
20. Archives de l'École polytechnique, Conseil d'Instruction, séance du 6 mai 1952.
21. Ibid.
22. Gaston Julia confirme alors cette information. En fait, Schwartz ne sera élu à l'Académie des Sciences qu'en 1973.
23. Archives de l'École polytechnique, Conseil d'Instruction, séance du 6 ami 1952.
24. Ibid.
25. Archives de l'École polytechnique, Conseil d'Instruction, séance du 28 janvier 1959.

1. Étendue de leurs connaissance scientifique
2. Qualités pédagogiques
3. Aptitudes à présenter l'enseignement de l'Analyse dans le sens voulu par le Conseil de Perfectionnement, c'est-à-dire de manière à donner aux élèves :
   – d'une part une culture scientifique
   – d'autre part un outil de travail qu'ils pourront employer utilement, notamment en Physique. Les mathématiques ne constituent pas une fin en soi, étant bien entendu que ceci n'empêche pas, éventuellement, d'éveiller chez certains une vocation de chercheur
4. Leur possibilité de consacrer à l'École plus de temps que n'exigeraient la simple préparation du cours et les amphis, leur aptitude à créer de bons contacts humains avec les élèves, et à constituer une équipe solide avec les Maîtres de Conférence

Cette fois, Schwartz est placé en première ligne, devant Bass. Pour la chaire d'analyse les qualités exigées tiennent plus compte de la qualité mathématique des candidats. Le dernier point ici (« aptitude à créer de bons contacts », « équipe solide ») est la seule mention d'une quelconque vie collective des mathématiques dans l'École ; encore est-elle centrée sur l'enseignement.

Schwartz demeure ensuite à l'École polytechnique, comme professeur cumulant jusqu'en 1969, puis à plein temps (professeur détaché) jusqu'à sa retraite le 5 mars 1980 [26]. Même si les débuts de Schwartz à l'École polytechnique semblent difficiles, son recrutement en tant que tel semble participer à un mouvement en faveur de la recherche, que nous allons maintenant décrire.

6.1.2 La recherche à l'École polytechnique : une entrée tardive des mathématiques dans un cadre bien délimité.

Le premier rapport d'activité du Centre de Mathématiques, datant de 1966, s'ouvre par ces mots, indiquant la faible part de recherche à l'intérieur de l'École polytechnique :

> L'École polytechnique a toujours compté dans son corps enseignant beaucoup d'éminents chercheurs ; il suffit d'évoquer le grand nombre d'entre eux qui ont appartenu à l'Académie des Sciences [27] pour se convaincre du volume important de leur production scientifique. Mais, si surprenant que cela paraisse, c'est à l'extérieur de l'École qu'ils exerçaient leur activité de recherche et formaient à leur tour de nouveaux chercheurs. Ils n'avaient, rue Descartes, que des locaux exigus, très peu d'équipements, et pas de crédits officiels [28].

Si ce constat est effectivement vérifié en ce qui concerne les mathématiques, le jugement doit être fortement nuancé pour les autres disciplines. En effet, lorsque Schwartz arrive à l'École polytechnique en 1959, il semble que la recherche a « pignon sur rue », pour reprendre l'expression utilisée par Pestre [Pestre 1994, p.355] ; et qu'un « tournant vers la recherche » est en train d'avoir lieu, selon [Dahan Dalmedico 1994, p.287] [29].

26. La retraite à l'École polytechnique est alors à 65 ans, alors qu'à l'université elle est à 68 ans. Schwartz demande donc un poste au C.N.R.S. pour trois ans, qui lui est refusé. Il réintègre alors son poste à l'Université de Paris 7 mais continue à être rattaché à l'École polytechnique pour sa recherche. Source :Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz. B.V.1.2 Détachement à polytechnique. Réintégration dans l'université.

27. On a cependant vu plus haut que le choix d'un enseignant à l'École polytechnique n'est pas une élection à l'Académie !

28. Rapport d'activité 1966. Archives de l'École polytechnique ; Archives de François Laudenbach.

29. Les deux articles mentionnés portent d'ailleurs les titres suivants : « Le renouveau de la recherche à l'École polytechnique et le laboratoire de Louis Leprince-Ringuet » pour [Pestre 1994] et « Rénover sans

Ainsi que nous l'avons vu lorsque nous avons décrit le recrutement de Schwartz, et comme le précise Pestre, la place de la recherche à l'École polytechnique a une place ambiguë. Tout d'abord, le mot « recherche » a une signification différente suivant les acteurs et peut représenter différentes choses. Ensuite, la croissance, effective, de la place occupée par la recherche à l'École polytechnique est semblable à la croissance de la place de la recherche en général. Enfin, la recherche n'est pas une valeur première pour l'École polytechnique, elle ne lui est pas liée structurellement et n'est pas appelée à le devenir.

Afin de faire un bref état des lieux de la place de la recherche dans la structure de l'École polytechnique au tout début des années soixante, nous proposons l'histoire de deux marqueurs très précis que sont le statut officiel des laboratoires de l'École polytechnique et la « botte recherche ». Outre les deux études mentionnées, nous allons réexploiter certains documents d'archives, afin de bien préciser quelle création de laboratoire, quelle vie collective des mathématiques, sont rendues possibles voire facilitées par le cadre existant à l'École polytechnique.

Les laboratoires de l'École polytechnique (1936-1965)- discussions et statut officiel

Les premiers pas des laboratoires de recherche à l'École polytechnique se font dès 1937[30]. Le laboratoire de Louis Leprince-Ringuet, le plus ancien, est doté d'un statut par décret du 27 juillet 1949[31] sous la dénomination de « Centre de Recherches de Physique de l'École polytechnique ». Il est rattaché au Ministère de la Défense Nationale. D'autres laboratoires, surtout de physique (Vignal) et de chimie (Jacqué, Baranger, Julia), mais aussi d'économétrie (Divisia) se développent, mais n'ont aucune existence officielle liée à l'École polytechnique, sans pour autant que cela ne semble préoccupant. Cela le devient lorsque Léauté, physicien, cherche à instituer une fondation pour stabiliser les ressources du laboratoire Vignal [Pestre 1994, p.351-352], car l'on se rend compte que les budgets d'un tel arrangement échappent totalement à la direction de l'École. Entre 1953 et 1956, de nombreuses discussions essayent d'établir un statut pour cette fondation, supposé servir de modèle pour les autres laboratoires de l'École. Il faut ajouter à cela un rapport de la Cour des Comptes de juillet 1956 (portant sur l'exercice 1954), attirant l'attention sur « le statut des laboratoires ». Des échanges entre le Général commandant l'École, Leroy, et le secrétaire d'État aux Forces armées "Terre" aboutissent à la conclusion qu'il est préférable d'établir une fois pour toutes le statut de tous les laboratoires. Un groupe d'études est donc formé en 1956 pour rédiger ces statuts et en exposer les motifs[32].

La « décision portant statut des laboratoires de recherche de l'École polytechnique » date du 20 mars 1957[33]. Elle comporte onze articles, précisant les buts des laboratoires ainsi que les détails de leur fonctionnement, que nous allons détailler. Ainsi « Chaque professeur titulaire d'une chaire ou chaque Chef de Travaux Pratiques à l'École est encouragé à organiser à l'École un laboratoire de recherche et de formation à la recherche, dont il assume personnellement la direction ». Les laboratoires ont plusieurs buts : ils permettent tout d'abord aux professeurs de « poursuivre, dans le cadre de l'École, des recherches

se renier. L'École polytechnique de 1945 à nos jours » pour [Dahan Dalmedico 1994].

30. Pour une histoire détaillée, voir [Pestre 1994], qui étudie le laboratoire de Leprince-Ringuet en particulier, et le contexte à l'École polytechnique.

31. N°49.1022, publié au Journal Officiel le 29 juillet 1949

32. Les documents d'archives proviennent des Archives de l'École polytechnique, Titre VIII Publications et travaux section 2 Mémoires scientifiques et techniques Travaux des laboratoires Carton N°1 1795 ->1970 Clt 800 Laboratoires de Recherches de l'École polytechnique

33. Archives de l'École polytechnique, Laboratoires de Recherches de l'École polytechnique, Décision n°4003 DN/CAB/ARM du 20 mars 1957 portant statut des laboratoires de l'École polytechnique.

personnelles qui sont un élément indispensable de leur enseignement ». Il offrent aussi aux élèves volontaires « des possibilités d'initiation et de formation à la recherche ». La décision ministérielle prévoit aussi la nature des conventions pouvant être passées par le laboratoire, et précise la manière dont les laboratoires dépendent de l'École polytechnique. Chaque laboratoire est ainsi doté d'un conseil scientifique, comportant le directeur, trois membres choisis par le directeur, ainsi que des membres de la direction de l'École.

L'exposé des motifs explique que les règles sont volontairement pas trop strictes pour permettre un fonctionnement facile des laboratoires. Il précise aussi la nécessité de faciliter la création de laboratoires à l'École :

> Il faut reconnaître que l'École polytechnique, au cours des 50 dernières années, en dépit d'efforts récents couronnés de succès, n'a formé que trop peu de chercheurs. Le groupe d'étude a donc estimé que le rôle fondamental des laboratoires est –en permettant aux professeurs, chefs de travaux pratiques et maîtres de conférences, de poursuivre des recherches personnelles dans le cadre de l'École– de favoriser la présence à l'École des membres du Corps enseignant et en conséquence leurs contacts avec les élèves.
>
> Ainsi pourront s'éveiller, parmi les élèves, des vocations de chercheurs dont la formation sera poursuivie dans les mêmes laboratoires quand ces élèves, après leur sortie de l'École, seront entrés dans des Services civils ou militaires.
>
> Il convient, en conséquence, d'encourager le Personnel enseignant à organiser des laboratoires de recherche à l'École [34].

Ces laboratoires sont donc supposés favoriser les « contacts » entre les élèves et la recherche, afin de donner lieu à des « vocations de chercheurs ».

A cette date, quatre laboratoires de l'École (celui du professeur Divisia est jugé trop petit) sont reconnus comme tels. Le laboratoire de physique de Leprince-Ringuet garde quant à lui son statut particulier. Il n'est donc pas rattaché au statut officiel des laboratoire de 1957. La justification en est donnée en 1961 : on considère son mode de financement indépendant comme un atout [35].

Dans les années qui suivent ces statuts, d'autres laboratoires sont officiellement créés quand ils ont un développement assez conséquent. On peut lire quelques discussions à l'occasion des réunions du Conseil de Perfectionnement qui témoignent de l'importance attachée au bon développement de ces laboratoires. Par exemple lors de la séance du Conseil de Perfectionnement du 7 décembre 1960, lors de laquelle le laboratoire Gregory – Gregory est professeur de physique à l'École polytechnique depuis 1958 – est proposé pour reconnaissance officielle, on peut lire le paragraphe suivant :

> 6) Importance des laboratoires.
> Le Conseil estime que l'École doit devenir un centre de recherche important ; il est au surplus nécessaire, pour aider les élèves attirés par la recherche, qu'ils aient la possibilité de voir fonctionner des équipes scientifiques de haute qualité.
> Le Général HOUSSAY précise que le rôle de ces Centres devra être défini avec soin, et le Général TEISSIER fait observer qu'ils peuvent entre autres rendre de grands services à la Défense Nationale.
> Le Général CROZE pense que l'étude devra être faite en se rappelant que l'ampleur du problème est telle qu'on ne peut être assuré d'obtenir d'emblée tout ce qui serait souhaité. En conclusion, ce sujet devra être revu par le Conseil, mais la nécessité d'une

34. Archives de l'École polytechnique, Laboratoire de recherches de l'École polytechnique, Projet d'exposé des motifs concernant la statut des laboratoires de recherches de l'École polytechnique, projet groupe de travail.

35. Procès verbal du Conseil de Perfectionnement, séance du 9 janvier 1961.

> certaine extension des labos est admise par tous [36].

Un autre exemple de réflexions autour de ces laboratoires portent sur la gestion des financements obtenus dans le cas de conventions :

> M. ARMAND reconnaît qu'il y a là un problème délicat. Il rappelle que les laboratoires des Facultés ont eu souvent des difficultés de ce genre. Il signale que ceux-ci ont obtenu un certain nombre de libertés et croit souhaitable d'avoir les mêmes avantages à l'École. [37]

L'accent est mis sur le fait que la liberté de fonctionnement est souhaitable.

Les laboratoires de l'École polytechnique font maintenant partie du paysage, et les problèmes les concernant sont discutés par les membres du Conseil de Perfectionnement en vue d'améliorer leur fonctionnement. La nécessité de leur extension est aussi discutée. Le statut officiel qui leur est conféré en 1957 n'est attribué à un laboratoire que lorsque celui-ci est bien lancé. Il offre officiellement la possibilité aux professeurs d'exercer leur recherche dans les meilleures conditions possibles, comme il est possible de le faire au sein des universités. Pour les laboratoires déjà existants, il est possible que cette reconnaissance officielle n'ait rien changé. Si l'évolution statutaire de l'École se fait le reflet d'une évolution des professeurs en faveur d'une recherche institutionnalisée au sein de l'École, il reste que ce cadre légitime facilite néanmoins la création du laboratoire de Schwartz. Il s'agit d'un cadre institutionnel, qui offre une certaine possibilité dont Schwartz va se saisir. Nous allons voir plus loin qu'il la modèle afin de permettre la vie collective des mathématiques qu'il souhaite pour former ses élèves à la recherche et offrir un cadre propice à une équipe de recherche.

La « botte-recherche » : un possible débouché dans la recherche pour les élèves.

La « botte-recherche » est instituée par un décret du 4 juillet 1959 « relatif à la dispense de remboursement de frais de scolarité en faveur d'anciens élèves de l'École polytechnique ». Sont effet dispensés du remboursement les élèves, dont la candidature a été acceptée, qui désirent poursuivre des études de recherche dans un des organismes de recherche prévu par le décret. Cette liste contient treize organismes de recherche, dont le Centre national de la recherche scientifique, les Laboratoires de recherche de l'École polytechnique ainsi que les laboratoires de recherche des universités. Les élèves doivent obtenir le titre de docteur dans un délai de six ans à compter de leur sortie de l'École polytechnique.

Avant 1959, il existe déjà des possibilités pour les élèves de l'École polytechnique souhaitant faire une carrière de chercheur. Le décret de 1959 met d'ailleurs fin à un décret du 12 juin 1947 permettant la candidature d'élèves en vue de leur nomination comme attachés de recherche (C.N.R.S.). Il existe différentes possibilités à partir de 1938, notamment le « décret Suquet », prévoyant que certains élèves sortis dans les corps puissent faire une carrière dans la recherche [38].

Le conseil d'instruction de l'École polytechnique « suit et contrôle le travail des anciens élèves » ayant obtenu un tel poste. Effectivement, ce suivi se met en place progressivement, jusqu'à la désignation de « parrains » chargés de faire un rapport du travail de leur élèves. (notamment en mathématiques).

---

36. Archives de l'École polytechnique, Procès-Verbal du Conseil de Perfectionnement, séance du 7 décembre 1960.
37. Archives de l'École polytechnique, procès-verbal du Conseil de Perfectionnement du 9 mars 1963.
38. A propos du développement de la « botte recherche », voir [Dahan Dalmedico 1994, p.315-317] ou [Pestre 1994].

Les élèves peuvent donc profiter de ce décret à partir de la promotion 1957. Dahan rapporte que, de 1960 à 1969 (promotions 1957 à 1966), 363 élèves ont choisi cette voie [Dahan Dalmedico 1994, p.316].

On peut voir néanmoins une critique (Conseil d'instruction, 4 mai 1961), concernant le niveau des élèves se destinant à la recherche par cette voie, au moins les toutes premières années :

> M. CHERADAME expose la question : si un élève désire profiter du décret du 4 juillet 1959, dit « Botte recherche », celui-ci requiert l'avis du Conseil d'Instruction. Cet avis doit figurer au dossier que l'École adresse au Ministre après le classement de sortie pour tous les élèves qui, dans la répartition des bottes, ont effectivement obtenu « La Botte Recherche ».
>
> M. JULIA demande s'il y a des bottiers parmi ces candidats. Il souligne que d'habitude beaucoup de ceux-ci sont classés parmi les derniers et qu'il n'y en a pas parmi les premiers. Il évoque la vocation des élèves pour la recherche ;
>
> M. CHERADAME fait remarquer que parmi les élèves classés dans le corps de l'État certains font également de la recherche : Les Corps prennent maintenant certains engagements. Il y aura certainement trois élèves qui se destinent à la recherche parmi les 20 premiers : un dans les Mines, un dans les Ponts, enfin un 3ème démissionnera pour en faire au C.E.A.
>
> M. BASS rappelle le cas d'un élève qui a choisi les Statistiques pour faire de la recherche.
>
> M. CHERADAME appelle l'attention des Conseils et indique alors qu'il n'y a cette année en mathématiques qu'un candidat au C.N.R.S.(...)

Schwartz fait partie du Conseil d'Instruction à partir du 1e janvier 1964. Il est notamment parfaitement au courant de la manière dont fonctionne la « botte-recherche ». Il est d'ailleurs impliqué dans le suivi des élèves qui font de la recherche en mathématiques (désignation des parrains, rapport sur les élèves...).

Ces deux marqueurs de la place de la recherche dans l'École polytechnique, que sont le statut des laboratoires et la botte-recherche, indiquent que la recherche scientifique est en pleine évolution à l'École, avant que Schwartz ne fonde son laboratoire. Ils permettent de comprendre les enjeux internes à l'École dans la création du Centre de Mathématiques de Schwartz, ainsi que nous allons le voir.

Le cadre que nous venons de présenter est celui dont Schwartz va se saisir pour créer son Centre de Mathématiques en 1965. Mais les éléments de contexte permettant de comprendre cette création ne sont pas simplement internes à l'École polytechnique. Nous allons maintenant nous intéresser à un contexte plus large de réformes universitaires ainsi qu'aux débats animant la Commission de Mathématiques du C.N.R.S. concernant les besoins en mathématiques ; en particulier en termes d'organisation collective de la recherche.

6.2 Le laboratoire de mathématiques en puissance

Il n'y a pas uniquement à l'École polytechnique que la place de la recherche et son organisation sont discutées. Les années 50 et 60 sont l'occasion de nombreux débats et réformes de l'enseignement supérieur. Nous allons revenir ici sur quelques points essentiels issus de ce contexte, permettant de saisir ce qui va amener à l'idée de laboratoire pour les mathématiques. Afin de saisir ce qui anime la communauté mathématique en particulier, nous nous saisissons ensuite des rapports de conjoncture du C.N.R.S. comme l'une des traces de la structuration collective de la vie mathématique à cette date.

6.2.1 Réformes de l'enseignement supérieur

Dans les années 50-60 ont lieu de multiples discussions autour de la place de la recherche, de réformes de l'université. Cela permet de mettre l'évolution de l'attitude de l'École polytechnique à l'égard de la recherche dans un contexte plus large, qui s'insère dans ces débats sur l'articulation entre l'enseignement et la recherche notamment. La notion de laboratoire est très présente dans les réflexions, et nous allons essayer d'en dessiner les enjeux.

Ainsi que l'écrit Dahan [Dahan Dalmedico 1994, p.304] : « Autour de Mendès France ; et de quelques-uns de ses collaborateurs (...) se retrouvent une génération de jeunes scientifiques brillants, des industriels et des animateurs de recherche en milieu industriel. Les scientifiques (Monod, Lichnérowicz, etc.), encore à l'écart des chaires et des positions dominantes, sont allés aux États-Unis où ils ont fait l'expérience de structures plus souples et plus performantes. Tous croient à la recherche scientifique comme clé de la reprise économique. Une dynamique s'enclenche bien au-delà du gouvernement Mendès France, prenant pour moteur la réflexion sur la rénovation scientifique et universitaire. » Dans ce cadre sont organisés une série de colloques : à Caen en 1956, sur les perspectives et l'enseignement supérieur et de la recherche, à Grenoble sur les relations entre l'université et l'industrie, à Lyon en 1959...

En 1966, après la réforme, a lieu un deuxième colloque à Caen. Dix ans plus tard, des projets de De Gaulle ont vu le jour. Pour la chronologie et les enjeux de cette période pour la recherche, on peut lire [Chatriot et Duclert 2006] qui y est précisément consacré, et en particulier [Duclert 2006a] pour le colloque de 1956, [Duclert 2006b] pour la création de la D.G.R.S.T. et [Baruch 2006] sur les laboratoires dans les années 50-60. Ce deuxième colloque de Caen est organisé par l'A.E.E.R.S (Association d'Études pour l'Expansion de la Recherche Scientifique) [39], dont Lichnérowicz est président. Ces Quinze recommandations sont publiées dans la *Revue de l'enseignement supérieur* (de l'AEERS) [« Les quinze points de Caen » 1966], notamment souhaitant l'articulation des facultés en départements d'enseignement et instituts de recherche. Lichnérowicz écrit un rapport préparatoire [Lichnérowicz 1966], dans lequel il traite de l'« ensemble universitaire et activités de recherche » ainsi que du « fonctionnement des laboratoires et [du] C.N.R.S. ». Il précise que le cadre de la recherche est et doit être l'université. Néanmoins, il est nécessaire que la structure d'enseignement cesse de primer sur la structure de recherche. Il critique le principe suivant :

> En ce qui concerne l'activité de recherche dans les chaires, la fiction généralement admise est la suivante : tout *professeur est nécessairement un directeur de recherche et il doit disposer d'un titre de propriété intitulé « laboratoire »*, qu'il peut exploiter individuellement ou dont il peut faire un rapport volontaire à quelque communauté kolkhozienne.
>
> [Lichnérowicz 1966, p.65]

Il attaqua la justification de tout par la formulation du « travail en équipes » :

> Le *« travail en équipes »* est devenu la tarte à la crème des articles ou discours concernant la recherche fondamentale. Le contact intellectuel, la discussion fraternelle est

39. L'un des témoins, Jean-Louis Cremieux-Brilhac, raconte « Le mouvement pour l'expansion scientifique, 1954-1968 » [Cremieux-Brilhac 1995]. Il présente notamment la conscience d'un « problème Polytechnique », du fait que « Polytechnique dévalorise la recherche française », attribue la création de la botte recherche aux jeunes du CEA, « déchaînés contre la rigidité de Polytechnique ». Plus généralement, il présente le colloque de Caen de 1956, celui de Grenoble de 1957 et la création de l'A.E.E.R.S. en 1959. Il mentionne que le Mouvement National pour le Développement Scientifique (M.N.D.S.) y adhère. Schwartz fait partie de ce mouvement, dont on trouve les premiers textes aux archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Leray.

> certes indispensable au savant ; mais pour réfléchir profondément, il faut être seul ou de préférence en petit groupe et l'activité scientifique, théorique ou expérimentale, consiste d'abord à réfléchir et non pas seulement à s'agiter avec bonne volonté au sein d'une usine. Il est nécessaire d'observer qu'aujourd'hui, contrairement à bien des légendes, *les équipes française sont deux ou trois fois plus fournies que leurs homologues américaines, mais, hélas, en bien plus petit nombre.* Certaines équipes françaises se trouvent même jouir d'un monopole national. Ce n'est pas là facteur de force, mais redoutable facteur de faiblesse.
>
> [Lichnérowicz 1966, p.65]

Il critique enfin l'absence de ressources propres au laboratoires, l'université n'ayant pas les fonds nécessaires à leur fonctionnement, et les laboratoires sont donc dépendants du C.N.R.S. qui devient par là-même au-dessus des universités. Deheuvels, mathématicien, rappelle la primauté que devrait avoir la recherche à l'université sur les autres activités :

> Il n'est pas inutile de répéter que la préoccupation majeure des professeurs d'Université, et leur métier, c'est la recherche sous forme personnelle de direction et d'enseignements préparatoires, et que tout ce qui est recherche fondamental est leur affaire.
>
> [Deheuvels 1966, p.15]

ou encore Pierre Baruch, physicien, dénonce des problèmes de structure :

> Dans la recherche fondamentale, l'unité essentielle est l'équipe de recherche composée d'un animateur ayant une grande expérience de la recherche, et d'un petit nombre de chercheurs. Ce nombre, suivant la discipline, peut varier de quelques unités à la dizaine. L'équipe sera généralement intégrée à un laboratoire, centre de recherches ou institut, groupant plusieurs équipes ayant un intérêt scientifique commun. Elle doit pouvoir y disposer de toutes les facilités de travail possibles. Le laboratoire doit être placé sous l'autorité d'un directeur responsable, assisté d'un conseil formé par les chercheurs expérimentés du laboratoire. Il est choisi pour un temps limité et peut être renouvelé selon un processus identique à celui de sa nomination. Membre actif du laboratoire, il doit pouvoir consacrer à celui-ci la majeure partie de son temps. Tout ceci est en opposition avec le système actuel du laboratoire de chaire.
>
> Le laboratoire est aussi un organe de gestion devant assurer les conditions matérielles de vie et de travail des chercheurs. Nous estimons souhaitable la multiplicité des modes de financement. [Baruch et Bloch 1966]

Schwartz est, quant à lui, interviewé par le *Nouvel Observateur* avec Jacques Monod et Raymond Aron[Krief 1966]. Le modèle des États-Unis est fréquemment cité. La citation de Schwartz mise en exergue de l'article affirme qu'« Il faut abattre les cloisons entre les facultés, le C.N.R.S et les grandes écoles. »

Les réflexions présentées font émerger une image assez précise des contours que doivent prendre les laboratoires de recherche : on remarque l'insistance portée à la taille du laboratoire – il ne doit être trop gros –, dirigé par une personnalité, et de préférence lié à l'université. Le modèle dont Schwartz va s'inspirer prend des caractéristiques d'autres laboratoires, et intègre les expériences concluantes, tout en l'ajustant aux besoins spécifiques de la vie collective des mathématiques.

Il n'est pas spécifiquement question de mathématiques dans les textes que j'ai mentionnés. Regardons au C.N.R.S. ce qu'il en est des mathématiques, et plus précisément de l'idée de laboratoire en mathématiques.

6.2.2 La vie collective des mathématiques dans les rapports de conjoncture du CNRS. Vers l'idée de "laboratoires" de mathématiques

Chaque section du C.N.R.S. possède une Commission élue, qui rédige un rapport de conjoncture annuel, à partir de 1959[40]. Schwartz est membre de la Commission de mathématiques à laquelle il est élu en 1957. Ces rapports de conjoncture nous donnent un aperçu de la situation de la recherche mathématique et de ses besoins. On peut ainsi voir l'évolution de la conception de la recherche ainsi que des besoins des mathématiciens. Regardons ici les années 1959 à 1966, précédant la création du Centre de Mathématiques par Schwartz.

Dans ces rapports, les mathématiques sont conçues d'abord et avant tout comme dépendant des échanges d'idées. Pour les favoriser, on insiste sur les voyages, les rencontres, les instituts de recherche. Un intérêt particulier est accordé à favoriser la formation des jeunes. Nous allons étudier comment évoluent les priorités des demandes de la commission de mathématiques afin de saisir pourquoi Schwartz en 1965 et le C.N.R.S. dans les années qui suivent vont chercher à organiser la recherche mathématique en laboratoires. La conception des mathématiques et de l'organisation de la recherche dans ce domaine va amener à la forme effective que prendra le laboratoire ou l'I.R.M.A., dont nous reparlons plus tard.

La vie collective des mathématiques est omniprésente dans ces rapports. Nous avons déjà parlé des colloques et des séminaires, et donc nous ne les mentionnerons ici que brièvement. Par contre, on va présenter en détail deux autres modèles estimés primordiaux pour l'organisation de la recherche mathématique, à savoir la création d'un centre de rencontres, et le fonctionnement des instituts de recherche, dont la forme souhaitée évolue au fil des années.

Deux solutions possibles

Les rapports du C.N.R.S. considèrent que la création d'un centre de recherches, sur le modèle d'Oberwolfach, est une priorité, et lui consacrent tous un grand paragraphe. Par contraste, on trouve une seule mention de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS), créé en 1958 pourtant, comme étant un lieu privilégié pour la recherche, mais ne concernant qu'un très petit nombre de personnes. Nous allons présenter ces deux modèles de structures de recherche.

La création d'un « centre provincial de recherches et de travail pour mathématiciens » Dès 1959, une préoccupation constante de ces rapports est celle de la création d'un « Centre provincial de recherches et de travail pour mathématiciens ». Ce Centre, qui vise à devenir un « Oberwolfach français », doit être situé en dehors de Paris, et proposer des colloques et écoles d'été. Il est aussi un lieu dans lequel un mathématicien peut venir « mener à bien, dans un calme parfait, une recherche délicate ». Les rapports de conjoncture successifs mentionnent les Centres similaires existant ailleurs : Oberwolfach en Allemagne, mais aussi en Italie, États-Unis, U.R.S.S.. La création d'un tel Centre, d'une « formule différente » par rapport aux colloques et congrès existants, est indispensable pour permettre « des contacts directs avec les chercheurs spécialisés dans les questions les plus diverses. » Le Rapport de Conjoncture 1959 donne les caractéristiques d'« Oberwolfach » que l'on souhaite reprendre pour créer un « Oberwolfach français » :

40. Rapports consultés : Rapport de conjoncture du CNRS : 1959, 1960, 1961-62, 1962-63, 1963-64, 1969, 1974, ainsi que « Répertoire national des laboratoires » La recherche universitaire Tome IV Mathématiques 1966 données 1965. Tous ces documents sont conservés aux Archives du CNRS à Gif-sur-Yvette.

> Depuis plus de dix ans, l'Allemagne possède à Oberwolfach (Forêt Noire) une vaste maison qui est à la fois un centre de rencontre et un lieu de travail pour les mathématiciens. Il y a quelques années, l'Italie a créé un centre analogue à Varenna (Lac de Côme). Ces établissements, bien connus des mathématiciens français qui, en grand nombre, sont allés y faire des conférences et suivre des colloques, n'ont pas peu contribué au développement de la recherche et au rayonnement scientifique des pays créateurs.
>
> La Commission estime qu'un effort doit être fait pour rattraper notre retard.
>
> L'« Oberwolfach français » devrait être situé hors de l'Académie de Paris, de préférence dans le Sud-Est. Il devrait pouvoir héberger dans de bonnes conditions une cinquantaine de personnes (pour les colloques). Il servirait également à instituer des Cours d'été dont la Commission sait qu'ils seraient suivis avec enthousiasme par de nombreux jeunes chercheurs étrangers.
>
> Notre Centre aurait, bien entendu, un caractère permanent. En dehors des périodes de pointe (colloques, cours d'été) il abriterait telle équipe de spécialistes collaborant à la rédaction d'un Ouvrage, tel mathématicien désirant mener à bien, dans un calme parfait – on note ici la tension entre la nécessité de la vie collective tout autant que de solitude de la recherche en mathématiques – une recherche délicate. Le Centre serait doté d'une *bibliothèque* spécialisées. Son personnel comprendrait un *administrateur* et un *secrétariat mathématique* (trois personnes). Un certain nombre de chercheurs (cinq ou six par exemple) seraient affectés à l'établissement d'une façon permanente, c'est-à-dire par périodes d'un semestre au moins.

En 1960[41], les conditions concrètes et matérielles d'existence du « Centre provincial de recherches et de travail pour mathématiciens » sont précisées :

> 5. Création d'un « Centre provincial de recherches et de travail pour mathématiciens. »
>
> S'il est fondamental de disposer d'une documentation précise et mise à jour, il est indispensable d'avoir des contacts directs avec les chercheurs spécialisés dans les questions les plus diverses. Certes, les Instituts de Mathématiques et les Colloques et Congrès qu'ils organisent offrent déjà des possibilités, mais une formule différente s'impose, et de nombreux pays étrangers l'ont compris.
>
> Déjà avant la première guerre mondiale, l'Allemagne avait créé un Institut de Mathématiques dans le cadre de la fondation « Kaiserwilhelm Institut » devenue « Max Planck Gesellschaft », la Suède l'« Institut Mittag Leffler ». Plus près de nous, en Italie, fonctionne un centre de recherche l'été à Varenna, un autre permanent à Rome (« Alta Matematica »), aux Etats-Unis, nous ne citerons que l'« Institut for Advanced Study of Princeton », la « Rias » de Baltimore (Lefschetz), les centres de Madison, Berkeley, la liste serait trop longue. l'U.R.S.S. vient de créer, auprès de Novosibirsk, une ville de 30000 habitants entièrement consacrée à la recherche. Les démocraties populaires font elles aussi un gros effort.
>
> Reprenant un vœu qu'elle avait émis l'an dernier, la Commission estime qu'il faut doter les mathématiciens français d'un centre analogue à celui que l'Allemagne possède depuis plus de dix ans en Forêt Noire, à Oberwolfach. Il devrait être situé hors du ressort de l'Académie de Paris, de préférence dans une région tranquille du Sud-Est disposant de moyens de communication pratiques. Ce serait un lieu de travail ; la proximité avec une université active serait souhaitable ; le voisinage immédiat d'un aérodrome serait incompatible avec la tranquillité nécessaire au travail de recherche.

41. Archives du C.N.R.S., Rapport de conjoncture 1960

> Notre centre devrait pouvoir héberger dans de bonnes conditions une cinquantaine de personnes (pour les colloques). Il servirait également à instituer des cours d'été, dont la Commission sait qu'ils seraient suivis avec enthousiasme par de nombreux jeunes chercheurs étrangers. Il aurait, bien entendu, un caractère permanent. En dehors des périodes de pointes (colloques, cours d'été), il abriterait telle équipe de spécialistes collaborant à la rédaction d'un ouvrage, tel mathématicien désirant mener à bien, dans un calme parfait, une recherche délicat. Le Centre serait doté d'une *bibliothèque* spécialisée. Son personnel comprendrait un administrateur et un secrétariat mathématique (trois personnes). Un certain nombre de chercheurs (cinq ou six par exemple) seraient affectés à l'établissement de manière permanent, c'est-à-dire par périodes d'un semestre au moins.

Ce n'est plus seulement le modèle de l'Allemagne qui est considéré, mais aussi ceux des autres pays européens (Italie, Suède) ou américains (Princeton notamment) pour présenter les instituts de mathématiques. Néanmoins le modèle à imiter reste celui d'Oberwolfach. On le souhaite hors de Paris, mais néanmoins facilement accessible. Il doit être doté d'une bibliothèque et permettre des rencontres de différents types. Il doit pouvoir héberger une cinquantaine de personnes.

Mais plus encore que la création d'un tel Centre, qui ne verra le jour qu'au début des années 80, chacun des rapports insiste sur l'importance des contacts entre mathématiciens, permis par les colloques, ainsi que des conditions matérielles de travail. Pour structurer la vie collective des mathématiques, la section de mathématiques du C.N.R.S. considère en 1959 que les séminaires et les colloques (internationaux, ou bien plus restreints) sont plus importants que les Instituts de mathématiques [42].

L'exemple de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Peu de lieux sont donc adaptés à la recherche mathématique. Ainsi le juge le rapport de conjoncture du C.N.R.S. de 1969, qui présente une analyse très détaillée de la situation actuelle de la recherche en mathématiques. Seuls le Collège de France et l'IHÉS paraissent être des lieux dans lesquels la recherche est véritablement possible [43] :

> Or, face à ces entraves à la recherche universitaire, quelles sont les possibilités qui subsistent en dehors ? Il y a d'abord le Collège de France et l'Institut des Hautes Études Scientifiques qui offrent de bonnes conditions de travail mais seulement à un petit nombre de mathématiciens qui sont pratiquement à part.

L'IHÉS est créé en 1958, précisément dans les années qui nous intéressent. Regardons cet exemple précis.

Dans sa thèse, David Aubin consacre un chapitre à l'histoire de l'IHÉS[Aubin 1998, Chapitre IV p. 172-241] et à la recherche fondamentale. Il montre dans sa thèse sur l'histoire de la théorie du chaos que l'IHÉS a été le lieu qui a permis l'apparition de « modeling practices ».

L'IHÉS est créé le 27 juin 1958, avec pour modèle l'Institute for Advanced Study de Princeton [44], pour devenir un centre de renommée internationale, dédié à la recherche fondamentale. La mobilisation de Léon Motchane, le fondateur, en faveur de la recherche fondamentale et les financements de l'IHÉS, notamment pendant ses premières années, est décrit dans ce chapitre. Aubin décrit aussi l'organisation du travail à l'IHÉS (p.208).

42. La création de l'IHÉS à cette même époque, 1958, montre que le C.N.R.S. n'a pas saisi l'opportunité, à cette date, de l'institution pour rendre possible ces séminaires. Cela sera néanmoins le cas plus tard avec la création des I.R.M.A. ainsi que nous le présentons plus loin.

43. Rapport de Conjoncture du CNRS 1969, p. 11. Archives du CNRS, Gif-sur-Yvette.

44. Sur l'histoire de Princeton (Université et IAS), lire notamment [Aspray 1988].

L'existence de l'institution est basée sur une promesse idéologique : le succès de la recherche fondamentale dépend de la communication entre grands scientifiques travaillant dans différentes disciplines, gardant toujours une vision globale des problèmes.

En ce qui concerne l'organisation concrète néanmoins, avant 1963 [45], les mathématiciens ne possèdent ni salle de séminaire, ni bibliothèque. Uniquement 2 salles dans le 16ème arrondissement. Grothendieck et Dieudonné animent toutefois leur séminaire, et l'activité majeure tourne autour des *Publications Mathématiques*. Les physiciens, quant à eux, accordent plus d'importance à l'organisation spatiale de l'Institut. Ils souhaitent notamment, et ce dès le départ, que l'installation permanente de l'IHÉS se fasse dans une banlieue Sud de Paris, proche du futur campus d'Orsay et du C.E.A. de Saclay. Les physiciens théoriciens souhaitent être proches de ces importants centres de physique expérimentale ; cela se traduit également dans l'organisation concrète de leur travail :

> L'importance qu'attachent les Physiciens à l'installation matérielle de l'Institut s'explique par leurs habitudes de travail. Contrairement aux Mathématiciens dont les recherches gardent traditionnellement un caractère individuel, le travail en groupe est devenu une règle courante chez les Physiciens ; ceux dont les recherches portent sur le même sujet éprouvent le besoin d'être constamment en communication ; ils doivent pouvoir se réunir fréquemment et dans de bonnes conditions [46].

Les premières années de l'IHÉS voient se construire un lieu propice à la recherche, tant dans ses conditions matérielles quand dans son fonctionnement concret. Il faut attendre quelques années pour que la réputation de l'IHÉS y fasse venir de nombreux grands scientifiques étrangers.

Le C.N.R.S. ne mentionne pas ce modèle de l'IAS/IHÉS, mais discute très longuement des problèmes des instituts de mathématiques existants.

Des problèmes des instituts de mathématiques à l'idée d'un Institut conçu comme un laboratoire spécialisé.

A propos des conditions matérielles, les rapports insistent sur les besoins en personnel des instituts de mathématiques qui doivent, à terme, posséder au moins un bibliothécaire, un documentaliste et trois dactylos afin de permettre aux mathématiciens de travailler avec ce dont ils ont besoin, à savoir une bibliothèque et un secrétariat efficace. Il est intéressant de regarder la manière dont le « laboratoire » est perçu dans chacun de ces rapports, et surtout comment sa conception évolue.

Ainsi en 1959 peut-on lire :

> Les mathématiciens n'ont pas besoin de laboratoires ni d'importants crédits d'équipement. Mais il leur faut deux choses : avoir à portée de la main une *bibliothèque* bien pourvue et tenue à jour ; disposer d'un *secrétariat* qui assure la frappe immédiate des séminaires et travaux de recherches et qui permette d'éviter aux professeurs et aux chercheurs des pertes de temps fort préjudiciables.

A cette date, le « laboratoire » n'est pas la solution aux problèmes des mathématiciens, pour qui la vie collective est dans les contacts prolongés permis grâce notamment aux colloques internationaux que l'on demande de perpétuer. En 1960, le « laboratoire » devient le lieu des discussions entre mathématiciens, qui est créé à l'occasion de séminaires ou de colloques, et doit donc être favorisé à l'aide de remboursements de voyages :

45. L'IHÉS déménage à Bures-sur-Yvette en 1962, et la première aile du bâtiment scientifique est construite en 1963.

46. Rapport scientifique sur l'activité de l'IHÉS en 1960 (5/5/61),7. Archives de l'IHÉS. Cité par Aubin [Aubin 1998, p.215].

> Considérant que les discussions entre mathématiciens, par exemple dans le cadre des séminaires ou des colloques internationaux, tiennent lieu pour eux de travaux de laboratoire, la Commission souhaite vivement que le C.N.R.S. ait la possibilité d'allouer des frais de séjour aux chercheurs qui désireraient se rendre à l'étranger pour participer à des séances de travail.

Le rapport précise même que « le fait de participer à une discussion est, pour un mathématicien, aussi important que celui de faire un exposé », et la Commission demande donc de pouvoir inviter des spécialistes « non seulement comme conférenciers, mais aussi pour participer librement à des colloques, même s'il ne leur est pas demandé de préparer un exposé. »

A partir de 1962-63, la Commission demande une augmentation du nombre de chercheurs, en justifiant sa demande par le fait que « Les Mathématiques Pures n'[ayant] pas de besoin de laboratoires, ni de gros équipements », leurs autres demandes pourraient être satisfaites. On voit ici que l'idée de « laboratoire » est liée à celle d'un équipement coûteux qui le constitue. Le rapport insiste, comme les années précédentes, sur les colloques et « l'importance des contacts directs entre mathématiciens, et cela parce que leur fonction est moins d'assurer la diffusion des résultats acquis que de faire germer de nouvelles recherches. Ils sont pour cela indispensables : si le chimiste travaille en combinant des corps, le mathématicien progresse en confrontant des idées » et demande du budget pour deux colloques par an. La Commission demande aussi des crédits de voyage pour les jeunes chercheurs, notamment pour effectuer le trajet Paris-province. Ce rapport présente un budget détaillé, pour les années 1964 à 1967. Le budget nécessaire à la création du Centre de Rencontre est présenté à part, car la demande est « exceptionnelle ».

En 1963-64, l'introduction commence par évoquer l'augmentation des effectifs qui crée de nouvelles nécessités :

> Même si, en mathématiques, les progrès les plus marquants sont, en fin de compte, avant tout le fait d'un petit nombre de personnalités de premier plan, il n'en reste pas moins qu'un mathématicien ne peut se livrer à la recherche dans des conditions vraiment favorables qu'en travaillant au sein d'une équipe nombreuse maintenant des contacts directs avec des chercheurs attachés aux principaux centres étrangers. Grâce à elle, il restera bien informé des progrès de sa discipline et pourra tirer profit sans délais des idées nouvelles. Seuls des Instituts groupant une équipe de mathématiciens suffisamment forte peuvent assurer l'exploitation de résultats nouveaux, contribuer de manière efficace à la formation des jeunes chercheurs et parfois à l'épanouissement d'un grand talent. Cette nécessité apparaît aujourd'hui plus impérieuse que par le passé. Elle correspond à un changement profond dans le domaine de la recherche mathématique et la manière dont il en sera tenu compte sera sans doute déterminante pour l'avenir.

La Commission rappelle, comme chaque année, la manière dont fonctionne la recherche mathématique, par contacts fréquents :

> Les contacts entre chercheurs, la communication rapide des idées et des notions nouvelles dès leur élaboration, constituent une des voies essentielles de la recherche en Mathématiques Pures.

Elle demande donc des financements pour l'invitation de chercheurs étrangers, ainsi que pour l'organisation de colloques et les missions de chercheurs :

> Les échanges d'idées et la diffusion des informations ne sont souvent possibles en mathématiques que dans le cadre de colloques, de conférences ou de mission. Leur développement peut dans une certaine mesure, remédier à l'isolement excessif d'une

> importante fraction des mathématiciens français que leurs fonctions d'enseignant fixent souvent, au moins en début de carrière, dans des centres peu importants.

Ceci est d'autant plus justifié pour les jeunes chercheurs que ceux-ci se trouvent souvent isolés, en début de carrière, dans de petits centres.

Outre la demande usuelle de personnel (bibliothèque, secrétariat) pour les Instituts de Mathématiques, on trouve dans ce rapport la première description d'un Institut de mathématiques conçu comme « un laboratoire spécialisé » :

> L'activité d'un Institut de recherche mathématique doit s'organiser autour de sa bibliothèque et il y aura toujours des inconvénients sérieux à ce que cette bibliothèque soit commune à plusieurs disciplines.
>
> L'Institut doit donc être réservé à la recherche pure et comporter autour de sa bibliothèque un nombre important de petites salles et de bureaux permettant un travail d'équipes de chercheurs ainsi qu'une cafeteria. Cet ensemble doit être conçu et géré comme un laboratoire spécialisé. Il va de soi que sa direction, y compris celle de la bibliothèque, doit être confiée à un mathématicien. Ces conditions ne semblent actuellement pleinement réalisables que dans le cadre d'un Institut Mixte C.N.R.S.-Université.

C'est la première mention de ces Instituts mixtes C.N.R.S.-Enseignement supérieur. La Commission demande aussi la création de deux Instituts de recherche mathématique en province. Cela paraît lié aux nouvelles nécessités créées par l'augmentation de chercheurs.

La proposition du C.N.R.S : les Instituts de Recherche Mathématique Avancée (I.R.M.A.) - 1969

Les rapports de conjoncture se saisissent véritablement des enjeux du travail en équipes et de sa réalisation concrète en mathématiques dans le Rapport de Conjoncture de 1969. Ce rapport présente, dans ses détails constructifs et concrets, le projet des I.R.M.A. comme « laboratoire » pour les mathématiques. Des extraits de ce rapport sont recopiés en annexe (T, 401).

On a vu qu'au C.N.R.S. la vie collective des mathématiques est discutée. Néanmoins, dans le cas des Instituts de Mathématiques, sa prise en compte est assez tardive, puisque ce n'est qu'en 1969 qu'on fait une priorité la création d'instituts sous une forme où cette vie collective est privilégiée. C'est dans ce contexte que Schwartz va créer son Centre de Mathématiques ; il ne s'agit donc pas d'une initiative isolée propre à l'École polytechnique, mais on peut considérer qu'il s'agit d'une prise de conscience précoce des aspects collectifs dans la constitution d'un laboratoire de recherche en mathématiques. La partie suivante décrit le Centre de Mathématiques, tel que Schwartz pense ou souhaite l'avoir créé, et le confronte aux textes officiels ; avant d'essayer d'en saisir la forme plus précise à partir de ses rapports d'activité.

6.3 La création du Centre de Mathématiques

6.3.1 Quelle forme souhaite Schwartz ? Que pense-t-il avoir créé ?

En 1965, lorsque Schwartz crée son laboratoire de mathématiques, le contexte général lui est donc favorable, ainsi que nous venons de le voir. Ainsi lorsque paraît le *Répertoire* *national des laboratoires*[47] publié par la DGRST (Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique) en 1966, la liste des « laboratoires » est longue. Ce répertoire vise à décrire « l'ensemble de l'appareil de recherche français » (public). Le Tome IV concerne les mathématiques (ainsi que les sciences de l'espace et de la terre). Outre les renseignements sur le nombre de chercheurs et les moyens financiers, ce répertoire permet de dresser une cartographie précise des lieux de la recherche mathématique en France à cette date[48]

La dénomination de laboratoire, qui n'est d'ailleurs pas uniformément adoptée, ne traduit rien de nouveau en terme de fonctionnement des Instituts de mathématiques. Néanmoins, ce répertoire permet de situer l'initiative de Schwartz.

Non seulement Schwartz crée un laboratoire de mathématiques à l'École polytechnique, devenant par là même le premier professeur de mathématiques à l'École à faire sa recherche au sein de l'École, mais en plus il le fait sous une forme bien particulière. À première vue, le laboratoire ne fait que suivre le statut officiel des laboratoires de 1957. Mais la volonté de Schwartz de proposer une « formation par la recherche » aux élèves est très forte chez lui. Il l'explicite lorsqu'il écrit son rapport pour la Commission du Bilan en 1981[49] :

> §19 Pour une formation des polytechniciens par la Recherche
>
> Les élèves de l'X n'ont pas connu la recherche dans l'enseignement secondaire, ni en taupe. La recherche, scientifique ou technique, est la clé du développement des grands pays modernes ; or les polytechniciens, recrutés sur un concours à base de mathématiques et de physique, forment la crème des jeunes scientifiques du pays ; entrés dans l'École polytechnique, recevant un bon enseignement scientifique d'un corps d'enseignants-chercheurs de haut niveau, à côté des laboratoires de premier ordre, ils iront ensuite dans une école d'application et deviendront des ingénieurs ou administrateurs.
>
> Il est indispensable que le cursus de tous les polytechniciens comprenne au moins une année de formation par la recherche (...) [Schwartz 1981a], p. 408

Ceci va se traduit concrètement dans le fonctionnement de son laboratoire. Le rôle de formation auprès des jeunes, cher à Schwartz et repris par ses élèves du Centre de Mathématiques, est souligné par Claude Viterbo[50] :

> Laurent Schwartz avait-il séduit ces jeunes gens, dont certains jouèrent un rôle important dans les mathématiques françaises, seulement par les mathématiques ? Probablement pas et si, au fil des ans, on les retrouve à l'École normale de Lyon, à l'École polytechnique, au Bureau des longitudes, ou dans les universités Paris 6, Paris 7, Nice ou Orsay, c'est toujours pour y jouer un rôle dans la formation des jeunes : ils portent avec eux une certaine idée de "la place du savant dans la cité". [Viterbo 2002]

On peut le constater d'après le grand nombre de séminaires et cours qui sont proposés aux élèves, puis rédigés et publiés par leurs soins ensuite. Nous verrons même que Schwartz

47. C'est le troisième répertoire des laboratoires qui est publié. Le premier date paru en 1958 1ère édition, 1961 2è édition. 1966 : nouvelle édition, augmentée .

48. Basé sur des questionnaires envoyés en 1963-64, le document date de 1965. Il dénombre 770 personnes en mathématiques, ou 480 chercheurs équivalent temps plein, pour un budget de 97 millions de francs (13 % des autres disciplines) auquel il faut ajouter les fonds C.N.R.S.. Le rapport précise qu'il est difficile de séparer les activités d'enseignement de celles de recherche. On a la répartition des laboratoires puis description de leur activité (liste de chercheurs, et de publications). On compte 27 lieux de recherche publique en mathématiques .

49. Schwartz est chargé par Pierre Mauroy, alors premier ministre, de la partie du l'enseignement et le développement scientifique.

50. Viterbo est le directeur du Centre de Mathématiques de 2000 à 2006, professeur à l'École polytechnique de 2000 à 2011.

considère cela comme critère d'évaluation lorsqu'il est question de leurs candidatures au C.N.R.S.

Quels sont donc les élèves qui arrivent au Centre de Mathématiques ? Il s'agit à la fois d'un débouché normal pour les étudiants choisissant la « botte recherche » en mathématiques mais aussi très rapidement d'un lieu d'accueil élargi à d'autres chercheurs débutants.

Le fonctionnement du laboratoire reprend à première vue les caractéristiques évoquées plus haut à propos du fonctionnement des Instituts de Mathématiques dans les rapports de conjoncture du C.N.R.S. : besoin d'une bibliothèque et d'un secrétariat. Mais la forte mobilisation des membres du Centre auprès des nouveaux arrivants, des débutants dans la recherche les amène à être inventifs en vue de leur faciliter leurs premiers pas dans la recherche. Le fonctionnement collégial est loué par Schwartz :

> La méthode utilisée pour développer le Centre est très longtemps restée collégiale. Cette collégialité s'est traduite dans tout le fonctionnement du Centre. Le recrutement des nouveaux membres a toujours été collégial (à l'exception, toutefois, du fait que tous les jeunes de l'École polytechnique qui entraient au CNRS avaient automatiquement le droit d'entrer au Centre). Les branches de recherche étaient donc extrêmement diversifiées, pas au début bien sûr, mais dès qu'il y a eu quelques dizaines d'élèves au Centre. Il n'est pas facile de rendre collégial le fonctionnement d'un laboratoire ; je crois que c'est parce qu'on a commencé tout de suite que cela a pu être prolongé toutes les années suivantes, et que le niveau est resté partout élevé. Nous sommes restés très loin des méthodes autoritaires de fléchage, de pilotage, et nous avons laissé une très grande liberté, toujours, à tous les chercheurs. Le résultat, je crois, a été excellent. Nous avons eu très peu d'échecs et nous avons su, par le départ des docteurs dans les universités, renouveler constamment les chercheurs du Centre à effectif constant d'environ une cinquantaine. [Schwartz 1994a, p.128-129]

Il apparaît aussi dans les documents d'archives, que nous présentons plus loin, toutefois nuancé par le récit de l'un des acteurs. Il est toutefois intéressant de noter cette insistance de Schwartz à présenter son laboratoire comme étant collectif dans son fonctionnement et son organe de décision, et ne reposant plus exclusivement sur son directeur.

Enfin, même si l'on ne regarde que les premières années de fonctionnement du Centre, on peut poser la question des mathématiques : quelles mathématiques ? Et quel rôle a joué Schwartz dans le Centre de mathématiques qu'il a créé ? Schwartz ne semble pas être le chef de l'école mathématique ni le directeur de thèse attitré de tous les nouveaux. Il est par contre le créateur du laboratoire et son directeur. Celui qui vérifie que les conditions de travail sont satisfaisantes, que les gens travaillent entre eux. Celui qui motive en donnant des séminaires et en ramenant ses meilleurs élèves des cours et séminaires d'élèves.

> Le Centre a tout de suite organisé des séminaires très suivis : j'ai moi-même organisé un séminaire sur les espaces de Banach à partir de 1969 (le premier est resté connu sous le nom de « Séminaire Rouge » à cause de la couleur de sa couverture). Il y a eu de plus en plus de séminaires, en particulier celui de Goulaouic-Schwartz et celui de Maurey-Schwartz ; j'ai demandé que l'on supprime mon nom parce que, peu à peu, ce sont les autres qui ont tout organisé. [Schwartz 1994a, p.128-129]

Car le CNRS notamment lors de son rapport de 1966 montre qu'il y a une évolution, qu'on considère les groupes de mathématiciens, mais n'aboutit pas encore à la création d'un espace, d'un laboratoire, dans lequel ces groupes peuvent vivre les mathématiques collectivement, ainsi que le fait Schwartz. Regardons précisément ce que Schwartz crée, avant de décrire brièvement les premières années de fonctionnement (matériel, mathématique, humain, rapports d'activité).

6.3.2 Une création légitime - textes officiels

Décrire le cadre officiel et institutionnel dans lequel Schwartz crée son laboratoire de mathématiques est essentiel pour comprendre le type de vie collective qu'il a pu susciter.. C'est parce que ce cadre existe que le laboratoire a une existence légitime. On peut même aller plus loin : c'est grâce à ce cadre que le laboratoire peut être créé, et l'existence des statuts bien définis entraîne un encadrement des pratiques. Il en va de même de la forme des rapports d'activité que l'on commente ensuite. Le laboratoire de mathématiques est placé sur le même plan que les autres laboratoires, et doit donc fournir un rapport d'activité sous le même format. L'influence des statuts et de la forme du rapport n'est pas quantifiable sur le mode de fonctionnement du laboratoire. Mais elle est néanmoins l'origine de son existence et de sa forme particulière.

On rappelle que les statuts donnés par l'École polytechnique à ses laboratoires n'ont rien d'original : ils sont rattachés, comme à l'université, à une chaire d'enseignement et au professeur qui l'occupe. Néanmoins, le fait de donner ces statuts est ce qui va permettre à Schwartz de créer, sans difficultés car dans un cadre bien établi, son Centre de Mathématiques.

A compter du 1er mai 1965 est créé, par décision signée par Messmer, ministre des Armées, le « laboratoire de mathématiques de Monsieur Schwartz », grâce à la décision de mars 1957 qui rend possible la création d'un tel laboratoire à l'École polytechnique. [51] Cette décision faite suite à l'avis émis par le Conseil de Perfectionnement le 19 mars 1965 [52] :

> Le Général CAZELLES informe le Conseil que le Professeur SCHWARTZ a demandé à créer à l'École un laboratoire de mathématiques. Non seulement l'idée lui paraît excellente, mais on pourrait rattacher à ce laboratoire les deux centres de Physique et de Chimie théorique qui sont dirigés respectivement par M. MICHEL et M. FETIZON, et dont la situation administrative reste fausse.
>
> Il serait d'avis que le Conseil propose au Ministre cette création.
>
> Le Conseil donne son accord.

Le Général Commandant de l'École Cazelles écrit au Ministre pour lui faire part de cet avis :

> Dans sa séance du 19 Mars 1965, le Conseil de Perfectionnement a décidé à l'unanimité de vous demander de bien vouloir créer un laboratoire de mathématiques pour Monsieur le Professeur L. SCHWARTZ conformément aux décisions ministérielles rappelées en référence.
>
> Le Conseil attache d'autant plus d'importance à cette mesure qu'aucun professeur de mathématiques n'avait envisagé jusqu'ici d'avoir un centre de recherche et de formation des chercheurs à l'École même.
>
> J'ajoute que cette création ne posera pas de problème de crédit : un tel laboratoire n'occasionnera qu'une très faible dépense qui sera prélevée sur l'ensemble des crédits déjà mis à la disposition de tous les laboratoires.

Le Conseil de Perfectionnement accepte ensuite le 8 novembre 1965 le premier Conseil Scientifique proposé par Schwartz pour le laboratoire de mathématiques. Ce Conseil est

51. Archives de l'École polytechnique. Carton N°1 Titre VIII Publications et travaux Section 2 Mémoires scientifiques et techniques et Travaux des laboratoires Mathématiques, Centre de Mathématiques 1965-1978 Art.VII par 2 sect a

52. Archives École polytechnique. PV du CP 19 mars 1965.

composé de François Bruhat, Pierre Samuel et Jean-Pierre Kahane. Le ministre ayant refusé Kahane (vraisemblablement pour raisons politiques [Viterbo 2002]), Scwhartz, appuyé par le Conseil de Perfectionnement le 14 février 1966, le remplace par Jean Dieudonné.

On voit donc que, bien que la création du laboratoire de mathématiques de Schwartz se place dans le cadre prévu par le statut des laboratoires de l'École polytechnique, il n'en constitue pas moins une nouveauté. Les autre professeurs de mathématiques avaient pour habitude de faire leur recherche ailleurs qu'à l'École polytechnique, qui ne possédait pas non plus de lieu de formation de chercheurs. Ce laboratoire est par ailleurs rapproché des laboratoires de physique et chimie théorique. Schwartz écrit même [Schwartz 1994a, p.129] que c'est Louis Michel [53], lui-même directeur du Centre de Physique Théorique de l'École créé en 1958, qui l'a poussé à créer son laboratoire de mathématiques. Le lien avec la physique théorique peut être perçu un peu comme dans le cas de l'IHÉS. Ces deux centres sont restés très proches - géographiquement et structurellement- pendant quelques années, liés par la thématique et le mode de fonctionnement et allant même jusqu'à partager le secrétariat.

6.3.3 Les deux premiers rapports d'activité - une première image du Centre de Mathématiques

A partir de 1966, l'École polytechnique publie un « rapport d'activité » de ses laboratoires. Il y en a d'ailleurs deux pour l'année 1966 : un premier rappelant l'historique jusqu'en 1966, et un autre concernant l'exercice 1966. Ensuite, le rapport d'activité d'une année concerne l'exercice de l'année en question. En voici la justification :

> Peu à peu sont alors institutionnalisés huit laboratoires, cependant que des aménagements encore modestes, sur une surface insuffisante limitant les extensions désirables, accroissent peu à peu la place dont ils vont disposer.
>
> Plus de 160 chercheurs parviennent cependant à s'y rassembler. Comme il est la règle dans l'enseignement supérieur [54], chaque professeur directeur de laboratoire choisit librement ses thèmes de recherche ; il est assisté d'un conseil scientfique qui rassemble, une ou deux fois par an, quelques hautes personnalités de la Science et du Ministère des Armées, et le commandement de l'École.
>
> Sans pouvoir couvrir tous les domaines des sciences enseignées à l'École, ces chercheurs ont dès maintenant une importante production scientifique. Mais, fort curieusement, alors qu'avant 1939 le « Journal de l'École polytechnique » rassemblait les principales publications scientifiques de nos professeurs, les exigences d'une information scientifique efficace conduisent, depuis 1945, à renoncer à une publication générale.
>
> Chacun s'adresse aujourd'hui aux revues spécialisées connues des chercheurs du monde entier de sa discipline. Aussi, nous a-t-il paru souhaitable de permettre sous une autre forme à ceux qui s'intéressent à nos recherches d'en connaître les grandes lignes et la progression.
>
> Tel est le but du livret sur les recherches conduites à l'École polytechnique que nous avons décidé de publier chaque année et dont nous présentons le premier numéro. On y trouvera, pour chaque laboratoire, un bref historique de son activité et quelques détails sur ses équipes de recherches et sur ses travaux et publications de 1964-1965. Les numéros suivants deviendront le rapport annuel sommaire de nos laboratoires et seront adressés de même à toutes les personnalités, écoles, universités et institutions

53. Louis Michel est à l'IHES à partir de 1962.

54. En ce sens, on peut constater que les statuts donnés par l'École polytechnique à ses laboratoires n'a rien d'original : ils sont rattachés, comme à l'université, à une chaire d'enseignement et au professeur qui l'occupe.

de recherche française et étrangères avec lesquelles nous sommes en relations, ou qui exprimeront le désir de les recevoir.

L'École a plusieurs objectifs en publiant ces rapports. Il s'agit de faire connaître ses laboratoires à une communauté scientifique internationale. Il s'agit aussi d'une forme de publication globale, visant à présenter la production scientifique de ses professeurs. On y trouve donc la description des laboratoires, ainsi que des informations sur les recherches menées, les thèse en cours, les achats de matériel et les publications des chercheurs. Voici les effectifs en 1966 : voir Table 6.1.

Table 6.1 – Effectif des laboratoires au 1er mai 1966

	Chercheurs	Techniciens	Autres personnels
Laboratoire de Physique du Professeur LEPRINCE-RINGUET	37	47	12 + 125 (mi-temps)
Laboratoire de Physique du Professeur VIGNAL	51	27	19
Laboratoire de Physique du Professeur GREGORY	11	2	1
Laboratoire de Mécanique du Professeur MANDEL	20	12	4
Laboratoire de Chimie du Professeur JACQUE	21	6	6
Laboratoire de Chimie du Professeur GRISON	15	5	2
Laboratoire d'Économétrie du Professeur DUMONTIER	5	9	-
Laboratoire de Mathématiques du Professeur SCHWARTZ	5	1	-
TOTAL	165	109	44

Huit laboratoires sont présentés : deux laboratoires de physique, un de mécanique, deux de chimie, un d'économétrie, et un de mathématiques, tout juste créé. Le Centre de Physique Théorique de Louis Michel n'est présent que dans le rapport d'activité suivant (exercice 1966), avec un rappel historique ; le rapport précisant le partage de se secrétaire avec le Centre de Mathématiques.

Le rapport sur le « Laboratoire de Mathématiques du Professeur Schwartz » ne fait donc que quelques lignes :

> Le laboratoire de Mathématiques de l'École polytechnique vient seulement d'être créé, et n'est pas complètement aménagé ; il n'a donc pas encore de production scientifique à son actif. Toutefois, les jeunes mathématiciens qui y travaillent ont rédigé de nombreux cours donnés à la Faculté des Sciences ; ces rédactions, à usage purement interne, ont circulé et alimenté un bon courant de recherches. Des champs très variés des mathématiques sont étudiés au laboratoire : analyse fonctionnelle (espaces vectoriels topologiques et algèbres de Banach), topologie algébrique et différentielle, variétés différentiables, représentations des groupes, géométrie algébrique, catégories et foncteurs, théorie de la mesure. En période de croisière, il est prévu qu'au moins 20 à 30 chercheurs y poursuivront normalement leur activité scientifique.

Notons que Schwartz ne se compte pas parmi les effectifs de son propre laboratoire. Cela ne sera le cas (production scientifique comprise) qu'à partir du rapport d'activité pour l'exercice 1969.

Le rapport suivant est celui de l'activité 1966. On y apprend notamment que le laboratoire de physique de Gregory a été rattaché au C.N.R.S. : « Une large majorité des chercheurs du laboratoire sont agents du C.N.R.S. et notre groupe a été reconnu comme Équipe de Recherche du C.N.R.S. à compter du 1er janvier 1967. » Une petite page pour le « Centre de Mathématiques du Professeur Laurent Schwartz », qui sera désormais le nom du laboratoire de mathématiques. [55]

> Activités du Centre de Mathématiques.
>
> Le Centre de Mathématiques a été créé en Octobre 1965, regroupant au départ cinq chercheurs en mathématiques de la promotion sortante sous la direction du Professeur Laurent SCHWARTZ. Depuis il accueille chaque année environ cinq « bottiers recherche » en mathématiques. Au mois d'Octobre 1967, son effectif tournera autour d'une quinzaine de chercheurs.
>
> Le Centre, qui n'est formé que de « thésards » débutants, n'a pas encore publié de travaux personnels. En revanche, les jeunes chercheurs ont rédigé de nombreux cours de 3ème cycle ainsi que les cours professés dans le cadre du Centre, à l'École polytechnique même. Ces derniers ont eu, en outre, l'intérêt de faire connaître l'existence du Centre à tous les étudiants en mathématiques et ainsi de créer une ouverture vers l'extérieur.
>
> Au second semestre de l'année scolaire 1965-1966, Monsieur le Professeur KERVAIRE a fait un cours d'initiation à la topologie algébrique dans lequel il a introduit les instruments fondamentaux de l'algèbre homologique.
>
> Au premier semestre de l'année scolaire 1966-1967, Monsieur le Professeur A. DOUADY a parlé de géométrie analytique, présentant un des aspects de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Ce cours s'est terminé sur l'exposition des célèbres théorèmes A et B de Cartan et le théorème des voisinages privilégiés.
>
> Au second semestre de l'année scolaire 1966-1967, Monsieur le Professeur DEMAZURE a fait un cours de géométrie algébrique ; après avoir introduit des généralités, il s'est restreint à l'étude particulière des courbes algébriques, cadre dans lequel il a démontré le théorème de Riemann Roch. Il est certain que ces cours ont fortement influencé les chercheurs du Centre, les dirigeant essentiellement dans deux directions : l'algèbre et la géométrie.
>
> On attend d'un cours sur les équations aux dérivées partielles, qui aura lieu l'année prochaine, de provoquer des chercheurs en analyse.

La description de l'activité du Centre de Mathématiques met en avant les cours et séminaires proposés aux élèves. Le Centre se veut ouvert vers l'extérieur et vers d'autres chercheurs : Schwartz ne donne pas tous les cours et séminaires lui-même ! D'ailleurs, les mathématiques proposées - algèbre et géométrie- ne sont pas ses domaines de spécialité. Nous allons voir plus loin l'importance que Schwartz apporte à ces cours et séminaires dans l'évaluation de ces chercheurs débutants.

6.4 Les premières années du Centre de Mathématiques

6.4.1 Le début du Centre de Mathématiques par ses listes : premiers membres - évolution - quelques chiffres

Voici la liste des premiers chercheurs du Centre de Mathématiques, issue du rapport d'activité exercice 1967. On y compte vingt-trois jeunes chercheurs. On voit que les élèves de l'École polytechnique souhaitant faire leur recherche en mathématiques sont

55. Le Centre de Mathématiques s'appelle aujourd'hui : Centre de Mathématiques Laurent Schwartz (C.M.L.S.)

accueillis au Centre de Mathématiques. La première année, ils sont « bottiers de recherche D.R.M.E. », puis « stagiaires de recherche C.N.R.S. » puis « attachés de recherche C.N.R.S. ». Il s'agit là de la majorité des membres du Centre de Mathématiques. Tous ne sont pas polytechniciens. Dans cette liste, on a aussi deux normaliennes et un polytechnicien démissionnaire [56]. Nous allons suivre globalement leur parcours sur les premières années de fonctionnement du Centre.

56. Lê Dung Trang, dont Schwartz parle dans son autobiographie [Schwartz 1997, p.361-362]

PERSONNEL DE RECHERCHE

travaillant actuellement au laboratoire

BARSKY	(X 65)	Stagiaire de Recherches au CNRS
BOURGUIGNON	(X 66)	Bottier Recherches D.R.M.E.
BOUTOT	(X 66)	Bottier Recherches D.R.M.E.
CAHEN	(X 65)	Stagiaire de Recherches au CNRS
CHENCINER	(X 63)	Attaché de Recherches au CNRS
DELALE	(X 63)	Attaché de Recherches au CNRS
DESHOUILLERS	(X 65)	Stagiaire de Recherches au CNRS
ECALLE	(X 66)	Bottier Recherches D.R.M.E.
GAUDEL	(X 66)	Bottier Recherches D.R.M.E.
HENRY	(X 65)	Stagiaire de Recherches au CNRS
HERMAN	(X 63)	Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
JEANIN	(X 66)	Bottier Recherches D.R.M.E.
LASCOUX	(X 64)	Stagiaire de Recherches au CNRS
LAUDENBACH	(X 63)	Attaché de Recherches au CNRS
LE DUNG Trang		Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Paris
Mme Monique LEJEUNE	(E N S)	Attachée de Recherches au CNRS
LOUVEAU	(X 66)	Bottier Recherches D.R.M.E.
MAUREY	(X 66)	Bottier Recherches D.R.M.E.
PETITOT	(X 65)	Stagiaire de Recherches au CNRS
ROUSSARIE	(X 64)	Stagiaire de Recherches au CNRS
ROYER	(X 66)	Bottier Recherches D.R.M.E.
TEISSIER	(X 64)	Stagiaire de Recherches au CNRS
Mlle Michèle VERGNE	(E.N.S.)	Attachée de Recherches au CNRS

Concernant plus généralement les élèves sortant dans la « botte recherche », Schwartz lui-même donne des chiffres sur dix ans [57] qu'il commente : [Schwartz 1981a, p.408]

> Dans les années 60, il y avait beaucoup de recrutements dans l'enseignement supérieur et au CNRS, et un nombre croissant de polytechniciens y entraient. Dans les

57. Commentés par Dahan [Dahan Dalmedico 1995].

années 70, le recrutement s'est tari, et les polytechniciens ont par là même cessé de s'intéresser à une profession sans espoir.

Voici la statistique d'élèves de l'École polytechnique qui, dès la sortie de l'École, ont fait une carrière de recherche de base, toutes voies comprises (CNRS, Université, X, ENS, CEA, etc...) (l'année indique la promotion, l'élève sort 3 ans après) :

promotion	nombre d'élèves	promotion	nombre d'élèves
1957	19	1968	20
1958	23	1969	15
1959	14	1970	28
1960	25	1971	13
1961	40	1972	12
1962	48	1973	15
1963	35	1974	15
1964	39	1975	17
1965	55	1976	26
1966	57	1977	29
1967	26		

Le nombre de polytechniciens choisissant la « botte-recherche » augmente donc dans les années soixante, puis diminue. La nouvelle hausse s'explique par la création des allocations de recherche. Dahan [Dahan Dalmedico 1995, p.287-288] explique qu'à partir de la fin des années cinquante, c'est-à-dire à partir du moment où cette voie est créée, il est plus facile de suivre les polytechniciens faisant une carrière dans la recherche, car ils le font dans un cadre universitaire classique (soutenance de thèse, publication de résultats...) c'est-à-dire qu'ils sont insérés dans la communauté scientifique internationale. Concernant les mathématiques pures, elle écrit qu'« on peut dénombrer une soixantaine de polytechniciens qui ont fait aujourd'hui une carrière académique (universités et recherche). *A posteriori*, on peut repérer quelques sujets ayant fait de très brillantes carrières (11) [58], mais je ne peux détailler ici leurs travaux et je ne crois pas aisé de dégager des caractères communs à leurs travaux mathématiques, qui leur soient spécifiques en tant que Polytechniciens. » Ce chapitre montre, au contraire, que les conditions dans lesquelles ils effectuent leurs recherches au Centre de Mathématiques sont bien particulières. Par ailleurs, les forts liens tissés entre le Centre de Mathématiques et les Universités, notamment l'université d'Orsay (Paris-Sud) voisine, contribue à ancrer la recherche des polytechniciens dans la recherche universitaire.

58. Note 11 :

Par exemple, un des plus jeunes membres de la section mathématiques de l'Académie des Sciences est Jean-Michel Bismut (major X 1967) qui a commencé ses travaux dans le domaine du contrôle optimal stochastique, le calcul variationnel stochastique, et a abordé ensuite la géométrie (Jean-Christophe Yoccoz et Pierre-Louis Lions, deux normaliens de la promotion 1975 et ayant tous deux reçu la médaille Fields en 1994, sont désormais les plus jeunes membres de la section mathématiques de l'Académie des Sciences). Autre polytechnicien de cette même section de l'Académie : Michael Herman (X 1963). Parmi les correspondants de la section mathématiques : J-M. Fontaine (X 1962), T. Aubin (X 1961), G. Pisier (X 1969).

Parmi les polytechniciens de cette génération, devenus professeurs de classe exceptionnelle : F. Dress (X 1958), P.-A. Raviart (X 1959), T. Aubin (X 1961), J.-M. Fontaine (X 1962), J. Jacod (X 1963), F. Laudenbach (X 1963), J.-C. Nedelec (X 1963), A. Chenciner (X 1963), J.-P. Bourguignon (X 1966, aujourd'hui directeur de l'Institut des hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette), etc.

6.4.2 Aspects concrets du fonctionnement du Centre

Importance des secrétaires ; mise en place e la bibliothèque

Les deux caractéristiques premières des instituts de mathématiques, à savoir l'importance des secrétaires et de la présence d'une bibliothèque, font partie des aspects concrets de fonctionnement du Centre de Mathématiques, discuté dès le départ.

Les secrétaires semblent avoir joué un rôle important dans la vie du Centre de Mathématiques, dépassant leur simple travail nécessaire. Elles sont nommées dans le récit de Schwartz ; il leur écrit [59]. On les mentionne en préface de certains travaux imprimés à l'École polytechnique : elles jouent un rôle important dans la vie du Centre de Mathématiques, que Schwartz introduit ainsi :

> Je ne peux clore ce chapitre sans évoquer les secrétaires du Centre, dont la tâche est considérable. Aujourd'hui, la plupart des mathématiciens tapent leurs textes eux-mêmes en TEX, mais nous les rédigions alors à la main, et c'étaient les secrétaires qui les tapaient sur des machines à écrire IBM, puis sur des ordinateurs. J'ai vu défiler pas mal d'appareils. L'informatique fut mise à l'ordre du jour sous la direction de Demazure, après mon départ, grâce au recrutement d'un ingénieur chargé de former et d'instruire les chercheurs.
>
> [Schwartz 1997, p.363-366]

Le secrétariat, ainsi que la possibilité d'imprimer facilement des documents –thèse de troisième cycle, séminaires, cours suivis– font partie de la vie du Centre. Voici un exemple issu des textes publiés par le Centre de maths, dont l'introduction présente la forme et le rôle de la secrétaire [60] :

> Mademoiselle LECUYER s'est chargée de la frappe et a nostalgiquement perdu les jours ensoleillés du mois d'août à ce travail ingrat. Je remercie le Centre de Mathématiques de l'École polytechnique qui a bien voulu se charger le reproduction et de la publication. Lê Dung Trang, Février 1970

Sont régulièrement à l'ordre du jour les problèmes de matériel (locaux, duplicatrice à alcool photocopies, place des voitures...), mais aussi et surtout, la bibliothèque [61] :

1. Recensement des livres
2. Système des petites étiquettes
   Classification par collections.
   Remettre les bouquins (soi-même avec même étiquette sur bouquins et ?)
   Bouquins qui restent (E.G.A....)
3. En plus du fichier : cahier (ou 2 fiches)
4. Pb des revues

A la lecture de ces quelques mots, on voit que la bibliothèque se met tout juste en place : comment avoir un système efficace de prêt des livres ? La bibliothèque est essentielle dans un laboratoire ; ainsi qu'elle est au centre de toutes les discussions sur les Instituts de maths dans les rapports de conjoncture du CNRS cités plus haut.

Au-delà des secrétaires et de la bibliothèque : un lieu

Le lieu, la salle dans laquelle sont regroupés les chercheurs, est important pour saisir les mathématiques qui s'y font. Il s'agit d'un espace restreint, favorisant d'autant plus les échanges. Maurey décrit ce modèle ainsi :

59. (cf archives)
60. Février 1970. Introduction à l'algèbre homologique. R. MOORE. Cours professé à l'I.H.P. en 1868-69. Rédigé par Mademoiselle BESCHERON. N° M24.0270 Par Lê Dung Trang.
61. Archives Laudenbach, CR des réunions du 30 septembre 1968.

> Le Cercle était assez petit à l'époque, six ou sept pièces dont certaines était des sortes de « salle commune de recherche » comptant cinq ou six chercheurs. Schwartz venait tous les jours à son bureau et s'arrêtait en passant dans l'une ou l'autre des pièces pour se faire raconter ce que nous faisions, et aussi raconter ce que lui était en train de faire. Je crois que c'est un peu l'esprit du Centre – c'est-à-dire une espèce de communication immédiate, sur les choses qui étaient en train de se faire – je ne sais pas si on a réussi à perpétuer cette chose-là, je crois que c'était une idée essentielle pour lancer de jeunes chercheurs, pour leur donner l'occasion de s'accrocher en marche.
>
> [Maurey 2003, p.78]

Les aspects très concrets du Centre et leurs conséquences sur les mathématiques sont abordés de manière intéressante par Maurey [62]. La proximité, et le fait de se voir tous les jours pour « raconter » ce que l'on est « en train de faire » sont primordiaux. Maurey souligne aussi l'importance de la « communication immédiate ». Le regroupement dans un même lieu qui est permis par le Centre de Mathématiques permet cette rapidité, cette immédiateté. Il s'agit des mathématiques en train de se faire de manière encore plus rapide que cela ne l'est dans l'exposé publié du séminaire que l'on a présenté plus haut comme un « instantané » d'un point de recherche mathématique à un instant t.

Décrire le fonctionnement du Centre de Mathématiques

En septembre 1968, alors que le Centre de Mathématiques existe depuis trois ans, ses premiers membres rédigent et approuvent un document [63] présentant le Centre, ses membres et son fonctionnement, ainsi que la création d'un collège visant à veiller aux affaires courantes du Centre de Mathématiques. Ce document, d'un grand intérêt parce qu'il donne la conception que se font du Centre ses premiers membres après y avoir passé trois ans, est présenté en annexe en entier.

Le rôle du Centre est tout d'abord précisé. Il est double :

> – Il offre à ses chercheurs un lieu de travail leur permettant d'augmenter l'efficacité de leurs activités de recherche, en vue plus précisément de la préparation de leur thèse
> – Il réalise la présence permanente de mathématiciens auprès des élèves de l'École, il conseille ceux qui sont plus particulièrement intéressés par les math.

L'augmentation du nombre de chercheurs présents au laboratoire les amène aussi à « définir deux notions d'appartenance au Centre » :

> 1. Chercheur attaché au Centre Est attaché au Centre tout chercheur dont la responsabilité adminstrative a été confiée au Centre sur la demande d'un professeur de l'École, du Conseil du Laboratoire ou d'un organisme tel que C.N.R.S. ou D.R.M.E. (...)
> 2. Chercheur membre du Centre Un chercheur membre du Centre exerce son activité de recherches sur un sujet sur lequel les échanges d'idées au Laboratoire peuvent être très fructueuses, ce qui suppose sa présence régulière, sa participation aux activités communes (séminaires d'élèves, conférences organisées dans le cadre du Centre, etc...) et son intérêt porté au fonctionnement du Centre.

Ainsi les élèves de l'École polytechnique, les « bottiers-recherche » ont le statut de chercheur attaché au Centre. Le document précise que

62. Les archives du Centre de Mathématiques, contenant des documents sur ces aspects concrets – comme par exemple l'obtention d'une ligne téléphonique – font partie du fonds non communicable jusqu'en 2032.
63. Archives François Laudenbach, prêtées par leur propriétaire.

> s'il est normal que les élèves sortant de l'X dans la botte recherche mathématique considèrent que ce Centre est leur débouché naturel, il faut cependant noter qu'il ne saurait leur être réservé à l'exclusion de chercheurs venant de l'extérieur.

Les chercheurs attachés et membres n'ont pas les mêmes droits ni les mêmes devoirs. Ainsi les chercheurs attachés n'ont pas d'office accès aux facilités du laboratoire :

> L'utilisation du laboratoire (occupation d'une salle, bibliothèque) n'est pas acquise de plein droit aux attachés, qui - de ce point de vue- sont considérés comme « personnes étrangères ».

Ils peuvent néanmoins en faire la demande, qui est acceptée sous réserve que leur dossier soit tenu à jour, et peuvent devenir membre, sous réserve de leur accord et de celui du « collège » des membres. Les membres du Centre ont quant à eux accès à la bibliothèque, un bureau leur est attribué.

Car l'objet de ce document est aussi de constituer un « collège » regroupant les membres du Centre« , afin d'étudier les problèmes concernant la vie même du Centre. » Dans sa conception, il s'agit d'un fonctionnement assez égalitaire, dans lequel, néanmoins, Maurey met à part la place de Schwartz :

> [L]e Centre de mathématiques était une société très égalitaire. Il y avait finalement tout le monde sur le même pied ; enfin tout le monde à part Schwartz, c'est-à-dire, il y avait tous les chercheurs et Schwartz. Le Centre était géré très démocratiquement : on se réunissait pour prendre les décisions en commun, ou au moins pour les discuter et ensuite le directeur prenait la décision, à la satisfaction quasi générale !

On voit que la création d'un Centre de Mathématiques a fait l'objet de réflexions de la part de ses membres, qui ont souhaité continuer à créer les meilleurs conditions pour leur activité de recherche. La justification de la création du collège est déjà en soi une réponse : la vie mathématique du Centre doit être collective :

> Depuis la création du Centre, et au fur et à mesure que ses effectifs augmentent, la nécessité d'une structure efficace en matière de décisions se dessine de plus en plus. Elle limitera la tendance à l'individualisme de certains chercheurs.

Sont ensuite précisés le « rôle du collège » ainsi que « l'ouverture vers l'extérieur », c'est-à-dire que l'on envisage la vie du Centre, ainsi que ses relations la communauté mathématique internationale. La vie collective des mathématiques est omniprésente dans ce document. Ainsi il est prévu de « définir l'orientation scientifique du Centre en choisissant périodiquement quelques sujets fondamentaux autour desquels graviteront les activités de recherche »—, et en favorisant pour cela le « regroupement des chercheurs par affinités scientifiques », en organisant des conférences : il « prendra toutes les mesures susceptibles de favoriser l'étude en commun d'un sujet ». Enfin, les invitations de chercheurs étrangers doivent être favorisées.

Un autre aspect très important concerne l'accueil et l'intégration des nouveaux membres - chercheurs débutants - ainsi que, plus généralement, les rapports que le Centre entretient avec les élèves de l'École. Le texte l'indique clairement :

> Enfin, il mettra en place des structures d'accueil afin de permettre aux chercheurs débutants de s'intégrer le plus rapidement possible à la vie du Centre et de tirer profit des activités communes ; d'une façon analogue, il devra envisager l'entretien, sous le contrôle des enseignants, de relations avec les élèves présents à l'École.

Le document précise ensuite les modalités de réunion et de décision de ce collège. Dans les archives de Laudenbach, on trouve quelques compte-rendus des toutes premières réunions de ce collège, dont nous allons pouvoir examiner le contenu [64] et qui nous permettent de décrire le fonctionnement très concret du Centre. Mais le plus important des discussions est autour de l'accueil des nouveaux et de leur intégration dans le Centre de Mathématiques. Le 30 septembre, on lit :

> Il est décidé à l'unanimité de tenir une séance d'information à l'usage des nouveaux où chaque chercheur expliquera son travail et fera un exposé de problèmes. Faire une liste des problèmes que les chercheurs connaissent.

L'accueil des nouveaux est prévu le 17 octobre en deux temps, à savoir une première partie d'information, et une seconde pour présenter des problèmes intéressants en mathématiques. Chacun prépare un exposé en avance. La réunion vise aussi à présenter les cours de l'IHP (cf feuille de 68), et à donner « critique et conseils ». On peut ainsi lire des phrases assez décousues dans les CR, dont le sens est néanmoins très clair :

> B.J. et F.L. : Cassez les pieds aux nouveaux. Oui ! mais, comment ?
> Ne pas mentir aux nouveaux.
> Mais alors leur dire quoi ?
> Inciter les nouveaux à venir nous voir
> Les informer de ce que l'on fait (travail en cours sur tel ou tel cours etc...)

Plus concrètement, cela se traduit par la préparation de « cours élémentaires destinés aux nouveaux » dont il est précisé qu'il s'agit de « gens jeunes et dynamiques » dont on a une liste de sujets : représentation de groupes (Serre, Kivillou), Introduction à la théorie de Morse (Poenaru), Homotopie et catégorie de fonctions (Zisman, Gabriel), Analyse harmonique abstraite (Varopoulos, Guichardet), Algèbre séparable...

Ainsi que le séminaire interne avec un petit séminaire préparatoire pour « ne pas dégoûter les gens ». SOnt ici prévus :

- Roussarie (prolongé par Rosenberg) : Systèmes dynamiques, feuilletages
- Alain et François : H-cobordisme, fonction de Morse, Stratification (géométrie arithmétique), singularités des applications différentiables
- Jean-Pierre : E.G.C.
- B.T et le Phall : Invariants des singularités. Géométrie algébrique.
- Pham : géométrie algébrique, champs de vecteurs
- Papa Barsky : théorie des nombres.

Il est prévu que le séminaire soit « linéaire et on décale pour mettre les hors d'œuvre ». En d'autres termes, l'initiation à la recherche des nouveaux doit se faire de manière progressive.

Ces petites réunions sont aussi l'occasion de discuter des invitations et des cours prévus pour l'année. Le programme s'affine ; et le 14 octobre, on a aussi un séminaire pour les anciens. avec « des séances de rattrapage pour les nouveaux ».

6.4.3 Evaluations

Evaluation collective du Centre de Mathématiques - Rapports d'activité

Les rapports d'activité du Centre de Mathématiques [65] s'étoffent au fur et à mesure des années. Alors que les premières années, on ne mesure la production du Centre qu'au

64. Archives Laudenbach. CR des réunions du 30 septembre 1968 où est adopté le document de présentation du Centre ; 7 octobre 1968 ; 14 octobre 1968.

65. Archives de l'École polytechnique. J'ai consulté les rapports d'activité 1966, exercice 1966, 67, 68, 69, 70, 71, 72, rapport du Centre de Mathématiques 76, 77, 78. Nous allons faire une description qualitative du corpus étudié, et non une description quantitative, du fait de leur petit nombre – qui rassemble néanmoins des centaines de pages, mais concernent un petit nombre de chercheurs.

nombre des cours qui ont été rédigés et publiés par ses membres, ainsi que ses séminaires, les thématiques collectives de recherche se développent peu à peu On y trouve une liste de publications de plus en plus longue. Les soutenances de thèse sont mentionnées lorsque les premiers élèves commencent à soutenir. Car, ainsi que cela est rappelé en 1971 :

> Ce Centre de Mathématiques accueille toujours principalement, et jusqu'à l'achèvement de leurs thèses, des jeunes qui s'initient à la recherche.

A partir de 1976, apparaît la nécessité du lien avec les universités, ainsi que la riche vie mathématique interne du Centre :

> Le Centre de Mathématiques est constitué de grandes équipes et de groupes très petits qui collaborent avec les universités. Il n'en existe pas moins des activités communes et des discussions communes qui donnent au Centre une vie très active.

Les missions et voyages sur invitation de ses membres (nombreux voyages d'ailleurs) sont de plus en plus mentionnés. La liste des chercheurs invités au Centre s'étoffe.

À partir de 1976, le Centre s'associe à l'organisation de conférences pour enseignants de mathématiques et physique, qui portent le nom de journées X-UPS (Union des Professeurs de Spéciales) depuis 1990 et continuent encore aujourd'hui.

Cette évaluation collective, ce que l'on juge bon de mettre dans ces rapports d'activité montre le développement du Centre, ainsi que l'évolution de ses membres : même si le Centre continue à former des chercheurs débutants, ils ne sont plus seuls ; c'est en effet l'activité de chercheurs confirmés du Centre que traduisent ces rapports.

Evaluation individuelle des jeunes chercheurs - Rapports du C.N.R.S.

Le corpus utilisé ici ne contient que quelques rapports[66] à partir desquels on va présenter des critères d'évaluation de jeunes chercheurs valorisés par Schwartz. J'ai en effet consulté 27 dossiers scientifiques, conservés aux archives du C.N.R.S., grâce à une dérogation (les dossiers ne sont pas encore communicables librement, car ils contiennent des informations nominatives sur les chercheurs). La plupart portent sur les années 1960-1970, à deux exceptions près : l'un d'eux porte sur un jeune chercheur après la guerre, contemporain de Schwartz (1944-1948) et l'autre sur un élève de Schwartz des années 50. Douze dossiers concernent des polytechniciens, entrant au C.N.R.S. à la sortie de l'École ; tous, sauf trois pour des entrées après 1965. On a aussi trois normaliens, quatre étrangers (1 réfugié politique, et trois visiteurs), ainsi qu'un élève de Schwartz de la Faculté des Sciences. Pour l'essentiel de ces dossiers, Schwartz est, selon les cas, directeur de recherches, parrain, ou bien rapporteur du dossier.

Schwartz a rédigé de très nombreux rapports sur des chercheurs. Les documents de ses archives concernant ce travail d'évaluation de la recherche ne seront, eux aussi, librement communicables qu'en 2032, à sa demande. La liste des chercheurs sur lesquels Schwartz a établi ou demandé un rapport comporte des centaines de noms.

Présentons tout d'abord le fonctionnement des candidatures au C.N.R.S., à travers ces rapports scientifiques annuels, avant de regarder plus précisément le cas des polytechniciens, jeunes chercheurs cherchant à entrer au C.N.R.S. afin d'effectuer leur thèse.

Chaque candidat au C.N.R.S. doit fournir un dossier de candidature pré-rempli, en décrivant son thème de recherche, ses publications éventuelles, en donnant le nom de son directeur de recherches et celui du Centre dans lequel il veut faire sa recherche. Pour la première année, on trouve des lettres de recommandation ou rapport des directeurs de recherche et professeurs du candidat. Ensuite, pour un renouvellement ou une promotion,

66. Archives du C.N.R.S., Gif sur Yvette. Dossiers scientifiques.

on a un rapport du directeur de recherche et du parrain, qui ont été désignés par la Commission. C'est ensuite le travail du rapporteur de résumer la candidature et de donner son avis (accepté ou non, renouvelé ou non, promotion ou non). La Commission décide ensuite. Le rôle des parrains est décrit à l'occasion d'une lettre envoyée au candidat :

> Le Comité National de la Recherche Scientifique estimant qu'il est utile que le travail des chercheurs débutants soit suivi par plusieurs personnalités scientifiques, a décidé d'attribuer à chaque Stagiaire ou Attaché de Recherche des parrains auxquels il délègue une partie de ses pouvoirs. Le premier parrain est la personne sous la direction de laquelle l'intéressé poursuit ses travaux.
>
> Les parrains ont pour mission de faciliter, dans toute la mesure de leurs moyens, le travail de leur filleul, de suivre les progrès de ses recherches et d'en informer le Comité National.
>
> J'ai l'honneur de vous faire savoir qu'en outre de Monsieur X qui dirige vos recherches, Monsieur Y a accepté d'être votre parrain et de suivre vos travaux. Il conviendrait que, d'accord avec le Directeur de vos recherches, vous vous mettiez en rapport avec lui dès le début de l'année, afin de le mettre au courant de l'état de vos travaux.
>
> Les rapports que doivent envoyer avant le 1er Mars votre Directeur de Recherche et votre Parrain ne vous dispensent nullement d'envoyer au Centre National de la Recherche Scientifique avant cette même date un rapport personnel sur votre activité pendant l'année écoulée.

Schwartz écrit de nombreux rapports. Il écrit des rapports pour soutenir la candidature des polytechniciens, en tant que professeur et directeur du Centre de mathématiques, si c'est le lieu où ils souhaitent effectuer leur recherche. Il est ensuite désigné comme directeur de recherche ou parrain en fonction des thèmes de recherche ; les rôles attribués peuvent évoluer au cours du temps. Il est aussi souvent rapporteur et doit donc se prononcer sur une candidature.

Schwartz raconte dans son autobiographie comment cela se passait pour l'entrée au C.N.R.S. des jeunes polytechniciens, et même plus largement d'autres étudiants, entrés ensuite au Centre de mathématiques :

> [I]l n'est pas inutile de relater comment des polytechniciens dont les recherches étaient balbutiantes et qui n'avaient aucune publication ont été recrutés. C'était tout à fait contraire aux mœurs du CNRS. Ce que je savais d'eux découlait de nos relations pendant leur scolarité, ce qui naturellement, dans la plupart des cas, ne saurait suffire. Le passage se décidait au cours d'un entretien d'environ une heure pour lequel je m'adjoignais un ou deux enseignants d'université (Lions ou Neveu à plusieurs reprises). Je choisissais souverainement, en parfait despote éclairé, qui devait et qui ne devait pas rentrer au CNRS. Honnêtement, je ne crois pas avoir été un despote, disons que j'étais un éclairé.
>
> J'ai donc ainsi recruté les jeunes chercheurs en mathématiques de l'X au CNRS pendant un bon nombre d'années. Ayant pris ma décision, je téléphonais au président de la section du CNRS, nous en discutions, et, généralement, il adoptait mes conclusions avec confiance. Je crois n'avoir jamais commis une seule erreur. Il est possible que j'aie oublié des élèves qui en valaient la peine, il y en eut effectivement un très petit nombre que j'ai pu reprendre l'année suivante, après qu'ils eurent fait leurs preuves dans un début de recherche. Tous ceux que j'ai fait entrer au CNRS de cette manière sont devenus professeurs d'université. Et souvent du tout premier niveau. En fait, les choses se décidaient plus ou moins dans le courant de l'année scolaire par les contacts que j'avais avec eux au cours des séminaires que j'organisais. Petit poisson deviendra grand : presque tous les élèves recrutés au CNRS entrèrent automatiquement au Centre de recherche mathématique de l'École polytechnique, et nous y recrutâmes aussi, et

> nombreux, des étudiants non polytechniciens, normaliens ou même universitaires sans titre de grande école.

La lecture des rapports ne nous permet pas de juger de la totalité du récit présenté. Mais elle permet néanmoins de mettre en lumière la nécessité de proposer des critères d'évaluation particuliers pour les chercheurs débutants, n'ayant encore aucune production scientifique personnelle ; ceci étant particulièrement vrai pour les jeunes polytechniciens, n'ayant eu jusqu'à ce moment des rapports très limités avec la recherche.

Le cas des polytechniciens est bien connu du la Commission du C.N.R.S.. Le fonctionnement particulier de la « botte-recherche » est ainsi rappelé, par courrier, au candidat qui s'y engage :

> Vous avez obtenu à votre sortie de l'École polytechnique en 1964, un poste de chercheur au Centre National de la Recherche Scientifique en application du décret N°59 808 du 4 juillet 1959.
>
> Aussi ai-je l'honneur d'appeler l'attention sur le fait que, conformément aux dispositions du décret sus-visé vous devez obtenir le titre de Docteur ès-Sciences d'État dans un délai de 6 ans à compter du 1er octobre 1964.
>
> Par ailleurs, en application des dispositions de l'article 96 de la loi N°59-1454 du 26 décembre 1959 vous êtes provisoirement dispensé de rembourser les frais de scolarité supportés par l'État à votre profit sous réserve que vous occupiez un emploi public de l'État dès la cessation de vos travaux de recherche et en tout cas à l'expiration du délai de six ans prévu à l'alinéa précédent si vous n'aviez pas obtenu dans ce délai le diplôme de Docteur ès-Sciences.
>
> Vous serez définitivement dispensé de rembourser ces frais lorsque la période pendant laquelle vous aurez bénéficié d'un poste ou d'une bourse de la part de l'organisme de recherche, complétée éventuellement par le temps passé dans un service public de l'Etat, aura atteint une durée de dix ans ininterrompue depuis votre sortie de l'École polytechnique.

A plusieurs reprises, on trouve une liste de tous les polytechniciens candidats au C.N.R.S. Il s'agit d'une habitude concernant un certain vivier de recrutement pour le C.N.R.S..

On peut voir que pour les rapports plus classiques qu'il rédige, Schwartz met en évidence l'excellence du travail et des publications. Ainsi que le souligne Lamont [Lamont 2009], l'excellence est le premier critère que l'on met en avant lorsque l'on juge un candidat. Dans son étude sociologique sur les comités de recrutement, elle met en évidence les caractères mis en avant, ainsi que la manière dont les discussions de recrutement se font. D'autres qualités sont parfois mises en avant : enthousiasme, maturité, culture du candidat...

Concernant les élèves polytechniciens lors de leur première candidature, l'évaluation est particulière : ils n'ont encore rien produit, ni véritablement fait de recherche. L'avis globalement partagé par les rapporteurs est que le recrutement de polytechniciens au C.N.R.S. est une bonne chose, et qu'il se passe bien :

> Les résultats obtenus avec les polytechniciens entrés au CNRS sont excellents. Il n'est pas possible d'avoir d'avis définitif à leur sujet lorsqu'ils sont encore à l'École. Mais je suis d'avis de favoriser sans restrictions ceux qui désirent faire de la recherche. Dans le cas particulier, M. X s'est fait remarquer par un très bon examen d'analyse avec moi. Je suis tout à fait favorable à sa demande.

Schwartz, dans ses rapports, mentionne tout d'abord systématiquement le classement des élèves à l'École. Leurs notes sont aussi données. Des professeurs et chargés de petites classes donnent leur avis. C'est peut-être le critère le plus objectif d'« excellence ».

> Son classement général à l'X est excellent (4ème) ; il a bien réussi ses compositions, et très remarquablement ses examens généraux. Ses Maîtres de Conférences de Mathématiques lui ont donné aux deux semestres la note 19. Il est déjà partiellement licencié ; il a notamment été reçu à Mathématiques II, avec la mention "Très Bien" et le rang de 5ème.

Il est appuyé par d'autres professeurs de l'École (ici un maître de conférences de physique) :

> En plus des qualités inhérentes à un élève bien classé (son classement lui permet de choisir à peu près n'importe quel Corps offert à la sortie de l'École), M. X a montré à l'occasion du cours de physique une très grande vivacité d'esprit, jointe à une compréhension profonde du cours.

Cela peut parfois suffire, même pour un candidat dont la vocation de chercheur apparaît tardivement dans sa scolarité à l'École :

> M. X, après une année d'hypotaupe et une année de taupe, est entré 60ème à l'École polytechnique. Actuellement est classé 10 ème. Il ne s'est pas présenté à l'ENS, désirant être ingénieur. Ce n'est que tout dernièrement qu'il s'est décidé à faire de la Recherche (alors que son rang de 10ème lui permettrait de sortir dans le corps des Mines). (...) Sa vocation de chercheur n'a qu'un fondement très récent, mais d'un autre côté il désire la recherche alors que toutes les autres bottes lui sont ouvertes, c'est donc une vocation forte. Il est d'ailleurs très solide en mathématiques, et très actif dans mon cours d'option d'analyse fonctionnelle. Je donne donc un avis tout-à-fait favorable. M. Neveu le considère aussi comme un des meilleurs de sa promotion.

On voit donc que la critique du Conseil de Perfectionnement quelques années plus tôt (citée plus haut) regrettant que le choix de la « botte-recherche » ne soit fait uniquement par les mauvais candidats n'est plus du tout justifiée ; au contraire, la « botte-recherche » compte d'excellents candidats, parmi les tout premiers du classement.

Mais l'aspect le plus frappant est la corrélation quI existe entre l'implication des élèves dans l'organisation de séminaires et, dans une moindre mesure, la rédaction de cours, avec le jugement qu'il porte sur leur capacité à devenir de bons chercheurs. Ainsi, un candidat, non nécessairement bien classé, peut être considéré comme un bon chercheur potentiel :

> M. X a toujours désiré se consacrer à la Recherche. Dès son entrée à l'École polytechnique il s'est occupé de l'organisation du séminaire. Il a abondamment participé à la rédaction des leçons et a donné des conférences au séminaire. Il s'est spécialement intéressé à l'Algèbre, à la Théorie des Nombres, aux Espaces vectoriels topologiques. Il a montré une irrégularité particulièrement grande au cours de sa scolarité ; entré 3/2 comme 135ème, il était 295ème c'est-à-dire presque tout à fait en queue à la fin de la première année. Avec certaines notes très mauvaises en composition, on remarque aussi des notes de 18 ou 19. Pour peu qu'il se discipline un peu plus, je le considère comme tout à fait apte à la Recherche, et donne un avis très favorable à sa candidature. Il désire travailler en Algèbre et Théorie des Nombres. Je le classe 3ème parmi les candidats de Mathématiques pures.

Les rapporteurs ne peuvent pas vraiment s'engager sur les qualités de chercheur de ces jeunes n'en ayant pas encore fait. Néanmoins Schwartz estime que ceux qui se sont investis dans l'organisation de séminaires feront de bons chercheurs :

> M. X est un des plus doués en Mathématiques parmi les Polytechniciens de sa promotion. Désireux, depuis son entrée à l'X, de faire de la recherche, c'est lui qui s'est consacré à l'organisation des séminaires. Il y a fait d'ailleurs plusieurs exposés, excellents par leur précision. 'J'ai eu ensuite de nombreuses conversations avec lui, et il s'est

> intéressé à un très grand nombre de sujets. (...) Pendant les vacances de l'été dernier, il a été l'un des trois polytechniciens qui ont collaboré avec moi pour la révision de mon cours de l'X en vue de sa publication ; il a rédigé l'Intégration.
>
> En conclusion, autant que je peux en juger, il a les plus grandes chances de réussir très bien dans la recherche, je donne donc un avis très favorable à sa candidature.

Ou encore :

> M. X est parmi ceux qui se sont tout d suite fait remarquer dès son entrée à l'X par son intérêt pour les Mathématiques. Il a abondamment participé à la rédaction des cours d'Analyse, et aux séminaires. (...)J'ai toutes les raisons de penser qu'il réussira très bien dans la recherche et je donne à sa candidature un avis tout à fait favorable.

6.4.4 Quelle recherche mathématique pour le Centre de Mathématiques ?

Schwartz dirige le Centre de Mathématiques. Il encadre aussi quelques thèses, mais sa principale activité n'est pas la direction de thèse. Ainsi qu'il l'écrit, il laisse beaucoup de liberté aux membres du Centre ; il justifie cela par le niveau des chercheurs du Centre.

> La plus grande liberté a toujours régné : je laissais les chercheurs travailler en équipe, sans forcément m'occuper beaucoup de ce qu'ils faisaient, si ce n'était un contrôle rapide, car chacun se voyait affecté à un directeur de thèse, qui n'était pas automatiquement au Centre. Effectivement, les élèves de la promotion 1963 entrèrent au Centre directement après leur scolarité, et poursuivirent une recherche sous mon contrôle, au minimum pendant leur première année, et peut-être pour certains pendant les deux premières. Mais ensuite ils se sont décidés pour un directeur de recherche ailleurs et ont soutenu leur thèse avec des enseignants étrangers au Centre, comme Laudenbach et Chenciner avec Jean Cerf, et Herman avec Harold Rosenberg. Laudenbach et Chenciner ont choisi de passer leur thèse orale avec moi, sur des sujets que je ne connaissais pas (mais aurais dû connaître) et que j'appris en même temps qu'eux : le théorème des fonctions implicites de John Nash dans les espaces de Fréchet (...)
>
> Le Centre est pourvu d'une bonne bibliothèque indépendante et de chambres de travail confortables pour deux ou trois chercheurs. Les activités y sont nombreuses. Des tableaux nOirs, jusque dans les couloirs, permettent des discussions collectives. Ce que je contrôlais le plus était l'entrée au Centre. Je n'ai jamais beaucoup cherché à diriger les chercheurs dans leurs orientations, et ce fut, je crois, pour eux un privilège, justifié par leur niveau. On ne peut fonctionner de cette manière que dans un laboratoire où les chercheurs sont d'un niveau excellent. Je ne faisais que perpétuer une pratique préexistante : j'avais choisi le sujet de ma thèse plus ou moins seul, et mes meilleurs élèves, notamment ceux de Nancy, Lions, Malgrange, Bruhat, Grothendieck, avaient fait de même.
>
> Le déroulement de la thèse impliquait certes des discussions entre eux et moi, puisque j'étais leur patron et le rapporteur de la thèse, mais ma directivité était faible. [Schwartz 1997, p.359-360]

La relation de Schwartz avec ces élèves est différentE de celle qu'il a pu avoir avec ceux de Nancy. Au Centre de mathématiques, les premières années, les mathématiques sont très éloignées de ses centres d'intérêt et propres thématiques de recherche. On y fait de la topologie différentielle, de la géométrie algébrique, de la géométrie riemannienne, et de la théorie des nombres. On a même un candidat en logique. Les jeunes chercheurs ont un directeur de thèse, cela peut être Cerf (directeur de Laudenbach qui soutient en 1970 et Chenciner en 1971) et Rosenberg à Orsay, qui est déjà un partenaire privilégié [67] ou bien Hironaka directeur de Teissier et Lejeune, 1973), en visite au Centre. Un des élèves

67. Le déménagement de l'École polytechnique à Palaiseau a lieu en 1974 pour les laboratoires et 1976 pour les élèves.

donne comme explication le fait que Schwartz était peut-être « bloqué » à cette date, et qu'il n'aurait pas eu de sujet à leur donner.[68]

A partir de 1969, l'analyse devient une des thématiques du Centre. Schwartz y organise un séminaire sur les applications radonifiantes. « Des applications radonifiantes à la géométrie de Banach »(, pour reprendre le titre des souvenirs de Gilles Pisier, Schwartz encadre la thèse de Maurey (1973) puis Pisier (1977, travaille avec Maurey) notamment. On peut lire les récits de Maurey [Maurey 2003], Pisier [Pisier 2003], ou encore l'introduction écrite par Gilles Godefroy dans ses *Œuvres Scientifiques* [Godefroy 2011].

Schwartz a réussi à faire ce qu'il souhaitait – à petite échelle dans son Centre de mathématiques.

Conclusion

Le laboratoire de mathématiques est en pleine discussion au milieu des années 60, et ce, au niveau national. Les rapports de conjoncture du C.N.R.S. se saisissent progressivement du sujet, et l'on a vu l'aboutissement constitué par la conception des I.R.M.A. (voir Annexe T, 401). C'est à l'École polytechnique que Schwartz décide de créer son Centre de Mathématiques. La création est facilitée par l'existence d'autres laboratoires proches ainsi que de statuts existants des laboratoires de l'École polytechnique. Le cadre institutionnel dans lequel s'insère ce premier exemple de laboratoire de mathématique contribue à modeler son fonctionnement, dont les aspects concrets sont un peu discutés ici. Les mathématiques qui y sont produites sont elles-mêmes modelées par cette forme spécifique de lieu appartenant une petite communauté mathématique. Schwartz peut ainsi proposer une formation par – même si cela reste limité à un certain nombre – et pour la recherche à des élèves polytechniciens, au travers de séminaires de plusieurs niveaux.

La création du Centre de Mathématiques de Schwartz a été suivie de la création de séminaires au sein de ce laboratoire, importants sur la scène mathématique parisienne, portant sur l'analyse fonctionnelle et les équations aux dérivées partielles respectivement. Il existe des séminaires avant les laboratoires, mais ceux-ci sont un cadre naturel pour les accueillir. Par le biais de ses séminaires et de son Centre de Mathématiques, l'École polytechnique trouve sa place dans les mathématiques parisiennes. L'étude détaillée de la vie mathématique des premières années du Centre de Mathématiques reste encore à faire ; elle dépasse très rapidement les frontières de l'École polytechnique.

Cette évolution de la place de la recherche en mathématiques au sein de l'École polytechnique s'accompagne d'une évolution de la place de la recherche en général au sein de l'École. Si Mai 68 est très peu mentionné, sauf pour justifier des « difficultés diverses », dans les rapports d'activité[69], dans ce rapport de 1968, on veut « élargir les liaisons entre les laboratoires et l'enseignement scientifique de l'École ». A partir de 1969, le rapport se divise en deux parties : les recherches en cours puis l'administration et la gestion. L'évolution de l'enseignement et les options « ont conduit à prévoir une association plus étroite entre les différents départements de recherche et d'enseignement propres de l'École » et à la création de cinq départements de recherche accolés au cinq départements d'enseignement. À partir de 1971, l'introduction est plus détaillée et donne un résumé de chaque laboratoire. En 1972 est décidée la création d'une commission de la recherche à l'École polytechnique. L'introduction est très explicite sur le rôle de la recherche. Ce texte – qui tient lieu d'avis d'intention – est dû au fait que l'École est devenue un « établissement

68. Communication personnelle.
69. Archives de l'École polytechnique, rapports d'activité des laboratoires.

public à caractère administratif » [70].

Le laboratoire est une structure institutionnelle qui organise la vie collective des mathématiques. Au sein du laboratoire de mathématiques se trouvent des secrétaires et une bibliothèque, ce qui est nécessité par tous les Instituts de Mathématiques. Mais le laboratoire définit avant tout un lieu, dans lequel on peut échanger sur les mathématiques, qui peut accueillir et organiser des séminaires. Les échanges mathématiques sont instantanés (favorisés par des discussions), mais aussi sur la longue durée : contrairement au colloque ou même à une séance de séminaire, les chercheurs présents y viennent régulièrement et y travaillent ensemble. La laboratoire est une structure pérenne d'organisation de la vie collective des mathématiques.

L'engagement de Schwartz pour réformer l'enseignement supérieur ne s'arrête pas à l'École polytechnique. Le texte de Philippe Ascher [Ascher 2003] en présente les grandes lignes : choisi par Pierre Mauroy comme membre de la « Commission du Bilan » en 1981 pour effectuer une analyse de l'enseignement supérieur, créateur de l'association Qualité de la Science Française, à l'origine du Comité National d'Évaluation en 1985...Schwartz n'a cessé de se battre pour réformer l'université française. Il ne réussira néanmoins pas, à son grand regret, à imposer ce pour quoi il s'est tant battu, à savoir l'introduction de la sélection à l'entrée de l'université [71]. Nous allons maintenant regarder une forme particulière d'engagement politique du mathématicien Schwartz, et le définir au sein de la vie collective des mathématiques où il se constitue en un « engagement mathématicien ».

70. En voici les premiers mots :

> Sous l'impulsion des autorités de tutelle, le Conseil d'Administration et la Direction Générale, ont défini le rôle et la nature de la recherche à l'École. Sa mission principale étant de donner aux élèves une culture scientifique de haut niveau et de caractère fondamental, l'École doit s'assurer le concours d'un corps enseignant de très haute valeur dont une partie soit en permanence accessible aux élèves. Ce n'est possible que si elle permet à ses professeurs et maîtres de conférences d'effectuer leurs recherches à l'intérieur même de l'École.

71. L'article mentionné de Ascher analyse les raisons de cet échec ; sa femme en dit quelques mots dans le même volume [Schwartz 2003c]. Schwartz a longuement évoqué le sujet dans ses livres [Schwartz 1983], [Merlin et Schwartz 1994] notamment.

Chapitre 7

L'engagement mathématicien [1]

7.1 Introduction : De l'engagement d'un mathématicien à l'engagement mathématicien.

Dès 1947, Cartan craint que Schwartz n'abandonne les mathématiques pour la politique, ainsi qu'il s'en ouvre à Weil :

> car si on attend Schwartz... Quel malheur de songer qu'un être aussi doué va de plus en plus sacrifier les maths à la politique !
>
> [Audin 2011, p.239. Lettre de Cartan à Weil du 15 juin 1947]

Laurent Schwartz écrit quant à lui : « J'ai passé une grande partie de mon temps à lutter pour les opprimés, pour les droits de l'homme et les droits des peuples » [2]. A travers ses différents engagements, nous allons donc nous intéresser à l'engagement d'un mathématicien face aux guerres, de la guerre d'Algérie ou du Vietnam à un contexte de guerre froide ou de régime totalitaire ne respectant pas les libertés individuelles.

Notre but va être de définir ce que peut être l'« engagement mathématicien » construit à l'intérieur de la vie collective des mathématiques, et y participant même. Quelles peuvent être les armes du mathématicien ? Nous regarderons les spécificités éventuelles d'un tel engagement, ses motivations, et les formes qu'il peut prendre.

Concernant Schwartz, on peut, très schématiquement, constater une évolution d'un engagement à l'intérieur d'un parti, puis proche de partis, ou dans des comités engagés, vers un engagement où la spécificité du mathématicien prend plus de place. C'est en ce sens que nous comprendrons l'engagement mathématicien. Précisons cependant dans quel cadre cela s'insère pour Schwartz. Ce dernier se place dans un cadre moral tout d'abord, fixé par cette citation de son père :

> « Si, dans une circonstance déterminée, tu te trouves seul de ton avis contre tous les autres, essaie de les écouter, car peut-être ils ont raison et tu as tort. Mais si, après avoir réfléchi, tu conserves ton avis tout en restant seul, il faut le dire et le crier très fort. » Cette parole est restée gravée en moi et m'a guidé dans toutes mes activités politiques à l'âge adulte .
>
> [Schwartz 1997, p.35]

Cette phrase est révélatrice des engagements politiques de Laurent Schwartz. Il a d'abord été proche de certains partis politiques, notamment de la mouvance trotskyste, dont il

1. Ce chapitre est une version étendue d'un texte, exposé lors de la journée « Des mathématiciens et des guerres. Histoires de confrontations (XIX^{e}-XX^{e} siècle) » par Antonin Durand, Laurent Mazliak et Rossana Tazzioli, et publié sous le titre « Laurent Schwartz un mathématicien face aux guerres. » [Paumier 2013] dans [Durand, Mazliak et Tazzioli 2013].

2. [Schwartz 1997, p.9]

s'est ensuite détaché. On pourrait parler ensuite de son engagement comme de celui d'un universitaire, mais qui très souvent est spécifiquement celui d'un mathématicien, qui s'exprime au nom d'une communauté mathématique. Voici comment Laurent Schwartz introduit un plaidoyer en faveur de Leonid Pliouchtch, un dissident soviétique qui avait été interné dans un hôpital psychiatrique et dont Laurent Schwartz demandait avec d'autres mathématiciens la libération, ou du moins la possibilité d'avoir un procès juste [3] :

> Faites attention, les mathématiciens sont très puissants dans le monde. Je vous préviens que, d'ici peu de temps, on parlera de Leonid Pliouchtch dans toutes les capitales du monde .
>
> [Schwartz 1997, p.502]

L'appel à la puissance des mathématiciens dans le monde montre que Schwartz se réfère à la communauté mathématique dans son ensemble pour essayer d'agir en faveur de Leonid Pliouchtch. Nous allons ici rechercher les traces de l'engagement mathématicien, à travers plusieurs exemples issus de la vie de Schwartz. Ces exemples seront loin de relater toutes ses implications, mais permettront, en les plaçant dans une perspective et un cadre plus général, de dégager quelques aspects d'un engagement mathématicien.

Précisons le dès à présent : il y a quelque chose d'artificiel à s'extraire des aspects spécifiquement politiques de l'engagement. Néanmoins, si cela n'a guère de sens pour le biographe de Schwartz cherchant à donner une certaine unité à ses choix de vie, ce choix est très fécond pour la description d'un certain aspect de la vie collective des mathématiques, en ce sens qu'il permet de caractériser une identité mathématicienne qui émerge dans ce cadre précis.

On s'aperçoit tout d'abord que les aspects de la vie collective des mathématiques que l'on a décrits dans les chapitres précédents sont réinvestis dans l'engagement politique. Colloques, séminaires, pratiques de publication, de diffusion et circulation de l'information sont largement mis à contribution. De plus, les formes de sociabilité particulières aux milieux mathématiques dans lesquels Schwartz a effectué sa formation (École Normale, Bourbaki) semblent réactualisés et adaptés aux différents combats qui sont menés. L'interprétation de Cartan, telle qu'elle est racontée par Charles Rhéaume dans son travail sur Sakharov [Rhéaume 2004], confirme l'aspect assez informel qui prédomine à la mobilisation des mathématiciens :

> Dans le cas des mathématiciens, indique à l'auteur Cartan, l'action gravitait essentiellement autour de « deux ou trois personnes », lesquelles se servaient comme occasions de mobilisation des séminaires de mathématiques Bourbaki, réunissant périodiquement plusieurs dizaines de mathématiciens de partout dans le monde. Des pétitions seraient alors présentées aux participants et, généralement, la presque totalité les signerait.
>
> [Rhéaume 2004, p.196]

Mais surtout, l'engagement mathématicien en tant que tel participe de la vie collective des mathématiques. L'étude des différentes formes d'engagement de Schwartz permet donc de présenter, encore une fois, un tableau du collectif, et donne donc des nouveaux indices sur les formes prises par la vie collective des mathématiques. L'action politique prend une place importante dans les activités collectives des mathématiciens de l'époque. De manière générale, c'est aussi le cas pour tous les scientifiques, mais il apparaît néanmoins quelques spécificités mathématiciennes. La mobilisation des mathématiciens précède souventcelle des autres scientifiques. [Rhéaume 2004, p.196-197] avance deux hypothèses. La perception d'un mathématicien, Cartan, tout d'abord :

3. Pour connaître les détails de l'histoire de Leonid Pliouchtch, de ses engagements et de ses procès, on pourra consulter notamment *L'affaire Pliouchtch* [Jean-Jacques Marie 1976]. La préface est signée de Michel Broué, Henri Cartan et Laurent Schwartz. Pliouchtch a aussi écrit ses mémoires [Plioutch 1977].

> Cartan a pour sa part ce sentiment : « Ça tient je crois à une chose, c'est que les mathématiciens plus que les autres forment une famille. Ils sont très solidaires et très proches les uns des autres. » De là, donc, leur empressement à venir en aide à l'un des leurs lorsque celui-ci est en difficulté.
>
> [Rhéaume 2004, p.196]

ou bien encore l'explication plus prosaïque d'un physicien, tenant à l'indépendance relative des mathématiciens par rapport à la science appliquée qui leur ôte le souci de compromis exigé par la « Big science » auxquels ont dû réfléchir les autres scientifiques. Nous allons voir que pour un certain nombre de mathématiciens, dépassant l'image de la « famille » proposée par Cartan, émerge une certaine conscience de la vie collective des mathématiques, qui conduit à la considération d'une certaine identité mathématicienne, ce qui implique qu'une réponse collective puisse et doive être apportée face à des enjeux qui, sans être purement mathématiques, concerne la communauté mathématique.

De nombreuses sources peuvent être exploitées pour parler de cet engagement mathématicien de Schwartz. Tout d'abord, les archives. Schwartz a légué un fonds très riche d'archives à l'École polytechnique, dont un très grand nombre témoignent de son engagement en faveur des droits de l'homme dans une trentaine de pays ; et plus particulièrement au Vietnam et en URSS. Les documents sont des manuscrits mathématiques (cours, exposés), des correspondances, des récits de voyage, ou encore des dossiers constitués de renseignement sur une personne en particulier. À cela s'ajoutent des rencontres avec d'anciens collègues, amis ou élèves de Laurent Schwartz comme Michel Broué qui, outre le témoignage oral qu'il m'a confié, m'a donné accès aux archives du Comité des Mathématiciens, ou encore Alain Guichardet qui m'a livré quelques récits de ses engagements auprès de Laurent Schwartz. De telles rencontres permettent parfois de donner une consistance aux documents écrits [4].

Ce chapitre est organisé, de manière globalement chronologique, autour de moments importants au cours desquels l'engagement mathématicien de Schwartz se définit. Schwartz a été très mobilisé au moment de la guerre d'Algérie ; nous n'en présentons ici que la facette la plus mathématicienne de son engagement, à savoir la soutenance de thèse de Maurice Audin et sa participation au Comité Audin. Le Viêtnam n'est quant à lui présenté que sous forme de questions et de pistes encore ouvertes. La partie la plus importante est celle qui concerne le Comité des Mathématiciens, dont nous présentons les objectifs et les modes de fonctionnement. Il s'agit là d'une structure cherchant à représenter au mieux l'engagement mathématicien, comme nous allons le voir, en proposant quelques exemples de personnes ou situations défendues. Enfin, nous ouvrons sur quelques limites à cet engagement mathématicien que ce chapitre a défini.

7.2 Le Comité Audin dans la guerre d'Algérie.

Le premier exemple est le Comité Audin, qui correspond à un fort engagement de Schwartz pendant la guerre d'Algérie, en son nom de mathématicien. En plein coeur de la guerre d'Algérie (pour les dates principales, voir le tableau 7.1), le 11 juin 1957, Maurice Audin [5], militant du parti communiste algérien et mathématicien de la faculté des sciences d'Alger est arrêté à son domicile. On n'a plus dès lors de nouvelles de lui et il est déclaré disparu le 21 juin 1957. Rapidement, l'opinion française est alertée par sa femme, Josette

4. Seuls deux types de sources – archives et témoignage oral – sont citées ici. Dans le cas de notre étude, elles semblent être les plus riches et les plus pertinentes.

5. Sur la vie de Maurice Audin, on peut lire le récit de sa fille, la mathématicienne Michèle Audin [Audin 2013].

1 novembre 1954	Début de la guerre d'Algérie
mars 1956	Pouvoirs spéciaux
janvier 1957	Massu, parachutistes. Début de la bataille d'Alger
11 juin 1957	Arrestation de Maurice Audin à son domicile. Maurice Audin est militant du parti communiste algérien, et assistant de mathématiques à la Faculté des Sciences d'Alger.
21 juin 1957	« Disparition » de Maurice Audin.
Août 1957	L'Affaire Audin a atteint Paris
novembre 1957	Création du Comité Audin
2 décembre 1957	Soutenance de thèse *in abstentia*. De Possel présente la thèse. Examinateurs : Schwartz, Dixmier, De Possel. Président du jury : Favard.
1958	Parution de *L'Affaire Audin* de Pierre Vidal-Naquet (préface de Schwartz) et de *La question* d'Henri Alleg.
19 mars 1962	Indépendance de l'Algérie
1963	Maurice Audin est déclaré mort par un tribunal.

FIGURE 7.1 – Principales dates de l'Affaire Audin.

Audin. On apprendra ensuite qu'il a été torturé, et assassiné par l'un de ses tortionnaires. Un Comité Audin est créé en novembre 1957, notamment autour de Laurent Schwartz et Pierre Vidal-Naquet, qui fait paraître *L'Affaire Audin* en 1958 aux Editions de Minuit [6] . On y trouve la trace de l'engagement des universitaires en faveur de leur collègue. Voici ce qu'écrit Laurent Schwartz lorsqu'il en signe la préface :

> Dans son discours à la séance de rentrée solennelle de l'Université, le recteur Sarrailh a expliqué que l'Université avait le devoir, non seulement de former des techniciens, mais aussi de former des consciences, et qu'elle était elle-même une conscience. La "révolte" des universitaires à propos d'Audin est l'expression de cette conscience.
>
> [Vidal-Naquet 1958, Préface p.54]

Pierre Vidal-Naquet précise ensuite comment s'est organisée cette solidarité universitaire en faveur de Maurice Audin. Audin a été érigé en symbole de la lutte contre la torture, même si son statut d'universitaire en faisait un cas assez particulier, tout en permettant une mobilisation particulièrement forte de la communauté enseignante. Pierre Vidal-Naquet l'écrit ainsi :

> Il était, enfin, un universitaire, un mathématicien de niveau honorable, dont la thèse venait d'être achevée, sous la direction de Laurent Schwartz [7], très jeune de surcroît – il avait vingt-cinq ans –, ce qui provoquait des solidarités corporatives, et d'abord celle de ses collègues assistants, dont j'étais.
>
> [Vidal-Naquet 1958, p.31]

Il précise même l'importance du rôle joué par les mathématiciens :

6. [Vidal-Naquet 1958]. Ce livre sera réimprimé en 1989, dans une version augmentée d'une première partie proposant un scénario de la disparition de Maurice Audin, ainsi que d'une troisième partie relatant la suite de l'affaire. Il existe une littérature très abondante autour de « l'affaire Audin ». Nous nous appuyons surtout ici sur le livre de Pierre Vidal-Naquet, qui est lui-même écrit à partir d'articles de presse et de documents de l'époque, ainsi que d'archives du ministère de la justice. Un livre paru en même temps en 1958, *La question*, d'Henri Alleg [Alleg 1958] parle plus généralement de la torture pendant la guerre d'Algérie. Pour un panorama plus général de l'engagement des intellectuels en France dans la guerre d'Algérie, on pourra lire [Rioux et Sirinelli 1988].

7. Ainsi qu'on le voit plus loin, Schwartz est rapporteur de la thèse ; le directeur est René de Possel.

> Les mathématiciens, en tout cas, firent preuve d'une belle solidarité et d'une activité qui ne devait pas se démentir pendant et depuis la guerre d'Algérie.
>
> [Vidal-Naquet 1958, p.31]

Les mathématiciens se sont en effet mobilisés, plus précisément en organisant une soutenance de thèse in abstentia de Maurice Audin. Comme Maurice Audin n'avait pas été déclaré mort par le gouvernement français, il avait le droit de soutenir sa thèse légitimement. Ils organisent donc à la Sorbonne une soutenance de thèse, dont Laurent Schwartz était l'un des rapporteurs, avec Jacques Dixmier. La thèse, intitulée « Sur les équations linéaires dans un espace vectoriel » [Audin 1957] n'étant pas tout à fait terminée, Schwartz y rajoute quelques corrections, et son directeur de thèse, René de Possel, la soutient. La version imprimée de la thèse comporte donc un erratum de quatre pages, signé par Schwartz, et rédigé par Dixmier et lui. Un récit de la soutenance se trouve notamment dans l'article écrit par Schwartz pour la commémoration de la thèse [Schwartz 1998].

Notons que Schwartz décrit son intérêt pour les mathématiques d'Audin :

> Elle commençait par la théorie de l'indice d'un opérateur (différence de la dimension du noyau et de la codimension de l'image), trouvées en 1951 par Atkinson ; elle n'était donc pas tout à fait récente, mais relativement très peu connue dans le public mathématique de 1957 (moi-même je ne la connaissais pas). Elle constitue depuis une théorie tout à fait courante. Il étudiait ensuite les chaînes d'un opérateur T de E dans E : une chaîne de rang m, de premier terme e_1, est une suite de m éléments de E, tels que $Te_1 = 0$, $Te_2 = e_1$,..., m pouvant être infini. Il étudia alors, à l'aide des chaînes, une succession de propriétés des opérateurs de E dans E d'image fermée. Comme je m'étais beaucoup servi moi-même des morphismes stricts dans les espaces de Fréchet, ses généralisations m'intéressaient. Il donnait au chapitre V un très beau théorème spectral ; c'était un travail tout à fait original.
>
> [Schwartz 1998]

L'intérêt pour les mathématiques d'Audin est bien réel ici chez Schwartz, et c'est peut-être le seul à parler du contenu mathématique de la thèse lorsqu'il fait un récit de la soutenance.

On trouvera dans la bibliographie une liste complète des articles (qui sont des notes aux *Comptes Rendus de l'Académie des sciences*) publiés par Audin. Ils sont au nombre de 6, publiés de 1953 à 1957. Ces articles contiennent notamment la référence au texte (publié en russe) d'Atkinson cité par Schwartz. Schwartz s'est effectivement intéressé aux « morphismes stricts dans les espaces de Fréchet », ainsi qu'en témoigne le corollaire terminant sa note [Schwartz 1953b]. C'est ainsi qu'il est compétent, en 1957, pour rédiger un addendum de 4 pages à la thèse d'Audin, permettant d'en corriger les énoncés ou preuves incorrects. Cet addendum est ajouté, à part, à la thèse dans sa version publiée. Quelques années plus tard, en 1963-1964, le séminaire Cartan, qu'Henri Cartan organise avec Schwartz cette année-là [8], porte sur le théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique. Les deux premiers exposés [Schwartz 1963-1964a], [Schwartz 1963-1964b], donnés par Schwartz, définissent notamment l'indice, et donnent comme références, notamment, des travaux d'Atkinson, Audin et Schwartz.

Ce récit est écrit en 1998 néanmoins, et est nécessairement rétrospectif. On se demande si l'intérêt mathématique avancé par Schwartz est justifié uniquement par l'action politique qu'il permet. Schwartz raconte cependant dans son autobiographie [Schwartz 1997, p.382] que Maurice Audin est venu le trouver au printemps 1957 [9], sur une suggestion de son directeur de thèse René de Possel. Il se souvient lui avoir conseillé d'apporter quelques compléments à sa thèse avant de la soutenir. Politique et mathématiques s'entremêlent au cours de cette histoire : les mathématiques ne portent pas plus la politique que l'inverse.

8. On trouve la liste des exposés donnés cette année-là au séminaire Cartan en annexe, O p.361.
9. En fait, 1956.

Nous verrons au cours de ce chapitre que l'intérêt pour les mathématiques en tant que telles n'est pas toujours aussi explicité, ni aussi directement lié aux motivations des mathématiciens engagés, mais au contraire, qu'il semble par moment construit artificiellement.

L'événement, inédit semble-t-il, constitué par cette soutenance de thèse, a fait venir des mathématiciens, mais aussi beaucoup de monde : journalistes, personnalités... ce qui a permis de faire connaître l'affaire de manière très large. Laurent Schwartz insiste lui aussi sur le rôle spécifique des mathématiciens :

> Les mathématiciens ont été en tête dans la résistance à la guerre d'Algérie. Je crois que cela tient en partie à l'état d'esprit très "pur" des mathématiciens au milieu de tous les autres intellectuels, mais la thèse d'Audin, un acte qui leur revient entièrement, les a complètement lancés dans la bataille.
>
> [Schwartz 1998, p.]

Au-delà de la réflexion sur les débuts de l'engagement de la communauté mathématique, on remarque que Schwartz propose une explication à l'engagement mathématicien, issu des mathématiques elles-mêmes. Cette deuxième caractéristique de l'engagement mathématicien, mise en avant dans cette phrase de Schwartz, nous intéressera plus spécifiquement lorsque nous regarderons le Comité des Mathématiciens.

Le rôle de Schwartz dans le Comité Audin permet ainsi de comprendre un peu mieux ce que peut signifier un engagement mathématicien dans une guerre. Cette action et ce Comité inspireront surtout, une vingtaine d'années plus tard, la création du Comité des Mathématiciens, qui fait l'objet d'une partie ultérieure.

7.3 La passion du Viêtnam [10]

La lecture des archives et des récits de Laurent Schwartz permet d'observer une continuité dans la relation qu'il entretient avec le Vietnam. On ressent dans les correspondances et récits de voyage son amour pour ce pays. Laurent Schwartz a séjourné à quatre reprises au Vietnam, Seul son premier voyage en 1968 avait un but politique, puisqu'il était invité en tant que membre du Tribunal Russell. Dès ce premier séjour, il a rencontré la communauté mathématique vietnamienne, et est allé voir les écoles, ainsi qu'en témoignent les photos conservées aux archives. Et toutes les autres fois, il a donné des cours [11] , il est allé à plusieurs reprises à la rencontre des mathématiciens vietnamiens et il en a beaucoup aidé, soit en entretenant avec eux une correspondance mathématique, soit en essayant d'agir pour le respect des droits de l'homme. Tout ceci forme un tout dans les archives, qui mérite d'être étudié comme tel.

L'engagement de Schwartz en faveur du Viêtnam ne saurait donc se résumer à un engagement politique [12]. Il est aussi engagement pour l'enseignement et la recherche. Schwartz cherche en effet à développer la communauté mathématique locale – et ce, pas uniquement au Viêtnam. C'est pourquoi nous le laissons de côté pour une potentielle étude ultérieure.

10. On trouvera un exposé plus détaillé sur le Viêtnam dans la contribution de Pierre Journoud [Journoud 2013]. Les deux études sur Schwartz, [Journoud 2013] et [Paumier 2013] ont été exposées lors de la même journée et ont donné lieu à une intéressante discussion.

11. On peut trouver de nombreux exemples de ces cours dans les archives Schwartz conservées à l'École polytechnique.

12. C'est précisément l'engagement politique qui est étudié dans [Journoud 2013].

7.4 Le Comité des Mathématiciens (1973-1985)

7.4.1 Influence du Comité Audin dans la création du Comité des mathématiciens ?

Le Comité Audin a eu pour mode d'action : impression de brochures et de tracts, communiqués de presse, conférences de presse, meetings et manifestations publiques. Il y aura la création de comités Audin en province, qui se fédéreront autour de celui de Paris. Enfin, il se réunit autour de la rédaction d'une brochure, qui sera en fait le livre écrit par Vidal-Naquet, et publié en 1958 ([Vidal-Naquet 1958]).

Dans son autobiographie, voici comment Laurent Schwartz cite l'expérience du Comité Audin, quand il parle du Comité des mathématiciens :

> Au cours de ma longue lutte pour les droits de l'homme, j'ai cherché à soutenir les droits de certains peuples opprimés, Algériens, Tunisiens, Marocains, Malgaches, Vietnamiens ou Afghans. Mais une autre bataille s'est distinguée radicalement de toutes les luttes antérieures : il s'agissait ici de défendre des individus opprimés, des prisonniers d'opinion et plus spécialement des mathématiciens. Le cas antérieur de Maurice Audin inspira beaucoup ces nouvelles batailles.
>
> [Schwartz 1997, p.497]

Dans la Préface de *L'Affaire Pliouchtch*, signée par Cartan, Schwartz et Broué, on trouve :

> L'histoire est pleine de symboles, et le cas Pliouchtch est peut-être celui qui ressemble le plus à ce qu'il symbolise. Dreyfus, après tout, était officier. Angela Davis est noire, certes, mais universitaire ; elle a, pourtant et à cause de cela, symbolisé les victimes de la répression raciste aux Etats-Unis qui, en général, ne sont pas des universitaires. Maurice Audin, lui aussi, était mathématicien ; il était communiste et européen. Etranglé lors d'une séance de torture par un parachutiste français, le lieutenant Charbonnier, il est devenu un symbole de la torture pendant la guerre d'Algérie. Il sera pourtant le seul Européen « disparu » pendant la bataille d'Alger, et les universitaires, même musulmans, seront relativement protégés de la torture. Qu'il nous soit permis de rappeler ici que deux des signataires de cette préface - le troisième avait alors dix ans - ont collaboré au Comité Maurice Audin, en particulier en organisant, le 2 décembre 1957, la soutenance in abstentia de la thèse d'Audin.
>
> [Mathon et Marie 1976, p.15-16]

Ces deux citations montrent les forts liens qui unissent ces deux initiatives auxquelles Schwartz a pris part, que ce soit pour la forme d'action (le comité), le choix du combat (défense d'un mathématicien) ou bien les modes d'expression (événements, réunions, brochure).

7.4.2 Les débuts du Comité des Mathématiciens

Tout commence, semble-t-il, par un appel à l'aide lancé par le physicien russe Andrei Sakharov en 1973 pour le mathématicien Chikhanovitch [13] . Il contacte Laurent Schwartz et Michel Broué, ainsi que Lipman Bers et Henri Cartan. À la suite d'une pétition signée par plus de cinq cents mathématiciens, ces quatre collègues décident en 1974 de créer un Comité international des mathématiciens pour la défense de Chikhanovitch et Pliouchtch.

13. Un ouvrage très riche [Rhéaume 2004] propose, en étudiant le cas de Sakharov, une analyse fine de l'interprétation individuelle de l'engagement d'un scientifique. On y trouve exposé les opinions de Sakharov, scientifique très engagé pour la défense de droits de l'homme en URSS, mais aussi la mise en place, à l'Ouest, de Comités aux États-Unis, en France et au Royaume-Uni, en réponse notamment à ses appels à l'aide concernant les dissidents soviétiques.

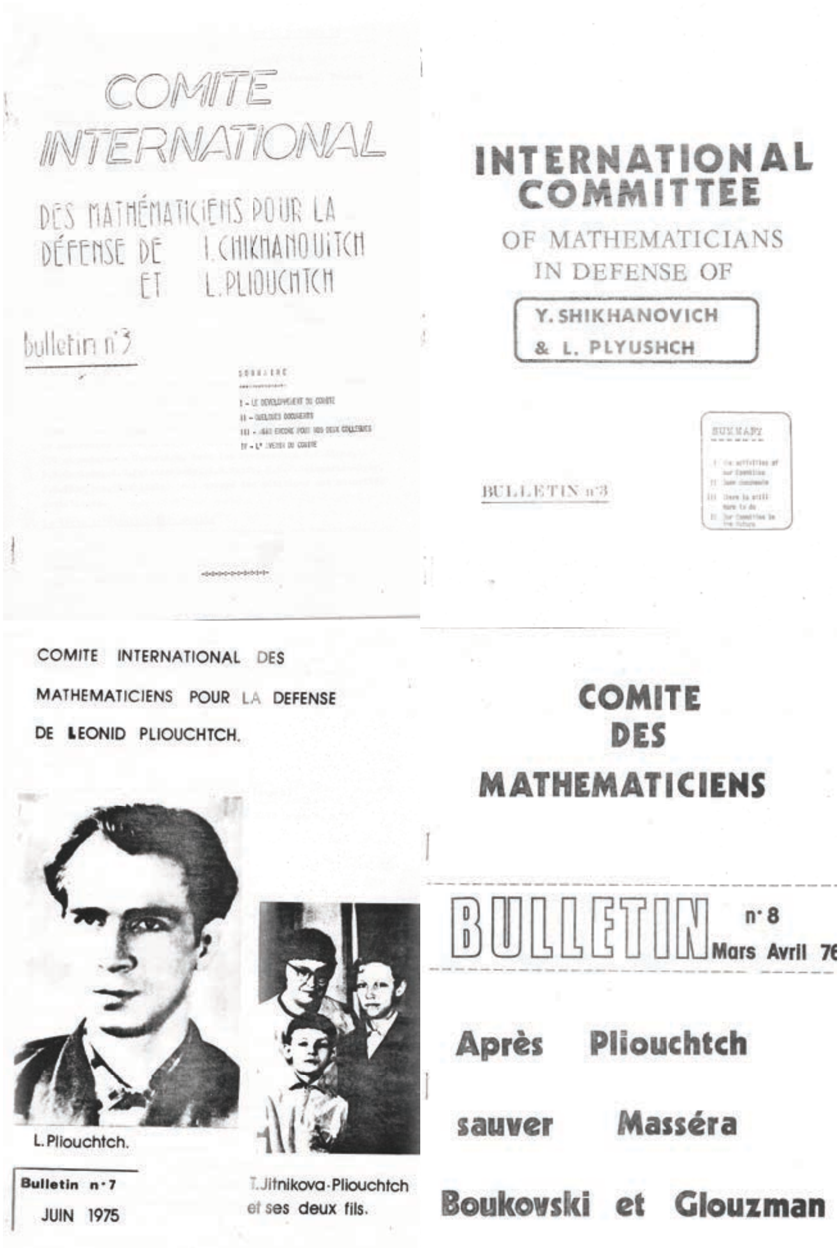
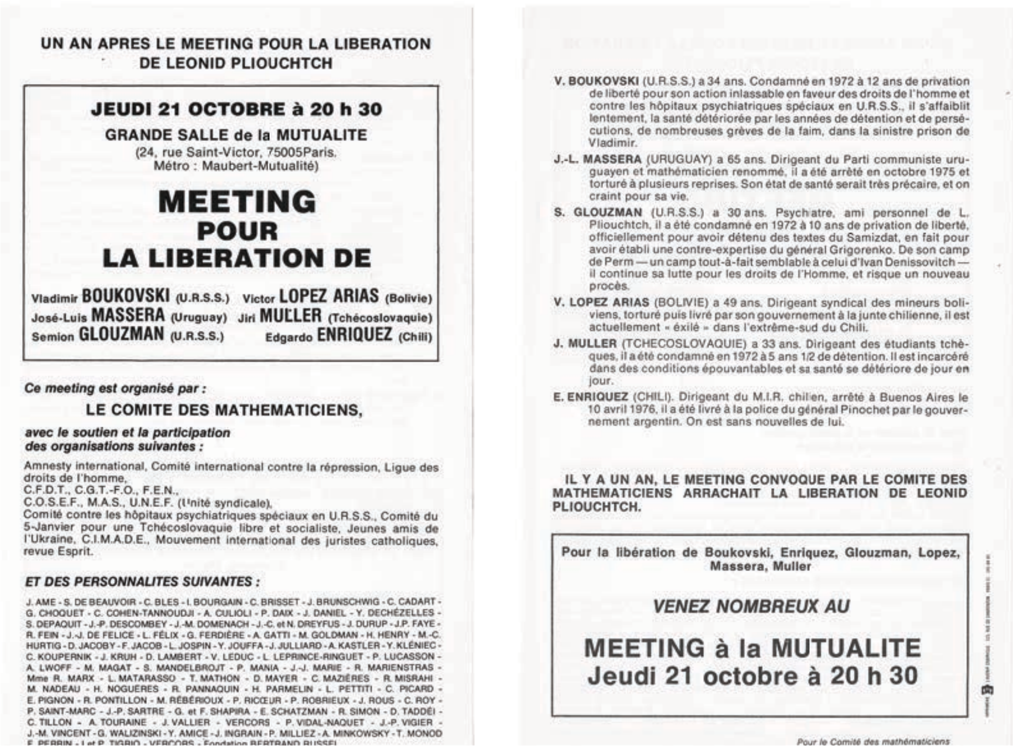


FIGURE 7.2 – Quelques couvertures du Bulletin du Comité des Mathématiciens (Archives Michel Broué)

Figure 7.3 – Accueil de Plioutch à Paris par les membres du Comité des Mathématiciens, 1976 (Archives Michel Broué)



UN AN APRES LE MEETING POUR LA LIBERATION DE LEONID PLIOUCHTCH

JEUDI 21 OCTOBRE à 20 h 30

GRANDE SALLE de la MUTUALITE
(24, rue Saint-Victor, 75005Paris.
Métro : Maubert-Mutualité)

**MEETING
POUR
LA LIBERATION DE**

Vladimir **BOUKOVSKI** (U.R.S.S.) Victor **LOPEZ ARIAS** (Bolivie)
José-Luis **MASSERA** (Uruguay) Jiri **MULLER** (Tchécoslovaquie)
Semion **GLOUZMAN** (U.R.S.S.) Edgardo **ENRIQUEZ** (Chili)

Ce meeting est organisé par :

LE COMITE DES MATHEMATICIENS,

avec le soutien et la participation des organisations suivantes :

Amnesty international, Comité international contre la répression, Ligue des droits de l'homme,
C.F.D.T., C.G.T.-F.O., F.E.N.,
C.O.S.E.F., M.A.S., U.N.E.F. (Unité syndicale),
Comité contre les hôpitaux psychiatriques spéciaux en U.R.S.S., Comité du 5-Janvier pour une Tchécoslovaquie libre et socialiste, Jeunes amis de l'Ukraine, C.I.M.A.D.E., Mouvement international des juristes catholiques, revue Esprit.

ET DES PERSONNALITES SUIVANTES :

J. AME - S. DE BEAUVOIR - C. BLES - I. BOURGAIN - C. BRISSET - J. BRUNSCHWIG - C. CADART - G. CHOQUET - C. COHEN-TANNOUDJI - A. CULIOLI - P. DAIX - J. DANIEL - Y. DECHÉZELLES - S. DEPAQUIT - J.-P. DESCOMBEY - J.-M. DOMENACH - J.-C. et N. DREYFUS - J. DURUP - J.P. FAYE - R. FEIN - J.-J. DE FELICE - L. FÉLIX - G. FERDIÈRE - A. GATTI - M. GOLDMAN - H. HENRY - M.-C. HURTIG - D. JACOBY - F. JACOB - L. JOSPIN - Y. JOUFFA - J. JULLIARD - A. KASTLER - Y. KLÉNIEC - C. KOUPERNIK - J. KRUH - D. LAMBERT - V. LEDUC - L. LEPRINCE-RINGUET - P. LUCASSON - A. LWOFF - M. MAGAT - S. MANDELBROJT - P. MANIA - J.-J. MARIE - R. MARIENSTRAS - Mme R. MARX - L. MATARASSO - T. MATHON - D. MAYER - C. MAZIÈRES - R. MISRAHI - M. NADEAU - H. NOGUÈRES - R. PANNAQUIN - H. PARMELIN - L. PETTITI - C. PICARD - E. PIGNON - R. PONTILLON - M. RÉBÉRIOUX - P. RICŒUR - P. ROBRIEUX - J. ROUS - C. ROY - P. SAINT-MARC - J.-P. SARTRE - G. et F. SHAPIRA - E. SCHATZMAN - R. SIMON - D. TADDÉI - C. TILLON - A. TOURAINE - J. VALLIER - VERCORS - P. VIDAL-NAQUET - J.-P. VIGIER - J.-M. VINCENT - G. WALIZINSKI - Y. AMICE - J. INGRAIN - P. MILLIEZ - A. MINKOWSKY - T. MONOD - F. PERRIN - J. et P. TIGRID - VERCORS - Fondation BERTRAND RUSSEL

V. BOUKOVSKI (U.R.S.S.) a 34 ans. Condamné en 1972 à 12 ans de privation de liberté pour son action inlassable en faveur des droits de l'homme et contre les hôpitaux psychiatriques spéciaux en U.R.S.S., il s'affaiblit lentement, la santé détériorée par les années de détention et de persécutions, de nombreuses grèves de la faim, dans la sinistre prison de Vladimir.

J.-L. MASSERA (URUGUAY) a 65 ans. Dirigeant du Parti communiste uruguayen et mathématicien renommé, il a été arrêté en octobre 1975 et torturé à plusieurs reprises. Son état de santé serait très précaire, et on craint pour sa vie.

S. GLOUZMAN (U.R.S.S.) a 30 ans. Psychiatre, ami personnel de L. Pliouchtch, il a été condamné en 1972 à 10 ans de privation de liberté, officiellement pour avoir détenu des textes du Samizdat, en fait pour avoir établi une contre-expertise du général Grigorenko. De son camp de Perm — un camp tout-à-fait semblable à celui d'Ivan Denissovitch — il continue sa lutte pour les droits de l'Homme, et risque un nouveau procès.

V. LOPEZ ARIAS (BOLIVIE) a 49 ans. Dirigeant syndical des mineurs boliviens, torturé puis livré par son gouvernement à la junte chilienne, il est actuellement « exilé » dans l'extrême-sud du Chili.

J. MULLER (TCHECOSLOVAQUIE) a 33 ans. Dirigeant des étudiants tchèques, il a été condamné en 1972 à 5 ans 1/2 de détention. Il est incarcéré dans des conditions épouvantables et sa santé se détériore de jour en jour.

E. ENRIQUEZ (CHILI). Dirigeant du M.I.R. chilien, arrêté à Buenos Aires le 10 avril 1976, il a été livré à la police du général Pinochet par le gouvernement argentin. On est sans nouvelles de lui.

IL Y A UN AN, LE MEETING CONVOQUE PAR LE COMITE DES MATHEMATICIENS ARRACHAIT LA LIBERATION DE LEONID PLIOUCHTCH.

Pour la libération de Boukovski, Enriquez, Glouzman, Lopez, Massera, Muller

VENEZ NOMBREUX AU

**MEETING à la MUTUALITE
Jeudi 21 octobre à 20 h 30**

Pour le Comité des mathématiciens

Figure 7.4 – Meeting à la Mutualité, 1976 (Archives Michel Broué)

Parmi la liste des mathématiciens dont s'est occupé le Comité au cours de son existence, on se limitera ici à quelques exemples, organisés de manière non chronologique afin d'illustrer cet engagement mathématicien, et revendiqué comme tel.

Le Comité des Mathématiciens est créé comme un comité international, mais sa dimension internationale relève surtout de la transmission et de l'échange d'informations. Nous en verrons quelques aspects, mais ferons surtout une description du fonctionnement français du Comité. Les trois fondateurs français, même s'ils sont à l'origine d'une très grande partie de l'action du Comité, ont toujours souhaité représenter la communauté mathématique dans son ensemble, qui s'implique pourtant à un niveau bien moindre. Les assemblées générales ont lieu le samedi après-midi, à l'Institut Henri Poincaré, à la suite du dernier exposé de la première journée du séminaire Bourbaki [14]. Ce séminaire qui réunit quelques fois dans l'année les mathématiciens à Paris autour d'exposés donnés par des orateurs renommés est un des plus anciens qui existent encore aujourd'hui, alors qu'il avait été créé après-guerre par les membres fondateurs du collectif Bourbaki. Dans les souvenirs de Michel Broué, ces assemblées générales du Comité ne réunissaient pas nécessairement beaucoup de monde, mais quelques membres étaient systématiquement présents – Broué cite notamment Pierre Deligne. Surtout, tous les mathématiciens avaient la possibilité de donner leur avis et d'être régulièrement informés des actions qui étaient faites en leur nom. C'est très certainement une caractéristique importante du Comité des Mathématiciens, qui accorde une grande importance à la diffusion large et régulière d'informations. Le Comité ne s'est pas intéressé uniquement à Chikhanovitch et Pliouchtch ; ainsi que l'on peut le voir dans les archives, d'autres mathématiciens sont venus s'ajouter à la liste [15]. Et le Comité publie régulièrement un Bulletin, pour donner des informations sur les mathématiciens emprisonnés, sur d'éventuelles améliorations ou au contraire pour insister sur l'urgence de la situation. On y apprend aussi la libération de certains d'entre eux – le témoignage passionné de Michel Broué le conduit même à affirmer que tous été libérés [16]. On peut aussi lire des revues de presse, comportant des coupures d'articles sélectionnés. Le Bulletin est largement diffusé lors des séminaires Bourbaki. Il est envoyé par la poste à tous ceux qui ont demandé à faire partie du Comité, notamment à ceux qui ont envoyé une souscription, nécessaire aux frais de fonctionnement. Le Bulletin est aussi diffusé à l'étranger, mais de moins en moins largement pour réduire les coûts : rapidement, il n'est plus envoyé qu'à quelques correspondants, qui se chargent de le reproduire. Les premiers numéros sont rédigés en français et en anglais, puis le Bulletin devient plus spécifiquement français.

Cette double vocation de représenter l'ensemble de la communauté mathématique et de relayer l'information en son sein peut être illustrée par une de ses actions internationales :en 1974, à Vancouver lors du Congrès international des mathématiciens, Lipman Bers et Henri Cartan – avec l'aide logistique et matérielle de Michel Broué, qui est venu au Congrès surtout pour cela – organisent une réunion d'information à laquelle assistent un grand nombre de mathématiciens . Une pétition qui circule pendant le congrès sera signée par plus de neuf cents mathématiciens. Encore une fois, le lieu choisi n'est pas anodin : il se situe en plein cœur de la vie mathématique. Les mathématiciens sont amenés à se prononcer sur la nécessité et leur volonté de continuer et développer le Comité plus largement. Deux modes

14. Entretien avec Michel Broué, 12 janvier 2012, ainsi que plusieurs numéros du Bulletin du Comité. Les exposés donnés au séminaire Bourbaki ont été numérisés, et se trouvent sur le site Numdam (http ://www.numdam.org/).

15. Même si le Comité des mathématiciens s'est beaucoup intéressé à des mathématiciens soviétiques, on retrouve aussi notamment une forte mobilisation en faveur de José Luis Masséra, mathématicien uruguayen ou Sion Assidon, mathématicien marocain, pour n'en citer que quelques uns.

16. Entretien avec Michel Broué, 12 janvier 2012.

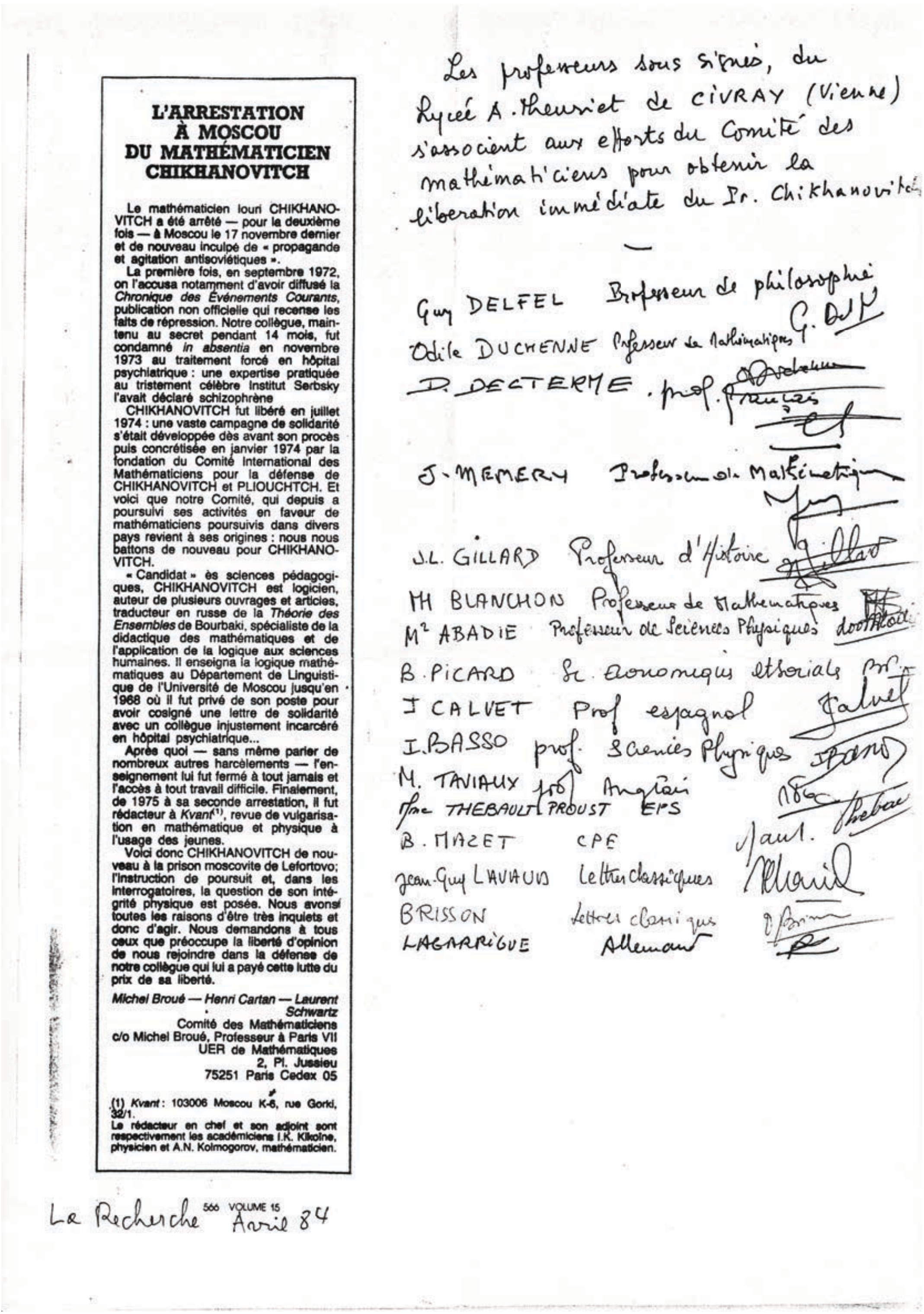
d'action sont privilégiés par le Comité des Mathématiciens : les pétitions et les meetings. De multiples pétitions, dont les premiers mots « nous mathématiciens » désignent les signataires concernés, sont envoyées aux mathématiciens et très suivies. Il y a eu deux grands meetings organisés, l'un pour Leonid Pliouchtch, le 23 octobre 1975, et l'autre appelé « le meeting de libération des Six », le 21 octobre 1976, tous les deux très médiatisés. On touche là la limite de l'action non partisane. On peut ainsi lire dans le Bulletin que les réactions de certains mathématiciens n'étaient pas très enthousiastes à l'idée d'organiser un meeting si politisé... et l'engagement qui suit du Comité à faire plus attention à ne pas mêler la politique à son action. Michel Broué ne se souvient pas avoir jamais subi la moindre critique, mais le numéro du Bulletin de décembre 1976 suivant ce meeting le contredit :

> Le meeting du 21 octobre 1976, sa conception et ses conséquences, ont été très diversement appréciés, au sein du comité des mathématiciens, et parmi les organisations qui l'ont soutenu. Au cours de l'assemblée générale de notre comité, qui s'est tenue – comme de coutume – à l'issue de la première journée du Séminaire Bourbaki, la conclusion a été tirée : le Comité des mathématiciens doit continuer son combat, pour les mathématiciens emprisonnés, et pour les six personnes dont les cas ont été mis en avant [17] le 21 octobre. Mais il doit être très attentif à ce que son action ne dévie pas de ses buts, précis, concrets, et délimités : la libération des emprisonnés. Il est regrettable que, par certains côtés, le meeting du 21 octobre ait pu apparaître plus comme un événement politique que comme un meeting de combat pour libérer six hommes, et il faut veiller à ce que ces faiblesses ne se reproduisent pas . » [18]

On voit ici une première limite à un engagement purement mathématicien.

7.4.3 Fonctionnement interne du Comité

Cartan, Schwartz et Broué se réunissaient très souvent, jusqu'à une fois par semaine, à propos du Comité. On voit dans les archives la trace de leur activité : il y a beaucoup de correspondances, et d'échanges d'information à propos des mathématiciens emprisonnés. Le principe de s'occuper d'une seule personne, que Schwartz dit avoir hérité de son expérience du Comité Audin, est aussi celui d'Amnesty, avec qui le Comité aura de nombreux contacts : il est plus facile d'obtenir des renseignements précis si l'on se concentre sur une seule personne. Et l'action symbolique que l'on est capable de réaliser profitera à toutes les autres victimes qui sont dans le même cas. On a souvent reproché au Comité des mathématiciens de ne s'occuper que des mathématiciens, alors que d'autres hommes étaient dans la même situation. Cette objection était pourtant réfutée par l'efficacité du Comité, et par sa légitimité à agir en faveur d'un mathématicien en mobilisant toute la communauté mathématique. On pourrait aussi parler des voyages réalisés, des visites dans les ambassades... autant de moyens pour faire connaître son action, afin d'aboutir à un résultat. Le résultat de ces actions a en tout cas été la libération de la plupart des mathématiciens concernés. Le Comité des Mathématiciens n'a certes pas été le seul à agir, mais sa contribution à cette dynamique est indéniable.



L'ARRESTATION À MOSCOU DU MATHÉMATICIEN CHIKHANOVITCH

Le mathématicien Iouri CHIKHANOVITCH a été arrêté — pour la deuxième fois — à Moscou le 17 novembre dernier et de nouveau inculpé de « propagande et agitation antisoviétiques ».

La première fois, en septembre 1972, on l'accusa notamment d'avoir diffusé la *Chronique des Événements Courants*, publication non officielle qui recense les faits de répression. Notre collègue, maintenu au secret pendant 14 mois, fut condamné *in absentia* en novembre 1973 au traitement forcé en hôpital psychiatrique : une expertise pratiquée au tristement célèbre Institut Serbsky l'avait déclaré schizophrène

CHIKHANOVITCH fut libéré en juillet 1974 : une vaste campagne de solidarité s'était développée dès avant son procès puis concrétisée en janvier 1974 par la fondation du Comité International des Mathématiciens pour la défense de CHIKHANOVITCH et PLIOUCHTCH. Et voici que notre Comité, qui depuis a poursuivi ses activités en faveur de mathématiciens poursuivis dans divers pays revient à ses origines : nous nous battons de nouveau pour CHIKHANOVITCH.

« Candidat » ès sciences pédagogiques, CHIKHANOVITCH est logicien, auteur de plusieurs ouvrages et articles, traducteur en russe de la *Théorie des Ensembles* de Bourbaki, spécialiste de la didactique des mathématiques et de l'application de la logique aux sciences humaines. Il enseigna la logique mathématiques au Département de Linguistique de l'Université de Moscou jusqu'en 1968 où il fut privé de son poste pour avoir cosigné une lettre de solidarité avec un collègue injustement incarcéré en hôpital psychiatrique...

Après quoi — sans même parler de nombreux autres harcèlements — l'enseignement lui fut fermé à tout jamais et l'accès à tout travail difficile. Finalement, de 1975 à sa seconde arrestation, il fut rédacteur à *Kvant*(1), revue de vulgarisation en mathématique et physique à l'usage des jeunes.

Voici donc CHIKHANOVITCH de nouveau à la prison moscovite de Lefortovo; l'instruction de poursuit et, dans les interrogatoires, la question de son intégrité physique est posée. Nous avons toutes les raisons d'être très inquiets et donc d'agir. Nous demandons à tous ceux que préoccupe la liberté d'opinion de nous rejoindre dans la défense de notre collègue qui lui a payé cette lutte du prix de sa liberté.

Michel Broué — Henri Cartan — Laurent Schwartz

Comité des Mathématiciens
c/o Michel Broué, Professeur à Paris VII
UER de Mathématiques
2, Pl. Jussieu
75251 Paris Cedex 05

(1) *Kvant* : 103006 Moscou K-6, rue Gorki, 32/1.
Le rédacteur en chef et son adjoint sont respectivement les académiciens I.K. Kikoïne, physicien et A.N. Kolmogorov, mathématicien.

La Recherche 566 VOLUME 15 Avril 84

Les professeurs sous signés, du Lycée A. Theuriet de CIVRAY (Vienne) s'associent aux efforts du Comité des mathématiciens pour obtenir la libération immédiate du Pr. Chikhanovitch

Guy DELFEL Professeur de philosophie
Odile DUCHENNE Professeur de Mathématiques
D. DECTERME . prof. français
J. MEMERY Professeur de Mathématiques
J.L. GILLARD Professeur d'Histoire
M.H BLANCHON Professeur de Mathématiques
M² ABADIE Professeur de Sciences Physiques
B. PICARD Sc. économiques et sociales
J CALVET Prof espagnol
I. BASSO prof. Sciences Physiques
M. TAVIAUX prof Anglais
Mme THEBAULT PROUST EPS
B. MAZET CPE
Jean-Guy LAVAUD Lettres classiques
BRISSON Lettres classiques
LAGARRIGUE Allemand

FIGURE 7.5 – Article sur Chikhanovitch paru dans *La Recherche* ; pétition et signatures.

7.4.4 Un exemple, celui de Chikanovitch

Voici quelques éléments issus de la notice biographique écrite par le Comité des Mathématiciens en janvier 1985. Youri Chikanovitch est né en 1933, et enseigne la logique mathématique au département de linguistique à l'université de Moscou. Il est arrêté en 1972.

Le Comité des Mathématiciens pour la libération de Youi Chikhanovitch et Leonid Pliouchtch est créé fin 1973. Chikhanovitch sera libéré très rapidement, en juillet 1974. Cette première campagne insiste beaucoup sur le fait qu'il est le traducteur de deux ouvrages de Bourbaki, les mathématiciens français lui en font envoyer des exemplaires dédicacés. C'est à peu près tout ce que l'on sait sur Chikhanovitch,

Après sa libération, Chikhanovitch continue ses activités de défense des droits de l'homme, et est arrêté de nouveau en 1983. Il est condamné en 1984. Je vais commenter deux types de réaction que l'on trouve dans les archives.

Intéressons-nous tout d'abord à l'article, signé par le Comité des Mathématiciens, qui paraît dans *La Recherche* en avril 1984 (566, VOL 15). Chikhanovitch était rédacteur à la revue russe Kvant, qui est une « revue de vulgarisation en mathématiques et physique à l'usage des jeunes ». Le Comité des mathématiciens souhaite donc que la Recherche se mobilise, en écrivant à sa revue homologue russe, pour la défense de Chikhanovitch. Cela est explicité dans deux notes, écrites par Tania Mathon à Michel Broué et Laurent Schwartz, qui résument la situation. En janvier 1984, elle lui écrit [19] :

> Schwartz a parlé avec Cherki, patron de la Recherche. Celui-ci n'a jamais entendu parler de KVANT et pense donc qu'une lettre serait inefficace, par contre accepterait une note sur Chikh, 1p 1/2 maxi.

Et en février : [20]

> Il faut absolument faire écrire à KVANT par la Recherche en tant que telle : la preuve que cette dernière est lue et même piratée en URSS c'est l'article sur l'astrologie de Pecker publié par la Literatournaia Gazeta.

Les discussions sur le contenu de l'article à écrire sont révélatrices du projet du Comité. On peut ainsi lire [21] :

> Schwartz suggère que ce soit signé des trois du Comité et porte sur l'activité de « vrai mathématicien » de Chikh.

Et l'on peut lire l'article finalement publié dans *La Recherche* [22], dont je reproduis ici le passage sur le « vrai mathématicien »

> « Candidat » ès-sciences pédagogiques, CHIKHANOVITCH est logicien, auteur de plusieurs ouvrages et articles, traducteur en russe de la *Théorie des Ensembles* de Bourbaki, spécialiste de la didactique des mathématiques et l'application de la logique aux sciences humaines. Il enseigna la logique mathématique au Département de Linguistique de l'Université de Moscou jusqu'en 1968 où il fut privé de son poste pour avoir consigné une lettre de solidarité avec un collègue injustement incarcéré en hôpital psychiatrique...

17. Il s'agit de la libération de Boukovski, Enriquez, Glouzman, Lopez, Massera et Müller. Il est notamment mentionné sur le tract de publicité pour ce meeting que Massera est un « mathématicien renommé », ce qui n'est pas le cas des autres.
18. Bulletin n°9 de décembre 1976, p. 5. Archives Michel Broué.
19. Archives Michel Broué, Lettre de Tania Mathon à Michel Broué, 6 janvier [1984]
20. Archives Michel Broué, Lettre de Tania Mathon du 5 février 1984, intitulée « Le scribe du Comité au Professeur Schwartz »
21. Archives Michel Broué, Lettre de Tania Mathon à Michel Broué, 6 janvier [1984]
22. [Broué, Cartan et Schwartz 1984]

Août 1978	Congrès International des Mathématiciens à Helskinki. La Pologne propose d'accueillir le prochain Congrès, ce qui est accepté.
Printemps 1980	Début des grèves en Pologne
Août 1980	Les grèves s'étendent partout en Pologne. Lech Walesa en devient le leader.
Février 1981	Jaruzelski remplace Pinkowski dans le gouvernement
Juillet 1981	Première annonce du Congrès de Varsovie postée à la communauté mathématique
Septembre 1981	Premier congrès de Solidarnosk (9,5 millions de membres) A leur tête se trouve Lech Walesa.
Décembre 1981	Deuxième annonce du Congrès de Varsovie postée. La loi martiale est déclarée en Pologne Lech Walesa est arrêté. Vague massive d'arrestations.
Janvier 1982	Le gouvernement US bloque les fonds pour les réunions scientifiques en Pologne, contre l'avis de la NAS et des scientifiques au pouvoir
Avril 1982	l'IMU repousse le Congrès de Varsovie
Août 1982	L'IMU se réunit à Varsovie en AG. 79 participants, de 37 pays différents. Il est décidé que le congrès aura lieu à Varsovie, en août 1983
Novembre 1982	Le Comité Exécutif de l'IMU confirme la décision.
Août 1983	L'ICM a lie u à Varsovie, comme prévu (après reprogrammation)

FIGURE 7.6 – Chronologie autour du Congrès International des Mathématiciens de Varsovie 1982 (1983). Inspirée de [Albers, Alexanderson et Reid 1987, p.43].

L'article parle ensuite de son poste de rédacteur à la revue *Kvant*, qui est décrite comme une « revue de vulgarisation en mathématiques et physique à l'usage des jeunes ».

Les archives mentionnent aussi d'autres actions à objectifs similaires. Je peux mentionner l'action japonaise, ou bien encore un Comité de géologues, qu'il est intéressant de comparer à l'action du Comité des mathématiciens.

7.4.5 Le Congrès International des Mathématiciens, Varsovie 1982 (1983)

Au sein de ce Comité des mathématiciens s'est posée la question en 1981-1982 du déroulement du Congrès international des mathématiciens qui devait normalement avoir lieu à Varsovie, en Pologne, alors en état de guerre.

Les débats se focalisent autour de la question des conditions de possibilité d'une communauté mathématique internationale, et plus précisément, d'une rencontre internationale entre mathématiciens. Les opinions individuelles occupent une place très importante sur ces questions, malgré les décisions et textes officiels collectifs. Les différentes réponses apportées traduisent des opinions différentes sur la tenue ou non du congrès, ainsi que par les différents types d'actions qui sont proposés et/ou réalisés. Au fur et à mesure du récit, on voit se dessiner des positions et opinions diverses voire inverses. C'est parce que cela apporte une réponse à la possibilité d'une communauté mathématique internationale qu'il convient de parler d'un engagement mathématicien, davantage que de « politic interferes », ainsi que l'écrit Olli Lehto dans son livre sur l'histoire de l'Union mathématique

Internationale [Lehto 1998].

Cette question est d'autant plus importante que les Congrès internationaux des mathématiciens ont été, depuis 1966 au moins, un lieu où des mathématiciens exprimaient leurs opinions politiques ; certains s'en sont servis un peu comme d'une tribune. En 1966, à l'occasion du Congrès de Moscou, on peut voir Steven Smale, Laurent Schwartz et Chandler Davis s'exprimer sur la guerre du Vietnam [23] et Alexandre Grothendieck, qui devait y recevoir la médaille Fields, a refusé de venir. En 1970 à Nice, c'est d'ailleurs ce dernier qui a pris la parole pour dénoncer l'interférence des financements militaires dans le financement d'un organisme mathématique [24]. On peut considérer que la situation, a changé en 1974 à Vancouver. Lipman Bers organise une réunion publique pour parler de ce comité international des mathématiciens. Cette fois-ci, il ne se contentait pas de donner une opinion, il voulait savoir s'il y avait une opinion collective, et si l'on pouvait agir au nom des mathématiciens. En 1978, à Helskinki, il y eut aussi des pétitions qui furent signées par beaucoup de mathématiciens. Cette même année, il a été décidé que le prochain congrès devait avoir lieu à Varsovie en Pologne. Mais entre temps, le congrès a été annoncé, les invitations lancées, jusqu'à ce que l'état de guerre soit déclaré en Pologne en décembre 1981 [25].

Dès janvier 1982, le gouvernement américain bloque les fonds pour tous les scientifiques qui veulent se rendre en Pologne. Cette première réaction, très rapide, remet en cause la tenue du congrès [26]. L'Union mathématique internationale (UMI), qui décide de la tenue de ce congrès, dépêche trois représentants à Varsovie dès mars 1982 pour évaluer les possibilités d'organisation du congrès. Les Français envoient aussi une délégation en avril 1982 pour juger par eux-mêmes de la situation. Il y a eu d'autres réactions, peut-être plus anecdotiques, comme par exemple un mathématicien qui a proposé, au nom de la Belgique, d'organiser le congrès chez eux. Cette réflexion connaît un énorme retentissement parce qu'elle posait en réalité la question des conditions de possibilité de la tenue d'un congrès mathématique. Finalement, le congrès fut repoussé d'un an et il eut quand même lieu à Varsovie. Les problèmes constatés sont de deux types différents. Tout d'abord, matériels. L'état de guerre, qui nécessite notamment un couvre-feu, paraît incompatible avec la tenue d'un congrès rassemblant autant de personnes. Ce point fait l'unanimité, tous demandent la levée du couvre-feu. Mais il y a aussi un problème de désaccord d'opinion, très souvent mis en avant. Parmi les nombreux Polonais emprisonnés se trouvaient un certain nombre de mathématiciens. Beaucoup de mathématiciens demandent aussi la libération de ces mathématiciens pour que le congrès ait lieu. Face aux incertitudes régnant sur l'évolution de la situation politique du pays, l'UMI décide en avril 1982 de repousser le Congrès en tenant compte notamment des conseils du Comité des mathématiciens, appuyé par la Société mathématique de France.

Beaucoup de solutions sont proposées, les mathématiciens étant assez divisés ; malgré leur envie quasi-unanime de voir le congrès se tenir, ils n'y sont pas prêts à n'importe quelle condition. Certains proposent l'annulation du Congrès ; d'autres se disent prêts à venir, mais proposent différents types d'action sur place : visite aux mathématiciens emprisonnés,

23. Voir par exemple le récit donné dans [Smale 1984].

24. Alexandre Grothendieck s'en explique très longuement dans les numéros de *Survivre*, revue fondée en 1970 et issue du mouvement du même nom. Pour une analyse complète de ce mouvement, on se rapporte au mémoire de Céline Pessis, « Les années 1968 et la science. Survivre ... et Vivre, des mathématiciens critiques à l'origine de l'écologisme », mémoire en sciences sociales, Paris, EHESS, 2008-2009.

25. Un récapitulatif de ces dates est proposé dans l'ouvrage [Albers, Alexanderson et Reid 1987]. Le récit proposé est critiqué par le responsable du Comité organisateur polonais, C. Olech [Olech 1987].

26. Il est intéressant de comparer la situation à celle du boycott massif des Jeux olympiques de Moscou en 1980, suite à l'invasion de l'Afghanistan par l'U.R.S.S.

en leur apportant des articles de mathématiques, dédicaces de leurs exposés à ces mêmes mathématiciens, boycott des manifestations officielles pour montrer un désaccord avec le régime.

Les opinions sont donc variées. Les membres de l'UMI qui se sont rendus à Varsovie en avril 1982 rapportent que les organisateurs polonais sont très favorables à la tenue du Congrès. Le régime politique est certes un obstacle, mais ils demandent aux mathématiciens de ne pas pénaliser encore plus les mathématiciens polonais, dont les contacts avec le reste de la communauté mathématique internationale sont difficiles. Selon la délégation française, dont faisaient notamment partie Laurent Schwartz et Alain Guichardet, les autres mathématiciens polonais ont un avis plus mitigé. Ils veulent un vrai Congrès, mais préfèrent que celui-ci n'ait pas lieu s'il doit se transformer en une tribune politique qui le détourne de son sens premier parce qu' « [...] il sera difficile de recevoir plusieurs mathématiciens à Varsovie, que beaucoup de mathématiciens risquent de boycotter le Congrès, que d'autres viendront au Congrès avec l'idée d'en faire un instrument politique plus qu'un véritable Congrès. Ces collègues pensent qu'alors un congrès, qui ne serait pas un vrai congrès scientifique regroupant une large partie de la communauté mathématique mondiale et restant à un haut niveau mathématique, risquerait d'être plus dangereux que pas de congrès du tout » [27]. Certains mathématiciens proposent, avec des arguments un peu similaires, d'annuler ce Congrès. D'autres enfin, et c'est la position d'Olli Lehto, désirent que le Congrès ait lieu à tout prix, ainsi qu'il le dira à l'occasion du Congrès décalé, qui aura finalement lieu l'été suivant, en 1983 :

> En tant qu'individus, nous pouvons naturellement avoir les opinions politiques de notre choix, mais dès lors qu'il s'agit d'organiser la coopération internationale des mathématiques, alors les aspects politiques devraient être laissés complètement de côté. Notre belle science se doit d'être un lien unificateur entre nous et faire de nous véritablement une grande famille mathématique [28].

Finalement, la décision de venir ou de ne pas venir a été largement individuelle. La plupart des mathématiciens, quand le congrès a finalement eu lieu l'année suivante, sont venus. La chose s'est révélée plus problématiques dans le cas des Américains qui avaient été privés de financement, ce qui n'avait pas empêché plusieurs d'entre eux de venir, même s'ils étaient moins nombreux que les autres années.

7.5 Limites ?

On observe une limite à cet engagement mathématicien en faveur des droits de l'homme, et donc à une action politique non partisane. Il s'agit précisément du moment où la frontière entre les droits de l'homme et la politique se transforme en une frontière science/opinion, beaucoup plus controversée. La représentativité de toute la communauté mathématique devient alors problématique, comme l'illustre le cas du brillant mathématicien Igor Chafarevitch. Dissident soviétique, proche de Sakharov, et donc de ceux pour qui a œuvré le Comité des Mathématiciens dans les années 1970, Chafarevitch avait publié un livre en

27. Récit du séjour de la délégation française en avril 1982, archives Michel Broué. Reproduit en annexe V p.413.

28. « As individuals, we may of course have whatever political views we choose, but when it amounts to organized international cooperation in mathematics, then political aspects should be put aside entirely. Our fine science should be uniting link between us and make us in a true sense one big mathematical family. »

[Albers, Alexanderson et Reid 1987, p.43]

1989, intitulé *Russophobia* dont les propos avaient été très largement critiqués pour antisémitisme, ce qui lui valut une demande de démission de la National Academy of Science en 1992. Laurent Schwartz fit part de son soutien à la National Academy of Science, de la manière suivante :

> Il est vrai que les objectifs de l'Académie sont purement scientifiques et que les problèmes politiques sont extérieurs à la science. D'une manière générale, presque absolue, on ne doit pas s'aventurer hors de la science dans une académie. Mais l'antisémitisme n'est pas simplement une opinion personnelle : c'est une action, et cette action est l'opposé absolu de toutes les lois morales de l'humanité . [29]

Schwartz va surtout publier une lettre ouverte, signée par de nombreux mathématiciens, regrettant les propos tenus par son collègue. Les mathématiciens Henri Cartan et Jean-Pierre Serre vont très violemment critiquer ces deux actions, en écrivant notamment à la National Academy of Science une lettre dont voici un court extrait :

> Vous lui dites en effet : "voici la règle morale pour laquelle nous luttons. Est-ce que vous y adhérez ? Sinon, nous vous suggérons de démissionner." C'est un genre de lettre tout à fait nouveau, surtout de la part d'une Académie à un de ses membres. On pourrait la généraliser. Par exemple, on pourrait écrire aux suspects d'athéisme : "Nous nous fions à Dieu, et vous ? Sinon, nous vous suggérons de démissionner. Aux mauvais mathématiciens : "Les théorèmes faux doivent être corrigés. Êtes-vous d'accord ? Sinon, démissionnez ." [30]

Une courte lettre de Jean-Pierre Serre à Laurent Schwartz dénonce l'interférence publique sur des opinions personnelles : « Tu te permets de donner publiquement une leçon de morale à un autre mathématicien. Je trouve cela choquant, et je tenais à te le dire . » [31] On peut voir ici que les mathématiciens sont plus divisés sur la frontière entre opinion, politique et mathématiques.

Conclusion

On a pu observer ici quelques aspects de l'engagement mathématicien. Tout d'abord le rapport de cet engagement avec les mathématiques. Il est « pur » comme les mathématiques que font les acteurs sont « pures » : recherche de vérité comme on cherche à mener sa démonstration jusqu'à son terme, volonté de résoudre les problèmes des droits de l'homme parce que tout ce qui n'est pas droit dérange. Ces arguments sont-ils construits ? Les acteurs eux-mêmes semblent n'être pas sûrs d'y croire vraiment...mais trouvent nécessaire de le mentionner néanmoins. Un deuxième point assez récurrent est celui de l'engagement des mathématiciens spécifiquement en faveur d'autres mathématiciens. Des arguments de solidarité plus marquée sont avancés ; cette spécificité est surtout justifiée par les résultats positifs que les actions ont eues. On peut remarquer aussi que les mathématiques semblent assez absentes en tant que telles. C'est peut-être la troisième caractéristique que

29. « It is true that the aims of the Academy are purely scientific and that political problems are outside sciences. As a general rule, almost absolute, one must not go outside science in an academy. But antisemitism is not just a personal opinion : it is an action, and this action is absolutely opposite to all the moral laws of humanity. » Archives BCX, Fonds Laurent Schwartz, B.IV.2.3.14.

30. « You are in effect telling him : 'Here is a moral rule that we stand for. Do you agree with it ? If not, we suggest you resign. This is a very new type of letter, especially from an Academy to one of its member. It could be generalized. For instance you could write : to suspected atheists – 'In God we trust. Do you ? If not, we suggest you resign' ; to careless mathematicians : 'Wrong theorems should be corrected. Do you agree ? If not...resign' ».

31. Archives BCX, Fonds Laurent Schwartz, B.IV.2.3.10

l'on peut noter. Il est très important de s'intéresser au cas des mathématiciens ; parfois on cherche à présenter leurs mathématiques, mais là n'est pas l'important : les travaux de mathématiques ne sont pas jugés et analysés, ou alors uniquement de manière artificielle. Il faut les mentionner, mais le contenu en lui-même n'est pas si important. La liberté propre aux scientifiques et donc aux mathématiciens permet une décision finale qui est toujours individuelle. Cette tension entre individu et collectif est le quatrième aspect qui est mis en avant ici. C'est principalement de là que proviennent les critiques et limites de l'engagement décrit.

Ce chapitre fournit des éléments d'analyse qui permettent de mieux comprendre comment cette identité de mathématicien se construit dans l'après-guerre, les pratiques et convictions sur lesquelles elle s'appuie, et les limites que rencontrent les diverses conceptions de l'identité mathématicienne qui s'entrechoquent. L'engagement mathématicien que nous avons défini ici comme la manière de résumer un engagement politique commun des mathématiciens est inextricable de la vie collective des mathématiques, en ce sens qu'il est tributaire des formes d'organisation de la vie collective des mathématiques et y participe lui aussi.

Conclusion

« Mathématicien aux prises avec le siècle » [32], Schwartz l'est véritablement dans ce travail. Cette image de la carrière de Schwartz sort renforcée de cette étude dans un sens présent uniquement en filigrane dans son autobiographie. Là où l'on percevait surtout l'impact de la politique mouvementée du XX$^{\text{ème}}$ siècle, on s'aperçoit que l'emprise du siècle sur la carrière de Schwartz et sur ses mathématiques est beaucoup plus profonde. La vie collective des mathématiques, dont il est témoin, tour à tour spectateur, exemple, créateur ou acteur dans la seconde moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle, est en effet essentielle pour lui, pour ses mathématiques, sa carrière, la réception de sa théorie des distributions, et sa conception de la communauté des mathématiques.

Au terme de cette étude, que dire du pari biographique proposé en introduction ? Ce pari comportait deux niveaux. En vue d'une réalisation d'un portrait de la vie collective des mathématiques tout d'abord, les coupes confirment que les mathématiques se structurent de plus en plus de manière collective durant la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Elles ont permis de brosser différents tableaux du collectif, qui offrent une vision assez synthétique de la vie collective des mathématiques. L'éclairage apporté par le témoin Schwartz, qui constitue le deuxième enjeu de notre pari, ajoute un aspect diachronique et dynamique à notre description de l'évolution de cette vie collective des mathématiques. Apparaissent ainsi un certain nombre de spécificités, qui sont propres à certaines circonstances ou périodes historiques, ainsi qu'à des lieux particuliers. Ce pari a aussi permis en ce qui concerna la biographie de Schwartz lui-même et de son impact sur les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, de relire les sources, de proposer une analyse nouvelle de l'historiographie, et d'éclairer certains aspects de sa vie.

Ce pari biographique a nécessairement un coût. De même qu'une biographie ne reconstitue pas l'homme entièrement, le portrait de la vie collective des mathématiques que l'on dresse est lui aussi incomplet. Ayant choisi de présenter tour à tour différentes manifestations du collectif, l'analyse produite n'a pas cherché à être exhaustive et pourrait être approfondie sur certains points. L'aborder par le biais d'un individu, Schwartz, implique d'abord que les tableaux du collectif présentés soient ceux dans lequel il s'insère, à l'exclusion de nombreux autres. L'évolution et l'aspect diachronique qui est rendu possible par l'approche biographique centrée sur Schwartz est elle aussi limitée pour des questions de temporalité propres à la vie de Schwartz.

Quelle reconstruction est finalement possible avec ces coupes du collectif ? Quel portrait a-t-on dressé de la vie collective des mathématiques dans la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle ? Si les tableaux du collectif font ressortir plusieurs des caractéristiques essentielles de cette vie collective des mathématiques, l'on voit aussi l'importance grandissante des institutions, formelles ou informelles, dans la vie de Schwartz. Ces deux aspects vont permettre de proposer une deuxième lecture de ce travail, qui ne suive pas le plan établi.

Il est frappant en effet que Schwartz rencontre la vie collective des mathématiques dans

32. On se rappellera qu'il s'agit là du titre de l'autobiographie de Schwartz [Schwartz 1997].

le cadre informel formé par le groupe Bourbaki plutôt que dans le cadre plus formel de ses études à l'École Normale Supérieure. Au-delà des institutions d'enseignement supérieur, notre étude a essayé de déterminer la place d'autres structures qui sont conçues pour favoriser la vie collective des mathématiques. Qu'il s'agisse du colloque, du séminaire ou du laboratoire de mathématiques, chacune de ces structures a ses modalités propres de fonctionnement et son évolution dont on a essayé de présenter les traits essentiels. On voit apparaître l'investissement fort du mathématicien Schwartz et celui de la communauté mathématique toute entière dans l'établissement et la pérennisation de ces structures.

Si ces structures changent les modes de travail des mathématiciens, elles modifient aussi la forme du travail mathématique. Le colloque traduit la volonté d'allier une reconstruction de la science nationale à celle d'un domaine mathématique : l'analyse harmonique, dans l'exemple étudié. Il est représentatif de la détermination à organiser des rencontres internationales favorisant le développement rapide des mathématiques. Le séminaire devient rapidement un lieu de formation obligé, mais institue surtout des modes de sociabilité entre mathématiciens qui partagent un ensemble de pratiques, d'intérêt, voire de valeurs. La publication rapide des séminaires lui assure un écho plus large. Il s'agit d'une forme de publication particulière, qui peut être considérée comme un instantané d'un domaine précis de la recherche mathématique. Enfin, la création du laboratoire de mathématiques fait émerger autre forme d'organisation du travail collectif en mathématiques, qui est lié à la fois à des contraintes locales mais aussi à des enjeux nationaux, voire internationaux. Le laboratoire de mathématiques devient rapidement indispensable à un moment où l'on conçoit de plus en plus le travail mathématique comme devant être réalisé en équipes. La discussion des conditions matérielles, esquissée ici, pour rendre possible ce travail en équipes est constitutive de la création du Centre de Mathématiques par Schwartz à l'École polytechnique, et plus généralement de l'idée de laboratoire de mathématiques qui se répand rapidement dans toute la France.

Au-delà d'une activité mathématique collective, les matériaux présentés permettent aussi une autre approche de la vie collective des mathématiques qui complexifie le portrait classique des mathématiques en tant qu'œuvre collective, à laquelle contribuent les travaux individuels de chaque personne. Les collectifs déjà présentés jouent un rôle important dans la constitution de cette œuvre collective, mais on en montre aussi d'autres manifestations. Le fait que les structures mathématiques deviennent de plus en plus collectives entraîne une modification de l'œuvre mathématique elle-même. Ainsi le rôle actif de Schwartz dans la diffusion de sa théorie des distributions passe par l'occasion saisie du colloque, les recensions, ou bien encore la reformulation de travaux exposés au séminaire Bourbaki. Les pratiques d'écriture peuvent alors servir de révélateurs à des collectifs sous-jacents et permettent d'en faire émerger de nouveaux, par l'intermédiaire de séminaires ou de publications ; leur étude permet de reconstruire l'insertion de l'auteur dans un collectif particulier.

L'engagement mathématicien de Schwartz permet de voir, au-delà de tous les enjeux politiques importants pour en comprendre les motivations, comment les pratiques collectives des mathématiciens vont être mobilisées et réinvesties en dehors de l'activité mathématique à proprement parler. Cet engagement mathématicien traduit la perception que Schwartz peut avoir d'une communauté mathématique, de ses valeurs, de sa moralité, de ses modes d'action ; perception qu'il partage avec d'autres. On voit ainsi que la vie collective des mathématiques est aussi structurée par la conception qu'ont les mathématiciens d'être une communauté.

Annexe A

Une chronologie

Cette chronologie est issue, en grande partie, de [*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens* 2003, p.17-22].

1915	5 mars : naissance
1934	Entrée à l'École Normale Supérieure
1936	Entrée au partie trotskiste
1937	Sortie de l'ÉNS.
	Agrégation (reçu 2ème, derrière Gustave Choquet)
	Début du service militaire
1939	Fin du service militaire
1940	Entrée au C.N.R.S. comme attaché de recherche (jusqu'en 1942)
40-42	Marie-Hélène et Laurent Schwartz sont à Clermont-Ferrand
1940	Premier Congrès Bourbaki auquel il assiste en tant que chrysalide
1943	Janvier : soutenance de thèse
43-44	clandestinité
1944	Chargé de cours à Grenoble
1945	Chargé de cours à Nancy
	Cours Peccot au Collège de France
	Article fondateur de la théorie des distributions [Schwartz 1945]
1946	Maître de conférences à l'École polytechnique
1947	Quitte le parti trostkiste
	Colloque analyse harmonique
1949	Professeur à Nancy
	Voyage au Canada
	Invitation à l'IAS Princeton, visa américain refusé
1950	Congrès international des mathématiciens à Cambridge (Mass.)
	problèmes de visa
	Médaille Fields
1951	Voyage en Yougoslavie
1952	Maître de conférences à l'université de Paris
	Voyage au Brésil
1953	Professeur à Paris
	Voyages au Mexique et en Tunisie
	Contacts avec le parti tunisien Néo Destour
1955	Prix Carrière de l'Académie des Sciences
	Voyage en Inde

Membre d'un Comité d'action pour l'Algérie.
1956 Professeur honoraire à Bogota et à Buenos Aires
Voyages en Tunisie et en Colombie
1957 Membre fondateur puis président du Comité Audin
Membre correspondant de la Société royale des sciences de Liège
Participation à « Témoignages et documents » créé par Maurice Pagat
1958 Académicien honoraire à Buenos Aires
1959 Professeur cumulant à l'École polytechnique
1960 Membre fondateur du Parti Socialiste Unifié
Signataire du Manifeste des 121
Exclu de l'École polytechnique
Docteur Honoris Causa de l'université Humboldt de Berlin
Voyage aux États-Unis
1961 Plasticage dans son immeuble
Voyage au Brésil
1962 Docteur Honoris Causa de l'Université libre de Bruxelles
Séjour d'un an aux États-Unis
Président de la SMF
1963 Réintégré à l'École polytechnique
1964 Membre correspondant de l'Académie des sciences brésilienne
Voyage en URSS
Rapport Leprince-Ringuet - Schwartz
1965 Professeur honoraire d'une université de Lima
Création du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique
1966 Voyage en URSS (congrès international des mathématiciens)
Président du Comité Viêt-nam National
1967 Membre du Tribunal Russell sur le Viêt-nam
1968 Voyage au Viêt-nam
1969 Professeur détaché à l'École polytechnique
1970 Participation à un débat sur le film « L'aveu »
1971 Membre honoraire du Tata Institute de Bombay
1972 Prix Cognac-Jay (Samaritaine) avec Jacques-Louis Lions et Bernard Malgrange (suivant la répartition 50%, 25%, 25%)
1973 Membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris
1974 Membre fondateur du Comité des mathématiciens pour la défense de Chikhanovich et Plioutch
1975 Membre de l'Académie des sciences de Paris
1976 Libération de Plioutch
Voyage au Viêt-nam
1977 Membre de l'Académie des sciences indienne
Article au journal *Le Monde* sur l'École polytechnique
Engagement pour le Cambodge après l'intervention du Viêt-nam
1978 Article au journal *Le Monde* sur le Viêt-nam avec Madeleine Rebérioux
1979 Voyage au Viêtnam
Engagement pour l'Afghanistan envahi par l'armée soviétique
Second article au journal *Le Monde* sur le Viêt-nam avec Madeleine Rebérioux
1980 Retraite de l'École polytechnique
Reprend un poste à l'Université Paris 7
Voyages aux États-Unis et au Brésil avec passage en Uruguay pour défendre Massera

1981	Docteur Honoris Causa de l'Université de Copenhague
	Président du Bureau International Afghanistan
	Membre de la Commission du Bilan
1982	Soutien à Maurice Pagat et au Syndicat des chômeurs
1983	Retraite de l'université
1984	Voyages au Viêt-nam et au Japon
	Président de « Qualité de la Science française »
1985	Président du Comité national d'évaluation des universités
1986	Libération de Chtcharanski
1989	Quitte le Comité national d'évaluation des universités
1990	Affaire Chafarevich
	Voyage au Viêt-nam
1997	Publication de son autobiographie
	Un mathématicien aux prises avec le siècle
2002	Prise de position en faveur des Palestiniens
	4 juillet : Décès

Annexe B

Rapports sur les distributions lus lors de Comités secrets, issus des archives de l'Académie des Sciences

Comité Secret du 7 mai 1956. Gaston Julia

Laurent Schwartz est né le 5 mars 1915 à Paris. Il entre à l'École normale en 1934 ; il est agrégé de Mathématiques en 1937. Il devient docteur ès sciences en 1943, malgré des conditions de travail rendues très dures du fait de l'occupation. Il est chargé de cours à Grenoble en 44-45 ; maîtrise conférences puis professeur à Nancy de 45 à 52. Il devient maître de conférences à la Sorbonne en 1952 et il est titularisé en janvier 1954.

Laurent Schwartz étudie d'abord les fonctions réelles qu'on peut approcher uniformément par des sommes d'exponentielles réelles $x^{\lambda_n u}$ suivant la divergence ou la convergence de la série $\sum \lambda_\nu^{-1}$, toute fonction continue peut être approchée, ou seulement des fonctions analytiques bien caractérisées.

Puis il étudie l'approximation d'une fonction quelque par des sommes d'exponentielles imaginaires $\sum a_\nu exp(-i\lambda_\nu$, étendant le développement de Fourier ; il montre que, si toute fonction continue ne peut être approchée, celles qui peuvent l'être sont développables en série de Fourier généralisée sommable par une méthode convenable.

Il étend enfin son travail à une théorie générale des fonctions <u>moyenne-périodiques</u> $f(x)$ (pour x réel), c'est-à-dire celles pour lesquelles les combinaisons <u>linéaires des $f(x-h)$</u> <u>ne permettent pas</u> l'approximation de toute fonction continue par l'axe des x. Il montre qu'une $f(x)$ est moyenne-périodique si, et seulement si, elle admet un développement $f(x) = \sum P_\nu exp(-\lambda_\nu x)$, convergent suivant une méthode de sommation convenable ; les λ_ν forment le spectre de f. Il généralise ainsi le développement de Fourier des fonctions périodiques. Il relie aussi les fonctions $m-$périodiques aux solutions d'une équation intégrale, dont il obtient toutes les solutions.

Mais c'est surtout par sa <u>théorie des distributions</u>, exposée dans 2 volumes parus en 50-51, que Laurent a apporté, en généralisant les fonctions usuelles, un formalisme nouveau mieux adapté aux calculs de la physique ou des mathématiques appliquées que le calcul classique sur les fonctions.

Une fonction est une distribution particulière. La « fonction de Dirac » utilisée en électricité ou en mécanique ondulatoire, et dont l'existence mathématique est contradictoire, est en réalité non une fonction mais une distribution. Les distributions sont, concrètement, les distributions, masses ou couches, simples ou multiples, qu'on rencontre en électromagnétisme. Une fonction f définit une distribution qui est la couche de densité f, la fonction de Dirac est la masse unité à l'origine.

Il définit les opérations essentielles de l'analyse sur ces êtres nouveaux, en particulier la dérivation, de façon à conserver la dérivée usuelle pour une fonction dérivable. Alors toute distribution a des dérivées successives de tout ordre, contrairement aux fonctions usuelles, et toute distribution est la dérivée d'ordre convenable d'une fonction, en sorte que les distributions constituent l'ensemble minimum d'êtres mathématiques nouveaux permettant de dériver toutes les fonctions continues.

On considère ensuite les solutions-distributions des équations différentielles et aux dérivées partielles. Les équations elliptiques n'ont pour solutions que les solutions usuelles, et ce sont des fonctions analytiques. Les équations hyperboliques ont des solutions-distributions, permettant de définir correctement les « fonctions singulières de la mécanique ondulatoire », qui sont des distributions solutions de l'équation des ondes ; on interprète aussi les solutions qui sont des fonctions discontinues le long de surfaces d'ondes.

Suit la convergence des distributions et des séries de distributions qui convergent dans des conditions beaucoup plus larges que les séries de fonctions. P. ex. toute série convergente est dérivable terme à terme, et toutes les séries de Fourier de la pratique convergent au sens des distributions (sans toujours converger au sens usuel).

Il généralise ensuite la notion de dérivation par celle de convolution des distributions, et il étend ainsi la transformation de Fourier à des cas plus généraux que celui des fonctions, ce qui lui fournit d'originales applications à la théorie des équations aux dérivées partielles et aux équations intégro-différentielles.

Au cours de ce profond et fructueux travail, il a dû étudier de nombreux espaces vectoriels topologiques non normés ; il leur a étendu la théorie classique des Espaces de Banach : il a étudié aussi les fonctions ou distributions à valeurs vectorielles.

Conclusion.

La théorie des distributions de L. Schwartz est, en 10 ans, devenue classique et tout le monde s'en sert. Elle a régularisé tout le calcul opérationnel, en particulier celui d'Heaviside-Carson, familier aux électriciens. Elle a expliqué les solutions plus ou moins anormales des problèmes anciens de la théorie des équations aux dérivées partielles, levé les difficultés de la théorie de la transformation de Laplace-Fourier et de la sommation des séries de Fourier. Elle s'est révélée un instrument de 1er ordre, et indispensable, pour les mathématiciens, les électriciens, les physiciens et les ingénieurs.

Elle a valu à son auteur l'attribution de la médaille d'or Fields au Congrès international de 1950.

N'eût-il fait que cela, Laurent Schwartz aurait largement mérité son inscription dans la liste que vous propose votre section de Géométrie, pour la succession d'E. Borel.

Gaston Julia.

Comité Secret du 13 avril 1964. Travaux de M. Laurent Schwartz, rapport annexe, écrit par Jean Leray

Au cours du Comité du 13 avril 1964, M. Le Président m'a prié de lire le rapport exposant les travaux de M. Laurent Schwartz. J'ai dû le rectifier à l'improviste, en citant :

S. Sobolev, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Recueil mathématique (Sbornik), n°1 (43), 1936, p.39-72 (en français).

C'est cet article de Sobolev qui a introduit la notion de distribution (cf. Guelfand-Chilov, Les distributions, t.1, Note bibliographiques, p. 367 de la traduction française Dunod) ; néanmoins cette théorie doit beaucoup à L. Schwartz (l.c., p.367-368).

L'essentiel de mes explications improvisées se retrouve, par exemple, dans la présentation de la traduction allemande de ce traité de Guelfand-Chilov :

« les distributions jouent un rôle de plus en plus important dans diverses branches des mathématiques. les physiciens, au fond, les emploient, de façon peu rigoureuse, depuis longtemps.

Dans la découverte de la théorie des distributions, un rôle important fût joué par les travaux de J. Hadamard, qui étudia les ondes au moyen d'intégrales divergentes, et aussi par ceux de M. Riesz. Nous ne voulons pas citer ici des travaux plus anciens, où l'on peut trouver d'autres amorces de la théorie actuelle.

S. Sobolev fut, en 1936, le premier à introduire les distributions sous la forme explicite, dont l'emploi est maintenant général. Il les employa à l'étude de l'unicité du problème de Cauchy hyperbolique.

D'autre part, S. Bochner fit une théorie des transformées de Fourier voisine de la théorie des distributions. Ces transformées de Fourier sont essentiellement des distributions, dérivées formelles de fonctions continues.

En 1950-51, parut la Monographie "Théorie des distributions" de L. Schwartz. Dans ce livre L. Schwartz présenta la théorie des distributions et ses rapports avec les travaux antérieurs ; il la fonda sur la théorie des espaces vectoriels topologiques et il obtint une série de résultats importants. Après la publication de ce livre, en peu d'années, avec une rapidité exceptionnelle, la théorie des distributions acquit une extraordinaire popularité. »

Je n'ai rien d'autre à ajouter à cette longue citation que l'expression de l'admiration et de l'amitié que j'éprouve pour tous les mathématiciens que je viens de nommer, L. Schwartz tout le premier.

J. Leray

Comité Secret du 4 novembre 1974 ; Compléments au rapport sur les travaux de M. Laurent Schwartz

(par M. Dieudonné, juin 1972)

Si la théorie des distributions a pris sa forme actuelle dans les travaux de L.Schwartz, il convient de rappeler que sous des formes diverses, des cas particuliers de cette théorie avaient été introduits bien auparavant par plusieurs mathématiciens, soit en théorie des équations aux dérivées partielles (Hadamard, Sobolev), soit en théorie de Fourier (Bochner), soit en calcul des variations (L.C.Young), soit en Topologie différentielle (De Rham) : L. Schwartz lui-même a souligné l'importance de l'apport de ses prédécesseurs. En fait, la naissance de la théorie des distributions a une histoire tout à fait comparable à celle du Calcul infinitésimal : il est tout à fait absurde d'attribuer l'invention de ce dernier à Newton et Leibniz, alors qu'avant même la naissance de ces deux mathématiciens, des savants comem Fermat, Cavalieri, Roberval, etc. utilisaient couramment des notions équivalentes à celles de dérivée et d'intégrale. Ce qu'ont apporté Newton et Leibniz, ce sont des algorithmes permettant de traiter ces notions comme des notions algébriques, soumises à des règles de calcul simples et uniformes, alors que leurs devanciers devaient recommencer leurs raisonnements "infinitésimaux" dans chaque cas particulier ; progrès dont nous savons toute l'importance pour les développements ultérieurs de l'Analyse.

De même, le formalisme et la systématisation introduits par L.Schwartz ont ouvert la voie aux énormes progrès réalisés depuis 20 ans dans la théorie des équatiosn aux dérivées partielles linéaires et dans l'Analyse harmonique commutative et non commutative. Il convient d'insister à ce point sur la contribution peut-être la plus importante apportée par Schwartz à la théorie (et qui, elle, est entièrement originale), le théorème des noyaux. On sait que si, par exemple une fonciton $K(x, y)$ dans R^2 est localement intégrable, elle définit un opérateur intégral dont on dit qu'elle est le noyau : à toute fonction continue dans R et à support compact, on fait correspondre la fonction $K.f$ définie par

$$(K.f)(x) = \int K(x, y)f(y)dy$$

On sait que ces opérateurs ont une théorie particulièrement simple. Mais il est connu aussi que beaucoup d'opérateurs (à commncer par l'identité) ne peuvent être mis sous cette forme. L.Schwartz a montré par contre que si on remplace la fonction K par une distribution-noyau sur R^2, on obtient une classe d'opérateurs linéaires qui contient tous ceux que l'on rencontre dans les applications, car ces opérateurs peuvent être caractérisés par des conditions de continuité extrêment faibles, et pratiquement toujours vérifiées.

Mentionnons enfin que depuis quelques années, L.Schwartz s'est occupé des mesures sur les espaces non localement compacts et leurs relations avec le Calcul des probabilités, et a obtenu dans cette voies plusieurs résultats intéressants.

J. Dieudonné

Dieudonné, 17 février 1975. Présentation de L.Schwartz.

Laurent Schwartz est universellement connu comme le créateur de la théorie des distributions. S'agissant d'un des importants évènements de l'histoire de l'Analyse mathématique, je vous demanderai la permission de développer quelques considérations historiques, qui à mon avis, en font mieux saisir la nature et la portée.

Il est communément admis que l'invention du Calcul infinitésimal est due, de façon indépendante, à Newton et Leibniz. Pourtant, si l'on se reporte aux œuvres des mathématiciens du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, on constate que dès 1630, donc avant la naissance de Newton et de Leibniz, des savants tels que Fermat, Descartes, Cavalieri, Roberval résolvaient couramment, par des méthodes de nature infinitésimales, des problèmes tels que la détermination de tangentes à une courbe, de points d'inflexion, de centres instantanés de rotation, des calculs d'aires et de volumes, la recherche de maxima et minima, etc. ; activités qui, un peu plus tard (alors que Newton et Leibniz sont encore sur les bancs de l'école) se complètent par les premières rectifications d'arcs de courbure, les premiers exemples de développements en série entière, de déterminations de courbes satisfaisant à des conditions équivalentes à des équations différentielles, et ainsi de suite. On serait tenté de conclure que l'attribution de l'invention du Calcul infinitésimal à Newton et Leibniz est une grossière erreur historique. Ce serait négliger un point qui paraît fondamental dans l'histoire des mathématiques, l'importance des notions générales, des notations et des algorithmes : l'exemple de l'algèbre, qui a mis des siècles à démarrer, est très instructif à cet égard. Les mathématiciens de la première moitié du XVIIe siècle avaient d'excellentes idées intuitives sur les processus impliquant des "passages à la limite" et la façon de les mettre en œuvre ; mais cela n'allait pas au-delà d'une "méthode" générale, et dans chaque cas particulier, il leur fallait utiliser des raisonnements ad hoc, souvent fort compliqués et assortis de multiples figures permettant de suivre pas à pas le passage à la limite. Ce qu'apportèrent Newton et surtout Leibniz, ce sont les notions générales sous-jacentes à tous ces procédés : dérivée, différentielle, intégrale ; des notations commodes pour les désigner (personne n'a pu améliorer jusqu'ici la notation leibnizienne de l'intégrale) ; enfin, les algorithmes généraux gouvernant leur emploi, qui ont réduit à d'élémentaires exercices pour débutants les problèmes auxquels s'attaquaient les plus grands mathématiciens des âges précédents, et permis les énormes progrès de l'Analyse des 2 siècles suivants. Il n'y a donc aucune injustice à rendre hommage à Newton et Leibniz pour une œuvre qui a marqué un tournant capital dans l'histoire des sciences.

L'histoire de la théorie des distributions s'est déroulée de façon très semblable. Vous savez qu'une des grandes préoccupations des mathématiciens du XIX$^{\text{ème}}$ siècle fut s'asseoir l'Analyse sur des fondements indiscutables ; mais ce faisant, ils s'étaient aperçus de l'existence de phénomènes pathologiques, comme celui des fonctions continues sans dérivée, dont la présence compliquait souvent les démonstrations de façon considérables. avec le développeemnt de l'Analyse fonctionnelle au XX$^{\text{ème}}$ siècle, on sentait de plus en plus le besoin de nouvelles conceptions permettant d'échapper à ces carcans tout en conservant la "rigueur" acquise au siècle précédent ; d'autant plus que de leur côté, ingénieurs et physiciens tels qu'Heaviside ou DIrac allaient de l'avant sans s'embarrasser de rigueur mathématique et obtenaient des algorithmes d'une élégante efficacité que les mathématiciens enviaient sans oser les imiter. Aussi, à partir de 1930 environ, voit-on de divers côtés surgir les principales idées qui vont former l'armature de la théorie des distributions : leur définition comme fonctionnelles et leurs propriétés essentielles de passage à la limite (notamment leur dérivation) chez Sobolev en 1936 ; l'extension de la transformation de Fourier aux distributions tempérées chez Bochner dès 1932 et chez Carleman vers la même époque ; la régularisation par convolution avec des fonctions indéfiniment dérivables à support compact chez Wiener dès 1926 et plus tard chez Sobolev et chez Friedrichs et son école ; à quoi il faudrait ajouter les "parties finies d'intégrales" remontant à Hadamard, les "solutiosn faibles" d'équations aux dérivées partielles qu'on trouve déjà chez Poincaré, et même les "valeurs principales d'intégrales" de Cauchy. Mais tout cela restait fragmentaire et décousu et je puis témoigner que les mathématiciens de cette époque ne se rendaient absolument pas compte de la parenté profonde entre tous ces travaux ni de leurs rapports avec les algorithmes des physiciens.

Le mérite de Schwartz a été tout d'abord de réaliser en très peu de temps (1945-46) l'indispensable synthèse de ces diverses idées, en apportant à la fois les notions de base (dont beaucoup, comme celles de support ou de convolution, n'avaient même pas été effleurées en général), les notations, encore en usage aujourd'hui, et surtout en dégageant pour la première fois les algorithmes généraux, de nature algébrique et topologique, qui donnent à la théorie toute sa souplesse et son efficacité. La communauté mathématique internationale comprit rapidement la valeur de l'outil nouveau ainsi forgé, puisque 5 ans à peine après la parution du premier article de Schwartz, elle couronnait ses recherches par l'attribution d'une médaille Fields. Depuis lors, bientôt 30 années d'usage constant dans une foule de questions de mathématiques et de physique théorique n'ont fait que renforcer le rôle que jouent les distributions dans la science d'aujourd'hui, à tel point que leur théorie est devenue un sujet dont la connaissance ets exigée des étudiants du niveau de la Maîtrise dans de nombreuses Universités. J'ai ici un livre dont le sujet est la description de quelques exemples d'applications des distributions à la Mécanique et la Physique théorique : théorie de la diffraction par un demi-plan, des ailes en vol supersonique, équation de Klein-Gordon en Mécanique quantique, renormalisation en théorie quantique des champs, telles sont les questions traitées, qui suffisent à montrer la puissance de ce nouvel instrument.

Schwartz lui-même a beaucoup contribué à l'application de la théorie des distributions dans divers domaines. Parmi les très nombreux articles qu'il a écrits à ce sujet, il faut au moins citer celui où il renouvelle la théorie des fonctions moyenne périodiques de Delsarte, et deux théorèmes où il n'a eu aucun prédécesseur : le premier exemple de non synthèse spectrale, qui a déclenché la série de beaux travaux faits depuis sur ce sujet, et surtout le théorème des noyaux, résultat clé dont on peut dire sans exagération qu'il est devenu la pierre angulaire de toute l'Analyse fonctionnelle linéaire. On connaissait en efet depuis Fredhlom l'importance des opérateurs intégraux, analogues parfaits des matrices classiques par le classique "passage du fini à l'infini" où une intégration remplace les sommes finies. Mais on savait aussi qu'on ne peut obtenir ainsi (contrairement à ce qui se passe en Algèbre) que des opérateurs très particuliers, ayant des propriétés de "régularité" fort restrictives : par exemple l'application identique ne peut jamais être de cette nature. Ce fut la grande originalité de Schwartz de montrer qu'en remplaçant la "fonction noyau" (à 2 variables) de Fredholm par une "distribution noyau", on élargissait énormément le champ d'applications de la théorie, au point d'obtenir pratiquement tous les opérateurs linéaires obtenus jusque là. La puissance de ce théorème n'est guère apparue que depuis 1960 environ : ce fut d'abord dans les célèbres travaux de Harish-Chandra sur les représentations de dimension infinie des groupes de Lie semi-simples, un des monuments les plus extraordinaires des mathématiques contemporaines. Plus étonnante encore a été l'évolution de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires sous l'impulsion de la théorie des distributions : une première période, marquée par les travaux de leray, Garding, Malgrange, Hörmander, Lions et beaucoup d'autres, avait pu, par une habile combinaison de techniques relevant de la théorie des espaces de Hilbert et d'inégalités a priori remontant à Poincaré, Sobolev et Leray, élargir énormément la théorie classique jusque là presque exclusivement limitée aux questions du second ordre. Depuis 1963 environ, on a pu, grâce au théorème des noyaux et à la transformée de Fourier des distributions, remettre en honneur une technique bien plus puissante encore, celle des paramétrix de Hilbert et E.E.Levi, qui a permis dans ces dernières années toute une série de progrès spectaculaires et redonné une nouvelle jeunesse à des questions que l'on avait pu un moment croire épuisées.

Schwartz est un professeur incomparable, un des rares exemples que je connaisse d'un savant qui a aussi des dons naturels d'orateur et qui est capable de captiver un auditoire sur à peu près n'importe quel sujet. Aussi son influence a-t-elle été rapidement très considérable, nombreux sont ceux qui sont ses élèves directs ou indirects. L'enseignement qu'il donne depuis plus de 10 ans à l'Ecole Polytechnique a eu beaucoup de succès ; il en sort régulièrement de jeunes mathématiciens enthousiastes, avides de marcher sur les traces de leurs grands anciens Hermite, Jordan et Poincaré, et dont plusieurs ont déjà acquis une renommée internationale.

Un mathématicien de la valeur de Schwartz se cantonne rarement dans un étroit domaine. En dehors de la théorie des distributions, il a résolu dans sa thèse un beau problème de théorie des fonction ; il a beaucoup contribué au développement de la théorie générale des espaces vectoriels topologiques ; et depuis quelques années, il anime un groupe de mathématiciens travaillant sur la Théorie des probabilités, à laquelle, sous l'influence de notre regretté confrère Paul Lévy, il s'est toujours beaucoup intéressé, et où il vient d'apporter d'importantes contributions.

Issu d'une famille où la vocation scientifique est une tradition, puisqu'elle compte parmi ses membres notre confrère le Prof. Debré, et a compté l'illustre mathématicien J. Hadamard, Laurent Schwartz n'est pas indigne de cet héritage et je souhaite qu'il soit appelé à le perpétuer dans notre Compagnie.

J. Dieudonné.

Rapport sur les travaux de Laurent Schwartz. Professeur à l'Ecole Polytechnique (né en 1915) par M. S. Mandelbrojt. Comité secret du 21 janvier 1974

L'étude par Schwartz des sommes exponentielles, réelles ou imaginaires ($\sum a_n e^{\lambda_n x}$, λ_n complexes quelconques), leur convergence par groupement de termes (et facteurs exponentiels d'Abel) donne naissance à l'étude des fonctions moyennes-périodiques sur la droite (fonctions introduites par Delsarte). Une fonction f est moyenne-périodique si l'espace vectoriel fermé engendré par les translatées de f est distinct de l'espace entier. Schwartz est ramené alors à la synthèse harmonique consistant à dire que f est engendrée par des exponentielles-polynômes. Beaucoup de prolongements ont été faits à ces problèmes. Schwartz, lui-même, a pu donner un contre-exemple à la synthèse harmonique dans L^∞ sur R^3 (1948) (La solution de ce problème a été étendue aux groupes généraux par Malliavin).

L'analyse et la synthèse harmonique dans l'espace des distributions tempérées sont à l'origine du théorème de Whitney sur les idéaux de fonctions différentiables.

Schwartz munit l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables sur R^n à support compact d'une topologie, qui est de nos jours universellement connue sous le nom de "limite inductive" des topologies des espaces $\mathcal{D}_K$. Et, une distribution T de Schwartz est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$ – l'espace des distributions est le dual $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$.

Par rapport à ses précurseurs, les principaux apports de Schwartz ont été :

1°) la définition complète des espaces topologiques $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (et celle des nombruex autres espaces de distributions). L'utilisation systématique de l'analyse fonctionnelle l'a conduit à de nombreux théorèmes de "finitude"

2°) la transformation de Fourier des distributions tempérées. Les calculs explicites de transformées de Fourier lui permet de mettre en évidence les propriétés d'opérateurs aux dérivées partielles (notamment l'hypoellipticité)

3°) de nombreux théorèmes sur la convolution

Les principales applications des résultats précédents sont dans les équations aux dérivées partielles (Lions, Malgrange, Gårding, Hörmander, Leray, Trèves...)

Schwartz a perfectionné notablement les espaces topologiques, et, en particulier, la dualité des espaces localement convexes. Certains articles portent sur des distributions à valeurs vectorielles. Les espaces nucléaires de Grothendieck sont issus des espaces de distributions et du théorème des noyaux (de Schwartz).

Bourbaki avait défini des mesures de Radon sur les espaces localement compacts ; les probalilistes des mesures abstraites sur des ensembles munis de tribus ; Schwartz a introduit les mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires. Or, il s'avère que dans l'étude des processus les mesures dont ont besoin les probabilistes sont presque toujours des mesures de Radon.

Les probabilités cylindriques sur les espaces vectoriels topologiques ont été introduites par Gelfand et autres mathématiciens soviétiques. Pour démontrer un théorème très important concernant la probabilité cylindrique sur un espace vectoriel localement convexe, Minlos devait supposer des conditions très restrictives sur les espaces utilisés. Les mesures de Radon sur les espaces arbitraires introduites par Schwartz permettent de supprimer toute hypothèse supplémentaire.

Comité Secret du 4 novembre 1974. Rapport sur les travaux de M. Laurent Schwartz (né en 1915). Professeur à l'Ecole Polytechnique. Par S. Mandelbrojt

Depuis un quart de siècle, Laurent Schwartz est certainement un des créateurs les plus connus du monde mathématique contemporain. Il est devenu presque impossible d'imaginer une recherche approfondie dans l'analyse fonctionnelle dans l'utilisation, à un certain moment, d'une certaine manière, des distributions, théorie introduite, avec toute son ampleur et en pleine conscience de son importance, par Schwartz. Il serait impossible de nommer tous ceux qui utilisent cette théorie - à tel poins que le nom de l'auteur cesse souvent d'être mentionné, comme on ne mentionne plus le nom de Lebesgue en parlant des ensemble mesurables ou des fonctions intégrables.

Les distributions constituent un instrument mathématique puissant autant en mathématiques pures (calcul fonctionnel, équations aux dérivées partielles, calcul des variations, théorie des groupes de Lie, etc...) qu'en physique théoriques. Nombreux sont les physiciens qui - grâces aux distributions - comprennent mieux les méthodes utilisées.

Le Colloque d'Analyse harmonique tenu à Nancy en 1947 fut la première réunion internationale mathématique tenue en France après la guerre. Nous avons choisi Nancy comme lieu de cette rencontre pour honorer les mathématiciens de l'Université de cette ville dont les recherches pendant les années qui suivirent la guerre furent parmi les plus remarquables faites dans ce pays, et, peut-être, dans le monde entier.

Le président du Colloque pensait que la découverte des distributions par Schwartz, à l'époque professeur à Nancy, méritant qu'on la fasse connaître à des mathématiciens comme Harald Bohr, Norbert WIener, Carleman, Plancherel et plusieurs autres créateurs internationaux non moins importants.

Il est certain qu'ils furent tous fortement impressionnés par l'exposé de Schwartz.

D'ailleurs, Bohr, n'était-il pas de la commission qui décerna en 1950 la médaille Fields à Laurent Schwartz pour sa théorie des distributions.

En quoi consiste cette théorie ?

Quel est le rôle de Schwartz dans cette théorie ?

$\mathcal{D}$ étant l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n$, à supoprt compact, on le munit d'une topologie, qui porte aujourd'hui le nom de "limite inductive" des topologies des espaces $\mathcal{D}_K$ ($\mathcal{D}_K$ est le sous-espace des fonctions C^∞ à supporta dans le compact K).

Une distribution est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$, l'espace des distributions est donc le dual $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$. On peut définir une dérivation des distributions, une multiplication d'une distribution par une fonction c^∞, une convolution de deux distributions moyennant des conditions sur les supports (par exemple, pour la dimension $n+1$) les deux distributions ayant leur support borné inférieurement - on trouve une base rigoureuse de l'ancien calcul symbolique d'Heaviside)

Plusieurs notions utilisées par des précurseurs de Schwartz, un grand nombre d'idées lancées d'une manière plus ou moins explicite, des opérations effectuées par des mathématiciens plus anciens - indiquent nettement (on le comprend maintenant !) que la notion de distribution devenait indispensable.

Mais, cet ensemble de réflexions ne constituait pas un être indépendant, un instrument complet. Les idées, les résultats étaient éparpillés, sans contact, si j'ose m'exprimer ainsi, entre eux.

Rappelons, et je sais bien que j'exagère en prenant cet exemple, que les éléments, ou des éléments de la géométrie existaient bien avant la création de la géométrie euclidienne.

De même, bien que l'invention du calcul infinitésimal soit attribué, à juste titre, à Newton et à Leibnitz, on ne peut pas nier qu'avant ces mathématiciens d'autres savants (Fermat, Roberval...) utilisaient bien des notions semblables à celle de dérivée.

Par rapport à ses précurseurs, les apports essentiels de Schwartz ont été :

1˚) La définition de nombreux espaces de distributions, dont la définition des espaces topologiques $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

2˚) L'utilisation systématique de l'analyse fonctionnelle, qui conduit Schwartz à des importants théorèmes de "finitude" - par exemple : sur un ouvert borné une distribution est une dérivée d'ordre fini d'une fonction continue.

3˚) L'utilisation des parties finies de Hadamard et Marcel Riesz pour le calcul explicite de nombreuses dérivées, ce qui explique le rôle de ces parties finies dans les équations aux dérivées partielles hyperboliques

4˚) La définition de la transformée de Fourier des distributions (on doit se restreindre aux distributions tempérées) constitue un des points essentiels de la théorie. On retrouve des théorèmes topologiques, des calculs explicites de transformées de Fourier mettant en évidence des propriétés d'opérateurs aux dérivées partielles, comme, par exemple, l'hypoellipticité.

5˚) La définition correcte de la convolution permet d'établir des théorèmes importants la concernant. C'est de la convolution que proviennent les principales applications aux équations aux dérivées partielles ; par exemple, lorsqu'il s'agit du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques.

   En général, les principales applications des distributions sont dans les équations aux dérivées partielles (applications faites, par exemple, par Lions, Malgrange Gärding, Hörmander, Trèves etc...et, bien entendu, par Schwartz lui-même) et dans la physique quantique.

6˚) Il est important de citer le théorème des noyaux. On sait qu'un grand nombre d'opérateurs ne peuvent pas être mis sous la forme $\int K(x,y)f(y)dy$. Or, si on remplace la fonction K par une distribution-noyau sur $\mathbb{R}^2$ on obtient des opérateurs linéaires qu'on rencontre presque toujours dans les applications.

   Les espaces nucléaires de Grothendieck sont issus des espaces de distributions et du théorème des noyaux nucléaires. D'ailleurs, les espaces de distributions tels que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont les meilleurs exemples d'espaces nucléaires.

Les distributions ont eu des applications importantes dans la théorie des groupes de Lie avec les travaux de Harish-Chandra.

Des problèmes sur les distributions sont posés par la théorie quantique des champs et par de nombreux autres domaines de la physique théorique. D'ailleurs, les distributions de Schwartz sont enseignées dans les Universités pour les mathématiciens et pour les physiciens.

Schwartz a écrit plusieurs livres sur la théorie des distributions ; et ces livres contiennent de nombreuses applications à la physique théorique.

Signalons que plusieurs auteurs étrangers ont écrit des monographies consacrées uniquement aux distributions de Schwartz.

Les premiers travaux de Schwartz datent de 1936. Ses premières recherches importantes portent sur des sommes d'exponentielles réelles ou imaginaires, c'est-à-dire des polynomes de Dirichlet ou des polynomes trigonométriques à coefficients réels quelconques, en envisageant leur convergence par groupement de termes et en introduisant les facteurs exponentiels d'Abel. Les résultats obtenus fournissent une belle Thèse de Doctorat soutenue à l'Université de Strasbourg-Clermont (l'Université de Strasbourg était à l'époque - nous sommes en 1942 - réfugiée à Clermont-Ferrand)

Ces études ont été reprises par plusieurs auteurs, Schwartz, lui-même, ayant publié une importante monographie sur le sujet.

L'étude des sommes exponentielles le conduit à la théorie des fonctions moyenne-périodiques, fonctions introduites dans l'Analyse par Delsarte. Mais les théorèmes taubériens de Wiener, notamment la condition formulée dans ces taubériens portant sur la transformée de Fourier, permettent à Schwartz - auteur de recherches sur les sommes de Fourier - d'introduire une définition intrinsèque - frappante par sa simplicité et sa richesse, de la moyenne-périodicité : une fonction f d'un espace vectoriel topologique $\mathcal{C}$ de fonctions est moyenne-périodique si le sous-espace $\mathcal{C}'$ engendré par les translatées $f(x+y)$ de f n'est pas l'espace entier $\mathcal{C}$ (la convergence étant définie comme la convergence uniforme sur tout segment.

On devine alors comment les résultats obtenus avec cette définition (qui est, bien entendu, plus générale que celle de Delsarte) permettent de lier les énoncés de Schwartz concernant les polynomes exponentiels aux taubériens de WIener et d'aborder de ce fait aussi bien l'analyse que la synthèse harmonique.

Peut-on, par exemple, approcher une fonction moyenne-périodique par les exponentielles ou plutôt exponentielles-polynomes, les exponentielles étant formées avec le spectre de cette fonction ? Schwartz donne une réponse négative à cette question ; en, en faisant varier l'espace fonctionnel, il aborde le problème général de synthèse dans L^1 et L^∞. Il faut noter qu'un nombre important de mathématiciens de réputation mondiale s'occupaient de ce problème depuis la naissance des taubériens. Schwartz donne, aussi à cette question, une réponse négative : la synthèse harmonique n'est pas possible dans l'espace à n dimensions, lorsque $n \leqslant 3$. Il a fallu, il est vrai, une approche basée sur des principes bien différents pour permettre à Malliavin de résoudre, quelques années plus tard, ce problème dans toute sa généralité : la synthèse n'est possible pour aucun $n \leqslant 1$. Mais, c'est grâce aux résultats de Schwartz qu'on commençait à chercher une réponse plutôt négative au problème général posé.

Depuis une dizaine d'année Schwartz travaille sur des sujets liés aux théories abstraites des probabilistes. C'est ainsi qu'il introduit les mesures de Radon sur les espaces topologiques arbitraires - il s'avère que, dans l'étude des processus, les mesures dont ont besoin les probabilistes sont très souvent les mesures de Radon. Ainsi, par exemple, les considérations concernant les mesures sur les espaces arbitraires lui permettent de supprimer plusieurs hypothèses dans un théorème probabiliste de Minlos.

Ces recherche qu'il expose dans son séminaire de l'Ecole Polytechnique, lui donnent l'occasion de faire jouer un rôle fondamental aux probabilités de Paul Lévy, généralisant celle de Gauss, et dites lois stables. Elles lui permettent aussi de généraliser le théorème de Menchov sur les séries orthogonales.

Il m'est impossible de citer tous les résultats importants dans différentes branches d'analyse fonctionnelle, dans les probabilités, des résultats appliqués - ou applicables - à la physique théorique, obtenus par Schwartz.

Excusez moi, mes chers Confrères, si je me répète : Schwartz est certainement un grand mathématicien.

Comme j'ai eu l'occasion de le dire, le monde mathématique reconnut sa valeur internationale dès 1950 (il avait alors 35 ans), en lui attribuant la Médaille Fields.

L'Académie des Sciences lui attribua :

Le Prix Carrière (1955) Le Grand Prix des Sciences Mathématiques et Physiques (1964) Le Prix Cognac-Jay (1972, avec Lions et Malgrange) Schwartz est Correspondant de l'Académie des Sciences depuis 1973

Élu à l'Académie des Sciences, Schwartz serait une des gloires de notre Compagnie.

Comité Secret du 17 février 1975. Alfred Kastler. L'œuvre de Laurent Schwartz et la Physique

L'œuvre mathématique de Laurent Schwartz se rattache directement à la physique théorique. et tout d'abord dans son inspiration. il le dit lui-même dans sa notice. Car s'il a eu des précurseurs parmi les mathématiciens comme Bochner, Carleman et Sobolev, ce sont avant tout les physiciens qui ont ouvert la voie. Je le cite :

"Le calcul des distributions le plus audacieux a été incontestablement fait par les physiciens théoriciens. La "fonction de Dirac" date de 1926, mais les physiciens ont été considérablement plus loin bien avant que les mathématiciens n'aient commencé à entrevoir une approche du problème. En 1950 quand mon livre sur les distributions est paru, les physiciens avaient déjà introduit toutes les fameuses fonctions singulières de la physique théorique relativiste."

Mais les physiciens s'étaient peu souciés de rigueur et d'exploration systématique.

Le mérite de Schwartz, et en cela il s'est révélé grand mathématicien, c'est d'avoir construit une théorie complète, cohérente, rigoureuse des distributions, d'en avoir donné le premier une définition correcte et générale, (phrase barrée entre parenthèses ici) (d'avoir définir leurs dérivées, le produit tensoriel, la convulition), d'avoir montré le lien intime avec la transformation de Fourier si indispensable aux physiciens.

Et demandons-nous maintenant :

Quelle a été à son tour la répercussion de l'œuvre de Schwartz en physique ? Elle immense. Elle a rendu possible ce qu'on appelle aujourd'hui " La théorie quantique des champs", c'est-à-dire la mécanique quantique des systèmes à un nombre <u>infini</u> de degrés de liberté, théorie qui préside actuellement à deux grandes branches de la physique : la physique de la matière condensée et la physique des particules élémentaires.

Pourquoi ? Pour l'état condensé de la matière c'est presqu'évident. Dans une portion macroscopique d'un solide ou d'un liquide il y a un nombre immense d'atomes, de l'ordre du nombre d'Avoadro 10^{23}, qui interagissent les uns avec les autres. Il est clair que du point de veu mathématique ces cas serait bien décrit par le passage à la limite d'un nombre infini de particules. Ce qui permet de traiter aujourd'hui de manière rigoureuse le "comportement thermodynamique" des systèmes matériels découvert par les phénoménologistes du 19è siècle et interprété, après l'avènement de la théorie atomique, en termes statistiques.

Dans le deuxième cas, celui des particules élémentaires, il est également indispensable de décrire mathématiquement le système en termes de nombres infinis de degrés de liberté, car aux hautes énergies le nombre de particules n'est pas défini. Il y a création et annihilation de particules. D'ailleurs, en abordant le domaine relativiste, c'est-à-dire celui des hautes énergies, Dirac a été tout naturellement conduit à introduire un premier exemple de distribution, sa fameuse fonction δ.

Lorsque la mécanique quantique est née, il y a un demi-siècle, à la suite de l'œuvre de Louis de Broglie, elle s'est d'abord attaquée à l'atome de Bohr et à l'étude des molécules simples, c'est-à-dire à l'étude des systèmes à un nombre <u>fini</u> et <u>constant</u> de degrés de liberté. L'outil mathématique adapté à cette recherche était le calcul matriciel, l'étude des vecteurs de l'espace de Hilbert.

Le livre de Schwartz, paru en 1950 et qui lui a valu de la part des mathématiciens la médaille Fields, a créé au bon moment l'outil mathématique pour aborder en physique l'étude des systèmes quantiques à un nombre infini de particules. Ainsi, à l'époque de la mécanique quantique ordinaire qui s'est développée de 1925 à 1950 a succédé l'épopée de la théorie quantique des champs qui marque la physique théorique du dernier quart de siècle. Pour mettre en lumière le rôle de Schwartz dans ce développement, il suffit d'ouvrir le lire consacré au "Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs", publié par le CNRS en 1959. Ce livre contient les rapports présentés en 1957 au Colloque international de Lille. Le premier article de cet ouvrage est une revue générale rédigée par l'un des meilleurs experts de la théorie quantique des champs, l'américain WIghtman. Il montre le rôle fondamental des travaux de Schwartz dans cette nouvelle branche de la physique théorique.

L'œuvre de Laurent Schwartz s'inscrit dans la tradition des mathématiciens français qui ont inspiré la physique théorique : Jean Joseph Fourier au 19e siècle, Henri Poincaré et Élie Cartan au début de notre siècle.

Nous avons discuté récemment, mes chers confrères, des moyens exceptionnels à mettre en œuvre pour associer à notre compagnie des hommes de science de renommé internationale (barré : valeur exceptionnelle) qui font honneur à notre pays. Cette fois-ci nous avons un moyen normal pour le faire. Profitons-en. Ne laissons pas échapper cette occasion.

Alfred Kastler. [1]

1. Kastler (Alfred, Henri, Frédéric) 3 mai 1902 - 7 janvier 1984 Élu membre le 2 mars 1964 (section de physique) Prix Nobel de physique en 1966

Annexe C

Extrait de *Mathématique :* de Jacques Roubaud.

[Roubaud 1997] s'ouvre sur les premiers cours de Choquet à l'Institut Henri Poincaré. Jacques Roubaud y parle aussi de Schwartz, en indiquant qu'il prenait les étudiants à témoin pendant ses cours (p.64) et le présente (p.87-88). Le passage cité ici (p.90-95) décrit l'ambiance lors de ses cours. Cela en donne un récit très vivant et imagé dont voici un très long extrait :

> 38 (suite 2 du §36) **Schwartz provoquait régulièrement la stupeur frémissante de ses amphis**
>
> Schwartz, donc, provoquait régulièrement la stupeur frémissante de ses amphis – stupeur qui avait dû être maximale la première fois que l'événement s'était produit mais qui restait, bien que répétée d'année en année, les premières années au moins, très forte, puis que le gros des étudiants était de novembre en novembre largement renouvelé – par certains comportements didactiques iconoclastes dont les cobayes, les yeux émerveillés, se chargeaient de répandre la nouvelle auprès de leurs « collègues » encore soumis aux ennuyeuses, aux ternes méthodes traditionnelles.
>
> Il avait pris en charge un certificat tout à fait adéquat à son personnage, qui s'appelait Méthodes mathématiques de la physique (MMP ; soit < èmèmpé >, pour les intimes), puisqu'il était auréolé de sa toute récente couronne de lauriers « FIelds », et que celle-ci lui avait été donnée pour l'invention d'une théorie, la Théorie des Distributions, qui (selon les apprentis mathématiciens qui suivaient ce cours) avait été créée de toutes pièces pour donner un sens précis et rigoureux à certaines élucubrations irresponsables des physiciens, comme les mystérieuses fonctions de DIrac et Heaviside. On disait tenir cette interprétation de Schwartz lui-même car (semblait-il), sans émettre explicitement une telle hypothèse, il laissait entendre qu'elle était correcte à qui savait écouter (je n'irai pas jusqu'à affirmer la vérité de telles affirmations, n'en ayant pas été moi-même témoin auriculaire). (...)
>
> Pour peu qu'on connût l'existence et les ambitions de Bourbaki, qu'on sût que Schwartz faisait partie de la petite bande et prestigieuse cohorte, qu'on fût persuadé de la supériorité intrinsèque de la mathématique (qu'on la considérât donc plutôt comme « reine » que « servante » des autres sciences (idée qui de banc en banc et de tête en tête ayant traîné longtemps finit, pendant les années soixante, par pénétrer aussi les Lettres (devenues « sciences humaines ») avec les effets foudroyants (lévi-straussiens, barthesques et kristéviens (par ordre croissant de pataphysicisme)) qu'on connaît), on s'imaginait aussitôt commencer à participer à un bouleversement général des outils conceptuels de la science : la stratégie axiomatique, héritée de Hilbert et portée à la perfection par le chef-d'œuvre deBourbaki, ce nouveau Discours de la Méthodes, allait « donner un sens plus pur aux mots de la tribu des physiciens » (et des chimistes, dont la « cuisine » bénéficierait de l'administration, en une généreuse portion, de la théorie

des groupes, etc.). Les Distributions valaient preuve.

L'innovation pédagogique de Schwartz à laquelle je faisais allusion dans mon récit était la suivante : il proposait un énoncé de théorème, ou bien la démonstration d'une proposition ; puis il s'arrêtait, posait la craie, regardait l'amphi, restait un instant silencieux.

A ce moment, notre attention était inévitablement attirée par une particularité physique de l'orateur que, dans l'effort de concentration qui durait depuis le début du cours, on avait fini par oublier : il était affecté d'un tic facial qui se manifestait par une contraction tétanique de la joue (et se transmettait instantanément dans la direction du ciel, affectant le reste du visage sur son passage, et laissant l'impression qu'il avait cligné de l'œil), ce qui lui donnait une allure assez satanique. (Lusson, plus assidu que moi à « emmemepé » à l'époque, me rappelle qu'il avait un autre tic simultané (ou bien c'était le même qui se mettait en action nettement plus bas), qui lui projetait brusquement l'épaule vers le haut dans son veston et laissait l'impression (ce sont les termes employés par Pierre, je lui en laisse la responsabilité) qu'il était en train de faire remonter la bretelle inopinément tombée d'un soutien-gorge (->§41).

Le silence se faisait dans l'amphi, les plumes des stylos et les crayons cessaient de courir sur les pages des cahiers. « ALors, nous disait-il : c'est vrai ou ce n'est pas vrai ? » ou bien : « Cette démonstration, est-elle correcte ? ou incorrecte ? » L'amphi retenait son souffle. « Eh bien, disait Schwartz, votons ! Que ceux qui répondent oui lèvent la main ! » Le clignement de son œil se faisait plus raide. Son regard brillait.

39 (suite 3 du §36) **La grande majorité des assistants votait toujours pour la mauvaise réponse**

Or la grande majorité des assistants votait toujours pour la mauvaise réponse (la petite communauté de l'amphi confirmant chaque fois par son comportement (semblable à celui des personnages de la nouvelle de Kipling, « Le village qui vota que la terre était plate »), et chaque fois un peu plus, que la Mathématique, discipline noble, n'a rien à voir avec la démocratie). N'échappaient à la règle que ceux, très peu nombreux, qui appartenaient à l'une des quatre catégories suivantes d'étudiants :

- a) ceux qui se décident au hasard avaient été favorisés par lui ;
- b) ceux qui connaissaient la bonne réponse ;
- c) ceux qui trouvaient, sans la connaître à l'avance, la bonne réponse ;
- d) ceux enfin qui, ayant été « pris » antérieurement en répondant comme les autres, selon leur jugement spontané, et ayant constaté que la majorité était, <u>toujours</u>, du côté de l'erreur, en concluaient que la vérité devait se trouver de l'autre. (La catégorie b avait très peu de représentants, la catégorie c moins encore.)

(Je ne tiens pas compte de ceux qui ne répondaient pas
- parce qu'ils n'avaient pas écouté la question, ou
- parce qu'ils ne se sentaient pas en mesure de se prononcer

(c'était généralement mon cas ; et cela me confirmait, s'il en était besoin, qu'il me fallait me mettre sérieusement à l'étude des fondements, afin d'acquérir non seulement certaines connaissances de base mais aussi, mais surtout, les mécanismes élémentaires du raisonnement axiomatique).)

Mais pourquoi répondait-on toujours faux ? (et il était essentiel pour les besoins de la démonstration de Schwartz (pas la démonstration mathématique (le résultat en discussion n'était pas forcément un résultat important), mais la démonstration pédagogique), que l'amphi, chaque fois, se trompe ; ce qui fait que chacun de ces votes était comme un défi de dompteur.

(il en faut peu pour qu'un tel auditoire, généralement attentif, admiratif et moutonnier, mais ayant plusieurs fois subi le fouet du maître (car celui-ci, une fois le résultat acquis et conforme à ses vœux, ne manquait pas de souligner sarcastiquement, en donnant le bon résultat, la bonne démonstration, les erreurs élémentaires de raisonnement et les ignorances crasses dont on avait fait preuve en répondant mal), ne se transforme en assemblée de fauves chahuteurs)).

40 (suite 4 du §36) **Cela tenait à la conjoncture de deux facteurs**

Cela tenait, je crois, à la conjonction de deux facteurs : en premier lieu, et dans les conditions de ces expériences (position de professeur face à des élèves, et des élèves de ce genre, pas trop savants mais pas trop idiots malgré tout, et pas trop méfiants), son pouvoir de conviction était immense.

Il paraissait, il était (ne mégotons pas) d'une foudroyante intelligence (effet plutôt avivé dans sa transmission par le faux clignement d'yeux du tic) ; il savait de quoi il parlait, ce qui ne gâte rien. Et il savait tout cela de lui-même (ce qui ne gâte rien non plus ; pour ce qui est du pouvoir de conviction). (On aurait pu lui appliquer cette formule, dont il se servait pour parler d'André Weil, et qu'il avait, il me semble, inventée : « Il ne se prend pas pour un imbécile, ce qu'il n'est pas. »)

En second lieu il avait soin (et là était le sens profond de ces expériences) de choisir des cas où la réaction normale d'un esprit non prévenu était de donner la mauvaise réponde. C'étaient des situations de piège : piège de l'intuition, des généralisations abusives à partir des expériences antérieures, ou à partir de cas trop particuliers.

Il voulait nous apprendre à nous méfier, à tourner sept fois l'instrument démonstratif dans nos têtes avant de répondre, à faire le choix d'une discipline, celle de la méthode axiomatique.

(Je découvris peu après, en pénétrant enfin dans Bourbaki, que les exemples choisis par Schwartz se situaient dans les moments du déroulement d'une théorie que le Traité signalait d'un signe particulier, le « tournant dangereux » (« certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber ») ; et je compris mieux, rétrospectivement, ce qu'il avait voulu faire par ces mises en scène qu'une fois la fascination retombée (c'est-à-dire après être sorti de l'amphi) j'avais un peu trop tendance à trouver « cabotines ».)

[Roubaud 1997, p.90-95]

Annexe D

Liste des classifications 42 et 46 des *Mathematical Reviews* (1940-1972).

[1]

Classification 42 Harmonic analysis on Euclidean spaces (1940-1958)

42		(1940-now)	Harmonic analysis on Euclidean spaces
	42.1	(1940-1958)	Interpolation, approximation, orthogonal functions
	42.2	(1940-1958)	Trigonometric series and integrals
	42.3	(1940-1958)	Fourier series and generalizations, theory of approximation
	42.4	(1940-1958)	Fourier series, integral transforms

1. Les classifications présentées proviennent de la base de donnée en ligne : http ://ams.math.uni-bielefeld.de/mathscinet (consultée le 16 août 2013).

Classification 42 Harmonic analysis on Euclidean spaces (1959-1972)

42		(1940-now)	Harmonic analysis on Euclidean spaces
	42.00	(1959-1972)	General
	42.05		Trigonometric polynomials
	42.06		Best approximation by trigonometric polynomials
	42.08		Trigonometric interpolation
	42.10		Fourier coefficients
	42.11		Convergence of Fourier series
	42.12		Absolute convergence of Fourier series
	42.15		Orthogonal functions and polynomials, general
	42.16		Expansions in orthogonal functions and polynomials
	42.17		Completeness of sets of orthogonal functions
	42.18		Completeness, closure, spectral synthesis
	42.20		Summability of Fourier and generalized Fourier expansions
	42.25		Fourier transform
	42.26		Other Fourier-type transforms
	42.27		Trigonometric moment problems
	42.30		Almost periodic functions
	42.35		Positive definite functions
	42.40		Multiple Fourier series and integrals
	42.50		Abstract harmonic analysis (Fourier analysis on LCA groups)
	42.51		Characters, duality
	42.52		Fourier-Stieltjes transform
	42.53		Abstract almost periodic functions
	42.54		Positive definite functions on LCA groups
	42.55		Convolution, factorization
	42.56		Measure algebras, group algebras
	42.58		Ideals, spectral synthesis
	42.99		None of the above, but in this section

Classification 46 Harmonic analysis on Euclidean spaces (1940-1958)

46		(1940-now)	Functional analysis
	46.0	(1940-1958)	Functional analysis
	46.1	(1940-1958)	Topological vector spaces
	46.2	(1940-1958)	Banach spaces, Banach algebras, Hilbert space
	46.3	(1940-1958)	Differential and integral equations, functionnal analysis, ergodic theory

Classification 46 Harmonic analysis on Euclidean spaces (1959-1972)

46		(1940-now)	Functional analysis
	46.00	(1959-1972)	General
	46.01		Topological linear spaces
	46.06		Ordered TLS ; vector lattices
	46.10		Normed linear spaces, Banach spaces
	46.15		Inner product spaces, Hilbert spaces, spaces with an indefinite metric
	46.20		Other special spaces
	46.25		Spaces of continuous functions
	46.30		Spaces of differentiable and analytic functions
	46.35		Spaces of measurable functions ; L^p spaces, Orlicz spaces
	46.38		Sobolev spaces, embedding theorems, interpolation spaces
	46.40		Distributions, generalized functions
	46.45		Derivatives and differentials in abstract spaces
	46.50		Topological algebras ; normed rings and algebras, Banach algebras
	46.55		Commutative Banach algebras ; function algebras
	46.60		Rings and algebras with an involution, *-algebras, general theory
	46.80		Group algebras, convolution algebras
	46.90		Miscellaneous applications of functional analysis
	46.99		None o the above, but in this section

Annexe E

Le front d'onde et la multiplication des distributions. Définitions.

Issue de mon mémoire de Master 2 [Paumier 2009]

Heuristique et définition.

On peut, pour introduire le front d'onde, citer ce qu'en dit Schwartz dans son autobiographie :

> D'autre part, une nouvelle notion a été créée par Hörmander : le « wave front set » ou front d'onde d'une distribution. Une distribution est singulière en un point a si dans aucun voisinage de a elle n'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$; lorsqu'on sait qu'elle est singulière en a, on peut étudier dans quelles directions d'hyperplans passant par a elle est singulière ; ces directions forment le front d'onde en a, ou encore le front d'onde d'une distribution est son support singulier dans le produit de l'espace de configuration et de l'espace de phase. Sa définition utilise la transformation de Fourier. J'avais tous les éléments pour trouver ce front d'onde aux applications très importantes, mais je n'en ai eu aucune idée.
>
> [Schwartz 1997, p.254]

Il va même plus loin. Dans une lettre qu'il adresse à Hörmander, Schwartz s'émerveille du triomphe de Fourier, ainsi qu'on peut le lire :

> (...) one of the things which I find absolutely fascinating is the triumph of the ideas of Fourier ! Fourier has invaded all the domains of analysis : I am not sure he had suspected it till that point ! When I found the elementary solution of partial differential equations with constant coefficients, I thought that convolution and Fourier would play a role only in the case of convolution and partial differential equations with constant coefficients ; and now Fourier has invaded all the analysis of partial differential ewuations, pseudodifferential operators, Fourier integral operators, WFS, and so on. It is really marvellous !
>
> [Hörmander 2003, p.60-61]

Le point de départ est le suivant. : on peut savoir si une fonction est lisse en regardant la décroissance à l'infini de sa transformée de Fourier. On sait que la transformée de Fourier envoie continûment S dans S et on a le théorème de Paley Wiener Schwartz qui nous donne la réciproque :

Théorème E.0.1. *Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(X)$, $x_0 \in X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x_0 \notin$ *supp sing* u

(ii) $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ *tel que* $\forall \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(V_0)$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N$ *tel que*

$$|\widehat{\chi u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}$$

(iii) $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$, $\exists \chi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(V_0)$, $\chi_0(x_0) \neq 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N$ *tel que*

$$|\widehat{\chi_0 u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}$$

Le front d'onde a en fait été introduit à l'origine dans les travaux de Sato (front d'onde analytique) puis dans ceux d'Hörmander, qui lui donne ce nom. Il s'agit à l'origine de montrer un théorème de propagation des singularités, ou principe d'Huyghens ; mais ce n'est pas le point de vue que je vais adopter ici.

On va définir une notion microlocale, en localisant en espace (multiplication par une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ à support proche de x et telle que $\varphi(x) \neq 0$) et en fréquence (on regarde les directions ξ dans lesquelles on trouve une décroissance rapide en faisant tendre ξ vers $+\infty$).

Définition E.0.1. *Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$, et Γ un voisinage de ξ. On dit que Γ est un voisinage conique si $\forall \zeta \in \Gamma$, $\forall t \geq 0$, $t\zeta \in \Gamma$.*

Définition E.0.2. *On dit qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ microlocalement en (x,ξ) si il existe un voisinage V de x, une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, $\varphi(x) \neq 0$, et un voisinage conique Γ de ξ tels que $\widehat{\varphi u}$ est à décroissance rapide dans Γ, ie :*

$$\forall N, \exists C_N \text{ tel que } \forall \zeta \in \Gamma \qquad |\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N} \tag{E.1}$$

On peut alors définir le front d'onde d'une distribution u :

Définition E.0.3. *Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$. Le front d'onde de u, noté $WF(u)$ est le sous-ensemble de $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ complémentaire de $\{(x,\xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), u$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ microlocalement en $(x,\xi)\}$.*

Quelques remarques :

1. *Le front d'ondes est bien défini.*

   Preuve. Il faut pour cela montrer une propriété de consistance. Soit donc (x,ξ) tel que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ microlocalement en (x,ξ). Soit $V \in \mathcal{V}_x$ et $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, Γ voisinage conique de ξ tels que :

   $$\forall N, \exists C_N \text{ tel que } \forall \zeta \in \Gamma \qquad |\widehat{\varphi u}(\zeta)| \leq C_N(1+|\zeta|)^{-N}$$

   Alors on a aussi $\forall \psi \in \mathcal{D}(V)$, il existe Γ_1 voisinage conique de ξ tel que :

   $$\forall N, \exists C'_N \text{ tel que } \forall \zeta \in \Gamma_1 \qquad |\widehat{\psi\varphi u}(\zeta)| \leq C_N(1+|\zeta|)^{-N}$$

   On a en effet $\widehat{\psi\varphi u}(\zeta) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\psi}(\eta)\widehat{\varphi u}(\zeta-\eta)\mathrm{d}\eta$. Comme $\varphi u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\exists M$ tel que

   $$|\widehat{\varphi u}(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|)^M$$

   Soit $0 < c < 1$. On coupe l'intégrale définissant la convolution en deux parties, $|\eta| < c|\zeta|$ et $|\eta| \geq c|\zeta|$. Dans le second cas, on a $|\zeta - \eta| \geq (1+c^{-1})|\eta|$. On a alors :

   $$\begin{aligned}(2\pi)^n|\widehat{\varphi u}(\zeta)| \leq & \sup_{|\eta-\zeta|<c|\eta|} |\widehat{\varphi u}(\eta)||\widehat{\psi}|_{\mathcal{L}^1} \\ + & \quad C\int_{|\eta>|\zeta|} |\widehat{\psi}(\eta)|(1+c^{-1})^M(1+|\eta|)^M\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

On choisit Γ_1 cône fermé $\subset \Gamma \setminus \{0\}$ et c tel que :

$$\left.\begin{array}{c}\zeta \in \Gamma_1\\ |\zeta-\eta| < c|\zeta|\end{array}\right\} \Rightarrow \eta \in \Gamma$$

Dans le cas où $|\zeta-\eta| < c|\zeta|$, on a pour $\zeta \in \Gamma_1$, $\eta \in \Gamma$ et $|\eta| \geq (1-c)|\zeta|$. D'où, $\forall N \leq 0$:

$$\begin{aligned}\sup_{\Gamma_1}(1+|\zeta|)^N|\widehat{\psi\varphi u}(\zeta)| &\leq (1-c)^{-N}\sup_{\Gamma}|\widehat{\varphi u}(\zeta|(1+|\eta|)^N||\widehat{\psi}||_{\mathcal{L}^1}\\ &+ C(1+c^{-1})^{N+M}\int|\widehat{\varphi u}(\eta)|(1+|\eta|)^{N+M}\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat. □

2. *$WF(u)$ est fermé et conique.*
3. *La projection de $WF(u)$ par rapport à la première variable est exactement supp sing u.*
   Preuve. Notons $\pi_1(WF(u))$ cette projection.

   Soit $x_0 \notin$ *supp sing* u. Par Paley-Wiener, on a alors $\forall\xi$, $(x_0,\xi) \notin WF(u)$, ie $x-0 \notin \pi_1(WF(u))$.
   Soit $x_0 \notin \pi_1(WF(u))$. On regarde ce que l'on obtient alors dans toutes les directions. On a $\forall\xi, (x,\xi) \notin WF(u)$. Cela s'écrit :

$$\forall\xi \in \mathbb{S}^{n-1}, \exists U_\xi \in \mathcal{V}_x, \exists\Gamma_\xi \text{ voisinage conique de } \xi \text{ tel que}$$

$$\forall\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(U_\xi), \forall\eta \in \Gamma_\xi, \forall N, \exists C_N \text{ tel que } |\widehat{\chi u}(\eta)| \leq C_N(1+|\eta|)^{-N}$$

   Comme la sphère est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de voisinages coniques. On a alors, en posant $\Gamma = \cup_j\Gamma_{\xi_j}$, $U = \cup_j U_{\xi_j}$, on a $\Gamma = \mathbb{R}^n$ et :

$$\forall\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(U) \subset \mathcal{C}_0^\infty(U_\xi), \forall\eta \in \Gamma, \forall N, \exists C_N \text{ tel que } |\widehat{\chi u}(\eta)| \leq C_N(1+|\eta|)^{-N}$$

   On peut conclure par le théorème de Paley-Wiener que $x_0 \notin$ *supp sing* u. □

Quelques exemples :

1. $WF(\delta_0) = \{0\} \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$.
   En effet, on a *supp sing* $\delta_0 = \{0\}$ et $\widehat{\delta_0} = 1$, donc en 0, δ_0 n'est à décroissance rapide dans aucune direction.

2. Si u est à valeurs réelles, son front d'ondes est projectif, ie :

$$(x,\xi) \in WF(u) \Leftrightarrow (x,-\xi) \in WF(u)$$

   En effet, on a dans ce cas $\overline{\hat{u}}(\xi) = \hat{u}(-\xi)$.

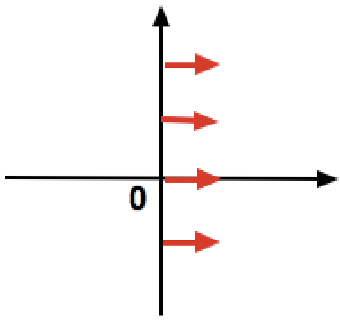
3. $WF\frac{1}{x+\imath 0} \otimes 1 = (\{0\}\times]0,+\infty[) \times (\mathbb{R} \times \{0\})$

En effet, on a par définition $\frac{1}{x+\imath 0} = vp(\frac{1}{x}) - \imath\pi\delta_0$. D'où *supp sing* $u = \{0\}$. On a aussi $\widehat{H} = \frac{\delta_0}{2} + \frac{1}{2\imath\pi}vp\frac{1}{\xi}$. Donc $\widehat{\frac{1}{x+\imath 0}}(\xi) = 2\imath\pi\widehat{H}(\xi)$. On utilise enfin le résultat général suivant :

Lemme E.1. *Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$, $v \in \mathcal{D}'(Y)$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} WF(u\otimes v) \subset (WF(u) \times WF(v)) \quad &\cup \quad ((supp\ u \times \{0\}) \times WF(v)) \\ &\cup \quad ((WF(u) \times (supp\ v \times \{0\})) \end{aligned}$$

Ici $WF\frac{1}{x+\imath 0} = (\{0\}\times]0,+\infty[)$, $WF(1) = \emptyset$, *supp* 1=$\mathbb{R}$.



4.

$$\begin{aligned} WF(H(x_1)H(x_2)) = \quad & \{(0,0),(\xi_1,\xi_2);(\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)\} \\ \cup \quad & \{(x_1,0),(0,\xi_2);(x_1,\xi_2) \neq (0,0)\} \\ \cup \quad & \{(0,x_2),(\xi_1,0);(x_2,\xi_1) \neq (0,0)\} \end{aligned}$$

En effet, on a : *supp sing* $u = \{(x_1,x_2), x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_1 \text{ou} x_2 = 0\}$. Soit tout d'abord un point (x_1,x_2), avec $x_1 = 0$, $x_2 > 0$. Au voisinage de ce point, on a $u = H(x_1) \otimes 1$. On applique le lemme E.1. Ici, cela nous donne :

$$\begin{aligned} WF(H(x_1) \otimes 1) &= ((WF(H(x_1)) \times (\text{supp } 1 \times \{0\})) \\ &= (\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus 0)) \times \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$WF(H(x_1) \otimes 1) = \{(0,\xi_1,x_2,0), \xi_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$$

Le résultat est le même pour $x_1 > 0$, $x_2 = 0$. Il nous reste maintenant à regarder en 0. On a :

$$\frac{\partial^2 H(x_1)H(x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \delta_0(x_1) \otimes \delta_0(x_2)$$

On utilise ici le résultat suivant :

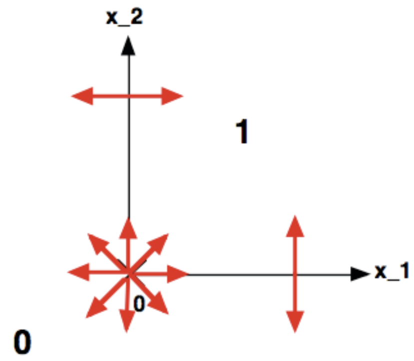
Lemme E.2. *Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$. On a $\forall\alpha$:*

$$WF(D^\alpha u) \subset WF(u)$$

On en déduit alors que $WF(\delta_0(x_1) \otimes \delta_0(x_2)) \subset WF(H(x_1)H(x_2)$. Or :

$$WF(\delta_0(x_1) \otimes \delta_0(x_2)) = (\{0\} \times \mathbb{R} \setminus 0) \times (\{0\} \times \mathbb{R} \setminus 0)$$

D'où le résultat (en 0, toutes les directions sont singulières).



La multiplication des distributions.

La question est la suivante : étant donné deux distributions arbitraires S et T, peut-on définir leur produit $S.T$ de telle sorte que dans le cas de deux fonctions f, g, il coïncide avec le produit habituel des fonctions ?

La réponse est non en général, ainsi que l'explique [Schwartz 1954c]. Ainsi par exemple, le produit de deux fonctions localement intégrables n'est pas nécessairement localement intégrable (prendre par exemple $f = g = \frac{1}{\sqrt{x}}$ localement intégrable, $f^2 = \frac{1}{x}$ ne l'est pas).

Schwartz va même plus loin : dans un article, il démontre qu'il n'est pas possible d'avoir à la fois une dérivation, un élément δ et une multiplication. Une partie de l'article montre que dans l'espace des distributions, la multiplication n'est pas toujours possible. En effet, s'il existait une multiplication sur $\mathcal{D}'$, ie une application bilinéaire associative, coïncidant avec la multiplication sur les fonctions, on aurait alors, en notant $x^{-1} := vp(\frac{1}{x})$

$$x^{-1}(x\delta) = (x^{-1}x)(\delta)$$

Or on a :

$$x^{-1}(x\delta) = 0$$

Et comme $x^{-1}x = 1$:

$$(x^{-1}x)(\delta) = \delta$$

Afin de résoudre le problème initial, on peut alors soit abandonner l'une de ces propriétés en se plaçant dans une algèbre plus grande contenant les distributions, soit définir la multiplication uniquement pour certaines distributions.

On peut tout d'abord essayer de se placer sur des sous-espaces appropriés de $\mathcal{D}$. C'est ce que fait Schwartz : il définit la multiplication à gauche d'une distribution $T \in \mathcal{D}'$ par une fonction lisse $\alpha \in \mathcal{E}$ par :

$$< \alpha T, \varphi > := < T, \alpha\varphi >$$

Le front d'onde permet de donner une réponse plus complète à cette question, et de déterminer quand le produit de deux distributions est possible. L'idée est la suivante :

> Pour que ST ait un sens, il faut que S soit d'autant plus régulière localement que T est irrégulière.

ainsi que l'écrit Schwartz. Le front d'onde est la bonne notion microlocale qui nous permet de trouver un critère pour pouvoir définir une telle multiplication.

Critère : $\{(x,\xi),(x,\xi) \in WF(S) \text{ et } (x,-\xi) \in WF(T)\} = \emptyset$

Théorème E.0.2. *Soit $S, T \in \mathcal{D}'(X)$ deux distributions qui vérifient ce critère. Alors leur produit ST est bien défini dans $\mathcal{D}'(X)$.*

Preuve. Pour définir ST, il suffit de définir $\varphi^2 ST$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ à support assez petit. On pourra en effet alors retrouve ST en utilisant une partition de l'unité $ST = \sum_j \varphi_j^2 ST$.

On va définir $\varphi^2 ST$ comme étant la transformée de Fourier inverse de $\frac{1}{(2\pi)^n}\widehat{\varphi S} * \widehat{\varphi T}$. Il faut pour cela que l'intégrale définissant la convolution soit bien définie. On a $\varphi S, \varphi T \in \mathcal{E}'(X)$ donc $\exists C, N_1, N_2$ tels que :

$$|\widehat{\varphi T}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{N_1}$$

$$|\widehat{\varphi S}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{N_2}$$

Mais ça ne suffit pas à faire converger l'intégrale qui définit la convolution, à savoir :

$$\int_\Gamma \widehat{\varphi S}(\xi-\eta)\widehat{\varphi T}(\eta)\mathrm{d}\eta$$

Soit donc (x_0, ξ_0) fixé. Comme S et T vérifient le critère donné ci-dessus, $(x_0,\xi_0) \notin WF(T)$ ou $(x_0, -\xi_0) \notin WF(T)$. Donc $\exists \Gamma$ cône ouvert contenant ξ_0 tel que, si *supp* φ est suffisamment petit, $\widehat{\varphi T}(\eta)$ ou $\widehat{\varphi S}(-\eta)$ est à décroissance rapide dans Γ.
Premier cas : $\widehat{\varphi T}(\eta)$ est à décroissance rapide dans Γ. On a alors $\forall \xi, \forall N, \exists C_N$ tel que :

$$\int_\Gamma |\widehat{\varphi S}(\xi-\eta)\widehat{\varphi T}(\eta)|\mathrm{d}\eta \leq C_N \int_\Gamma (1+|\xi-\eta|)^{N_1}(1+\eta)^{-N}\mathrm{d}\eta$$

L'intégrale converge si $N_1 - N < -n$.
Deuxième cas : $\widehat{\varphi S}(-\eta)$ est à décroissance rapide dans Γ. Ici, on observe que si ξ est fixé, $\xi - \eta \in -\Gamma$ si $\eta \in \Gamma_1$ où Γ_1 est un cône strictement inclus dans Γ, pour η assez grand. On a alors :

$$\int_{\Gamma_1} |\widehat{\varphi S}(\xi-\eta)\widehat{\varphi T}(\eta)|\mathrm{d}\eta \leq C_N \int_{\Gamma_1} (1+|\xi-\eta|)^{-NN}(1+\eta)^{N_2}\mathrm{d}\eta$$

qui converge si $N_2 - N < -n$.

Or on a *supp* $\widehat{\varphi S} \subset$ *supp* φ, *supp* $\widehat{\varphi T} \subset$ *supp* φ. On peut donc recouvrir $\mathbb{R}^n$ par de tels cônes, ce qui nous donne la convergence de l'intégrale donnant la convolution. Ces estimations nous montrent de plus que $\widehat{\varphi S \varphi T}$ a une croissance polynomiale en ξ et donc que sa transformée de Fourier inverse est bien définie. On a donc ainsi défini le produit des distributions S et T. □

Annexe F

Adresse de Mandelbrojt au colloque d'Équations aux Dérivées Partielles, Montpellier, 1972.

Ce texte, écrit par Szolem Mandelbrojt, est issu de [Société Mathématique de France 1973, Avant-propos].

> Il y a exactement vingt cinq ans, en 1947, j'ai eu l'honneur d'organiser et de présider le premier Colloque International sur l'Analyse Harmonique - le Colloque de Nancy. Il a été, comme la présente Table Ronde, subventionné par le Centre National de la Recherche Scientifique, avec le concours, il est vrai, de la Fondation Rockefeller. Comme maintenant à Montpellier, de nombreux auditeurs ont constamment suivi les conférences et les discussions. Le Colloque de Nancy garde, et gardera, un caractère historique important, ne serait-ce que par les noms des conférenciers et par les idées qui ont alors été lancées et développées. Les différentes branches d'Analyse que nous avons cherché à approfondir étaient, il est vrai, assez disparates. On avait parfois l'impression qu'on cherchait plutôt à mettre sous une seule dénomination plusieurs découvertes, des idées parfois peu liées entre elles. « Analyse Harmonique » convenait certainement à l'ensemble des faits exposés, mais on avait parfois l'impression qu'on chercherait un nom à donner à un ensemble de recherches qu'on désirait voir exposer, plutôt que de rassembler des découvertes qu'on pouvait exposer sous le vocable d'Analyse Harmonique.
>
> Le colloque de Nancy était prestigieux par les noms des conférenciers, tous restés ou devenus célèbres, ou au moins très connus. Les résultats exposés alors font partie du patrimoine mathématique acquis une fois pour toutes par leur importance et par leur beauté.
>
> Permettez-moi de vous dire, mes chers amis, que ce n'est nullement pour diminuer votre propre valeur par rapport à celle de vos prédécesseurs, par rapport à ceux d'il y a 25 ans, que j'évoque leur contribution à la science qui nous est chère. Ceux-là ne travaillaient pas avec plus d'amour de la recherche que vous-mêmes, ce qui serait tout simplement impossible. Et, je suis certain, que lorsqu'en 1997 je présiderai le Colloque, ou la Table Ronde, de l'Analyse Harmonique, je parlerai aux chercheurs d'alors de vos recherches, de vos découvertes, de l'atmosphère régnant à Montpellier en 1972 avec le même enthousiasme que je m'efforce de vous transmettre en parlant de ce Nancy d'il y a un quart de siècle.
>
> Nous avions à Nancy de mathématiciens qui s'appelaient Carleman, Harold Bohr, Norbert Wiener, Paul Lévy, Julia, Plancherel et tant d'autres grands précurseurs...

C'est Ià que Carleman a parlé, pour la première fois devant un public international, des transformées des couples de fonctions dans les deux demi-plans - les transformées de Fourier-Carleman, comme nous disons aujourd'hui. C'est au Colloque de Nancy que le théorème de Paley-Wiener a pris sa forme définitive et que ce résultat est devenu un des grands instruments d'Analyse, ii est peut-étre intéressant d'ailleurs de remarquer que, bien que Wiener fût present au Colloque, c'est Plancherel qui a expose la version Plancherel-Polya du théorème, qui est la généralisation du théorème de Paley-Wiener.

C'est aussi du Colloque de Nancy que les distributions de Schwartz, leur transformée de Fourier et leurs topologies sont sorties dans le monde mathématique et se sont si largement et rapidement répandues.

Le père des fonctions presque périodique en personne - Harold Bohr - y a expose des nouveaux résultats importants concernant cette branche fascinante de l'Analyse Harmonique. Et, ce n'est pas parce que je présidais la réunion du Nancy, ou parce que je préside celle de Montpellier, que je sois obligé d'oublier que c'est encore à Nancy que j'ai expose pour la première lois devant un public aussi savant la théorie des « séries adhérentes ».

Je ne désire certainement pas couvrir d'un voile le quart de siècle séparant le Colloque de Nancy de la Table Ronde de Montpellier. Aurait-elle seulement pu avoir lieu, la présente réunion, si entre temps des découvertes d'une importance capitale n'avaient pas été réalisées dans l'Analyse Harmonique... Des découvertes faites par « des fils » et « petits-fils » (et « petites-fille ») des conférenciers de 1947 à Nancy.

C'est parce que Paul Lévy et Norbert Wiener (et on oublie parfois Carleman, qui a soulevé la même question dans ses leçons à l'Institut Mittag-Leffler en 1935) ont établi qu'une fonction analytique « opère » dans la classe A, c'est-à-dire qu'un fonction analytique d'une fonction dont la série de Fourier converge absolument fournit encore une fonction possédant la même propriété, que le problème inverse est né : indiquer l'ensemble des fonctions qui opèrent dans A. C'est d'ailleurs à Montpellier en 1958, dans un Colloque presque privé, un peu fermé, qu'on commença à prévoir sa solution. Le problème fut depuis complètement résolu par un de vous, et ceci beaucoup grâce aux méthodes très fines élaborées par un autre d'entre vous, qui était alors Professeur à la Faculté des Sciences de cette ville, et qui est « l'âme » (ou, si vous préférez, l'une « des âmes ») de l'Analyse Harmonique actuelle en France. C'est ainsi, qu'un peu plus tard est née « l'Ecole d'Orsay », car « les âmes », comme vous savez, peuvent « migrer ».

Des méthodes encore fortement influencées par celles auxquelles je viens de faire allusion ont permis à un troisième de nos camarades, absent de notre Table Ronde, de résoudre complètement le problème de Synthèse Harmonique, ou du moins, ce problème posé sous sa forme première. Des leçons au Collège de France, délivrées une certaine année, n'ont pas été inutiles pour que les recherches dans cet ordre d'idées puissent être abordées, notamment en France. D'ailleurs le Professeur dont il peut être question ici, n'a-t-il pas publié en collaboration avec un mathématicien israélien, son élève, dans une revue hongroise, pour célébrer Fejér et Frédéric Riesz, des résultats portant sur la synthèse, lorsqu'elle admet une solution positive ?

Ces problèmes que je viens de citer ont été généralisés de plusieurs manières par leurs auteurs et par les élèves de ces auteurs ; des volumes récents concernant ces recherches sont remplis d'idées profondes et de problèmes encore à résoudre.

Je citerai aussi le problème du "prolongement des propriétés des fonctions d'une variable réelle lorsqu'il s'agit d'indiquer des conditions pour qu'une propriété valable sur une partie d'un segment puisse être "prolongée" au segment entier. Le problème, nous l'avons déjà pose en 1932, et résolu dans plusieurs cas. D'autres solutions (Turan, Wiener, Kahane, Meyer, nous avons d'ailleurs repris le problème récemment) dépendant chacune de la propriété envisagée, ont été données durant ces dernières années.

On parlera tant de nouvelles découvertes dans le domaine qui nous intéresse, en 1997 (dans 25 ans, si vous savez calculer), que vous devez me promettre que je présiderai encore ce Colloque-là !

Je désire terminer cette introduction à la Table Ronde, en remerciant très chaleureusement le Centre National de la Recherche Scientifique, qui a permis, moralement et financièrement, de l'organiser. Je désire aussi remercier E.J. Akutowicz qui a eu !'idée et le courage de l'organiser. !i a pu le faire parce qu'il aime le sujet. Et il aime ce sujet parce qu'il y a tant contribué. Permettez moi, enfin, de remercier l'Université de Montpellier et son Président, grâce auxquels notre séjour et notre travail dans cette ville, je dirais dans ce campus, sont si agréables et seront, j'en suis certain, utiles.

S. Mandelbrojt Montpellier, Septembre 1972

Annexe G

Liste des premiers colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, 1946-1956

Il s'agit des premiers colloques en mathématiques, par ordre de publication dans la collection du C.N.R.S.. La liste est comparée à celle donnée par [Zallen 1989, p.22-24] qui donne les colloques financés par la Fondation Rockefeller. On a ici les dates précises, le titre français de la publication, et le lieu où a lieu le colloque (informations absentes dans [Zallen 1989]). Dans quelques cas, on a le nom des organisateurs. On a mis en gras les colloques identifiés par Zallen comme faisant partie des mathématiques (incluant la physique théorique).

1. La théorie des images optiques. Paris, octobre 1946. [1949, Edmond Bauer]
2. Les hauts polymères. Strasbourg, octobre 1946. [1947, Charles Sandon]
3. *Non financé par Rockefeller* Les spectres moléculaires. Paris, 26-29 mai 1947. [1948]
4. Endocrinologie des arthropodes. Paris, juin 1947. [1948]
5. Echanges isotopiques et structure moléculaire. Paris, 5-10 avril 1948. [1949, Irène Joliot-Curie]
6. Les anti-vitamines. Lyon, septembre-octobre 1948. [1949]
7. Diffusion moléculaire de la lumière et effet Raman. Bordeaux, avril 1948. [1949]
8. Unités biologiques douées de continuité génétique. Paris, juin-juillet 1948. [1949]
9. Relations entre phénomènes solaires et géophysiques. Lyon, septembre 1947. [1947 ?]
10. Réactions dans l'état solide. Paris, 1-6 octobre 1948. [1949, Georges Chaudron, Jacques Bénard]
11. Les lipides. Paris, 5-12 janvier 1948. [1949]
12. **Topologie algébrique. Paris, 26 juin-2 juillet 1947. [1949, Denjoy]**
13. **Le calcul des probabilités et ses applications. Lyon, 28 juin-3 juillet 1948. [1949, Fréchet]**
14. **Méthodes de calcul dans des problèmes de mécanique. Marseille, 30 mars-6 avril 1948. Paris, 8-9 avril 1948. [1949]**
15. **Analyse harmonique. Nancy, 15-22 juin 1947. [1949, Szolem Mandelbrojt]**

16. Cinétique et mécanisme des réaction d'inflammation et de combustion en phase gazeuse. Paris, 26 avril-1 mai 1948. [1949]
17. Polarisation de la matière. Paris, 4-9 avril 1948. [1949, Paul Pascal, Adolphe Facault]
18. La liaison chimique. Paris, 12-16 avril 1948. [1950, Edmond Bauer]
19. Adsorption et cinétique hétérogène. Lyon, 12-17 septembre 1949. [1950, Marcel Prettre]
20. La combustion du carbone. Nancy, 27-30 septembre 1949. [1950, Pierre Donzelot, Maurice Letort]
21. Paléontologie. Paris, avril 1947. [1950, Jean Piveteau], (ctes du Colloque international d'avril 1947 tenu à Paris sous l'égide de la fondation Rockfeller et du CNRS, ayant pour objet la confrontation des points de vue du paléontologiste et du généticien en face des théories transformistes / C. Arambourg, L. Cuénot, P.-P. Grassé...[et al.] ; préface par Jean Piveteau)
22. Electrophysiologie. Paris, 31 mars-9 avril 1949. [1950]
23. (Les) Propriétés optiques des lames minces solides. Marseille, 19-23 avril 1949. [1950, P. Rouard]
24. **Algèbre et théorie des nombres. Paris, septembre 1949 [1950, Châtelet, Dubreil]**
25. Constantes fondamentales de l'astronomie. Paris, 27 mars-1 avril 1950. [1950, André Danjon]
26. Mécanisme de la narcose. Paris, 19-26 avril 1950 [1951]
27. Ferromagnétisme et antiferromagnétisme. Grenoble, 3 juillet-6 juillet 1950. - Extrait de la revue le Journal de physique et le redium. T. 12, mars 1951 [Paris, Gauthiers-Villars, 1951]
28. Morphogenèse. Strasbourg, 4 juillet-11 juillet 1949 [(Laval, impr. de Barnéoud frères), 1951]
29. *pas Rockefeller ?* Cinquantenaire de la découverte du radium. Paris, 17, 18, 19 juillet 1950 [(Saint-Amand, impr. de Bussière), 1951]
30. Réarrangements moléculaires et inversion de Walden. Montpellier, 24-29 avril 1950 [(Chartres, impr. de Durand), 1951]
31. La différenciation sexuelle chez les vertébrés. Paris, 5 juin - 12 juin 1950 [R. Courrier,et A. Jost, 1951]
32. Mécanisme physiologique de la sécrétion lactée. Strasbourg, août 1950 [1951]
33. Ecologie. Paris, 20 25 février 1950. - Extrait de l'Année biologique. 3e série. T. 27. Fasc. 2,4, 6-7, 1951. - Textes en français et en anglais [(Laval, impr. de Barnéoud frères), 1952]
34. Structure et physiologie des sociétés animales. Paris, mars 1950 [1952]
35. Actions éoliennes, phénomènes d'évaporation et d'hydrologie superficielle dans les régions arides. Alger, 27-31 mars 1951 [Avant-propos par Étienne Crausse. (Gap, impr. de L. Jean), 1953]
36. *non Rockefeller* Les méthodes formelles en axiomatique. Paris, Décembre 1950 [1953]
37. **Les Machines à calculer et la pensée humaine. Paris, 8-13 janvier 1951. [Avertissement signé J. P. (Joseph Pérès).(Gap, impr. de L. Jean), 1953]**
38. **Particules fondamentales et noyaux. Paris, 24 - 29 Avril 1950 [1953]**

39. Electrolyse. Paris, 23 au 27 mai 1952[(Besançon, impr. de Jacques et Demontrond), 1952]
40. **Économétrie. Paris, 12-17 mai 1952. [Introduction de Georges Darmois. (impr. de J. et R. Sennac), 1953]**
41. Évolution et phylogénie chez les végétaux. Paris, mai 1952 [Exposé introductif par Roger Heim, (Laval, impr. de Barnéoud frères), 1952]
42. 42 *Les colloques 42 à 50 sont a priori des colloques en sciences humaines, non financés par la Fondation Rockefeller, qui seront ensuite regroupés en une collection à part.*
43. 43
44. 44
45. 45
46. 46
47. 47
48. 48
49. 49
50. 50
51. Physiopathologie du potassium. Paris 14-18 juin 1954 [1954]
52. **Géométrie différentielle. Strasbourg, 26 mai-1er juin 1953. [Introduction de Charles Ehresmann et André Lichnerowicz. (impr. de J. et R. Sennac), 1953]**
53. Étude des molécules d'eau dans les solides par les ondes électromagnétiques.Paris, 24 au 26 juin 1953 [1953]
54. Rôle du cortège électronique dans les phénomènes radioactifs, Paris, 28 juin-3 juillet 1954 [(impr. de Gauthier-Villars), 1955]
55. Principes fondamentaux de classification stellaire. Paris, 29 juin - 4 juillet 1953 [1955]
56. L'hydroxycarbonylation. Paris, 31 mai au 5 juin 1954 [1955]
57. *non Rockefeller* Quelques aspects généraux de la science des macromolécules. Strasbourg, 4-7 octobre 1954 [1955]
58. Les techniques récentes en microscopie électronique et corpusculaire. Toulouse, 4-8 avril 1955 [1956]
59. Les divisions écologiques du monde : moyens d'expression, nomenclature, cartographie. Paris, juin-juillet 1954 [1955]
60. Problèmes actuels de paléontologie. Paris, 18-23 avril 1955 [(impr. de J. et R. Sennac), 1956]
61. L'Etat actuel des connaissances sur les propriétés électriques et magnétiques des couches-métalliques minces en liaison avec leur structure. Alger, 25 avril-30 avril 1955 [(Lille, impr. de Taffin-Lefort), 1956]
62. **Les modèles dynamiques en économétrie. Paris, 23-28 mai 1955 [1956]**
63. *non Rockefeller* Les Botanistes français en Amérique du Nord avant 1850..Paris, 11-4 septembre 1956 [Avant-propos de Jean F. Leroy. (Gap, impr. de L. Jean), 1957]
64. Les Hétérocycles oxygénés.Lyon, 5-10 septembre 1955 [Introduction de Charles Mentzer. Allocution de Jean Colonge. (Gap, impr. de L. Jean), 1957]

65. **L'Analyse factorielle et ses applications.Paris, 11-16 juillet 1955 [Avant-propos d'Henri Laugier. (impr. de J. et R. Sennac), 1955]** 58 ["sic" pour 65],
66. *non Rockefeller* Colloque sur la biochimie du soufre. Roscoff, 14-18 Mai 1956 [introduction par Cl. Fromageot, 1956]
67. Microphysiologie comparée des éléments excitables. Paris - Gif-sur-Yvette, 19-23 juillet 1955 [1957, Alfred Fessard ; Alexandre-Marcel Monnier]
68. Les Échanges de matières au cours de la genèse des roches grenues acides et basiques. Nancy, 4 au 11 septembre 1955. [Présentation par Marcel Roubault. (Impr. de la Société d'impressions typographiques), 1955]
69. 69 *Titre non retrouvé ; non Rockefeller.*

70 **Le Raisonnement en mathématiques et sciences expérimentales : textes ou sommaires des rapports et communications (070 ; Paris ; 1955) / Edition provisoire, multigraphiée / Secrétariat mathématique / 1955**

70. *non Rockefeller* La Théorie des équations aux dérivées partielles. Nancy, 9-15 avril 1956 [(impr. de J. et R. Sennac.), 1956]
71. La Luminescence des corps cristallins anorganiques. Paris, 21 mai-26 mai 1956 [Lille, impr. de Taffin-Lefort), 1956]

Annexe H

Liste des conférences internationales de sciences mathématiques organisées à l'université de Genève entre 1933 et 1938

Cette liste provient du premier fascicule dans lequel est publié, par Hermann, le colloque de probabilités de 1937 [*Colloque consacré à la Théorie des Probabilités, 1937, Genève. Présidé par M. Maurice Fréchet.* 1938-39, p.5-8].

Conférences sur la théorie des quanta (du 15 novembre au 18 novembre 1933)

M. Louis de BROGLIE, Membre de l'Institut, Lauréat du Prix Nobel de Physique : *Les idées nouvelles introduites par la Mécanique quantique* (15 novembre 1933).
Conférence reproduite dans *L'Enseignement mathématique*, 32^{e} année, 1933, p.137-150

M. M. BORN : *Sur une modification des équations de Maxwell et ses conséquences* (16 novembre 1933)
Archives des Sciences physiques et naturelles (5), vol. 15, p. 465-483, 1933

M. J. FRANCK, Lauréat du Prix Nobel de Physique *L'aspect expérimental de la théorie des quanta* (17 novembre 1933)

Conférences sur l'hydrodynamique (du 5 au 16 décembre 1933)

Conférences sur la philosophie mathématique (du 5 au 14 mars 1934)

Mécanique et analyse

M. K. WEISSENBERG, Ancien membre de l'Institut « Kaiser WIlhelm » pour la physique : *Sur la structure des corps solides* (30 avril et 2 mai 1934)
Voir *Archives des Sciences physiques et naturelles* (5), vol. 17, p. 44-106, 130-171, 1935

M. Gaston JULIA, Professeur à la Sorbonne *La représentation conforme des aires multiplement connexes* (3 mai 1934)
Reproduite dans *L'Enseignement mathématiques*, 33è année, 1934, p. 137-168

Colloque sur la logique mathématique (du 18 au 23 juin 1934)

Ces conférences sont reproduites dans *L'Enseignement mathématique*, 34^{e} année, 1935, p. 5-111.

MM. BARZIN et A. ERRERA, Professeurs à l'Université de Bruxelles *Sur la crise contemporaine des mathématiques*

M. A. FRAENKEL, Professeur à l'Université de Jérusalem *Sur la notion d'existence dans les mathématiques* (1 conférence)
Sur le principe du choix (2 conférences)

M. P. BERNAYS, Collaborateur de M. le Professeur D. Hilbert *SUr le platonisme dans les mathématiques* (1 conférence)
Problèmes de logique du premier ordre et axiomatique. La problématique dans la théorie des nombres. (4 conférences)

M. P. HERTZ, Professeur à Göttingen *Sur la nature des catégories et des vérités logiques.*

M. C. CHEVALLEY, Ancien élève de l'École normale supérieure de Paris, Agrégé de l'Université *Sur les travaux de J. Herbrand en logique mathématique*

Conférences sur la théorie des électrons dans les métaux

Ces conférences sont reproduites dans les *Helvetica Physica Acta*, vol. VII, supplementum II, 1934

Théorie de la relativité

Voir *L'Enseignement Mathématique*, 34^{e} année, p.149-175, 1935

M. T. LEVI-CIVITA, Membre de l'Académie dei Lincei, Professeur à l'Université de Rome *Le problème relativiste des deux corps* (30 avril 1935)

Colloque d'analyse - équations aux dérivées partielles (du 17 au 20 juin 1935)

Voir *L'Enseignement mathématique*, 35^{e} année, p.5-151, 1936.

M. J. HADAMARD, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France *Principes généraux et cas hyperbolique*

M. G. DOETSCH, Professeur à l'Université de Fribourg en Brisgau *Equations de type parabolique*

M. F. VASILESCO, Docteur ès Sciences mathématiques *Le problème de Dirichlet dans le cas le plus général*

M. A. WEINSTEIN, Docteur ès Sciences mathématiques *Les conditions aux limites introduites par l'hydrodynamique.*

M. J. SCHAUDER, Privat-docent à l'Université de Lwow *Equations du type elliptique, problèmes linéaires*

M. J. LERAY, Docteur ès Sciences mathématiques Nancy *Equations du type elliptique, problèmes non linéaires*

Dans la même semaine a eu lieu la conférence suivante :

M. R. FUETER, Professeur à l'Université de Zürich *La théorie des fonctions qui sont solutions de l'équation de Laplace à quatre variables réelles.*

Colloque sur quelques questions de géométrie et de topologie (du 21 au 26 octobre 1935)

Ces conférences sont reproduites dans *L'Enseignement mathématique*, 35e année, p.177-364, 1936, 36e année, p.5-48, 1937

M. E. CARTAN, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne *La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie*

M. G. DE RHAM, Privat-Docent à l'Université de Lausanne, *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples*

M. C. KURATOWSKI, Professeur à l'Université de Varsovie *La notion de connexité locale en topologie*

M.A WEIL, Maître de conférences à l'Université de Strasbourg *La mesure invariante dans les espaces homogènes clos*

M. W. THRELFALL, Professeur à l'École Polytechnique de Dresde *Quelques progrès récents de la topologie algébrique*

M. E.G. TOGLIATTI, Professeur à l'Université de Gênes *Extension aux surfaces algébriques de la théorie des séries de groupes de points*

M. J. NIELSEN, Professeur à l'École Polytechnique de Copenhague *Topologie des transformations des surfaces*

M. B. KAUFMANN, Docteur ès Sciences mathématiques *Topologie des surfaces closes et des variétés de Cantor*

M. B. de KEREKJARTO, Professeur à l'Université de Szeged, *Sur la structure des transformations des surfaces en elles-mêmes*

M. C. EHRESMANN, Docteur ès Sciences mathématiques *Les espaces localement homogènes*

M. H. HOPF, Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich *Quelques problèmes de la théorie des représentations continues*

M. K. MENGER, Professeur à l'Université de Vienne *La Géométrie métrique*

M. H. SEIFERT, Professeur à l'Université de Leipzig *La théorie des noeuds*

M. G. BOULIGAND, Professeur à l'Université de Poitiers, *Le rôle de la théorie des groupes en Géométrie infinitésimale*

Printemps 1937

M. E. BOREL, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne *Le calcul des probabilités et la théorie des jeux où intervient le hasard*

M. J. KARAMATA, Professeur à l'Université de Beograd *Quelques théorèmes de convergence et de sommabilité*

M. B. DE KEREKJARTO, Professeur à l'Université de Szeged *Sur les fondements de la géométrie*

M. V. VOLTERRA, Membre de l'Académie Pontificale, *Applications des Mathématiques à la Biologie*
Voir *L'Enseignement mathématique*, tome 36, p.297-330, 1937

Colloque sur la Théorie des Probabilités (du 11 au 16 octobre 1937)

Ce colloque sur la Théorie des Probabilités est publié par Hermann, Paris en 8 fascicules entre 1938 et 1939.

Première partie : Conférences d'introduction et d'initiation.

Introduction de M. R. WAVRE, Professeur à l'Université de Genève.

Allocution de M. M. FRÉCHET : *Les principaux courants dans l'évolution récente des recherches sur le calcul des probabilités*

M. G. PÒLYA, Professeur à l'École Polytechnique Fédérale, Zurich : *Promenade au hasard dans un réseau de rues.* [1]

M. HEISENBERG, Lauréat du Prix Nobel de Physique, a fait à l'occasion du colloque, une conférence ayant pour titre : *Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Quantentheorie des Wellenfelder*

Deuxième partie : Les fondements du calcul des probabilités.

M. P. CANTELLI, Professeur à l'Université de Rome : *Sur la définition des variables éventuelles (résumé)*

M. W. FELLER, Dr. Phil., Stockholm : *Sur les axiomatiques du Calcul des probabilités et leurs relations avec les expériences*

M. M. FRÉCHET, Seconde partie de sa conférence : *Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités*

M. R. DE MISES, Professeur à l'Université d'Istanboul : *Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités*

M. J. F. STEFFENSEN, Professeur à l'Université de Copenhague : *Fréquence et probabilité*

M. A. WALD, Dr. Phil., Vienne : *Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes*

Troisième partie : Les sommes et les fonctions de variables aléatoires.

M. H. CRAMER, Professeur à l'Université de Stockholm : *Sur un nouveau théorème-limité de la théorie des probabilités*

M. P. LÉVY, Professeur à l'École Polytechnique, Paris : *L'Arithmétique des lois de probabilité et les produits finis de lois de Poisson*

M. R. DE MISES, Professeur à l'Université d'Istanboul : *Généralisation des théorèmes de limite classiques*

Quatrième partie : Le principe ergodique et les probabilités en chaîne.

M. E. HOPF, Professeur à l'Université de Leipzig : *Statistische Probleme une Ergebnisse in der klassischen Mechanik*

M. B. HOSTINSKY, Professeur à l'Université Masaryk, Brno : *Les fluctuations (changements aléatoires du nombre de points ou objets dans un compartiment)*

1. La présentation mentionne que la conférence « a été accompagnée de la présentation, durant un quart d'heure, d'un film intitulé : Le charriage des pierres par le courant. Ce film a été réalisé au laboratoire d'essais hydrauliques de l'École Polytechnique de Zürich ».

M. O. ONICESCU, Professeur à l'Université de Bucarest : *Aperçu d'une théorie générale des chaînes à liaison complète*

M. V. ROMANOVSKY, Professeur à l'Université de Tachkent : *Sur quelques points nouveaux dans la théorie des chaînes de Markoff*

Cinquième partie : Les fonctions aléatoires

M. S. BERNSTEIN, Professeur à l'Université de Leningrad : *Équations différentielles stochastiques*

M. E. SLUTSKY, Professeur à l'Université de Moscou : *Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes*

M. H. STEINHAUS, Professeur à l'Université de Lwów : *La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique*

Sixième partie : Nouvelles directions de recherches

M. B. DE FINETTI, Actuaire, Trieste : *Sur la condition de « l'équivalence partielle »*

M. A. KOLMOGOROFF, Professeur à l'Université de Moscou : *Sur les fonctions aléatoires (lois de répartition dans un espace fonctionnel) et leurs applications*

M. V. GLIVENKO, Professeur à l'Institut Liebknecht, Moscou : *Sur la loi des grands nombres dans l'espace fonctionnel*

M. J. NEYMANN, Professeur à l'Université de Londres : *L'estimation statistique traitée comme un problème de probabilité classique*

Septième partie : Statistique mathématique

M. E. DODD, Professeur à l'Université du Texas, Austin : *Certains coefficients of regression or trends associated with largest likehood*

M. Ch. JORDAN, Professeur à l'Université de Budapest : *Critique de la corrélation au point de vue des probabilités*

M. N. OBRECHKOFF, Professeur à l'Université de Sofia : *Sur la loi de Poisson, la série de Charlier et les équations aux différences finies du premier ordre à coefficients constants*

Huitième et dernière partie

DE FINETTI, Actuaire, Trieste : *Résumé des conférences et des discussions au cours du colloque de 1937*

Annexe I

Liste des colloques du Centre Belge de Recherches Mathématiques entre 1949 et 1961.

1. Colloque de géométrie algébrique tenu à Liège les 19, 20 et 21 Décembre 1949.
2. Colloque de topologie (espaces fibrés) tenu à Bruxelles du 5 au 8 Juin 1950.
3. Colloque de géométrie différentielle tenu à Louvain du 11 au 14 Avril 1951.
4. Deuxième colloque de géométrie algébrique tenu à Liège les 9, 10, 11 et 12 Juin 1952.
5. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables tenu à Bruxelles du 11 au 14 Mars 1953.
6. Premier colloque sur les équations aux dérivées partielles tenu à Louvain du 17 au 19 décembre 1953. 1954.
7. Second colloque sur les équations aux dérivés partielles tenu à Bruxelles du 24 au 26 Mai 1954. 1955.
8. Colloque sur l'analyse statistique tenu à Bruxelles les 15, 16 et 17 décembre 1954. 1955.
9. Colloque sur les questions de réalité en géométrie tenu à Liège du 23 au 26 Mai 1955. 1956.
10. Colloque sur la théorie des nombres tenu à Bruxelles les 19, 20 et 21 décembre 1955.
11. Colloque de topologie algébrique, tenu à Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956.
12. Colloque d'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956.
13. Colloque sur la théorie des suites, tenu à Bruxelles du 18 au 20 décembre 1957.
14. Colloque de géométrie différentielle globale, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1958.
15. Colloque sur la théorie de la relativité, tenu à Bruxelles les 19 et 20 juin 1959.
16. Troisième colloque de géométrie algébrique, tenu à Bruxelles du 17 au 19 décembre 1959.
17. . ...
18. Colloque sur l'analyse numérique, tenu à Mons, les 22, 23 et 24 Mars 1961.
19. Deuxième colloque de géométrie différentielle. Liège, 19, 20, 21 Décembre 1961

Annexe J

Brochure pour l'organisation de colloques internationaux du C.N.R.S.

Cette brochure provient des Archives de l'Institut Élie Cartan, Nancy : Lettre du 22 juillet 1955 du CNRS accompagnant les règlements des Colloques internationaux du CNRS, IEC1, 5504.

3304

Ministère de l'Education Nationale

Centre National de la Recherche Scientifique

13, Quai Anatole France, Paris (VII^e)
Tél: Invalides 45-95

5ème Bureau
HL. 8.141

République Française

Paris, le 22 JUIL 1955 19

Le Chef du 5ème Bureau

à

Monsieur J. DELSARTE
Doyen de la Faculté des Sciences
NANCY (M & M)

Monsieur le Doyen,

Vous avez du, ou vous allez recevoir la réponse de M. DUPOUY à votre proposition de Colloque.

Je vous envoie ci-joint une notice de renseignements pratique pour l'organisation et le règlement des Colloques Internationaux du C.N.R.S. et suis à votre entière disposition pour vous fournir toutes précisions dont vous pourriez avoir besoin.

Je vous prie d'agréer, Monsieur le Doyen, l'expression de mes sentiments respectueux et dévoués.

Pour le Chef du 5ème Bureau

Viala

H. VIALA

Répondu le 3/IX/55
Rend vous le 9/IX

P.J. : 1 notice.

5505

5.5?.166/ LC

CENTRE NATIONAL de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE

RENSEIGNEMENTS PRATIQUES
pour la préparation et le règlement
des COLLOQUES INTERNATIONAUX
organisés par le C.N.R.S.
avec l'appui de la Fondation Rockefeller.

- SOMMAIRE -

- ANNEXES -

Modèles

-:-:-:-:-:-:-

5.53.153.MLO

Paris, le 15 avril 1953.

CENTRE NATIONAL
de la
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
13, Quai Anatole France
PARIS VIIe

5e Bureau

RENSEIGNEMENTS PRATIQUES
pour la préparation et le règlement
des COLLOQUES INTERNATIONAUX
organisés par le C.N.R.S. avec l'appui de la Fondation ROCKEFELLER

-:-:-:-:-:-:-:-:-

La responsabilité d'un Colloque International du C.N.R.S. est confiée par le Directeur du C.N.R.S. à un organisateur qui désignera, en général, un trésorier pour l'assister dans l'établissement des comptes et la manipulation des fonds.

De plus, s'il est en province, l'organisateur aura intérêt à s'assurer le concours d'un correspondant parisien, avec lequel il partagera les soins d'organisation, ou à qui il confiera l'exécution de certaines démarches.

Au C.N.R.S., l'organisateur trouvera tous renseignements dont il aura besoin auprès des 3e et 5e Bureaux ; le 3e Bureau 2e section assure principalement l'attribution des crédits et le règlement des dépenses C.N.R.S. (voir paragraphe II), ainsi que la publication des résultats ; le 5e Bureau est plus spécialement chargé de la préparation du Colloque et de l'attribution des fonds ROCKEFELLER, dont la gestion est assurée par le Secrétariat du Directeur.

I - INVITATIONS, PROGRAMME, COMMUNICATIONS

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

La liste des invités français et étrangers est proposée par l'organisateur au Directeur du C.N.R.S., avec le programme succinct et la date approximative de la réunion : leur nombre sera en général de 7 à 8 étrangers et autant de français.

L'organisateur, sans engager formellement ni lui, ni le C.N.R.S., sollicite l'acceptation de principe des personnes dont le nom a été retenu; il recueille leurs suggestions, s'informe du titre éventuel de leur communication et les prévient, que si cette dernière est en langue étrangère elle sera traduite pour la publication qui est faite exclusivement en français. (Voir V. Publications.)

La liste définitive ainsi établie par l'organisateur est arrêtée par le Directeur du C.N.R.S. ; et les invités reçoivent, par les soins du C.N.R.S. (5e Bureau), une invitation officielle signée de son Directeur (genre modèle N° 1) : le double de cette invitation, destiné au service des missions (3e Bureau 2e section), permet à celui-ci d'établir les ordres de mission autorisant le remboursement de leurs frais de déplacement aux invités français.

...

5.53.153.MLO - 2 -

FRAIS DE VOYAGE ET DE SEJOUR

INVITES ETRANGERS :

Les frais de séjour leur sont remboursés à leur arrivée en France par le Trésorier du Colloque, à raison de 3.000 francs par jour pour une durée égale en principe à celle du Colloque, augmentée de deux jours, et ne dépassant pas 10 jours.

Les frais de voyage, des participants venant de pays autres que l'Amérique du Nord, suivant la demande exprimée par les intéressés sur l'imprimé joint à la lettre d'invitation officielle (modèle N°2), sont remboursés :

- soit en francs français par le Trésorier pendant le Colloque,
- soit en monnaie de leur pays, à leur retour, par la Fondation ROCKEFELLER, service de Paris.

La copie des desiderata parvenus au C.N.R.S. est transmise immédiatement à l'organisateur et éventuellement à son correspondant à Paris.

Les voyages des Américains sont organisés et payés directement à New-York par Madame BERNHEIM, Secrétaire Générale du Bureau du C.N.R.S. 934 Fifth Avenue, New-York, N.Y. 21, en liaison avec la Fondation ROCKEFELLER.

Reçus : Des imprimés "reçus" sont préparés à cet effet par le C.N.R.S. et envoyés au Trésorier avant le Colloque, (modèle N° 3) : l'intéressé est invité à remplir et à signer deux exemplaires de ces reçus et à y joindre la note qu'il aura demandée au service chargé de l'établissement de son billet, suivant les indications de l'imprimé dont il est question ci-dessus (modèle N° 2).

INVITES FRANCAIS :

Les frais de voyage et de séjour sont remboursés suivant le tarif en vigueur sur remise d'un état rempli en deux exemplaires par l'intéressé (cf. imprimé N° 4) qui est remis au C.N.R.S. 5e Bureau par le Trésorier du Colloque.

PROGRAMME

Dès que les participants ont fait connaître à l'organsiateur le titre du sujet qu'ils ont l'intention de traiter, ce dernier établit un programme qui peut être provisoire (prévoyant la répartition par séances ainsi que la durée approximative des communications et des discussions) qui est envoyé à tous les participants, quelques exemplaires étant adressés au C.N.R.S. (5e Bureau).

...

COMMUNICATIONS

Chaque invité officiel doit, en général, présenter une communication en français ou en anglais. L'expérience a montré qu'il était prudent de limiter l'importance des communications, par exemple à l'équivalent d'un texte de 8 pages dactylographiées, simple interligne.

L'organisateur demandera à ce que ces textes accompagnés d'un court résumé lui parviennent suffisamment à temps pour permettre leur reproduction ronéotypée et leur distribution aux participants avant le colloque : cette distribution a pour but de réduire le temps consacré aux exposés et d'accroître corrélativement celui réservé aux discussions dont l'importance a été reconnue primordiale.

Cette reproduction, assurée par le C.N.R.S. (5e Bureau) ou par le personnel du laboratoire qui prête son concours pour l'organisation du Colloque (voir plus loin ORGANISATION PRATIQUE, Secrétariat), ne peut comporter que des schémas très simples : les figures seront projetées au cours des séances, et reproduites ultérieurement dans la publication (voir page 7). Dans le cas où il peut être décidé à l'avance que la publication des résultats (chapitre V, page 7) sera faite dans un périodique, les épreuves sur placard sont susceptibles de remplacer avantageusement cette reproduction.

Une couverture, destinée à grouper ces textes, peut généralement être imprimée sans frais par les soins du C.N.R.S. si l'organisateur le désire (cf. Modèle N°5).

Chaque communication est, en réunion, l'objet d'un rapide exposé verbal suivi d'une discussion dont le texte doit être demandé sur le champ aux auteurs, en vue de la publication ultérieure du Colloque (par exemple, Modèle N°6).

Dans le cas où les exposés n'auraient pu être fournis à temps ils sont remplacés par des résumés de 2 ou 3 pages établis par les auteurs, puis reproduits et distribués dans les conditions prévues ci-dessus pour les textes eux-mêmes.

PRESENCE AUX SEANCES

Parmi les personnes présentes aux séances de travail, on distingue en général trois groupes qui peuvent être plus ou moins nets suivant la nature du sujet traité :

1°) Participants : Invités officiellement par le Directeur du C.N.R.S. ils présentent en principe une communication, et prennent part à toutes les discussions. Seuls, ils peuvent être dédommagés de leurs frais de déplacement et de séjour.

2°) Assistants : Ayant reçu de l'organisateur du Colloque une carte d'invitation individuelle, ainsi que les textes des communications, ils peuvent demander la parole au Président de séance dans la limite du temps disponible. Ils ne reçoivent aucune indemnité et, sauf exception, ne sont pas invités au dîner qui, d'habitude, clôture le Colloque.

2°) De jeunes chercheurs et étudiants déjà spécialisés peuvent être engagés à entendre les exposés ; mais au cas où ils souhaiteraient demander la parole, ils sont tenus à en parler au Président avant la séance, ce dernier se réservant de la leur donner suivant les possibilités.

...

5.5 .153.MLO - 4 -

PUBLICITE

Des affiches peuvent être apposées dans les Universités ; mais l'affichage est, en général, avantageusement remplacé par une invitation-programme ou un carton adressé aux assistants et auditeurs.

Le 5e Bureau du C.N.R.S. envoie aux Bureaux de NEW-YORK, de LONDRES, et aux RELATIONS CULTURELLES la liste des invités et des communications, ainsi qu'à tout autre organisme spécialement désigné par l'organisateur.

II - PREVISIONS DE DEPENSES
-:-:-:-:-:-

Il est prévu pour chaque colloque :

1°) Un crédit sur les fonds ROCKEFELLER :

a) pour les frais de voyage et de séjour des étrangers,
b) pour certains frais de réception et d'organisation (cf. imprimé N° 9) dont l'organisateur devra donner un état détaillé pour justification.

2°) Un crédit sur les fonds du C.N.R.S. :

a) pour les frais de voyage et de séjour des français,
b) pour les frais de réception et de secrétariat qui devront tous être justifiés par une facture en bonne et dûe forme (cf. imprimé N° 8).

Lorsque la liste des invités est arrêtée, un budget prévisionnel des dépenses est établi par l'organisateur sur les indications fournies par le C.N.R.S. (3e et 5e Bureaux), et soumis à l'approbation du Directeur du C.N.R.S. en même temps que les invitations à signer.

DEMANDE DE CREDITS

Un mois au moins avant le Colloque, l'organisateur adresse au Directeur du C.N.R.S. (5e Bureau) trois demandes distinctes de crédit (cf. modèle N° 9) précisant le numéro du compte (autant que possible de chèque postal) qu'il affecte à la Trésorerie du Colloque (voir III-Secrétariat).

5.53.153.ML0 - 5 -

III - ORGANISATION PRATIQUE

-:-:-:-:-

Voyage des congressistes

Si le n̶ombre des congressistes ayant à se déplacer sur le territoire français est de 20 au moins, une réduction sur le trajet en chemin de fer sera demandée à la S.N.C.F. par le C.N.R.S.

Accueil des étrangers à leur arrivée

Les dates et heures d'arrivée seront communiquées à l'organisateur à mesure que les précisions parviendront au C.N.R.S. en réponse à l'envoi de l'imprimé N° 2 : l'organisateur (et, dans le cas où le Colloque a lieu en province, son correspondant à Paris pour les étrangers qui ont l'intention de s'y arrêter) leur réserve des chambres si les étrangers l'ont demandé, et au besoin, assure leur accueil. Les chambres sont à la charge des participants qui en règlent eux-mêmes le montant.

Réceptions privées

Suivant leurs possibilités personnelles, les organisateurs et leurs collègues peuvent organiser des réceptions privées pour faciliter les échanges de vues après les séances de travail.

Ces réunions privées gardent un caractère très simple ; une somme de [illegible] à 40.000 francs maximum est réservée à cet effet sur les crédits Rockefeller (cf. Modèle N° 9).

Thés

Simples détentes pendant les séances de travail d'après-midi.

Dîner

La liste des invitations, qui sont faites au nom du Directeur du C.N.R.S., doit être soumise à ce dernier : elle comprend les participants et un certain nombre de personnalités es-qualité et les assistants étrangers avec éventuellement leurs femmes. D'autres personnes peuvent être admises au dîner en remboursant leur quote part à l'organisateur. Si les crédits le permettent, une visite de laboratoires ou d'installations sur le terrain peut être envisagée.

Secrétariat

Ainsi qu'il est dit plus haut, il va de soi que le personnel du laboratoire intéressé participe bénévolement à l'organisation du Colloque. Toutefois, suivant les cas, une légère indemnité sous forme d'heures supplémentaires pourra être attribuée à certains employés (dactylographes, gardiens de bureau) et payée en principe sur les fonds de la Fondation Rockefeller.

Au cas où la reproduction de textes est exécutée par les soins de l'organisateur ou doit nécessiter l'intervention d'un spécialiste (dessins, figures, formules spéciales), l'organisateur établira et soumettra à l'approbation du C.N.R.S. un devis aussi détaillé que possible comportant, d'une part une demande de crédits matériels pour les fournitures, d'autre part une demande de crédits de vacation pour la rétribution du personnel (cf. modèle N° 9) : les vacations ne peuvent pas être attribuées à du personnel rétribué normalement par le C.N.R.S.

...

5.53.153.MLO - 6 -

IV - REGLEMENT APRES LE COLLOQUE
-:-:-:-:-:-:-

-1- Dès la fin du Colloque, l'organisateur fait parvenir au C.N.R.S. (5e Bureau) les pièces nécessaires au remboursement de frais des participants, c'est à dire :

a) - [illegible]r les étrangers :

La liste des demandes de remboursement en monnaie de leur pays, en y joignant un exemplaire du reçu signé par l'intéressé, et sur lequel celui-ci aura indiqué sa demande (modèle N° 3) (le deuxième reçu est à garder par le Trésorier et sera envoyé par lui au C.N.R.S. 5e Bureau comme justification de ses dépenses, voir plus loin).

b) - Pour les français :

- Le relevé des états de remboursement de frais (modèle N° 4) rempli et signé en deux exemplaires par les intéressés.
- Les mémoires, en trois exemplaires, (modèle N° 7) établis par les bénéficiaires de vacations.

-2- Quand il a payé toutes ses factures, l'organisateur adresse au C.N.R.S. (5e Bureau) la justification de ses dépenses en proposant leur répartition entre celles effectuées sur les crédits de la Fondation Rockefeller et celles effectuées sur les crédits du C.N.R.S.

Les dépenses Rockefeller comprennent :

- le remboursement des frais de séjour aux étrangers,
- le remboursement des frais de voyage payés en francs français,
- celui de certains frais de réception et d'organisation, en particulier ceux pour lesquels des factures règlementaires ne peuvent être obtenues facilement (pourboires, taxis) et ceux qui se rapportent plus directement aux dépenses faites pour les étrangers : participation au dîner de leurs épouses ou de notabilités étrangères non invitées au Colloque (industriels étrnagers, attachés militaires, etc...), réceptions privées [illegible] (voir III), etc...

Les justifications des deux premiers sont fournies par l'envoi du deuxième exemplaire des reçus signés par les participants étrangers.

Les justifications des seconds sont données sous une forme rappelant autant que possible celle (factures, reçus) prévue par les règles de comptabilité.

La justification des dépenses C.N.R.S. sera donnée par la production en deux exemplaires de factures certifiées, suivant les règles de la comptabilité publique (modèle N° 8) pour les fournitures.

-3- Ces justifications feront ressortir une différence en plus ou en moins entre les sommes réellement dépensées et les crédits qui auront été alloués avant le Colloque. Les remboursements correspondants seront effectués séparément pour les comptes Rockefeller d'une part, et pour les comptes C.N.R.S. d'autre part, suivant les instructions que l'organisateur recevra du C.N.R.S. après l'envoi de ces justifications.

5.53.153.MLO - 7 -

V - RAPPORT - PUBLICATION
-:-:-:-:-:-

A l'issue du Colloque, l'organisateur adresse au Directeur du C.N.R.S. un rapport, précisant les noms des participants et donnant tous renseignements qu'il juge intéressants sur la marche et les résultats de la réunion : il y joint éventuellement les remarques et suggestions qu'il y aura recueillies.

Tout ou partie de ce rapport sert souvent d'introduction à la publication dont il va être question.

-:-:-:-

Par les soins du C.N.R.S., les résultats du Colloque font en principe l'objet d'une publication qui rassemble les textes des communications et des discussions, précédés d'une introduction résumant l'allure du Colloque et donnant la liste des participants, et suivis d'une table des matières.

Tous ces éléments sont préparés par l'organisateur qui assure en outre la traduction en français des communications présentées en langue étrangère, et la rédaction d'un résumé précédant chaque communication. Il effectue à cet effet toutes démarches utiles auprès des participants, qu'il a déjà prévenus au moment où il les a sollicités pour la première fois (PartieI - 2e alinéa).

L'ensemble est adressé par lui au C.N.R.S. (5e Bureau) avec une proposition pour la publication : parution dans un périodique qui en assure la diffusion, ou publication du C.N.R.S.Il y joint son estimation du tirage à adopter : la parution dans un périodique implique le brochage sous une couverture de la collection "Colloques Internationaux du C.N.R.S." d'un certain nombre d'exemplaires.

Les devis de la dépense entraînée par le ou les modes de publication proposés sont établis par les soins du C.N.R.S. 3e Bureau qui soumet la question à la décision du Directeur. L'exécution est confiée au Chef du Service des Publications du C.N.R.S., 45 rue d'Ulm, Paris (5e) avec qui l'organisateur entre alors en rapport, en particulier pour la correction des épreuves.

Les auteurs des communications reçoivent à titre gratuit, par les soins de ce service, 2 exemplaires de l'ensemble du Colloque (couverture C.N.R.S.) et 50 exemplaires de leur communication comme tirés à part. Tous les autres exemplaires, sauf ceux du service de Presse sont payants, le prix étant établi par la Direction du C.N.R.S. (3e Bureau).

-:-:-:-:-

HL.5.54.195

CENTRE NATIONAL
de la
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
13, Quai Anatole France
PARIS VII°
5è Bureau

Modèle N° 1

Le Directeur du Centre National
de la Recherche Scientifique

à

Mon Cher Collègue,

Le Centre National de la Recherche Scientifique organise, avec l'appui que lui apporte la Fondation ROCKEFELLER, un certain nombre de Colloques entre savants français et étrangers qui se sont occupés d'un même sujet scientifique.

Monsieur vous a déjà entretenu de celui qu'il prépare en collaboration avec Messieurs sur :

et qui aura lieu à du au

J'ai l'honneur de vous inviter officiellement à participer à cette réunion et je suis très heureux de savoir par M. que vous avez bien voulu accepter d'y présenter un exposé.

L'ensemble des textes des communications sera reproduit et adressé aux participants afin de leur permettre d'en prendre connaissance avant le Colloque : pour que ce travail puisse être effectué en temps utile je vous serais reconnaissant, si cela vous était possible, de me faire parvenir au plus tôt, et en tous cas avant le , le texte de votre communication (limité en principe à 8 pages dactylographiées, simple interligne).

POUR LES AMERICAINS :

En ce qui concerne vos frais de voyage, vous voudrez bien vous mettre en rapport avec Mme BERNHEIM, Secrétaire Générale du Bureau Scientifique de NEW-YORK, 972, fifth Avenue, NEW-YORK 21, N.Y., REgent 7-9700 : elle fera le nécessaire pour organiser votre voyage et en effectuer le paiement dans les conditions prévues par la Fondation ROCKEFELLER.

HL.5.54.195

POUR LES ETRANGERS POUVANT VENIR EN BATEAU.

Il nous est possible de vous rembourser les frais de voyage en avion, ou en bateau et chemins de fer au tarif de la 1ère classe, comme il est prévu pour les professeurs de nos Facultés (si vous utilisez un train de luxe ou un wagon-lit, le supplément serait à votre charge).

POUR LES ETRANGERS POUVANT VENIR EN CHEMINS DE FER :

Il nous est possible de vous rembourser les frais de voyage en avion, ou en chemins de fer au tarif de la 1ère classe, ou en wagon-lit de 2ème classe, comme il est prévu pour les professeurs de nos Facultés (si vous utilisez un train de luxe ou un wagon-lit de 1ère classe, le supplément serait à votre charge).

POUR TOUS LES ETRANGERS SAUF LES AMERICAINS :

Suivant le désir que vous voudrez bien exprimer en nous renvoyant l'imprimé ci-joint, ce règlement sera effectué :

- soit en devises de votre pays à votre retour en par les soins de la Fondation ROCKEFELLER;

- soit en Francs français par le Trésorier du Colloque au cours de votre séjour en France.

POUR TOUS LES ETRANGERS :

D'autre part, une indemnité pour frais de séjour vous sera remise dès votre arrivée à à raison de 3.000 frs par jour pour une durée maximum de 8 jours.

POUR LES FRANCAIS DE PROVINCE :

Pour le remboursement de vos frais de voyage et de séjour vous voudrez bien remplir en double exemplaires les états de remboursement règlementaires qui vous seront présentés par le Trésorier du Colloque, et les lui remettre en même temps que l'ordre de mission que vous aurez reçu et complété.

Veuillez agréer, Mon Cher Collègue, l'expression de mes sentiments les plus distingués.

G. DUPOUY
Membre de l'Institut
(aux étrangers seulement)

POUR TOUS LES ETRANGERS, SAUF LES AMERICAINS :

P.J. : 2 feuilles de renseignements que vous voudrez bien nous retourner avec votre réponse, S.V.P.

S.53.167/.LO

Modèle N° 2

R E N S E I G N E M E N T S
=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=

à envoyer le plus tôt possible

M. le DIRECTEUR DU CENTRE NATIONAL de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE

5ème Bureau - Service des Colloques
13 Quai Anatole France - PARIS - (VII)

I°)- NOMS & PRENOMS . . . .
Titre ou qualité . . . .

2°)- ADRESSE précise à laquelle vous désirez que vous soient envoyées toutes communications.

. . . .

. . . .

. . . .

Eventuellement :
Adresse téléphonique . . . .

N° de téléphone . . . .

3°)- **POUR** LE REMBOURSEMENT DE VOS FRAIS DE VOYAGE :
désirez-vous qu'il vous soit effectué : (I)

a) en Francs français pendant le Colloque par son Trésorier ;

b) en devises étrangères par les soins de la Fondation Rockefeller - Bureau de PARIS, après votre retour.

De toutes manières, vous voudrez bien demander au service, qui vous délivrera votre ticket de transport, un reçu de la somme que vous aurez versée.

4°)- DESIREZ-VOUS QU'UNE CHAMBRE SOIT RETENUE A L'HOTEL ?

. . . .

Quel genre de chambre ?

Pour quelle date ?

(I) Rayer la mention inutile.

5/53/2I9/MC

Modèle n° 8

F.A C T U R E

(Raison sociale du fournisseur)

M ....
Adresse ....
Registre du Commerce n° ..

DOIT M. (Nom, titre et adresse du Trésorier du Colloque)....
....
....
pour le Colloque ....
....

DESIGNATION DES FOURNITURES /

....pièces à .... ; ....
....
....
....

Total = ...

Certifié sincère et véritable le présent mémoire se montant à la somme de .... (en lettres)
....

Date, signature et cachet du Fournisseur :
....
....

Certifiées exactes les fournitures ci-dessus mentionnées
Le Trésorier du Colloque
....

Note importante : Les factures doivent être établies à l'encre.
Elles sont exemptes des taxes locales et des timbres de quittance.
Si elles sont payées comptant, le fournisseur doit l'indiquer.
- - - - - - - - - - par chèque bancaire, le Trésorier doit indiquer le n° du chèque et l'adresse de la banque.
- - - - - - - - - - par chèque postal ou mandat, l'indiquer et joindre le talon.

5.53.168/ML0 — Modèle N° 9

MODELE POUR LES DEMANDES DE CREDIT
(Faire 3 demandes distinctes)

-I- DEMANDE DE CREDIT SUR FONDS ROCKEFELLER

J'ai l'honneur de solliciter sur les crédits Rockefeller une avance de Francs pour le Colloque N°

J'envisage les dépenses suivantes :

1° - Frais de voyage des étrangers à rembourser en francs français ....
- Frais de séjour ....
2° - Frais de réception et d'organisation
a) - Correspondance - Téléphone - Télégrammes
b) - Taxis - pourboires ....
c) - Réceptions privées ....
d) - Frais divers d'organisation (infacturables).

Somme à verser au compte N° — Total de l'avance demandée

L'organisateur du Colloque
-:-:-:-:-:-

-II- DEMANDE DE CREDITS SUR FONDS DU C.N.R.S.

J'ai l'honneur de solliciter sur les crédits du C.N.R.S. une avance de Francs pour le Colloque N°
J'envisage les dépenses suivantes :

1° - Frais de réception et de correspondance
Thés au laboratoire ....
Banquet ....
Timbres, Télégrammes (avec reçus de la poste)
2° - Frais d'organisation
Achat de papier - stencils pour la reproduction des textes ....
Impressions (cartes d'invitations, etc...)

Total de l'avance demandée

SOMME à verser au compte N°

L'organisateur du Colloque
-:-:-:-:-:-

-III- DEMANDE DE CREDITS POUR VACATIONS

J'ai l'honneur de solliciter l'ouverture d'un crédit : de francs destiné à la rémunération du personnel chargé des travaux de secrétariat (Traduction - Dactylographie - reproduction de textes) pour le colloque N° organisé à du au

L'organisateur du Colloque

Annexe K

Programme du colloque d'Analyse Harmonique, Nancy, 1947

Ce document provient des Archives départementales de Meurthe et Moselle, liasse W 1018/96.

CENTRE NATIONAL de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Conférence Scientifique Internationale

sur l'ANALYSE HARMONIQUE

Programme des Conférences

Lundi 16 Juin, 10 heures : Séance d'organisation (Emploi du temps, questions financières).

Lundi 16 Juin, 15 heures : Professeur N. WIENER
" sur la théorie de la prévision statistique et du filtrage des ondes ".

Mardi 17 Juin, 9 H 30 : Conférences bloquées :

Prof. H. CARTAN : Transformations de Fourier dans les groupes abéliens localement compacts " .

Prof. R. GODEMENT : "Analyse harmonique dans les groupes normalement compacts non abéliens ".

Mardi 17 Juin, 15 H. : Prof. T. CARLEMAN : "Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier ".

17 h : Prof. M. PLANCHEREL : "Intégrales de Fourier et fonctions entières ".

Mercredi 18 Juin, 9 H 30 : Prof. A. BEURLING : "Sur le spectre des fonctions ".

Mercredi 18 Juin, 15 H : Prof. J. DELSARTE : "Hypergroupes et moyenne-périodicité ".

Jeudi 19 Juin, 9 H 30 : Prof. L. SCHWARTZ : "Théorie des distributions et transformations de Fourier ".

Jeudi 19 Juin, 15 H. : Conférences bloquées :

Prof. H. BOHR et B. JESSEN :
"Mean Motion and almost periodic functions".

Vendredi 20 Juin, 9 H 30 : Prof. S. MANDELBROJT : "Une inégalité sur les séries asymptotiques ".

Vendredi 20 Juin, 15 H : Prof. A. OSTROWSKI : "La recherche des périodicités cachées ".

17 H : Prof. G. JULIA : "Quelques progrès récents dans la théorie des opérateurs linéaires ".

....

- Suite -

Samedi 21 Juin, 9 H.30 : Prof. J. FAVARD : "Sur l'approximation des fonctions de variable réelle ".

Samedi 21 Juin, 14 H : Conférences bloquées :

Prof. P. LEVY : "L'analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires".

Prof. M. LOEVE : "Fonctions aléatoires, analyse harmonique, application au problème ergodique et aux fonctions modulaires ".

Prof. A. BLANC-LAPIERRE : "Analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires ".

Secrétaires des Conférences : Prof. L. SCHWARTZ et J. DENY .

Un thé sera servi chaque jour à 16 H 30.

Les Conférences ont lieu au Palais de l'Académie, dans les Salons du Rectorat, 13 Place Carnot, NANCY. (2e étage).

L'entrée se trouve sur la face Sud du batiment principal, (à la gauche de l'entrée donnant sur la Place).

CONFERENCE SCIENTIFIQUE INTERNATIONALE

sur l'ANALYSE HARMONIQUE

RENSEIGNEMENTS GÉNÉRAUX

1°) Le Colloque commence le lundi 16 Juin à 10 Heures et se termine le Samedi 21 Juin, au soir. Les Conférences ont lieu, au Palais de l'Académie, 13 Place Carnot, NANCY, au second étage ; entrée par la face Sud.

2°) Les participants au Colloque ont la possibilité de prendre part, chaque jour, à un déjeûner commun, qui aura lieu, au Restaurant du GRAND VATEL, 5 rue St-Dizier, à 12 H 30. (prix : 200 Frs, service et boisson, en sus). Exceptionnellement, le déjeûner du lundi 16 Juin aura lieu à l'Hôtel de l'Univers, 2 rue des Carmes.

3°) Un thé sera servi aux participants, chaque jour, à 16 H 30, dans la Salle des Conférences.

4°) Festivités :

a) un banquet est offert aux participants, le mercredi 18 Juin à 20 Heures, au Restaurant WALTER, Place Stanislas.

b) une soirée leur est offerte le vendredi 20 Juin, à 21 H 30, chez M. le Doyen DELSARTE, 4 rue de l'Oratoire.

c) un thé leur est offert par Mr le Recteur DONZELOT, le samedi 21 Juin, à 17 heures, au 17 de la Place Carnot.

5°) Indications complémentaires :

En dehors des conférences, réunions et repas prévus, les participants au Colloque pourront être intéressés par la visite de la Ville de NANCY, qui présente un intérêt historique considérable.

Visites recommandées : Place Stanislas.- Place Carrière -
La Ville Vieille (Grand'rue) -
Le Palais Ducal (Grand-rue) -
Le Musée Lorrain (Grand'rue, ouvert de 10 h à 17 h)
Le Musée de Peinture (Place Stanislas)

Restaurants recommandés : WALTER - Place Stanislas (300Frs)
THIERS - Place de la Gare (300Frs)
GRAND VATEL - 5 rue St-Dizier (200 Fr)
UNIVERS - 2 rue des Carmes (200 Fr)

Adresses et n^{os} de téléphone utiles :

Grand Hôtel - Place Stanislas - 64-28
Palais de l'Académie (Salles du Colloque) - 63-56
Professeur MANDELBROJT : Président du Colloque :
4 rue de l'Oratoire - 89-59
Professeur DELSARTE : Doyen de la Faculté des Sciences
4 rue de l'Oratoire - 89-59
Professeur L. SCHWARTZ : 26 rue St-Michel - 70-76

-=-=-=-=-=-

Annexe L

La démonstration du théorème des noyaux d'Hörmander.

Issue de mon mémoire de Master 2 [Paumier 2009].

La preuve d'Hörmander

Il s'agit d'une autre preuve assez simple de ce théorème des noyaux, qui ne fait pas du tout intervenir de topologie (ce qui est une caractéristique du livre d'Hörmander). On peut citer ici les raisons qu'invoque Hörmander pour avoir introduit dans son livre [Hörmander 1983] (p.53) de nombreux résultats sur les distributions sans insister sur la topologie :

> The topology in $\mathcal{C}_0^\infty(X)$ defined by the semi-norms in the right-hand side of (2.1.3) is the inductive limit of the topology in $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ when the compact set K increases to X, so it is a $\mathcal{LF}$ topology (see [**dieudonneschwartz**]). We have avoided this terminology in order not to encourage the once common miscunception that familiarity with $\mathcal{LF}$ spaces is esential for the understanding of distribution theory.

Le principe de la preuve est un peu similaire à celui de la preuve de Gask, à savoir qu'on construit le noyau à la main. Ici, il s'agit de définir une fonction K_ε qui nous donnera le noyau quand on passera à la limite $\varepsilon \to 0$. Dans le cas de Gask, on décompose en série de Fourier et on définit le noyau sur les coefficients de Fourier.

Je donne ici la preuve détaillée d'Hörmander. [Hörmander 1983]

Quelques résultats préliminaires d'analyse fonctionnelle

Les énoncés sont ceux de Rudin [Rudin 1973]. Voici un énoncé du théorème de Banach-Steinhaus, ainsi que l'un de ses corollaires sur les formes bilinéaires sur des espaces de Fréchet.

Théorème L.0.3. *Si Γ est une famille d'applications linéaires continues d'un espace de Fréchet X dans un espace vectoriel topologique Y, et si les ensembles*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

sont bornés dans Y, pour tout $x \in X$, alors Γ est équicontinue.

Corollaire L.0.4. *Soit $B : X \times Y \to Z$ une application bilinéaire séparément continue. Supposons que X est un espace de Fréchet, et que X et Y sont des espaces vectoriels topologiques. Alors, $B(x_n, y_n) \to B(x_0, y_0)$ quand $x_n \to x_0$ dans X et $y_n \to y_0$ dans Y. Si Y est métrisable, il s'ensuit que B est continue.*

C'est en particulier le cas lorsque Y est aussi un espace de Fréchet.

Quelques résultats préliminaires provenant de la présentation du livre d'Hörmander

Voici tout d'abord un résultat de "dépendance par rapport aux paramètres" :

Théorème L.0.5. *Soit* $\varphi(x,y) \in C^\infty(X \times Y)$, Y *ouvert de* $\mathbb{R}^m$. *On suppose* $\exists K$ *compact* $\subset X$ *tel que* $\varphi(x,y) = 0$ *quand* $x \notin K$. *Alors* $y \mapsto < u, \varphi(.,y) >$ *est une fonction* C^∞ *quand* $u \in \mathrm{D}'(X)$ *et on a :*

$$\partial_y^\alpha < u, \varphi(.,y) > = < u, \partial_y^\alpha \varphi(.,y) >$$

La présentation de la théorie des distributions d'Hörmander a ceci de particulier qu'elle définit le produit de convolution avant le produit tensoriel. Je vais donc rappeler ici quelques uns des résultats qui seront utiles dans la suite pour la démonstration du théorème des noyaux de Schwartz.

Définition L.0.4. *On définit le produit de convolution entre une distribution* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *et une fonction* $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{R}^n)$ *par :*

$$(u * \varphi)(x) := < u, \varphi(x - .) >$$

Voici un résultat d'approximation dont on va se servir dans la suite :

Théorème L.0.6. *Soit* $0 \leq \varphi \in C_0^\infty$, $\int \varphi dx = 1$, $\varepsilon > 0$. *Soit* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *On note* $u_\varepsilon = \varepsilon^{-n} < u, \varphi(\frac{x}{\varepsilon}) > = u * \varphi_\varepsilon$, *où* $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$.

On a alors $u_\varepsilon \to u$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Le théorème des noyaux

A toute fonction $\mathrm{K} \in \mathrm{C}(X_1 \times X_2)$, on peut associer un opérateur intégral $\mathcal{K} : \mathrm{C}_0(X_2) \to \mathrm{C}(X_1)$ défini par la formule :

$$(\mathcal{K}\varphi)(x_1) = \int_{X_2} \mathrm{K}(x_1,x_2)\varphi_2(x_2)dx_2, \qquad \varphi_2 \in \mathrm{C}_0(X_2), \quad x_1 \in X_1 \tag{L.1}$$

On va montrer qu'on peut étendre cette définition à des distributions arbitraires $\mathrm{K} \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$, si on se restreint à des fonctions $\varphi_2 \in \mathrm{C}_0^\infty(X_2)$ et qu'on autorise $\mathcal{K}\varphi_2$ à être une distribution. On commence par remarquer que si $\mathrm{K} \in \mathrm{C}(X_1 \times X_2)$, on a :

$$< \mathcal{K}\varphi_2, \varphi_1 >_{\mathrm{C}(X_1),\mathrm{C}_0^\infty(X_1)} = < \mathrm{K}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >_{\mathrm{C}(X_1 \times X_2),\mathrm{C}_0^\infty(X_1 \times X_2)} \tag{L.2}$$

Théorème L.0.7. *Soit* $\mathrm{K} \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$. *Alors :*

$$< \mathcal{K}\varphi_2, \varphi_1 >_{\mathcal{D}'(X_1),\mathrm{C}_0^\infty(X_1)} = < \mathrm{K}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >_{\mathcal{D}'(X_1 \times X_2),\mathrm{C}_0^\infty(X_1 \times X_2)} \tag{L.3}$$

définit une application linéaire $\mathcal{K}$ *de* $\mathrm{C}_0^\infty(X_2)$ *dans* $\mathcal{D}'(X_1)$ *qui est continue au sens où* $\mathcal{K}\varphi_{2,j} \to 0$ *dans* $\mathcal{D}'(X_1)$ *si* $\varphi_{2,j} \to 0$ *dans* $\mathrm{C}_0^\infty(X_2)$. *Réciproquement, à chaque application linéaire* $\mathcal{K}$ *de ce type, on peut associer une unique distribution* $\mathrm{K} \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ *telle que (L.3) est vérifiée.* K *est appelé le* ***noyau*** *de* $\mathcal{K}$.

Preuve.

(Sens direct) Soit $\mathrm{K} \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$. On définit $\mathcal{K}$ sur $\mathrm{C}_0^\infty(X_2)$ par (L.3) :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{K} : \mathrm{C}_0^\infty(X_2) & \to & \mathcal{D}'(X_1) \\ \varphi_2 & \mapsto & (\varphi_1 \mapsto < \mathrm{K}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >) \end{array}$$

Alors $\mathcal{K}$ est linéaire, car K est une distribution sur $X_1 \times X_2$ et $\varphi_2 \mapsto \varphi_1 \otimes \varphi_2$ est linéaire. De plus, $\mathcal{K}\varphi_2$ définit bien une distribution sur X_1. Cela vient de la continuité de l'application $\varphi_1 \mapsto < \mathrm{K}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >$. Enfin, $\mathcal{K}$ est continue. Cela vient cette fois de la continuité de l'application $\varphi_1 \mapsto < \mathrm{K}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >$

(Réciproque)
Unicité. L'unicité [1] se montre de la même manière que l'unicité dans le théorème définissant le produit tensoriel de deux distributions. Le résultat qu'on utilise est le suivant :

Lemme L.0.8. *Si $u \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ est telle que $< u, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >= 0$ pour toutes fonctions $\varphi_1 \in \mathrm{C}_0^\infty(X_1)$ et $\varphi_2 \in \mathrm{C}_0^\infty(X_2)$, alors u est nulle :*

$$< u, \varphi >_{\mathcal{D}'(X_1 \times X_2), \mathcal{D}(X_1 \times X_2)} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(X_1 \times X_2)$$

Ce lemme démontre que pour définir une distribution sur $\mathcal{D}(X_1 \times X_2)$, il suffit de la définir sur $\mathrm{C}_0^\infty(X_1) \otimes \mathrm{C}_0^\infty(X_2)$.

Existence On observe que $\forall K_j \subset X_J$ compacts, la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_0^\infty(K_1) \times \mathcal{C}_0^\infty(K_2) & \to & \mathbb{C} \\ (\varphi_1, \varphi_2) & \mapsto & < \mathcal{K}\varphi_2, \varphi_1 > \end{array}$$

est continue par rapport à φ_1 et φ_2 séparément. Comme on est dans un espace de Fréchet, elle est continue sur $\mathrm{C}_0^\infty(K_1) \times \mathrm{C}_0^\infty(K_2)$. Il existe donc des constantes C et N_j telles que : $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_0^\infty(K_1) \times \mathrm{C}_0^\infty(K_2)$,

$$|< \mathcal{K}\varphi_2, \varphi_1 >| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N_1} \sup | \partial^\alpha \varphi_1 | \sum_{|\beta| \leq N_2} \sup | \partial^\beta \varphi_2 | \tag{L.4}$$

Soit $Y_j \Subset X_j$; on choisit les compacts K_j voisinages de $\overline{Y_j}$ et on définit, pour $(x_1, x_2) \in Y_1 \times Y_2$ et ε petit

$$\mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2) := \varepsilon^{-n_1 - n_2} < \mathcal{K}\psi_2\Big(\frac{x_2 - \cdot}{\varepsilon}\Big), \psi_1\Big(\frac{x_1 - \cdot}{\varepsilon}\Big) > \tag{L.5}$$

où $\psi_j \geq 0$, $\int \psi_j dx_j = 1$, supp $\psi_j \subset B(0,1)$.

On remarque que si on sait déjà que K existe, alors on a $\mathrm{K}_\varepsilon = \mathrm{K} * \psi_\varepsilon$ converge vers K. (En effet, en posant $\psi_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-n_1}\psi_1(\frac{x}{\varepsilon}) \otimes \varepsilon^{-n_2}\psi_2(\frac{y}{\varepsilon})$, on a dans ce cas :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2) & = & < \mathrm{K}, \psi_\varepsilon(x_1 - ., x_2 - .) > \\ & = & \mathrm{K} * \psi_\varepsilon(x_1, x_2) \end{array}$$

On alors, en appliquant le théorème L.0.6, $\mathrm{K}_\varepsilon \to \mathrm{K}$ quand $\varepsilon \to 0$.)

On va donc essayer de montrer que K_ε a une limite dans $\mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ quand ε tend vers 0 et que cette limite vérifie (L.3).

1. On peut aussi montrer l'unicité en montrant la densité de $\mathrm{Vect}(\mathrm{C}_0^\infty(X_1) \otimes \mathrm{C}_0^\infty(X_2))$ dans $\mathrm{C}_0^\infty(X_1 \times X_2)$.

Pour $\varepsilon < d(Y_j, {}^c K_j)$, on a $\mathrm{supp}(\psi_j\big(\frac{x_j - .}{\varepsilon}\big)) \subset K_j$. L'estimation (L.4) nous permet de montrer qu'avec $\mu = N_1 + N_2 + n_1 + n_2$, on a

$$\mid \mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2) \mid \leq C\varepsilon^{-\mu} \tag{L.6}$$

On a en effet

$$\begin{aligned} |\mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2)| &\leq C\varepsilon^{-n_1-n_2} \sum_{|\alpha| \leq N_1} \sup \mid \partial^\alpha \psi_1\Big(\frac{x_1 - .}{\varepsilon}\Big) \mid \sum_{|\beta| \leq N_2} \sup \mid \partial^\beta \mathcal{K}\psi_2\Big(\frac{x_2 - .}{\varepsilon}\Big) \mid \\ &\leq C'\varepsilon^{-n_1-n_2-N_1-N_2} \end{aligned}$$

On va montrer que K_ε admet une limite dans $\mathcal{D}'^{\mu+1}(Y_1 \times Y_2)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Lemme L.0.9. *Soit $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors on a :*

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)) = \sum \frac{\partial}{\partial x_j}((\varepsilon^{-n}\psi_j(x/\varepsilon)), \qquad \psi_j(x) = -x_j\psi(x)$$

En effet, la fonction $(\varepsilon, x) \mapsto \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$ est homogène de degré $-n$. On peut donc lui appliquer l'égalité d'Euler qui nous donne :

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)) + \sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j}((\varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)) = -n\varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$$

Or on a

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial}{\partial x_j}((\varepsilon^{-n}\psi_j(x/\varepsilon)) &= -\sum \frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon^{-n}(x_j/\varepsilon)\psi(x/\varepsilon)) \\ &= -1/\varepsilon\Big(\sum \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon) + \sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j}((\varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon))\Big) \\ &= -1/\varepsilon\Big(n\varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon) + \sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j}((\varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon))\Big) \end{aligned}$$

D'où le lemme.
On applique ce lemme à $(\varepsilon, x) \mapsto \mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2)$ qui est bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$ grâce à (L.4) et au Théorème L.0.5. On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2) = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} L_\varepsilon^\nu(x_1, x_2)$$

où x_ν parcourt toutes les coordonnées de (x_1, x_2) et L_ε^ν est défini en remplaçant ψ_1 ou ψ_2 par leur produit par x_ν dans K_ε.
Par exemple, si x_ν désigne la première variable de x_1, on a :

$$L_\varepsilon^\nu(x_1, x_2) = \varepsilon^{-n_1-n_2} < \mathcal{K}\psi_2\Big(\frac{x_2 - .}{\varepsilon}\Big), -\frac{x_\nu}{\varepsilon}\psi_1\Big(\frac{x_1 - .}{\varepsilon}\Big) >$$

L'inégalité (L.6) est donc vérifiée par L_ε^ν. En réitérant la même méthode, on obtient que

$$\mathrm{K}_\varepsilon^{(j)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j}\mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2)$$

est une somme de dérivées d'ordre j de fonctions ayant une borne du type (L.6), donc $\varepsilon^\mu \mathrm{K}_\varepsilon^{(j)}$ est borné dans $\mathcal{D}'^j(Y_1 \times Y_2)$ pour tout j.

On a en en effet, $\forall\varphi \in \mathcal{C}_0^j$:

$$\begin{aligned}
|< \mathrm{K}_\varepsilon^{(j)}, \varphi >| &= |\sum_\nu < \frac{\partial^j}{\partial x_\nu^j} L_\varepsilon^{\nu,j}, \varphi >| \\
&= |\sum_\nu (-1)^j < L_\varepsilon^{\nu,j}, \frac{\partial^j \varphi}{\partial x_\nu^j} >| \\
&\leq \sum_\nu C\varepsilon^{-\mu} \sup \frac{\partial^j \varphi}{\partial x_\nu^j}
\end{aligned}$$

Pour δ fixé petit et $\varepsilon \to 0$, on écrit la formule de Taylor :

$$\mathrm{K}_\varepsilon = \sum_0^\mu (\varepsilon - \delta)^j \frac{\mathrm{K}_\delta^{(j)}}{j!} + (\varepsilon - \delta)^{\mu+1} \int_0^1 \mathrm{K}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)} \frac{(1-t)^\mu}{\mu!} \mathrm{d}t$$

Le premier terme ne pose pas de problème : en tant que fonction $\mathcal{C}^\infty$, on peut passer à la limite : $\to \sum_0^\mu (-\delta)^j \frac{\mathrm{K}_\delta^{(j)}}{j!}$
Pour le second terme, on va le considérer comme une distribution dans $\mathcal{D}'^{\mu+1}$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\mu+1}(Y_1 \times Y_2)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&< \int_0^1 \mathrm{K}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)} \frac{(1-t)^\mu}{\mu!} \mathrm{d}t, \varphi > \\
&= \iint_{Y_1 \times Y_2} \int_0^1 \mathrm{K}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)}(x_1, x_2) \frac{(1-t)^\mu}{\mu!} \varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}t \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2
\end{aligned}$$

Or on a :

$$(1-t)^\mu \delta^\mu = (\delta(1-t))^\mu \leq (\delta(1-t) + t\varepsilon)^\mu = (\delta + t(\varepsilon - \delta))^\mu$$

D'où

$$(\delta + t(\varepsilon - \delta))^{-\mu} (1-t)^\mu \leq \delta^{-\mu} \tag{L.7}$$

Et donc

$$< \mathrm{K}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)} (1-t)^\mu, \varphi > \leq \sum_\nu C\delta^{-\mu} \sup \frac{\partial^{\mu+1}\varphi}{\partial x_\nu^{\mu+1}}$$

On peut donc intervertir les intégrales par Fubini :

$$\begin{aligned}
&< \int_0^1 \mathrm{K}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)} (1-t)^\mu / \mu! \mathrm{d}t, \varphi > \\
&= \iint_{Y_1 \times Y_2} \int_0^1 \mathrm{K}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)}(x_1, x_2) \frac{(1-t)^\mu}{\mu!} \varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}t \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^1 \iint_{Y_1 \times Y_2} \mathrm{K}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)}(x_1, x_2) \frac{(1-t)^\mu}{\mu!} \varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}t \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^1 < \mathrm{K}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)}, \varphi > \frac{(1-t)^\mu}{\mu!} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On peut enfin passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ en appliquant le théorème de convergence dominée : toujours grâce à (L.7), on obtient :

$$\int_0^1 < \mathrm{K}_{(1-t)\delta}^{(\mu+1)}, \varphi > \frac{(1-t)^\mu}{\mu!}, \mathrm{d}t$$

D'où finalement, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\mu+1}(Y_1 \times Y_2)$, quand $\varepsilon \to 0$, on a :

$$\begin{aligned} < \mathrm{K}_\varepsilon, \varphi > \quad &\to \quad < \mathrm{K}_0, \varphi > \\ &= \quad \sum_0^\mu (\varepsilon - \delta)^j < \frac{\mathrm{K}_\delta^{(j)}}{j!}, \varphi > + (-\delta)^{\mu+1} \int_0^1 < \mathrm{K}_{(1-t)\delta}^{(\mu+1)}, \varphi > \frac{(1-t)^\mu}{\mu!} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

où $\mathrm{K}_0 \in \mathcal{D}'^{\mu+1}(Y_1 \times Y_2)$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que l'on a bien (L.3). Soit donc $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(Y_j)$, on regarde :

$$< \mathrm{K}_\varepsilon, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >= \iint \mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2) \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

En notant $\check{\psi}_{j,\varepsilon}(x_j) = \varepsilon^{-n_j} \psi_j(-x_j/\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} \iint \quad \mathrm{K}_\varepsilon(x_1, x_2) \quad & \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ = \quad & \iint < \mathcal{K}\check{\psi}_{2,\varepsilon}(. - x_2)\varphi_2(x_2), \check{\psi}_{1,\varepsilon}(. - x_1)\varphi_1(x_1) > \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

En remplaçant l'intégrale par une somme de Riemann , on en déduit que l'on peut intervertir l'intégration et les $< >$. On obtient donc :

$$< \mathrm{K}_0, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >=< \mathcal{K}\varphi_2, \varphi_1 > \text{ si } \varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(Y_j)$$

Commes les Y_j sont les sous-ensembles relativement compacts de X_j, cela termine la preuve. $\square$

Annexe M

Énoncés du théorème des noyaux

Année	Auteur	Référence	Enoncé
1950	Schwartz	[Schwartz 1952a]	*Toute transformation linéaire continue de* $(\mathcal{D})_y$ *(muni de la topologie forte) dans* $(\mathcal{D}')_x$ *(muni de la topologie faible) peut être définie par* $f \mapsto K.f$*, où* K *est un noyau déterminé de manière unique.*
1953-54	Schwartz	[Schwartz 1954b]	*Toute application linéaire continue de* $\mathcal{D}_y$ *dans* $\mathcal{D}'_x$ *est définie par un noyau, déterminé de manière unique.* **Rqe :** $\mathcal{E}_x\hat{\otimes}_\pi\mathcal{E}_y$ et $\mathcal{E}_x\hat{\otimes}_\varepsilon\mathcal{E}_y$ ont le même dual. Cela est lié au fait que $\mathcal{E}$ est nucléaire.
1955	Schwartz	[Schwartz 1955b]	*Toute application linéaire continue de* $(\mathcal{D})_y$ *dans* $(\mathcal{D}')_x$ *faible peut être définie comme l'application* $v \mapsto N.v$ *associée à un noyau convenable* N*, déterminé d'une manière unique.*
1956	Ehrenpreis	[Ehrenpreis 1956]	*Soit* $t :_2 \mathcal{D}' \to J$ *qui a* S *associe* L *tel que* S *est un noyau qui représente* L*. Alors* t *est un isomorphisme surjectif.* On munit l'espace des applications linéraires continues $\mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ de la topologie compact-ouvert. Alors cette topologie est la même que celle de ${}_2\mathcal{D}'$.
1957	Schwartz	[Schwartz 1957]	$\mathcal{D}'_{x,y}$ *est identique, algébriquement et topologiquement, à* $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_y) = \mathcal{D}'_x \otimes_\varepsilon \mathcal{D}'_y$
1960	Gask	[Gask 1961]	**Th1** *Pour toute fonctionnelle séparément continue* A *sur* $\mathcal{D}(O_x)\times\mathcal{D}(O_y)$*, il existe une unique distribution* $T \in \mathcal{T}$ *telle que* $(\Lambda T)(f,g) =< T, f(x)g(x) >= A(f,g)\ \forall f,g \in \mathcal{D}(O_x)\times\mathcal{D}(O_y)$ **Th2** *L'application* Λ *est un homéomorphisme linéaire.*
1961	Bogdanowicz	[Bogdanowicz 1961]	*For every bilinear functional* $B(\varphi, y)$ *on the space* $D(\Omega)\times Y$ *which is continuous with respect to each variable separately there exists one and only one linear continuous functional* T *on the space* H *such that* $B(\varphi, y) = T(\varphi.y)$ *for all* $\varphi \in D(\Omega)$ *and* $y \in Y$
1967	Trèves	[Treves 1967]	*On a les isomorphismes canoniques :* $\mathcal{D}'(X\times Y) \simeq \mathcal{D}'(X)\hat{\otimes}\mathcal{D}'(Y) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty_c(Y);\mathcal{D}'(X))$
1983	Hörmander	[Hörmander 1983]	*A chaque application linéaire continue* $\mathcal{K} : \mathrm{C}^\infty_0(X_2) \to \mathcal{D}'(X_1)$*, on peut associer une unique distribution* $\mathrm{K} \in \mathcal{D}'(X_1\times X_2)$ *telle que* $< \mathcal{K}\varphi_2, \varphi_1 >=< \mathrm{K}, \varphi_1\otimes\varphi_2 >$.K est appelé le **noyau** de $\mathcal{K}$.

Annexe N

Liste de séminaires publiés auxquels Schwartz participe.

Les cases les plus foncées désignent les années pendant lesquelles Schwartz a donné un ou plusieurs exposés ; le chiffre dans la case en indique alors le nombre. Les autres cases colorées donnent les années d'existence du séminaire. Ces séminaires sont numérisés et accessibles sur Numdam http ://www.numdam.org (Consultée le 01/09/2013).

Année	Séminaire Bourbaki	Séminaire Cartan	Séminaire Schwartz	Séminaire Leray	Séminaire Analyse fonctionnelle [1]	Séminaire EDP [2]	Séminaire Probabilités [3]
1948-49	2						
1949-50	2						
1950-51	1						
1951-52	1						
1952-53							
1953-54	1		24/24				
1954-55			14/17				
1955-56			7/7				
1956-57							
1957-58	1						
1958-59							
1959-60							
1960-61							
1961-62	1						
1962-63							
1963-64	1	3					
1964-65							
1965-66							

1. Ce séminaire est dit « Maurey-Schwartz »

2. Séminaire d'Équations aux Dérivées Partielles. La première année de ce séminaire, 1969-70, est « le séminaire rouge », qui est décrit dans [Maurey 2003]. Il devient ensuite le séminaire EDP, dit « Goulaouic-Schwartz » . Il est ensuite dit « Goulaouic-Schwartz » jusqu'en 1980 puis prend ensuite plusieurs dénominations. Il existe toujours aujourd'hui.

3. Il s'agit du séminaire de probabilités de Strasbourg.

1966-67							
1967-68							
1968-69							
1969-70				2		16/31 [4]	
1970-71	1						
1971-72						2	
1972-73					3/27		
1973-74							
1974-75					2/27		
1975-76					1/25		
1976-77							
1977-78							
1978-79							
1979-80					1/28		
1980-81							
1981-82							1
1982-83							1
1983-84							
1984-85							1
1985-86							1
1986-87							
1987-88							
1988-89							
1989-90							3
1990-91							1
1991-92							1
1992-93							1
1993-94							
1994-95							
1995-96							
1996-97							1

4. C'est le « séminaire rouge », qui précède le séminaire EDP.

Annexe O

Exposés et orateurs au séminaire Cartan (1948-1964)

Ces séminaires ont été édités deux fois, par le Secrétariat Mathématique. Une 3$^{\text{ème}}$ édition a été produite par W.A. Benjamin, INC. New York (6 tomes) en 1967. Cartan commente ainsi cette édition :

> Les six livres de cette réédition regroupent les quinze volumes de mon Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure pour les années 1948-1964. Treize d'entre eux ont été reproduits tels qu'ils avaient été composés par les oins du Secrétariat Mathématique de l'Institut Henri Poincaré, à Paris.
>
> Seuls ont été recomposés les volumes 1951-1952 et 1953-1954, consacrés principalement aux fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Epuisés depuis longtemps, ils ont été remanisés à cette occasion pour supprimer quelques erreurs. On a renoncé pour ces volumes à donner une bibliographie complète de la littérature consacrée à ce sujet depuis une quinzaine d'années, et qui est considérable.
>
> Pour certaines années de ce Séminaire conduites en collaboration, les noms des collaborateurs figurent dans la Table. Par ailleurs, je tiens à signaler que la part la plus importante du Séminaire de l'année 1960-1961 consiste en une série d'exposés où A. Grothendieck a développé ses idées sur la « Géométrie analytique ».
>
> Je profite de cette oaccaion pour exprimer ma gratitude à tous les auteurs d'expoés - ils sont une quarantaine - qui ont fait de ce Séminaire une œuvre éminemment collective.
>
> J'adresse aussi mes remerciements à Mrs. Caroline Browne poru le soin extrême qu'elle a apporté à la composition des volumes 1951-1952 et 1953-1954.
>
> HENRI CARTAN.
> Princeton, New Jersey
> Avril 1967

Liste des thèmes d'année.

1948-49 Topologie algébrique

1949-50 Espaces fibrés et homotopie

1950-51 Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux

1951-52 Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes

1953-54 Fonctions automorphes et espaces analytiques

1954-55 Algèbre d'Eilenberg-Mac Lane et homotopie

1955-56 Géométrie algébrique (en collaboration avec C. Chevalley)

1956-57 Quelques questions de topologie

1957-58 Fonctions automorphes

1958-59 Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires

1959-60 Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott (en collaboration avec J.C. Moore)

1960-61 Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique

1961-62 Topologie différentielle

1962-63 Topologie différentielle

1963-64 Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique (en collaboration avec L. Schwartz)

Année 1948-49. Topologie algébrique.

Cartan, H. Complexes simpliciaux Exposé No. 1, 6 p.

Serre, J. P. Groupe d'homologie d'un complexe simplicial. Généralités sur les groupes à dérivation Exposé No. 2, 9 p.

Cerf, J. Groupes abéliens discrets Exposé No. 3, 5 p.

Samuel, P. Dualité, cochaînes et cohomologie Exposé No. 4, 10 p.

Dixmier, J. Homologie et cohomologie singulières Exposé No. 5, 8 p.

Cartan, H. La cohomologie de ?ech-Alexander Exposé No. 6, 4 p.

Cartan, H. Opérateurs d'homotopie Exposé No. 7, 10 p.

Cartan, H. Opérateurs d'homotopie (suite) : subdivision barycentrique Exposé No. 8, 7 p.

Cartan, H. Opérateurs d'homotopie (suite et fin) : déformations ; homologie singulière d'un complexe simplicial Exposé No. 9, 6 p.

Frenkel, J. Coefficients locaux Exposé No. 10, 9 p.

Serre, J. P. ; Cartan, H. Produits tensoriels Exposé No. 11, 12 p.

Les exposés 12 à 17 (Théorie des faisceaux) n'ont pas été rédigés. Voir à ce sujet le Séminaire Henri CARTAN, 3e année, 1950-51, où la théorie des faisceaux a fait l'objet d'une nouvelle rédaction mise à jour en 1951. *Année 1949-50. Espaces fibrés et homotopie*

Serre, J-P. Extension des applications - homotopie Exposé No. 1, 6 p.

Serre, J-P. Groupes d'homotopie Exposé No. 2, 7 p.

Cartan, H. Problèmes d'homotopie et de prolongement : théorie des obstructions Exposé No. 3, 10 p.

Cartan, H. Applications d'espaces localement compacts dans les polyèdres : dimension, problèmes d'homotopie et de prolongement Exposé No. 4, 10 p.

Blanchard, A. Exemples d'espaces fibrés Exposé No. 5, 5 p.

Cartan, H. Généralités sur les espaces fibrés, I Exposé No. 6, 13 p.

Cartan, H. Généralités sur les espaces fibrés, II Exposé No. 7, 5 p.

Cartan, H. Généralités sur les espaces fibrés, III Exposé No. 8, 8 p.

Cartan, H. Généralités sur les espaces fibrés Exposé No. 8 bis, 6 p.

Serre, J-P. Groupes d'homotopie relatifs. Application aux espaces fibrés Exposé No. 9, 8 p.

Serre, J-P. Homotopie des espaces fibrés - applications Exposé No. 10, 7 p.

Borel, A. Groupes d'homotopie des groupes de Lie, I Exposé No. 12, 8 p.

Borel, A. Groupes d'homotopie des groupes de Lie, II Exposé No. 13, 3 p.

Cartan, H. Carrés de Steenrod, I Exposé No. 14, 10 p.

Cartan, H. Carrés de Steenrod, II Exposé No. 15, 10 p.

Wu, Wen-Tsün Les classes caractéristiques d'un espace fibré. I : cohomologie des grassmanniennes Exposé No. 17, 7 p.

Wu, Wen-Tsün Les classes caractéristiques d'un espace fibré. II Exposé No. 18, 5 p.

Cartan, H. Cohomologie réelle d'un espace fibré principal différentiable. I : notions d'algèbre différentielle, algèbre de Weil d'un groupe de Lie Exposé No. 19, 10 p.

Cartan, H. Cohomologie réelle d'un espace fibré principal différentiable. II : transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal ; recherche de la cohomologie de l'espace de base Exposé No. 20, 11 p.

Les exposés 11 et 16 n'ont pas été multigraphiés.

Année 1950-51. Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux.

Eilenberg, Samuel Homologie des groupes. I : axiomes et unicité Exposé No. 1, 5 p.

Eilenberg, Samuel Homologie des groupes. II : existence Exposé No. 2, 5 p.

Cartan, H. Homologie des groupes. III : applications du théorème d'unicité Exposé No. 3, 7 p.

Cartan, H. Homologie des groupes. IV : homomorphismes de ?-complexes, applications Exposé No. 4, 11 p.

Serre, J-P. Applications algébriques de la cohomologie des groupes. I Exposé No. 5, 7 p.

Serre, J-P. Applications algébriques de la cohomologie des groupes. II : théorie des algèbres simples Exposé No. 6, 9 p.

Serre, J-P. Applications algébriques de la cohomologie des groupes. II : théorie des algèbres simples Exposé No. 7, 11 p.

Eilenberg, Samuel La suite spectrale. I : construction générale Exposé No. 8, 8 p.

Eilenberg, Samuel La suite spectrale. II : espaces fibrés Exposé No. 9, 9 p.

Serre, J-P. La suite spectrale des espaces fibrés. Applications Exposé No. 10, 9 p.

Cartan, H. Espaces avec groupes d'opérateurs. I : notions préliminaires Exposé No. 11, 11 p.

Cartan, H. Espaces avec groupe d'opérateurs. II : la suite spectrale ; applications Exposé No. 12, 10 p.

Serre, J-P. Espaces avec groupes d'opérateurs. Compléments Exposé No. 13, 12 p.

Cartan, H. Faisceaux sur un espace topologique. I Exposé No. 14, 8 p.

Cartan, H. Faisceaux sur un espace topologique. II Exposé No. 15, 7 p.

Cartan, H. Théorie axiomatique de la cohomologie Exposé No. 16, 9 p.

Cartan, H. Théorie de la cohomologie des espaces Exposé No. 17, 11 p.

Cartan, H. Carapaces Exposé No. 18, 9 p.

Cartan, H. Théorèmes fondamentaux de la théorie des faisceaux Exposé No. 19, 11 p.

Cartan, H. Théorie des faisceaux : applications des théorèmes fondamentaux, étude de la structure multiplicative Exposé No. 20, 11 p.

Serre, J-P. La suite spectrale attachée à une application continue Exposé No. 21, 8 p.

Année 1951-52. Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.

Cartan, H. Variétés riemanniennes, variétés analytiques complexes, variétés kählériennes Exposé No. 1, 19 p.

Dolbeault, P. Fonctions thêta associées à un diviseur donné Exposé No. 2, 12 p.

Cartan, H. Fonctions thêta sur le tore, I Exposé No. 3, 11 p.

Cartan, H. Fonctions thêta sur le tore, II Exposé No. 4, 11 p.

Cerf, Jean Fonctions abéliennes Exposé No. 5, 7 p.

Hervé, Michel Intégrale d'André Weil Exposé No. 6, 11 p.

Cartan, H. Domaines d'holomorphie Exposé No. 7, 11 p.

Cartan, H. Domaines d'holomorphie et domaines de convergence : théorie de la convexité (I) Exposé No. 8, 12 p.

Cartan, H. Théorie de la convexité (II) Exposé No. 9, 12 p.

Frenkel, Jean Préliminaires à l'étude de l'anneau des fonctions analytiques à l'origine Exposé No. 10, 11 p.

Bruhat, F. Anneaux des séries formelles et convergentes Exposé No. 11, 9 p.

Bruhat, F. Sous-variétés analytiques ; variétés principales Exposé No. 12, 11 p.

Cartan, H. La notion d'espace analytique général et de fonction holomorphe sur un tel espace Exposé No. 13, 16 p.

Cartan, H. Étude des germes de sous-variétés analytiques Exposé No. 14, 18 p.

Malatian Faisceaux analytiques ; étude du faisceau des relations entre p fonctions holomorphes Exposé No. 15, 10 p.

Frenkel, Jean Faisceau d'une sous-variété analytique Exposé No. 16, 4 p.

Frenkel, Jean Un théorème sur les matrices holomorphes inversibles Exposé No. 17, 11 p.

Cartan, H. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein Exposé No. 18, 10 p.

Cartan, H. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein : démonstration des théorèmes fondamentaux Exposé No. 19, 15 p.

Serre, J-P. Applications de la théorie générale à divers problèmes globaux Exposé No. 20, 26 p.

Année 1953-54. Fonctions automorphes et espaces analytiques.

Blanchard, A. ; Cartan, H. Généralités sur les fonctions automorphes ; cas d'un domaine borné Exposé No. 1, 16 p.

Serre, J-P. Fonctions automorphes : quelques majorations dans le cas où X/G est compact Exposé No. 2, 9 p.

Hervé, M. Fonctions automorphes d'une variable étude des points paraboliques Exposé No. 3, 12 p.

Serre, J-P. Fonctions automorphes d'une variable : application du théorème de Riemann-Roch Exposé No. 4, 11 p.

Serre, J-P. Fonctions automorphes d'une variable : application du théorème de Riemann-Roch (suite) Exposé No. 5, 4 p.

Cartan, H. Variétés analytiques complexes et espaces analytiques Exposé No. 6, 10 p.

Cartan, H. Théorie des algèbres analytiques Exposé No. 7, 23 p.

Cartan, H. Structure des germes de sous-ensembles analytiques, revêtements ramifiés Exposé No. 8, 18 p.

Cartan, H. Points singuliers d'un ensemble analytique notion de dénominateur universel Exposé No. 9, 10 p.

Cartan, H. Normalisation Exposé No. 10, 12 p.

Cartan, H. Normalisation (suite) : théorème d'Oka Exposé No. 11, 16 p.

Cartan, H. Quotient d'une variété analytique par un groupe discret d'automorphismes Exposé No. 12, 13 p.

Stein, K. Un théorème sur le prolongement des ensembles analytiques Exposé No. 13, 10 p.

Stein, K. Un théorème sur le prolongement des ensembles analytiques Exposé No. 14, 8 p.

Cartan, H. Un théorème d'immersion Exposé No. 15, 7 p.

Serre, J-P. Deux théorèmes sur les applications complètement continues Exposé No. 16, 7 p.

Cartan, H. Un théorème de finitude Exposé No. 17, 11 p.

Serre, J-P. Faisceaux analytiques sur l'espace projectif Exposé No. 18, 10 p.

Serre, J-P. Faisceaux analytiques sur l'espace projectif (suite) Exposé No. 19, 7 p.

Serre, J-P. Fonctions automorphes Exposé No. 20, 23 p.

Année 1954-55. Algèbre d'Eilenberg-Maclane et homotopie.

Serre, J-P . Les espaces $K(\pi, n)$ Exposé No. 1, 7 p.

Cartan, H. DGA-algèbres et DGA-modules Exposé No. 2, 9 p.

Cartan, H. DGA-modules (suite), notion de construction Exposé No. 3, 11 p.

Cartan, H. Constructions multiplicatives Exposé No. 4, 8 p.

Cartan, H. Constructions multiplicatives itérées cohomologie Exposé No. 5, 9 p.

Cartan, H. Opérations dans les constructions acycliques Exposé No. 6, 11 p.

Cartan, H. Puissances divisées Exposé No. 7, 11 p.

Cartan, H. Relations entre les opérations précédentes et les opérations de Bockstein ; algèbre universelle d'un module libre gradué Exposé No. 8, 9 p.

Cartan, H. Détermination des algèbres $H_*(\pi, n; Z_p)$ et $H^*(\pi, n; Z_p)$, p premier impair Exposé No. 9, 10 p.

Cartan, H. Détermination des algèbres $H_*(\pi, n; Z_2)$ et $H^*(\pi, n; Z_2)$; groupes stables modulo p Exposé No. 10, 8 p.

Cartan, H. Détermination des algèbres $H_*(\pi, n; Z)$ Exposé No. 11, 24 p.

Moore, J. C. Constructions sur des complexes d'anneaux Exposé No. 12, 6 p.

Erratum Art. No. 2, 1 p.

Moore, J. C. Comparaison de la bar-construction à la construction W et aux complexes $K(\pi, n)$ Exposé No. 13, 11 p.

Cartan, H. Opérations cohomologiques, I Exposé No. 14, 12 p.

Cartan, H. Opérations cohomologiques, II Exposé No. 15, 10 p.

Cartan, H. Opérations cohomologiques, III Exposé No. 16, 14 p.

Cartan, H. La formule du produit pour les opérations de Steenrod Exposé No. 16 bis, 5 p.

Thom, R. Opérations en cohomologie réelle Exposé No. 17, 10 p.

Moore, J. C. Homotopie des complexes monoïdaux, I Exposé No. 18, 8 p.

Moore, J. C. Homotopie des complexes monoïdaux, II Exposé No. 19, 7 p.

Serre, J. P. Groupes d'homotopie des bouquets de sphères Exposé No. 20, 7 p.

Moore, J. C. Systèmes de Postnikov et complexes monoïdaux Exposé No. 21, 12 p.

Moore, J. C. Le théorème de Freudenthal, la suite exacte de James et l'invariant de Hopf généralisé Exposé No. 22, 15 p.

Année 1955-56. Géométrie algébrique. En collaboration avec C. Chevalley.

Lafon, J. Anneaux de fractions. Éléments entiers. Théorèmes de Krull Exposé No. 1, 12 p.

Lafon, J. Anneaux noethériens Exposé No. 2, 9 p.

Cartan, H. Variétés algébriques affines Exposé No. 3, 12 p.

Lazard, M. Algèbres affines Exposé No. 4, 8 p.

Chevalley, C. Les schémas Exposé No. 5, 6 p.

Chevalley, C. Les schémas (II) Exposé No. 6, 11 p.

Chevalley, C. ; Cartan, H. Schémas normaux ; morphismes ; ensembles constructibles Exposé No. 7, 10 p.

Chevalley, C. Erratum à l'exposé 6 Art. No. 8, 1 p.

Cartan, H. Morphismes et ensembles constructibles (suite) Exposé No. 8, 7 p.

Chevalley, C. ; Cartan, H. Erratum à l'exposé 7 Art. No. 9, 1 p.

Chevalley, C. Correspondances, I Exposé No. 9, 7 p.

Chevalley, C. Correspondances, II Exposé No. 10, 5 p.

Chevalley, C. ; Cartan, H. Erratum à l'exposé 7 Art. No. 11, 1 p.

Chevalley, C. Le théorème principal de Zariski, I Exposé No. 11, 6 p.

Chevalley, C. Le théorème principal de Zariski, II Exposé No. 12, 3 p.

Cartier, P. Dérivations dans les corps Exposé No. 13, 13 p.

Cartier, P. Extensions régulières Exposé No. 14, 10 p.

Cartier, P. Erratum à l'exposé 13 Art. No. 15, 1 p.

Cartier, P. ; Chevalley, C. Extension du corps de base dans les schémas Exposé No. 15, 12 p.

Godement, R. Localités simples, I Exposé No. 16, 10 p.

Godement, R. Localités simples. II Exposé No. 17, 11 p.

Godement, R. Topologies m-adiques Exposé No. 18, 12 p.

Godement, R. Propriétés analytiques des localités Exposé No. 19, 9 p.

Année 1956-57. Quelques questions de topologie.

Cartan, H. Sur la théorie de Kan Exposé No. 1, 19 p.

Grothendieck, A. Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents Exposé No. 2, 16 p.

Erratum Art. No. 3, 1 p.

Cartan, H. Sur le foncteur $Hom(X, Y)$ en théorie simpliciale Exposé No. 3, 12 p.

Erratum Art. No. 5, 1 p.

Cartan, Henri Théorie des fibrés principaux Exposé No. 4, 12 p.

Haefliger, A. Les singularités des applications différentiables Exposé No. 7, 8 p.

Haefliger, A. ; Kosinski, A. Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables Exposé No. 8, 6 p.

Les exposés n˚5 et 6 de Roger GODEMENT n'ont pas été rédigés, et ne seront pas multigraphiés.

Année 1957-58. Fonctions automorphes.

Weil, André Réduction des formes quadratiques Exposé No. 1, 9 p.

Weil, André Groupes des formes quadratiques indéfinies et des formes bilinéaires alternées Exposé No. 2, 14 p.

Cartan, Henri Ouverts fondamentaux pour le groupe modulaire Exposé No. 3, 12 p.

Cartan, Henri Formes modulaires Exposé No. 4, 12 p.

Godement, Roger Où l'on généralise une intégrale étudiée par C. L. Siegel, et généralisant la fonction Γ Exposé No. 5, 24 p.

Godement, Roger Fonctions holomorphes de carré sommable dans le demi-plan de Siegel Exposé No. 6, 22 p.

Godement, Roger Généralités sur les formes modulaires, I Exposé No. 7, 18 p.

Godement, Roger Généralités sur les formes modulaires, II Exposé No. 8, 21 p.

Godement, Roger Séries d' Eisenstein Exposé No. 9, 31 p.

Satake, Ichiro Caractérisation de l'espace des spitzenformen Exposé No. 9 bis, 7 p.

Godement, Roger Série de Poincaré et spitzenformen Exposé No. 10, 38 p.

Blanchard, A. ; Cartan, H. Rectifications à l'exposé 1 du séminaire 1953/54 Exposé No. 10 bis, 6 p.

Cartan, Henri Prolongement des espaces analytiques Exposé No. 11, 16 p.

Satake, Ichiro Compactification des espaces quotients de Siegel, I Exposé No. 12, 13 p.

Cartan, Henri Sur la compactification de Satake Exposé No. 12 bis, 10 p.

Satake, Ichiro Compactification des espaces quotients de Siegel, II Exposé No. 13, 10 p.

Satake, Ichiro L'opérateur *Phi* Exposé No. 14, 18 p.

Satake, I. ; Cartan, H. Démonstration du théorème fondamental Exposé No. 15, 12 p.

Satake, Ichiro Surjectivité globale de l'opérateur ? Exposé No. 16, 17 p.

Cartan, Henri Plongements projectifs Exposé No. 17, 19 p.

Shimura, Goro Modules des variétés abéliennes polarisées et fonctions modulaires, I Exposé No. 18, 8 p.

Shimura, Goro Modules des variétés abéliennes polarisées et fonctions modulaires, II Exposé No. 19, 11 p.

Shimura, Goro Modules des variétés abéliennes polarisées et fonctions modulaires, III Exposé No. 20, 18 p.

Année 1958-59. Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires.

Zisman, Michel Espaces fibrés et groupes d'homotopie Exposé No. 1, 21 p.

Douady, Adrien La suite spectrale des espaces fibrés Exposé No. 2, 10 p.

Douady, Adrien Applications de la suite spectrale des espaces fibrés Exposé No. 3, 11 p.

Demazure, Michel Théorèmes de Hurewicz et Whitehead Exposé No. 4, 13 p.

Cartan, Henri Suspension et invariant de Hopf Exposé No. 5, 19 p.

Cartan, Henri Invariant de Hopf (fin) Exposé No. 6, 12 p.

Shih, Weishu Ensembles simpliciaux et opérations cohomologiques Exposé No. 7, 10 p.

Douady, Adrien Les complexes d'Eilenberg-MacLane Exposé No. 8, 10 p.

Douady, Adrien Opérations cohomologiques Exposé No. 9, 15 p.

Giorgiutti, Italo L'algèbre de Steenrod et sa duale Exposé No. 10, 14 p.

Giorgiutti, Italo L'algèbre de Steenrod et sa duale (suite) Exposé No. 11, 10 p.

Cartan, H. Quelques propriétés des algèbres de Hopf, applications à l'algèbre de Steenrod Exposé No. 12, 18 p.

Cartan, Henri Opérations cohomologiques secondaires Exposé No. 13, 20 p.

Cartan, Henri Opérations cohomologiques secondaires (suite) Exposé No. 14, 12 p.

Cartan, Henri Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée Exposé No. 15, 20 p.

Cartan, Henri Une suite spectrale. Application à l'algèbre de Steenrod pour $p = 2$ Exposé No. 16, 23 p.

Cartan, Henri Relations entre opérations cohomologiques secondaires Exposé No. 17, 10 p.

Douady, Adrien La suite spectrale d'Adams Exposé No. 18, 18 p.

Douady, Adrien La suite spectrale d'Adams : structure multiplicative Exposé No. 19, 13 p.

Année 1959-60. Périodicité des groupes d'Homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott. En collaboration avec J.C. Moore

Delzant, Antoine Groupes de Lie compacts et tores maximaux Exposé No. 1, 14 p.

Zisman, Michel Espaces de Hopf, algèbres de Hopf Exposé No. 2, 17 p.

Zisman, Michel Cohomologie des variétés de Stiefel Exposé No. 3, 11 p.

Moore, John C. Compléments sur les algèbres de Hopf Exposé No. 4, 12 p.

Moore, John C. Espaces classifiants Exposé No. 5, 26 p.

Moore, John C. La suspension Exposé No. 6, 12 p.

Moore, John C. Algèbre homologique et homologie des espaces classifiants Exposé No. 7, 37 p.

Morin, Bernard La classe fondamentale d'un espace fibré Exposé No. 8, 12 p.

Morin, Bernard Les classes caractéristiques d'un espace fibré à fibres vectorielles Exposé No. 9, 43 p.

Moore, John C. Algèbres de Hopf universelles Exposé No. 10, 11 p.

Douady, Adrien Périodicité du groupe unitaire Exposé No. 11, 16 p.

Wolf, Joseph A. Quelques résultats de R. Bott sur la topologie des groupes de Lie Exposé No. 13, 12 p.

Zisman, Michel La théorie de Marston Morse, I : géométrie différentielle Exposé No. 14, 35 p.

Zisman, Michel La théorie de Marston Morse, II : topologie algébrique Exposé No. 15, 16 p.

Cartan, Henri Démonstration homologique des théorèmes de périodicité de Bott, I Exposé No. 16, 16 p.

Cartan, Henri Démonstration homologique des théorèmes de périodicité de Bott, II. Homologie et cohomologie des groupes classiques et de leurs espaces homogènes Exposé No. 17, 32 p.

Cartan, Henri Démonstration homologique des théorèmes de périodicité de Bott, III Exposé No. 18, 9 p.

Les exposés 1,13, 14 et 15 concernent la théorie des groupes de Lie et la théorie de Marston Morse ; les résultats de la théorie de Morse, utilisés dans l'exposé 13, sont démontrés dans les exposés 14 et 15.

Tous les autres exposés sont indépendants de la théorie de Morse. En particulier, les théorèmes de périodicité de Bott sont établis (exposés 11, 16, 17 et 18) sans se servir de la théorie de Morse, qu'utilisait BOTT dans ses démonstrations.

A la liste précédente d'exposés, il convient d'ajouter les exposés suivants, qui n'ont pas été rédigés, car ils se bornaient à reproduire tout ou partie d'articles publiés ailleurs :

n°19 et 20 (16 et 23 mai 1960). MORIN (Bernard). Sur un travail de R. Bott, d'après : BOTT (Raoul). The stable homotopy of the classical groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 70, 1959, p. 313-337.

n°21 (13 juin 1960). DOUDAY (Adrien). Sur la théorie d'Atiyah-Hirzebruch, d'après : BOTT (Raoul). Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité, Colloques internationaux du C.N.R.S. : Topologie algébrique et géométrie différentielle [89. 1959. Lille], *Bull. Soc. Math. France*, t. 87, 1959, p. 293-310.

Année 1960-61. Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique.

Ce qu'en dit Cartan :

> Par ailleurs, je tiens à signaler que la part la plus importante du Séminaire de l'année 1960-1961 consiste en une série d'exposés où A. Grothendieck a développé ses idées sur la « Géométrie analytique ».

Douady, Adrien *Fibrés en tores complexes*
Cet exposé n'a pas été rédigé, et ne sera pas multigraphié. Cf. ATIYAH. Some examples on complex manifolds, *Bonner math. Schrift*, 1958, n°6, 28p.

Douady, Adrien Variétés et espaces mixtes Exposé No. 2, 7 p.

Douady, Adrien Déformations régulières Exposé No. 3, 8 p.

Douady, Adrien Obstruction primaire à la déformation Exposé No. 4, 19 p.

Houzel, Christian *Modules des surfaces de Riemann. Exposés No 5 et 6.*
Ces exposés n'ont pas été rédigés et ne seront pas multigraphiés.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. I. Description axiomatique de l'espace de Teichmüller et de ses variantes Exposé No. 7 et 8, 33 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. II. Généralités sur les espaces annelés et les espaces analytiques Exposé No. 9, 14 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. III. Produits fibrés d'espaces analytiques Exposé No. 10, 11 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. IV. Formalisme général des foncteurs représentables Exposé No. 11, 28 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. V. Fibrés vectoriels, fibrés projectifs, fibrés en drapeaux Exposé No. 12, 15 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. VI. Étude locale des morphismes : germes d'espaces analytiques, platitude, morphismes simples Exposé No. 13, 13 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. VII. Étude locale des morphismes : éléments de calcul infinitésimal Exposé No. 14, 27 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. VIII. Rapport sur les théorèmes de finitude de Grauert et Remmert Exposé No. 15, 10 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. IX. Quelques problèmes de modules Exposé No. 16, 20 p.

Grothendieck, Alexander Techniques de construction en géométrie analytique. X. Construction de l'espace de Teichmüller Exposé No. 17, 20 p.

Houzel, Christian Géométrie analytique locale, I Exposé No. 18, 12 p.

Houzel, Christian Géométrie analytique locale, II. Théorie des morphismes finis Exposé No. 19, 22 p.

Houzel, Christian Géométrie analytique locale, III Exposé No. 20, 25 p.

Houzel, Christian Géométrie analytique locale, IV Exposé No. 21, 15 p.

Année 1961-62. Topologie différentielle.

Douady, Adrien Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires Exposé No. 1, 11 p.

Douady, Adrien Théorèmes d'isotopie et de recollement Exposé No. 2, 16 p.

Douady, Adrien Arrondissement des arêtes Exposé No. 3, 25 p.

Morlet, Claude Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. I. Les topologies des espaces d'applications Exposé No. 4, 5 p.

Morlet, Claude Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. II. Quelques ouverts fondamentaux des espaces d'applications Exposé No. 5, 6 p.

Morlet, Claude Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. III. Les théorèmes d'existence d'applications transverses Exposé No. 6, 8 p.

Morlet, Claude Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. IV. Les théorèmes de Whitney et de Morse Exposé No. 7, 6 p.

Cerf, Jean La théorie de Smale sur le h-cobordisme des variétés Exposé No. 11-13, 23 p.

Serre, Jean-Pierre Formes bilinéaires symétriques entières à discriminant $\pm$ 1 Exposé No. 14-15, 16 p.

Les exposés ci-après n'ont pas été rédigés dans l'année, et feront peut-être l'objet d'une rédaction ultérieure :

Morin, Bernard Présentation des variétés et chirurgie. Exposés No 8-10

Morin, Bernard Suite exacte de Kervaire-Milnor. Exposés No 16-24.

Année 1962-63. Topologie différentielle.

Cartan, Henri Classes d'applications d'un espace dans un groupe topologique, d'après Shih Weishu Exposé No. 6, 19 p.

Cerf, Jean Théorèmes de fibration des espaces de plongements. Applications Exposé No. 8, 13 p.

Cerf, Jean La nullité de $\pi_0(\mathrm{Diff}\ S^3)$. 1. Position du problème Exposé No. 9-10, 27 p.

Malgrange, Bernard Le théorème de préparation en géométrie différentiable. I. Position du problème Exposé No. 11, 14 p.

Malgrange, Bernard Le théorème de préparation en géométrie différentiable. II. Rappels sur les fonctions différentiables Exposé No. 12, 9 p.

Malgrange, Bernard Le théorème de préparation en géométrie différentiable. III. Propriétés différentiables des ensembles analytiques Exposé No. 13, 12 p.

Tamura, Itiro Classification des variétés différentiables, $(n-1)$-connexes, sans torsion, de dimension $2n+1$ Exposé No. 16-19, 27 p.

Cerf, Jean La nullité de $\pi_0(\mathrm{Diff}\ S^3)$. 2. Espaces fonctionnels liés aux décompositions d'une sphère plongée dans $\mathbb{R}^3$ Exposé No. 20, 29 p.

Cerf, Jean La nullité de $\pi_0(\mathrm{Diff}\ S^3)$. 3. Construction d'une section pour le revêtement $\mathfrak{R}$ Exposé No. 21, 25 p.

Malgrange, Bernard Le théorème de préparation en géométrie différentiable. IV. Fin de la démonstration Exposé No. 22, 8 p.

Les exposés 1-5 de Claude MORLET sur le cobordisme (réel ou complexe) n'ont pas été rédigés ; ils feront peut-être l'objet d'une rédaction ultérieure.

Les exposés 7 (B. MORIN), 14 (J. CERF) et 15 (H. CARTAN) ne seront pas rédigés.

Année 1963-64. Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique. En collaboration avec Laurent Schwartz.

Schwartz, Laurent Opérateurs différentiels et espaces fibrés à fibre vectorielle Exposé No. 1, 7 p.

Schwartz, Laurent Opérateurs elliptiques et indices Exposé No. 2, 9 p.

Cartan, Henri Définition et propriétés élémentaires des groupes $K(X)$ et $K(X, A)$ Exposé No. 3, 12 p.

Morlet, Claude Classes fondamentales. Classes de Chern Exposé No. 4, 15 p.

Morlet, Claude Fibré universel et espace classifiant des fibrés vectoriels complexes Exposé No. 5, 15 p.

Illusie, Luc Caractère de Chern. Classe de Todd Exposé No. 6, 9 p.

Schwartz, Laurent La formule d' Atiyah-Singer Exposé No. 7, 2 p.

Krée, Paul Espaces Hs. Lemme de commutation Exposé No. 8, 12 p.

Baouendi, M. S. Les opérateurs de Calderon-Zygmund sur un espace vectoriel réel de dimension finie Exposé No. 9, 10 p.

Boutet de Monvel, L. Transformation des opérateurs de Calderon-Zygmund par difféomorphisme Exposé No. 10, 11 p.

Bokobza, Juliane Opérateurs de Calderon-Sygmund sur les variétés Exposé No. 11, 10 p.

Grisvard, Pierre Opérateurs à indice - lemme de compacité Exposé No. 12, 9 p.

Grisvard, Pierre L'indice des opérateurs de Calderon-Zygmund elliptiques Exposé No. 13, 6 p.

Unterberger, André L'indice est une fonction additive sur $K(B(X), S(X))$ Exposé No. 14, 3 p.

Illusie, Luc Compléments de K-théorie Exposé No. 15, 10 p.

Karoubi, Max Les isomorphismes de Chern et de Thom-Gysin en K-théorie Exposé No. 16, 16 p.

llusie, Luc Opérateur Do Exposé No. 17, 6 p.

Cartan, Henri Calcul du second membre de la formule d'Atiyah-Singer dans quelques cas importants : exposé introductif Exposé No. 18, 14 p.

Illusie, Luc Symboles elliptiques Exposé No. 19, 13 p.

Cartan, Henri Introduction au gobordisme Exposé No. 20, 12 p.

Morlet, Claude Cobordisme Exposé No. 21, 17 p.

Sternheimer, Daniel Propriété multiplicative de l'indice analytique. Opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu. Produits tensoriels Exposé No. 22, 23 p.

Schiffmann, Gérard Invariance par cobordisme de l'indice analytique Exposé No. 23, 14 p.

Boutet de Monvel, Louis Passage des variétés de dimension paire aux variétés de dimension quelconque Exposé No. 24, 3 p.

Atiyah, Michael F. La formule de l' indice pour les variétés à bord Exposé No. 25, 9 p.

Orateurs au séminaire Cartan.

Les intervenants sont cités dans l'ordre d'apparition au séminaire Cartan. Les exposés non multigraphiés et non mentionnés ne sont pas pris en compte.

Noms	48/49	49/50	50/51	51/52	53/54	54/55	55/56	56/57	57/58	58/59	59/60	60/61	61/62	62/63	63/64
Cartan, Henri	6	10	11	10	10	14	3	3	6	8	3			2	3
Serre, J.-P.	2	4	6	1	7	2							1		
Cerf, Jean	1			1									1	5	
Samuel, Pierre	1														
Dixmier, Jacques	1														
Frenkel, Jean	1			3											
Blanchard, A.		1			1										
Borel, Armand		2													
Wu, Wen-Tsün		2													
Eilenberg, S.			4												
Dolbeault, P.				1											
Malatian				1											
Bruhat, François				2											
Hervé, Michel					1										
Stein, K.					2										
Moore, John C.						6									
Thom, René						1									
Lafon, J.							2								
Lazard, M.							1								
Chevalley, C.							8								
Cartier, Pierre							3								
Godement, R.							4	2	6						
Grothendieck, A.								1				11			
Haefliger, André								2							
Kosinski, A.								1							
Weil, André									2						
Satake, Ichiro									6						
Shimura, Goro									3						
Zisman, Michel										1	4				
Douday, Adrien										6	2	4	3		

Demazure, M.										1					
Shih, Weishu										1					
Giorgiutti, Italo										2					
Delzant, Antoine											1				
Morin, Bernard											3		2	1	
Wolf, Joseph A.											1				
Houzel, C.												6			
Morlet, Claude													4	5	3
Malgrange, B.														3	
Tamura, Itiro														1	
Schwartz, L.															3
Illusie, Luc															4
Krée, Paul															1
Baouendi, M.S.															1
Boutet deMonvel															2
Bokobza, Juliane															1
Grisvard, Pierre															2
Unterberger, A.															1
Karoubi, Max															1
Sternheimer, D.l															1
Schiffmann, G.															1
Attiyah, M. F.															1
Cartan, Henri	6	10	11	10	10	14	3	3	6	8	3			2	3
Noms	48/49	49/50	50/51	51/52	53/54	54/55	55/56	56/57	57/58	58/59	59/60	60/61	61/62	62/63	63/64

Annexe P

Exposés, orateurs et rédacteurs au Séminaire Schwartz (1953-1961)

Liste des thèmes

1953/54 Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires.

1954/55 Equations aux dérivées partielles.

1955/56 Problèmes mixtes pour l'équation des ondes.

1959/60 Unicité du problème de Cauchy. Division des distributions.
Organisé par Bernard Malgrange

1960/61 Equations aux dérivées partielles et interpolation.

Liste des exposés par année

Année 1953-1954 PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES NUCLEAIRES. (tous les exposés sont de Laurent Schwartz)

Introduction.

Ce séminaire est essentiellement consacré à l'étude de la Thèse de M. Alexandre GROTHENDIECK : « Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires », à paraître aux Mémoires de l'American Mathematical Society. (Voir aussi un résumé de cette thèse : « Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires », *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 4 (1952), p. 73-112).

La plupart des exposés sont donc tirés directement de ce travail, avec seulement quelques modifications dans l'ordre ou dans les méthodes. Un petit nombre d'exposés (n^{os} 9, 10, 11, 20, 21, 2, 23, 1° moitié du 24) sont des résumés d'un travail personnel qui paraîtra ultérieurement. Le théorème de Künneth (exposé 24) est dû aussi à GROTHENDIECK et paraîtra ultérieurement.

Introduction (1p.)

Produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques Exposé No. 1, 3 p.

Cas des espaces normés. Produit tensoriel d'applications linéaires Exposé No. 2, 5 p.

N° 1. Rappels sur les espaces L^p Exposé No. 3, 4 p.

L'espace $L^1\widehat{\otimes}E$ (suite et fin) Exposé No. 4, 8 p.

L'espace $L^p(\mu)$ associé à une famille de mesures $(1 \leq p < \infty)$ Exposé No. 5, 5 p.

Suite de la démonstration (cf exposé n° 5) Exposé No. 6, 5 p.

I. Divers espaces normés associés à un espace localement convexe séparé E Exposé No. 7, 8 p.

Le produit tensoriel $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ comme espace d'applications linéaire Exposé No. 8, 7 p.

L'espace $C(K; E)$ Exposé No. 9, 3 p.

Sur certains espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles Exposé No. 10, 7 p.

Les opérateurs de convolution. Le théorème des noyaux Exposé No. 11, 7 p.

La théorie des opérateurs nucléaires Exposé No. 12, 7 p.

Caractérisation des opérateurs nucléaires dans certains cas particuliers Exposé No. 13, 5 p.

Généralités sur les problèmes d'approximation et de biunivocité Exposé No. 14, 9 p.

Exemples d'espaces vérifiant la propriété d'approximation Exposé No. 15, 10 p.

Formes bilinéaires intégrales et opérateurs intégraux Exposé No. 16, 5 p.

Espaces nucléaires Exposé No. 17, 6 p.

Espaces nucléaires. Propriétés de permanence et exemples Exposé No. 18, 5 p.

Propriétés de $E\widehat{\otimes}F$ pour E nucléaire Exposé No. 19, 4 p.

Distributions à valeurs vectorielles Exposé No. 20, 6 p.

Les distributions sommables Exposé No. 21, 7 p.

A. Définition intégrale de la convolution de deux distributions Exposé No. 22, 7 p.

Accouplement des distributions à valeurs vectorielles Exposé No. 23, 6 p.

Opérations algébriques sur les distributions à valeur vectorielle. Théorème de Künneth Exposé No. 24, 6 p.

Année 1954-1955 EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

Introduction 1 p.

Malgrange, B. Le théorème d'approximation pour les équations aux dérivées partielles à coefficients constants Exposé No. 1, 7 p.

Malgrange, B. Équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants avec second membres Exposé No. 2, 5 p.

Malgrange, B. Compléments divers. Équations elliptiques Exposé No. 3, 13 p.

Malgrange, B. Compléments sur les théorèmes d'approximation Exposé No. 3 bis, 6 p.

Schwartz, L. Conditions d'ellipticité Exposé No. 4, 7 p.

Schwartz, L. Rappels sur les supports de produits de convolution Exposé No. 5, 4 p.

Schwartz, L. Erratum à l'exposé n° 4 Exposé No. 6, 1 p.

Schwartz, L. Opérateurs analytiques elliptiques (fin) Exposé No. 6, 5 p.

Schwartz, L. Les opérateurs invariants par rotation, l'opérateur δ Exposé No. 7, 6 p.

Schwartz, L. Solutions élémentaires des opérateurs δ et $\delta + \lambda$ Exposé No. 8, 8 p.

Schwartz, L. Opérateurs invariants par rotations. Fonctions métaharmoniques Exposé No. 9, 5 p.

Schwartz, L. Équation de la chaleur. Retour aux propriétés du laplacien Exposé No. 10, 8 p.

Schwartz, L. Préliminaires à l'étude du problème de Dirichlet Exposé No. 11, 6 p.

Schwartz, L. Les espaces $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ (suite) Exposé No. 12, 5 p.

Schwartz, L. 1ère partie : ouverts Ω à frontière régulière, espaces $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ Exposé No. 13, 5 p.

Schwartz, L. L'opérateur de Green et la résolution du problème de Dirichlet Exposé No. 14, 4 p.

Schwartz, L. Ensembles m-polaires Exposé No. 15, 7 p.

Schwartz, L. Fonctions - Traces Exposé No. 16, 7 p.

Schwartz, L. Ensembles 1-polaires. Problèmes de Dirichlet pour des opérateurs différentiels d'ordre 2m Exposé No. 17, 4 p.

Année 1955-1956 PROBLEMES MIXTES POUR L'EQUATION DES ONDES.

Schwartz, Laurent L'opérateur de Green et la résolution du problème de Dirichlet Exposé No. 1, 4 p.

Schwartz, Laurent Rappels divers Exposé No. 2, 6 p.

Schwartz, Laurent Effet d'une transformation de Laplace inverse sur G_{p^2}

Schwartz, Laurent Problème de Cauchy grossier et expression de G comme fonction de t Exposé No. 4, 4 p.

Schwartz, Laurent Propriétés de l'opérateur de Green et problème de Cauchy (fin) Exposé No. 5, 4 p.

Schwartz, Laurent Méthode des ondes stationnaires Exposé No. 6, 6 p.

Complément à l'exposé n° 6 Exposé No. 6 bis, 2 p.

Schwartz, Laurent Esquisse d'une résolution du problème mixte par la méthode des ondes stationnaires Exposé No. 7, 2 p.

Année 1959-1960 UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY. DIVISION DES DISTRIBUTIONS.

Première partie : Opérateurs intégraux singuliers

Malgrange, Bernard Théorèmes d'interpolation dans les espaces L^p Exposé No. 1, 6 p.

Malgrange, Bernard Multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ Exposé No. 2, 7 p.

Malgrange, Bernard Multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ (suite) Exposé No. 3, 6 p.

Malgrange, Bernard Multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ (fin) Exposé No. 4, 8 p.

Malgrange, Bernard Noyaux valeurs principales Exposé No. 5, 7 p.

Malgrange, Bernard Noyaux valeurs principales (fin) Exposé No. 6, 4 p.

Malgrange, Bernard Calcul symbolique approximatif Exposé No. 7, 6 p.

Deuxième partie : Unicité du problème de Cauchy.

Malgrange, Bernard La méthode de Calderón Exposé No. 8, 5 p.

Malgrange, Bernard La méthode de Calderón (suite) Exposé No. 9, 5 p.

Malgrange, Bernard La méthode de Calderón (fin) Exposé No. 10, 5 p.

Malgrange, Bernard Inégalité de Treves. Comparaison des opérateurs différentiels Exposé No. 11, 6 p.

Martineau, André Analyse de la méthode de Carleman par Hörmander Exposé No. 12, 4 p.

Martineau, André Analyse de la méthode de Carleman par Hörmander Exposé No. 13, 6 p.

Morel, Henri Unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains opérateurs elliptiques à coefficients variables Exposé No. 14, 6 p.

Morel, Henri Unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains opérateurs elliptiques à coefficients variables (fin) Exposé No. 15, 8 p.

Zerner, Martin Inégalités du type Harnack Exposé No. 16, 7 p.

Zerner, Martin Principes de Phragmèn-Lindelöf Exposé No. 17, 6 p.

Zerner, Martin Diverses conséquences d'une formule de Green Exposé No. 18, 7 p.

Troisième partie : Fonctions analytiques et distributions

Martineau, André Supports des fonctionnelles analytiques Exposé No. 19, 11 p.

Martineau, André Supports d'une fonctionnelle analytique et croissance de sa transformée de Fourier-Borel Exposé No. 20, 13 p.

Malgrange, Bernard Division des distributions. I : distributions prolongeables Exposé No. 21, 5 p.

Malgrange, Bernard Division des distributions. II : l'inégalité de ?ojasiewicz Exposé No. 22, 8 p.

Malgrange, Bernard Division des distributions. III : le théorème principal Exposé No. 23-24, 11 p.

Malgrange, Bernard Division des distributions. IV : applications Exposé No. 25, 5 p.

Martineau, André *Contre-exemple à l'unicité du problème de Cauchy d'après A. Plis* Cet exposé n'a pas été rédigé, et ne sera pas multigraphié.

Je remercie Mr Bernard MALGRANGE qui, dans l'impossibilité où je me trouvais de le faire, faute de temps, a bien voulu se charger d'assurer la plupart des exposés, et même de prendre en mail l'organisation du Séminaire, qu'on devrait appeler, pour être juste, Séminaire Malgrange.

Laurent SCHWARTZ.

Année 1960-1961 EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET INTERPOLATION.

Lions, Jacques L. Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications, I Exposé No. 1, 14 p.
Conférence rédigée par Mlle Ninet AL ABED

Lions, Jacques L. Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications, II Exposé No. 2, 6 p.
Conférence rédigée par Henri MOREL

Lions, Jacques L. Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications, III Exposé No. 3, 9 p.
Conférence rédigée par Martin ZERNER

Stampacchia, Guido Équations elliptiques à données discontinues Exposé No. 4, 16 p.

Liste des orateurs et rédacteurs

Noms	53/54	54/55	55/56	56/57	57/58	58/59	59/60	60/61
Schwartz, Laurent	24	17	7					
Malgrange, Bernard							16	
Martineau, André							5	
Morel, Henri							2	
Zerner, Martin							3	
Lions, Jacques-Louis								3
Stampacchia, Guido								1

Lions, Jacques-Louis 3 exposés (1960/61)

Malgrange, Bernard 16 exposés (1959/60)

Martineau, André 5 exposés (1959/60)

Morel, Henri 2 exposés (1959/60)

Schwartz, Laurent 58 exposés (1953/54, 1954/55, 1955/56)

Stampacchia, Guido 1 exposé (1960/61)

Zerner, Martin 3 exposés (1959/60)

Autres participants mentionnés (rédacteurs) :

El Abed, Ninet (Mlle) Rédige l'exposé 1 de Lions (1960/61).

Annexe Q

Exposés et orateurs au « Séminaire rouge » (1969-1970)

Année 1969-1970

Systèmes projectifs de mesures et théorème de Prokhorov Exposé No. 1, 5 p.

Badrikian, A. Mesures cylindriques Exposé No. 2, 10 p.

Schwartz, Laurent La topologie étroite et la topologie cylindrique Exposé No. 3, 7 p.

Schwartz, Laurent Poids et mesures Exposé No. 4, 5 p.

Schwartz, Laurent Ordre et type ; problèmes d'approximation ; applications radonifiantes Exposé No. 5, 11 p.

Schwartz, Laurent Probabilités cylindriques et fonctions aléatoires Exposé No. 6, 8 p.

Lepingle, D. Applications p-sommantes ; inégalité de Pietsch ; factorisation Exposé No. 7, 8 p.

Martin, Jacqueline Une caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt Exposé No. 8, 7 p.

Saphar, Pierre Les normes tensorielles g_k et d_k Exposé No. 9, 16 p.

Saphar, Pierre Applications des normes g_k et d_k. Mesures de Radon k sommantes Exposé No. 10, 10 p.

Schwartz, Laurent Applications p-radonifiantes, $0 < p \leq +\infty$ Exposé No. 11, 9 p.

Schwartz, Laurent Applications p-radonifiantes, $0 < p \leq +\infty$ (suite) Exposé No. 12, 6 p.

Schwartz, Laurent Limites projectives de variables aléatoires, applications décomposantes et nikodymisantes Exposé No. 13, 8 p.

Schwartz, Laurent Applications radonifiantes dans les espaces de distributions sur $\mathbb{R}^n$ Exposé No. 14, 14 p.

Liste de résultats sur les opérateurs p-sommants Art. No. 15, 1 p.

Schwartz, Laurent Mouvement brownien Exposé No. 15, 23 p.

Schwartz, Laurent Les applications O-radonifiantes Exposé No. 16, 4 p.

Schwartz, Laurent Applications O-radonifiantes (suite et fin) Exposé No. 17, 10 p

Badrikian, A. ε-entropies ; ε-capacités ; épaisseurs Exposé No. 18, 13 p.

Badrikian, A. ε-entropies ; ε-capacités ; épaisseurs (suite) Exposé No. 19, 13 p.

Badrikian, A. Exposants d'entropie de compacts dans un espace norme Exposé No. 20, 11 p.

Badrikian, A. Quelques applications Exposé No. 20 bis, 14 p.

Chevet, S. Existence de versions à trajectoires uniformément continues Exposé No. 21, 11 p.

Chevet, S. Conditions suffisantes d'existence de versions à trajectoires uniformément continues et application aux fonctions aléatoires gaussiennes Exposé No. 22, 27 p.

Chevet, S. Conditions de Hölder Exposé No. 23, 15 p.

Errata aux exposés 18 à 23 Art. No. 26, 1 p.

Bibliographie des exposés 18 à 23 Art. No. 27, 1 p.

Schwartz, L. Le théorème de dualité pour les applications radonifiantes Exposé No. 24, 13 p.

Schwartz, L. Suite de l'exposé XXIV et théorème de dualité en situation générale Exposé No. 25, 12 p.

Schwartz, L. Les applications O-radonifiantes dans les espaces de suites Exposé No. 26, 19 p.

Assouad, P. Le mouvement brownien sur $[0, 1]$. Applications Φ-sommantes et (Φ, Ψ)-sommantes Exposé No. 27, 11 p.

Assouad, P. Les applications $(\Phi - 0)$-sommantes et $(\Phi - 0)$-radonifiantes Exposé No. 27 bis, 3 p.

Saphar, P. (Annexe n°1) Analyse mathématique : applications p-sommantes et p-décomposantes Art. No. 33, 5 p.

Sunyach, C. (Annexe n°2) Inégalité de Pietsch et factorisation des applications O-radonifiantes Art. No. 34, 5 p.

Bibliographie générale Art. No. 35, 2 p.

Index des notations par exposés Art. No. 36, 1 p.

Index terminologique Art. No. 37, 3 p.

Errata aux exposés 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 13, 16, 17, 26, 24 Art. No. 38, 3 p.

Maurey, B. (Conférence n°1) Applications p-sommantes, pour p réel $\neq 0$, et démonstration d'une conjecture de Pietsch

Chevet, S. (Conférence n°2) Une propriété caractéristique des processus linéaires continus. Applications aux opérateurs p-radonifiants Exposé No. 29, 14 p.

Schwartz, L. (Conférence n°3) Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes Exposé No. 30, 14 p.

Krée, Paul (Conférence n°4) Accouplement de processus linéaires. Images de probabilités cylindriques par certaines applications non linéaires Exposé No. 31, 39 p.

Liste des orateurs

Noms	69/70
Badrikian, A.	4
Schwartz, L.	15
Lepingle, D.	1
Martin, Jacqueline	1
Saphar, Pierre	2
Chevet, S.	4
Assouad, P.	1
Maurey, B.	1
Krée, Paul	1

On trouve aussi une annexe de Sunyach, C. et une de Saphar, Pierre.

Annexe R

Exposés et orateurs au Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, dit « Maurey-Schwartz » (1972-1981)

Liste des exposés

Année 1972-1973

Maurey, B. Probabilités cylindriques, type et ordre. Applications radonifiantes Exposé No. 1, 12 p.

Schwartz, L. Les applications p-sommantes Exposé No. 2, 19 p.

Schwartz, L. Applications p-sommantes et p-radonifiantes Exposé No. 3, 8 p.

Nahoum, A. Fonctions aléatoires linéaires. Théorème de dualité Exposé No. 4, 8 p.

Maurey, B. Probabilités cylindriques stables sur les espaces $L^p, p \geq 2$ et applications du théorème de dualité

Kwapien, S. Sums of independent Banach space valued random variables (after J. Hoffmann-Jørgensen) Exposé No. 6, 6 p.

Maurey, B. Espaces de cotype p, $0 < p \leq 2$ Exposé No. 7, 11 p.

Kwapien, S. Isomorphic characterizations of Hilbert spaces by orthogonal series with vector valued coefficients Exposé No. 8, 7 p.

Schwartz, L. Applications O-radonifiantes Exposé No. 9, 14 p.

Maurey, B. Théorèmes de Nikishin : théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$ Exposé No. 10 et 11, 10 p.

Maurey, B. Théorèmes de Nikishin : théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$ (suite et fin) Exposé No. 12, 8 p.

Lapresté, J. T. Idéaux d'opérateurs. Adjonction Exposé No. 13, 10 p.

Saphar, P. Une caractérisation des sous espaces de L^P et ses applications Exposé No. 14, 12 p.

Maurey, B. Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace $L^p(\Omega, \mu), 0 < p \leq +\infty$ Exposé No. 15, 8 p.

Lapresté, J. T. Opérateurs se factorisant par un espace L^P, d'après S. Kwapien Exposé No. 16, 11 p.

Lapresté, J. T. Opérateurs se factorisant par un espace L^P, d'après S. Kwapien (suite et fin) Exposé No. 16 bis, 6 p.

Maurey, B. Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans un espace L^P Exposé No. 17, 5 p.

Pisier, G. Bases, suites lacunaires dans les espaces L^P, d'après Kadec et Pelczynski Exposé No. 18, 10 p.

Pisier, G. Bases, suites lacunaires dans les espaces L^P, d'après Kadec et Pelczynski (suite et fin) Exposé No. 19, 9 p.

Maurey, B. Un lemme de H. P. Rosenthal Exposé No. 21, 11 p.

Maurey, B. Une nouvelle démonstration d'un théorème de Grothendieck Exposé No. 22, 7 p.

Maurey, B. Sur les sous-espaces de L^P, d'après H. P. Rosenthal Exposé No. 23, 7 p.

Nahoum, A. Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes. I. Le théorème de Menchov Exposé No. 24, 6 p.

Nahoum, A. Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes. II. Les résultats Exposé No. 25, 7 p.

Beauzamy, B. Le théorème de Dvoretzky Exposé No. 26, 13 p. Notice complète | Texte intégral djvu | pdf | Analyses

Beauzamy, B. Le théorème de Dvoretzky (suite) Exposé No. 27, 16 p.

Pisier, G. (Annexe n° 1) Sur les espaces qui ne contiennent pas de 1_n^∞ uniformément Art. No. 27, 9 p.

Année 1973-1974

Davis, W. J. The Radon-Nykodym property Exposé No. 0, 12 p.

Maurey, B. Rappels sur les opérateurs sommants et radonifiants Exposé No. 1, 9 p.

Maurey, B. Rappels sur les opérateurs sommants et radonifiants (suite) Exposé No. 2, 10 p.

Pisier, G. «Type» des espaces normés Exposé No. 3, 11 p.

Maurey, B. Nouveaux théorèmes de Nikishin Exposé No. 4, 9 p.

Maurey, B. Nouveaux théorèmes de Nikishin (suite et fin) Exposé No. 5, 11 p.

Pisier, G. Un théorème d'extrapolation et son application aux suites sommables dans L^o Exposé No. 6, 9 p.

Turpin, P. Convergences de séries dans les espaces d'Orlicz Exposé No. 6 bis, 3 p.

Pisier, G. Sur les espaces qui ne contiennent pas de l_n^1 uniformément Exposé No. 7, 19 p.

Pisier, G. Une propriété du type p-stable Exposé No. 8, 10 p.

Krée, P. Exemples d'utilisation de la théorie des applications radonifiantes Exposé No. 9, 16 p.

Maurey, B. Applications Λp-sommantes Exposé No. 10, 13 p.

Assouad, P. Factorisation des applications Λp-sommantes Exposé No. 11, 23 p.

Maurey, B. Une nouvelle caractérisation des applications (p, q)-sommantes Exposé No. 12, 16 p.

Beauzamy, B. Espaces de Banach uniformément convexifiables Exposé No. 13, 21 p.

Beauzamy, B. Espaces de Banach uniformément convexifiables Exposé No. 14, 17 p.

Brunel, A. Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach Exposé No. 15, 17 p.

Brunel, A. Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach (suite) Exposé No. 16, 1 p.

Beauzamy, B. Opérateurs convexifiants Exposé No. 17, 21 p.

Brunel, A. Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach (suite et fin) Exposé No. 18, 6 p.

Lapreste, J. T. Sous-espaces l_n^p complémentés dans un espace à base inconditionnelle, d'après L. Tzafriri Exposé No. 19, 15 p.

Ovsepian, R. I. ; Pelczynski, A. The existence in every separable Banach space of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in L^2 Exposé No. 20, 15 p.

Pelczynski, A. On a result of Olevski ? : a uniformly bounded orthonormal sequence is not a basis for $C[0, 1]$ Exposé No. 21, 14 p.

Krivine, J. L. Théorèmes de factorisation dans les espaces réticules Exposé No. 22 et 23, 22 p.

Maurey, B. Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionnelles Exposé No. 24 et 25, 25 p.

Farahat, J. Espaces de Banach contenant l^1, d'après H. P. Rosenthal Exposé No. 26, 6 p.

Ryll-Nardzewski, C. ; Woyczynski, A. (Annexe) Convergence en mesure des séries aléatoires vectorielles à multiplicateur borné Art. No. 27, 5 p.

Errata aux exposés 0, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 17, 19 Art. No. 28, 2 p.

Année 1974-1975

Maurey, B. Système de Haar Exposé No. 1, 11 p.

Maurey, B. Système de Haar (suite et fin) Exposé No. 2, 13 p.

Maurey, B. Sous-espaces complémentés de L^P, d' après P. Enflo Exposé No. 3, 14 p.

Schwartz, L. Fonctions mesurables et *-scalairement mesurables, mesures banachiques majorées, martingales banachiques, et propriété de Radon-Nikodym Exposé No. 4, 17 p.

Schwartz, L. Propriété de Radon-Nikodym Exposé No. 5 et 6, 25 p.

Stern, J. Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach Exposé No. 7, 16 p.

Stern, J. Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach (suite et fin) Exposé No. 8, 12 p.

Maurey, B. La propriété de Radon-Nikodym dans un dual, d'après C. Stegall Exposé No. 9, 9 p.

Dacunha-Castelle, D. Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz Exposé No. 10, 10 p.

Dacunha-Castelle, D. Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz (suite) Exposé No. 11, 9 p.

Krivine, J. L. Sur les espaces isomorphes à l^P Exposé No. 12, 14 p.

Reversat, M. Recouvrement d'un cercle par des intervalles Exposé No. 13, 6 p.

Beauzamy, B. Propriétés géométriques des espaces d'interpolation Exposé No. 14, 15 p.

Assouad, P. Espaces p-lisses et q-convexes. Inégalités de Burkholder Exposé No. 15, 7 p.

Assouad, P. Espaces p-lisses. Réarrangements Exposé No. 16, 7 p.

Pisier, G. Le problème des 3 espaces : un contre-exemple de J. Lindenstrauss Exposé No. 17, 9 p.

Beauzamy, B. Points minimaux dans les espaces de Banach Exposé No. 18, 13 p.

Beauzamy, B. Points minimaux dans les espaces de Banach (suite) Exposé No. 19, 19 p.

Farahat, J. Exemples d'espaces b-convexes non réflexifs, d'après James et Lindenstrauss Exposé No. 20, 11 p.

Maurey, B. Projections dans L^1, d'après L. Dor Exposé No. 21, 9 p.

Tomczak-Jaegermann, N. On the differentiability of the norm in trace classes S_p Exposé No. 22, 8 p.

Figiel, T. A short proof of Dvoretzky's theorem Exposé No. 23, 5 p.

Figiel, T. Uniformly convex norms in spaces with unconditional basis Exposé No. 24, 10 p.

Stern, J. Le problème des enveloppes Exposé No. 25, 7 p.

Woyczynski, W. A. A few remarks on the results of Rosinski and Suchanecki concerning unconditional convergence and C-sequences Exposé No. 27, 9 p.

Maurey, B. ; Pisier, G. (Annexe n° 1) Remarques sur l'exposé d'Assouad (n° XVI) Art. No. 26, 7 p.

Pisier, G. (Annexe n° 2) Un exemple concernant la super-réflexivité Art. No. 27, 11 p.

Errata aux exposés 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 20, 23, 24, 25 Art. No. 28, 2 p.

Année 1975-1976

Stegall, Ch. A proof of the Huff-Morris Radon-Nikodym theorem Exposé No. 1, 4 p.

Stegall, Ch. A result of Haydon and its applications Exposé No. 2, 7 p.

Pisier, G. Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach Exposé No. 3, 29 p.

Pisier, G. Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach (suite et fin) Exposé No. 4, 9 p.

Kaijser, S. An application of Grothendieck's inequality to a problem in harmonic analysis Exposé No. 5, 7 p.

Beauzamy, B. Opérateurs de type Rademacher entre espaces de Banach Exposé No. 6 et 7, 28 p.

Sucheston, L. Les amarts (martingales asymptotiques) Exposé No. 8, 6 p.

Maurey, B. Une suite faiblement convergente vers zéro sans sous-suite inconditionnelle Exposé No. 9, 14 p.

Varopoulos, N. Sous-espaces de $\mathbb{C}(G)$ invariants par translation et de type $\mathfrak{L}_1$ Exposé No. 12, 6 p.

Tonge, A. Sur les algèbres de Banach et les opérateurs p-sommants Exposé No. 13, 15 p.

Enflo, P. On the invariant subspace problem in Banach spaces Exposé No. 14 et 15, 6 p.

Maurey, B. Quelques résultats concernant l'inconditionnalité Exposé No. 16, 19 p.

Mouchtari, D. Sur l'existence d'une topologie du type de Sazonov sur un espace de Banach Exposé No. 17, 11 p.

Enflo, P. Uniform homeomorphisms between Banach spaces Exposé No. 18, 6 p.

Lindenstrauss, J. The dimension of almost spherical sections of convex bodies Exposé No. 19 et 20, 13 p.

Maurey, B. Tout opérateur d'une C^*-algèbre dans un espace de cotype 2 se factorise par un Hilbert, d'après G. Pisier Exposé No. 21, 8 p.

Billard, P. Primarité des espaces $C(\alpha)$ (α ordinal infini $< \omega_1 =$ premier ordinal non dénombrable) Exposé No. 22, 7 p.

Schwartz, L. Certaines propriétés des mesures sur les espaces de Banach Exposé No. 23, 12 p.

Starbird, T. Enflo operators of L^1 Exposé No. 24, 5 p.

James, R. C. Quasi-reflexive Banach spaces Exposé No. 25, 7 p.

Pisier, G. (Annexe n° 1) Corrections et additions à l'exposé III Art. No. 21, 6 p.

Errata aux exposés I et II Art. No. 22, 3 p.

Exposé IV. Additif au théorème (4.3) Art. No. 23, 3 p.

Errata aux exposés 13, 19, 20 Art. No. 24, 1 p.

Année 1977-1978

Krivine, J. L. Constantes de Grothendieck et fonctions de type positif sur les sphères Exposé No. 1 et 2, 17 p.

Beauzamy, B. Propriété de Banach-Saks et modèles étalés Exposé No. 3, 16 p.

Choodnovsky, D. V. Sequentially continuous mappings of product spaces Exposé No. 4, 15 p.

Beauzamy, B. Factorisation des propriétés de Banach-Saks Exposé No. 5, 16 p.

Stern, J. Arbres dont toutes les branches sont faiblement Cauchy Exposé No. 6, 8 p.

Pisier, G. Les inégalités de Khintchine-Kahane, d'après C. Borell Exposé No. 7, 14 p.

Delbaen, F. Weakly compact sets in L^1/H_0^1 Exposé No. 8, 4 p.

Tzafriri, L. Symmetric structures in some Banach lattices Exposé No. 9, 14 p.

Enflo, P. On infinite-dimensional topological groups Exposé No. 10 et 11, 11 p.

Talagrand, M. Espaces de Banach faiblement k-analytiques Exposé No. 12 et 13, 10 p.

Pisier, G. Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2 Exposé No. 14, 12 p.

Beauzamy, B. Projections contractantes dans les espaces de Banach Exposé No. 16, 7 p.

Pisier, G. Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues Exposé No. 17 et 18, 33 p.

Chevet, S. Séries de variables aléatoires gaussiennes à valeurs dans $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$. Application aux produits d'espaces de Wiener abstraits Exposé No. 19, 15 p.

Lapreste, J. T. Suites écartables dans les espaces de Banach Exposé No. 20, 11 p.

Host, B. ; Parreau, F. Sur les mesures quasi-idempotentes et la fermeture de $\mu * L^1$ Exposé No. 21 et 22, 19 p.

Lapreste, J. T. Type, cotype et mesures de Levy sur les espaces de Banach Exposé No. 23, 15 p.

Giné, E. A survey on the general central limit problem in Banach spaces Exposé No. 24, 17 p.

Guerre, S. Procédé de convergence minimale dans les espaces de Banach. Une loi des grands nombres et un théorème ergodique Exposé No. 25, 14 p.

Lust-Piquard, F. Propriétés géométriques des sous-espaces invariants par translation de $L^1(G)$ et $C(G)$ Exposé No. 26, 9 p.

Samuel, C. Exemples d'espaces de Banach ayant la propriété de projection uniforme Exposé No. 27, 15 p.

Bellow, A. (Appendice n°1) Sufficiently rich sets of stopping times, measurable cluster points and submartingales Art. No. 22, 11 p.

Saphar, P. Sur les sous-espaces des espaces de Banach à base inconditionnelle, d'après Feder Exposé No. 15, 5 p.

Corrections to expose XXIV Art. No. 24, 1 p.

Année 1978-1979

Mityagin, B. Geometry of nuclear spaces - I Exposé No. 1, 10 p.

Mityagin, B. Geometry of nuclear spaces. II - Linear topological invariants Exposé No. 2, 10 p.

Mityagin, B. Geometry of nuclear spaces. III - Spaces of holomorphic functions Exposé No. 3, 8 p.

Bourgain, J. Un espace $\mathfrak{L}^\infty$ jouissant de la propriété de Schur et de la propriété de Radon-Nikodym Exposé No. 4, 7 p.

Gatesoupe, M. Problèmes de complémentation de sous-algèbres dans l'algèbre des séries de Fourier en deux variables absolument convergentes Exposé No. 5, 13 p.

Baillon, J. B. Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach - I Exposé No. 7, 13 p.

Baillon, J. B. Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach - II Exposé No. 8, 32 p.

Bozejko, M. ; Pelczynski, A. An analogue in commutative harmonic analysis of the uniform bounded approximation property of Banach space Exposé No. 9, 9 p.

Pisier, G. Estimations des distances à un espace euclidien et des constantes de projection des espaces de Banach de dimension finie ; d'après H. König et al. Exposé No. 10, 21 p.

Lebourg, G. Problèmes d'optimisation dépendant d'un paramètre à valeurs dans un espace de Banach Exposé No. 11, 15 p.

Ekeland, I. Relations d'ordre dans les Banach : quelques applications à l'analyse Exposé No. 12, 7 p.

Beauzamy, B. Sous-espaces invariants dans les espaces de Banach : quelques résultats positifs Exposé No. 13, 13 p.

Szankowski, A. The space of all bounded operators on Hilbert space does not have the approximation property xxi+7 p

Pisier, G. Sur les espaces de Banach de dimension finie à distance extrêmale d'un espace euclidien, d'après V. D. Milman et H. Wolfson Exposé No. 16, 10 p.

Pisier, G. La méthode d'interpolation complexe : applications aux treillis de Banach Exposé No. 17, 18 p.

Beauzamy, B. Réitération de modèles étalés Exposé No. 18, 8 p.

Maurey, B. Isomorphismes entre espaces H_1 Exposé No. 19 et 20, 7 p.

Schechtman, G. A disjointness property of l_p^n sequences in L_p Exposé No. 21, 13 p.

Schechtman, G. On the relation between several notions of unconditional structure - A counterexample Exposé No. 22, 10 p.

Schechtman, G. A simple proof of two theorems concerning bases of $C(0,1)$ Exposé No. 23, 3 p.

Capon, M. Primarité de $L^P(\ell_r), 1 < p, r < \infty$ Exposé No. 25, 21 p.

Samuel, C. Sur la reproductibilité des espaces l_p Exposé No. 26, 17 p.

Beauzamy, B. Sous-espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach Exposé No. 27, 25 p.

Rosenthal, H. P. Subspaces of L^p which do not contain L^p-isomorphically Exposé No. 28, 9 p.

Bourgain, J. Un espace non Radon-Nikod ?m sans arbre diadique Exposé No. 29, 6 p.

Lapresté, J. T. Sur une propriété des suites asymptotiquement inconditionnelles Exposé No. 30, 8 p.

Année 1979-1980

Maurey, B. Tout sous-espace de L^1 contient un l_p, d'après D. Aldous Exposé No. 1 et 2, 13 p.

Assouad, P. Plongements lipschitziens dans un espace pentagonal Exposé No. 3, 12 p.

Bourgain, J. Walsh subspaces of L^p-product spaces Exposé No. 4, 14 p.

Levy, M. Prolongement d'un opérateur d'un sous-espace de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$ Exposé No. 5, 5 p.

Bercovici, H. Modèle de Jordan pour des contractions sur l'espace de Hilbert Exposé No. 6, 12 p.

Bercovici, H. Théorie de l'indice pour des opérateurs non-Fredholm Exposé No. 7, 12 p.

Guerre, S. La propriété de Banach Saks ne passe pas de E à $L^2(E)$, d'après J. Bourgain Exposé No. 8, 9 p.

Kahane, J. P. Polynômes à coefficients unimodulaires sur le cercle unité Exposé No. 9, 10 p.

Pisier, G. Sur les espaces de Banach K-convexes Exposé No. 11, 15 p.

Krivine, J. L. Plongement de l^p dans certains espaces de Banach Exposé No. 12, 5 p.

Pisier, G. Conditions d'entropie assurant la continuité de certains processus et applications à l'analyse harmonique Exposé No. 13 et 14, 43 p.

Carne, T. K. Operator algebras Exposé No. 15, 9 p.

Johnson, W. B. Banach spaces all of whose subspaces have the approximation property Exposé No. 16, 11 p.

Johnson, W. B. Operators into L_p which factor through l_p Exposé No. 17, 6 p.

Johnson, W. B. Complemented subspaces of L_p which embed into $\ell_p \otimes \ell_2$ Exposé No. 18, 12 p.

Assouad, P. Caractérisations de sous-espaces normés de L^1 de dimension finie Exposé No. 19, 10 p.

Tzafriri, L. Some results on injective Banach lattices Exposé No. 20, 4 p.

Guerre, S. Quelques propriétés des espaces de Banach stables Exposé No. 21, 14 p.

Pisier, G. Factorisation d'opérateurs aléatoires, d'après Benyamini et Gordon Exposé No. 22, 11 p.

Szarek, S. J. Bases in the spaces C and L^1 Exposé No. 23, 8 p.

Ghoussoub, N. On spaces with local unconditional structure Exposé No. 24, 8 p.

Szarek, S. J. Volume estimates and nearly euclidean decompositions for normed spaces Exposé No. 25, 8 p.

Schwartz, L. Les semi-martingales et la théorie de la mesure Exposé No. 26, 9 p.

Bourgain, J. Complémentation de sous-espaces L^1 dans les espaces L^1 Exposé No. 27, 7 p.

König, H. Some estimates for type and cotype constants Exposé No. 28, 13 p.

Année 1980-1981

Schütt, C. Some geometric properties of finite dimensional, symmetric Banach spaces Exposé No. 1, 4 p.

Pisier, G. Semi-groupes holomorphes et K-convexité Exposé No. 2, 30 p.

Bourgain, J. Nouvelles propriétés des espaces L^1/H^1_0 et H^∞ Exposé No. 3, 12 p.

Bourgain, J. Unicité de certaines bases inconditionnelles Exposé No. 4, 8 p.

Pisier, G. Remarques sur un résultat non publié de B. Maurey Exposé No. 5, 12 p.

Godefroy, G. Nouvelles classes d'espaces de Banach à prédual unique Exposé No. 6, 28 p.

Pisier, G. Semi-groupes holomorphes et K-convexité (suite) Exposé No. 7, 9 p.

Maurey, B. Points fixes des contractions de certains faiblement compacts de L^1 Exposé No. 8, 18 p.

Tomczak-Jaegermann, N. Dimensional gradations and cogradations of operator ideals. The weak distance between Banach-spaces Exposé No. 9, 30 p.

Lindenstrauss, J. Uniqueness of some unconditional bases II Exposé No. 10, 10 p.

Nielsen, N. J. Bounded operators on tensor products of Banach lattices Exposé No. 11, 13 p.

Ghoussoub, N. On operators fixing copies of c_o and ℓ_∞ Exposé No. 12, 11 p.

Errata à l'exposé XXIV du Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1979-1980 Art. No. 13, 1 p.

Erratum Art. No. 14, 1 p.

Liste des orateurs

Noms	70/71	71/72	74/75	75/76	77/78	78/79	79/80	80/81
Schwartz, L.	3		3	1			1	
Saphar, Pierre	1				1			
Chevet, S.					1			
Assouad, P.		1	2				2	
Maurey, B.	11	8	5	3		2	2	1
Krée, Paul		1						
Nahoum, A.	3							
Kwapien, S.	2							
Lapresté, J.T.	2	1			2	1		
Pisier, G.	3	4	1	2	4	3	4	3
Beauzamy, B.	2	3	3	2	3	3		
Davis, W.J.		1						
Turpin, P.		1						
Brunel, A.		3						
Ovsepian, R.I.		1						
Pelczynski, A.		2				1		
Krivine, J.L.		1	1		2		1	
Farahat, J.		1	1					
Ryll-Nardzewski								
Woyczynski, A.			1					
Stern, J.			3		1			
Dacunha-Castelle, D.			2					
Reversat, M.			1					
Tomczak-Jaegermann, N.			1					1
Figiel, T.			2					

Stegall, Ch.				2				
Kaijser, S.				1				
Sucheston, L.				1				
Varopoulos, N.				1				
Tonge, A.				1				
Enflo, P.				3	1			
Mouchtari, D.				1				
Lindenstrauss, J.				2				1
Billard, P.				1				
Starbird, T.				1				
James, R.C.				1				
Choodnovsky, D.V.					1			
Delbaen, F.					1			
Tzafriri, L.					1		1	
Talagrand, M.					2			
Host, B.					2			
Parreau, F.					2			
Giné, E.					1			
Guerre, S.					1		3	
Lust-Piquard, F.					1			
Samuel, C.					1	1		
Bellow, A.								
Mityagin, B.						3		
Bourgain, J.						2	2	2
Gatesoupe, M.						1		
Baillon, J.B.						2		
Bozejko, M.						1		
Lebourg, G.						1		
Ekeland, J.						1		
Szankowski, A.						1		
Schechtman, G.						3		
Capon, M.						1		
Rosenthal, H.P.						1		
Levy, M.							1	
Bercovici, H.							2	
Kahane, J.P.							1	
Carne, T.K.							1	
Johnson, W.B.							3	
Szarek, S.J.							2	
Ghoussoub, N.							1	1
König, H.							1	
Schütt, C.								1
Godefroy, G.								1
Nielsen, N.J.								1

Annexe S

Décision portant statut des laboratoires de recherches de l'École Polytechnique. Datée du 20 mars 1957.

ARTICLE I. Chaque professeur titulaire d'une chaire ou chaque Chef de Travaux Pratiques à l'Ecole est encouragé à organiser à l'Ecole un laboratoire de recherche et de formation à la recherche, dont il assume personnellement la direction.

La création de laboratoires fait l'objet d'une décision du Ministre de la Défense Nationale, après avis du Conseil de perfectionnement.

ARTICLE II. Les buts de tels laboratoires sont :

1°) De donner aux Professeurs ainsi qu'aux Examinateurs et aux Maîtres de conférences collaborant avec eux, les moyens de poursuivre, dans le cadre de l'Ecole, des recherches personnelles qui sont un élément indispensable de la promotion de leur enseignement

2°) D'offrir, avec les cadres permanents et les moyens matériels attachés au Laboratoire, des possibilités d'initiation et de formation à la recherche :

   a) pour les Elèves volontaires présents à l'Ecole, auxquels le Laboratoire doit être largement ouvert

   b) pour des chercheurs qui seront recrutés par priorité parmi les anciens élèves de l'Ecole polytechnique, en particulier parmi les Ingénieurs de l'Etat civils et militaires, et parmi les Officiers autorisés à faire, au cours de leur engagement dans les armées, un stage de complément scientifique

3°) D'effecteur éventuellement, à côté des recherches de base, des recherches contractuelles ; pour ces dernières, et selon l'orientation et les moyens des Laboratoires, elles seront effectuées de préférence au profit des Services de l'Etat recrutant, comme Ingénieurs ou comme Officiers, des anciens élèves de l'Ecole polytechnique.

ARTICLE III. Chaque Laboratoire et les services en dépendant sont placés sous l'autorité du Directeur de Laboratoire.

Toutefois, la présence au Laboratoire des chercheurs ou collaborateurs divers, permanents, détacés ou stagiaires, est soumise à l'agrément du Général Commandant l'Ecole.

ARTICLE IV. Le Directeur de Laboratoire est assisté d'un Conseil Scientifique ;

a) qui sera consulté et tenu au courant en ce qui concerne l'orientation générale et le développement de l'activité du Laboratoire

b) qui devra donner son accord sur les Conventions de recherche envisagées.

Ce Conseil, propre à chaque Laboratoire, comporte, à côté du Directeur de Laboratoire :

- le Général, Président du Comité d'Action Scientifique de Défense Nationale, ou son représentant habilité
- le Général Commandant l'Ecole polytechnique ou son représentant habilité, qui pourra être un membre du Conseil de perfectionnement
- le Directeur des Etudes de l'Ecole polytechnique
- Trois personnalités choisies en raison de leurs compétences en amtières scientifiques ou techniques.

Les membres autres que ceux qui font partie du Conseil es-qualité sont nommés pour 3 ans par le Ministre, sur propositin du Directeur de Laboratoire ; en cas de changement de titulaire de la chaire, le renouvellement de ces membres est immédiat.

Les fonctions de membre du Conseil Scientifique sont gratuites.

ARTICLE V. Les Laboratoires de recherche et de formation à la recherche sont rattachés sur le plan administratif et comptable, à la Personnalité Civile de l'Ecole polytechnique, Etablissement public à caractère administratif jouissant de l'autonomie financière.

Pour remplir les fonctions définies à l'article II (§1 et 2), les Laboratoires sont dotés :

a) d'un personnel d'encadrement des chercheurs en cours de formation et d'un personnel auxiliaires

b) de crédits de fonctionnement et d'équipement couvrant les frais de personnel et de matériel correspondants.

Ces crédits devront provenir :

1°) des allocations forfaitaires attribuées, au titre du budget de la Défense Nationale, destinées à couvrir des dépenses relatives aux activités fondamentales (article II, §1 et 2à

2°) éventuellement des ressources provenant des subventions par les assujettis à la taxe d'apprentissage, en vue d'obtenir les exonérations prévues par les articles 3 à 23 de l'annexe 1 du Code général des impôts ainsi que de dons et legs divers

ARTICLE VI Le Conseil de l'Ecole :

1°) Répartit entre les différents laboratoires les ressources destinées à l'ensemble des Laboratoires et visées à l'article V.

2°) Approuve les projets de budgets particuliers de chaque Laboratoire.

3°) Approuve les rapports annuels de gestion présenté par les divers COnseils Scientifiques.

ARTICLE VII. Le Général Commandant l'Ecole, Président du Conseil de l'Ecole :

1°) Engage et ordonnance les dépenses des différents Laboratoires

2°) Signe celles des conventions de l'article II (3°) passées avec des organismes de la Défense Nationale. Les fonds provenant de ces conventions sont administrés par la Personnalité Civile, mais il restent réservés au Laboratoire intéressé.

3°) Signe, sur proposition des Directeurs de Laboratoires, les contrats d'embauchage ou de travail des personnels permanents ou temporaires rémunérés sur les fonds administrés par la Personnalité Civile et en particulier sur ceux provenant des conventions.

Les obligations légales de l'employeur sont assurées par la Personnalité Civile et non par le Directeur de Laboratoire.

ARTICLE VIII.

- L'Agent Comptable de la Personnalité Civi encaisse les recettes et effectue le paiement des dépenses.
- Il assure le paiement des traitements, salaires et accessoires de salaires, y compris les charges sociales correspondantes, des personnels rémunérés sur les fonds administrés par la Personnalité Civile.
- Il assure le paiement des factures concernant les achats de matériels ou matières de consommation courante effectués sur les fonds administrés par la Personnalité Civile. Ces achats font l'objet de bons de commance établis par les Directeurs de Laboratoires.
- Il effectue les remboursement correspondants aux frais généraux de fonctionnement des Laboratoires (eau, gaz, électricité, chaufage, etc...)

ARTICLE IX. - L'Agent Comptable tient un registre-journal où sont inscrites toutes les recettes et dépenses intéresant la Personnalité Civile.

Il tient en outre, par laboratoire, des comptes particuliers permettant de suivre par rubrique les dépenses courantes de fonctionnement, et pour chaque convention, les dépenses particulières inhérentes à cette convention.

Il donn toutes facilités aux Directeurs de Laboratoires pour suivre l'évolution de leur compte particulier.

ARTICLE X - L'Agent Comptable tient, par Laboratoire, la comptabilité de tous les matériels achetés sur les fonds gérés par la Personnalité Civile et dont le Directeur de Laboratoire est détenteur "responsable".

ARTICLE XI - Les Directeurs de Laboratoires peuvent, à titre personnel et avec l'agrément de leur Conseil Scientifique, effectuer ? [1] ou recherches au profit d'organismes n'appartenant pars à la Défense National et avec lesquels ils n'ont pas de conventions particulières.

? Il peuvent, s'ils le désirent, effectuer les ? administrative et comptables afférentes à la ? des subventions sans intervention de la Personnalité Civile.

Un Laboratoire ne doit pas consacrer plus d'un quart de son activité à l'exécution de conventions avec des organismes dont la gestion financière n'est pas soumise au contrôle de l'Etat.

Le MINISTRE de la DEFENSE NATIONALE ET DES FORCES ARMEES, Signé : M. BOURGES-MAUNOURY

LE SECRETAIRE D'ETAT AUX FORCES ARMEES "TERRE" Signé : Max Lejeune.

1. Les ? correspondent à des mots non lisibles sur la photographie en ma possession.

Annexe T

Extraits du rapport de conjoncture du C.N.R.S. 1969

Le rapport de conjoncture du C.N.R.S. 1969 [1] propose, ainsi que nous allons le voir, un modèle de laboratoire de mathématiques, les I.R.M.A., en réponse aux problèmes constatés dans le fonctionnement de la recherche mathématique. Ce rapport questionne de nombreux aspects - matériels, orientation scientifique, humains...– de la vie collective des mathématiques.

« Le C.N.R.S. joue an matière de recherche un rôle pilote. » Suite aux bouleversement du système traditionnel universitaire à cette date, la Commission s'interroge sur « l'avenir de la recherche mathématiques » dont le C.N.R.S. se sent responsable.

Il donne un exposé très précis de la situation de la recherche mathématiques en France, de ses problèmes, et donne des propositions concrètes comme perspective d'avenir. Le principal aspect qui ressort est la prise de conscience de la nécessaire réforme du système universitaire traditionnel et de l'absence de laboratoires en mathématiques, qui est un manque auquel il faut remédier.

Le rapport commence donc par une analyse de la situation. La recherche mathématique est presqu'en totalité effectuée à cette date à l'intérieur d'un système universitaire traditionnel. Or les chercheurs sont devenus des enseignants puis des organisateurs d'enseignement, « perdant le calme et les disponibilités d'esprit nécessaires à la recherche ». Il n'y a que quelques rares possibilités pour faire de la recherche dans les conditions favorables : l'IHES, le Collège de France, quelques postes de chercheurs au C.N.R.S., mais cela reste très limité. Les principales difficultés observées sont classées par thème :

A) Conception et orientation scientifique de la recherche

B) Difficultés de la recherche mathématique universitaire liées à des problèmes de situation du personnel scientifique.

C) Difficultés de la recherche mathématique liées à des problèmes de relations entre mathématiciens : encadrement et direction scientifique des chercheurs, travail en équipes, séminaires.

D) Problèmes de moyens pour la recherche mathématiques universitaire.

En ce qui concerne l'orientation scientifique de la recherche, la Commission regrette les orientations individuelles, qui se font sans concertation au sein d'équipes. Une des difficultés concernant la situation du personnel scientifique est celle de l'inadéquation de la thèse d'État :

1. Archives du C.N.R.S., Gif-sur-Yvette

> Du point de vue de la recherche, en tout cas, la thèse actuelle ne favorise pas l'ouverture et les coopérations nécessaires à la recherche moderne[...] En cela, elle favorise un mode de travail replié et trop explicitement motivé par la recherche d'une qualification, trop individuel et parfois trop timoré.

ainsi que la faible utilisation des postes de chercheurs offerts par le C.N.R.S.. Mais c'est dans l'exposition des difficultés liées à des problèmes de relations entre mathématiciens que l'on saisit le cœur du problème, à savoir la non-organisation du travail en équipes :

> Le travail est meilleur toutes les fois que des échanges peuvent s'établir directement entre les jeunes chercheurs (et pas seulement chacun d'eux et leur patron) ; soit sous forme de collaborations personnelles, soit sous forme d'équipes plus nombreuses centrées sur un sujet de grande envergure scientifique. Le bon fonctionnement de telles équipes réclame la présence en leur sein d'une proportion assez forte de chercheurs confirmés (français ou étrangers de passage ; disons 1 sur 3 ou 4 pour fixer des idées) consacrant à ce travail une part importante de leur activité. Ces conditions ne sont qu'exceptionnellement réalisées dans la situation actuelle telle qu'elle a été analysée ci-dessus, en particulier puisque la plupart des chercheurs confirmés sont versés, dès l'obtention de leur thèse, dans l'enseignement supérieur où les nécessités de l'enseignement de masse les absorbent au moment même où ils abordent leur période productive.

Cela se traduit même « dans l'ambiance assez morne qui règne dans de nombreux séminaires de mathématiques. » Le rapport mentionne alors que « l'ambiance est bien plus vivante quand le séminaire est animé par une équipe habituée à un travail coordonné en commun. » La clef du problème, à savoir l'absence de laboratoires en mathématiques, est explicitée dans la liste des problèmes de moyens pour la recherche mathématique universitaire :

> D'une manière générale, on peut dire que, conformément au système universitaire traditionnel qui s'est perpétué jusqu'à la période actuelle (...), *les chercheurs mathématiciens travaillant dans le cadre universitaire ne disposent pas de moyens matériels propres à la recherche* : il n'y a pas réellement dans les Facultés de Sciences de laboratoires de mathématiques (comme il y a des laboratoires de physique, de biologie ou de psychologie), mais seulement des moyens (personnels, locaux, matériel de reproduction, bibliothèques, etc.) utilisés à la fois pour l'enseignement et pour la recherche. Comtpe tenu des nécessités de l'enseignement de masse, cet état de fait entraîne une notoire insuffisance de moyens(...)

On note ainsi l'« absence de locaux réservés à la recherche » :

> Dans chaque département de mathématiques, les locaux disponibles (amphis, salles de cours, bureaux, bibliothèques, locaus de service et d'accueil) sont communs à l'enseignement et à la recherche, ou, plus exactement, sont des locaux de l'enseignement supérieur susceptibles d'abriter la recherche en plus de l'enseignement. Dans ces conditions, l'enseignement de masse que doivent héberger ces locaux communs impose ses impératifs au détriment du minimum nécessaire à la recherche : même lorsque le volume des locaux disponibles est suffisant pour que chaque mathématicien ait au moins une table de travail à l'université (ce qui n'est pas encore toujours le cas malgré l'importance des constructions nouvelles), les chercheurs sont constamment soumis à l'agitation inhérente aux tâches d'enseignement de masse et de ce fait n'ont pas le calme nécessaire à la recherche. Cela est valable aussi bien pour les professeurs disposant d'un bureau personnel (où ils sont constamment sollicités par les tâches d'organisation et d'administration de l'enseignement) que pour les assistants, maîtres assistants ou boursiers du C.N.R.S. qui doivent travailler dans des salles communes.

> Face à cette situation, les mathématiciens universitaires sont amenés à travailler à leur domicile personnel, ou à partir à l'étranger (...) ; absence qui seraient tout à fait normales à doses raisonnables, mais qui systématiques imposées, contribuent fortement au manque de dynamisme collectif de la recherche étudié ci-dessus dans les alinéas A et C.

Cette analyse globale, des problèmes relevés assez uniformément dans les universités, connaît quelques solutions locales. Ainsi est mentionné le cas de Strasbourg :

> Souvent, l'obtention de possibilités de travail convenables pour la recherche mathématique est le résultat de l'effort systématique qui est fait par les mathématiciens locaux pour prévoir et mettre en place des moyens propres à la recherche : par exemple à Strasbourg, la nomination d'un directeur de recherche au C.N.R.S. (le seul en mathématiques pures pour la section 1), la réalisation prévue d'un Institut de Recherche mathématiques (I.R.M.A.) avant la fin du Vè plan, et la mise en place d'un laboratoire associé au C.N.R.S. renforcent le potentiel de recherche du département de mathématiques local.(...)

C'est ce type de solution qui va être proposé comme modèle pour restructure la recherche mathématique universitaire. Avant de donner les détails concernant la solution concrète des I.R.M.A., voici les résumés des « Perspectives d'avenir : principes directeurs et moyens à mettre en œuvre » proposé par la Commission :

a) Au point de vue *orientation scientifique* (alinéa A) : à côté de quelques grands thèmes de défrichage, encourager le regroupement des efforts autour de sujets concrets, soit d'approfondissement de domaines déjà défrichés soit à motivation appliquées

b) Au point de vue *situation des chercheurs* (alinéa B) : décharger les chercheurs qualifiés (à tous les stades de leur carrières, et pas seulement au début) des tâches courantes d'organisation de l'enseignement de masse de manière à leur permettre de jouer pleinement leur rôle de mathématicien pour le développement des mathématiques, leur diffusion dans toutes les branches de l'activité humaine et la formation des futurs chercheurs.

c) Au point de vue *fonctionnement scientifique de la recherche* (alinéa C) : favoriser le développement d'équipes suffisamment fortes centrées autour de thèmes importants et contribuant, d'une part à la formation, à l'orientation et à la qualification des jeunes chercheurs, et d'autre part à l'insertion de la recherche mathématique dans l'ensemble des activités contemporaines.

d) Au point de vue moyens (alinéa D) : fournir à la recherche mathématique des *moyens* de travail (statut des chercheurs, services, crédits de fonctionnement courant, personnel technique, missions et invitations de chercheurs étrangers) propres à la recherche (c'est-à-dire indépendants des nécessités de l'enseignement de masse) en réalisant de véritables « instituts de recherches mathématiques » (I.R.M.A.) comportant une autonomie et un personnel de gestion suffisant pour pouvoir renforcer le potentiel de recherche et favoriser le contact des mathématiciens de toutes origines (chercheurs purs, enseignants, praticiens, etc.)

Le point de vue fonctionnement sicentifique et la proposition concrète de création des I.R.M.A. pour lesquels on prévoit des moyens regroupe les solutions proposées. On veut des laboratoires de mathématiques, indépendants de l'enseignement, comme lieu propice à la recherche, doté d'un fonctionnement et d'une organisation précise. Cela permet de regrouper les mathématiciens par équipe, autour de grandes thématiques de recherche. C'est le lieu de formation de la recherche. Regardons les détails pour ces I.R.M.A., puis les projets de création prévus dans ce rapport.

Importance de ces équipes pour la formation et l'orientation des jeunes chercheurs. Il existe déjà des solutions pour associer un lieu universitaire au C.N.R.S. : Laboratoire associé (L.A.), Recherche coopérative sur programme (R.C.P.), Groupe de Recherche (G.R.) ou Equipes de Recherche associées (E.R.A.) qui « doivent permettre aux équipes de mathématiques d'obtenir les crédits de fonctionnement ou de missions nécessaires, tout en étant hébergées dans des locaux variables selon les besoins de leur travail (locaux universitaires ou I.R.M.A.), laboratoires divers scientifiques ou industriels, centres de calcul, etc., avec une large décentralisation. »

Une proposition très concrète est faite : la création des I.R.M.A., dont la description présente une forme particulière de laboratoires adaptée au mathématiques :

> Au point de vue services, la recherche mathématique doit pouvoir s'appuyer sur un certain nombre d'instituts de recherche mathématique (I.R.M.A.).
>
> Un I.R.M.A. est un organisme réservé à la recherche comportant les locaux de travail et d'accueil, la bibliothèque (spécialisée en mathématiques) et ses annexes (secrétariat, photocopie, multigraphie) ainsi que le personnel technique et administratif nécessaire, d'une part pour supporter le travail régulier d'une cinquantaine de chercheurs mathématiciens (travail individuel ou en groupes ; séminaires et cours spécialisés niveau recherche), et d'autre part pour organiser et accueillir des réunions de recherche exceptionnelles (congrès, colloques, écoles d'été). Les locaux de travail doivent comprendre des salles de conférence, des bureaux et de nombreuses petites salles de travail ou de discussion par petits groupes ; et les locaux d'accueil, une salle de réunion et, si possible, quelques logements dans le voisinage pour les chercheurs étrangers de passage.
>
> Un I.R.M.A. est à concevoir plutôt comme un « *service d'hébergement* » de chercheurs mathématiciens que comme un laboratoire : certains chercheurs peuvent y avoir leur lieu habituel de travail, d'autres ne font qu'y passer pour venir utiliser la bibliothèque et ses services ou pour y participer à des réunions d'équipes de recherche (alinéa C ci-dessous), des séminaires ou des colloques ; les disciplines mathématiques représentées peuvent y être assez diverses, pures ou appliquées, avec éventuellement sur place un petit ordinateur ou un terminal de gros ordinateur (...)
>
> AU point de vue administratif, un I.R.M.A. doit jouir d'une autonomie suffisante, avec un directeur administratif responsable de la gestion et de l'animation générale devant un comité scientifique. Un budget indépendant doit permettre l'entretien des locaux, le financement des divers services et l'organisation des diverses rencontres (colloques, écoles d'été, etc.) qui y auront lieu ; par contre, ne relèvent de ce budget, ni les traitements des chercheurs ou du personnel technicien, ni, en principe, les crédits de fonctionnement ou de mission nécessaires aux équipes de recherche, ces derniers devant être obtenus par le canal des formations de recherche du C.N.R.S. (...)
>
> Au point de vue statut public, on peut concevoir un I.R.M.A. comme « unité de recherche » d'un établissement universitaire, ou comme un « service propre » du C.N.R.S.
>
> Au point de vue implantation, les I.R.M.A. doivent être situés à proximité d'établissements universitaires ou d'ensembles de laboratoires afin de venir en renforcer le potentiel de recherche. Toutefois, on peut aussi prévoir un I.R.M.A. isolé destiné à héberger des retraites de travail (individuelles ou en groupe) et des écoles d'été.
>
> Au point de vue nombre, il est naturel d'envisager la mise en place d'un I.R.M.A. adapté aux besoins locaux dans chaque université ayant un groupe de chercheurs mathématiciens actif ; avec un minimum d'un I.R.M.A. par « région universitaire », plus les I.R.M.A. à vocation nationale.

Prévision de création des I.R.M.A. d'ici la fin du Vème plan : 3 IRMA

- l'Institut Henri Poincaré, qui doit être rénové à l'automne 1969 pour devenir un I.R.M.A. à vocation nationale de lieu de travail et de rencontres

– Les I.R.M.A. de Grenoble et de Strasbourg qui sont déjà prévus dans le Ve Plan (avec respectivement 4,75 et 4,25 MF inscrits)

Pendant le VIe Plan, il faut prévoir la réalisation d'un minimum de six I.R.M.A. répartis comme suit :

– un I.R.M.A. dans la région parisienne à l'université d'Orsay
– un I.R.M.A. isolé analogue au Centre allemand d'Oberwolfach dans la Forêt-Noire (...)
– quatre I.R.M.A. dans des universités de province ayant des groupes de recherche mathématique importants : Nice, Marseille ou Toulouse, Rennes, Lille ou Nancy

Les budgets et la mise en œuvre sont aussi décrites ; il faut notamment prévoir des techniciens pour prévoir ces Instituts – le rapport indiquant que ce n'est pas aux mathématiciens, même en retraite, d'effectuer le travail administratif que cela représente.

– A) Conception et orientation scientifique de la recherche Recherche de masse. Orientations individuelles, sans concertation.
– B) Difficilutés de la recherche mathématique universitaire liées à des problèmes de situation du personnel scientifique. Formation ; recherche, enseignement, encadrement ; qualification. Notamment est mise en avant l'inadéquation de la thèse d'Etat :

  > Du point de vue de la recherhce, en tout cas, la thèse actuelle ne favorise pas l'ouverture et les coopérations nécessaires à la recherche moderne[...] En cela, elle favorise un mode de travail replié et trop explicitement motivé par la recherche d'une qualification, trop individuel et parfois trop timoré.

  Les possibilités offertes par le C.N.R.S. sont encore peu utilisées.
  grade et fonction, mobilité...
– C) Difficultés de la recherche mathématique liées à des problèmes de relations entre mathématiciens : encadrement et direction scientifique des chercheurs, travail en équipes, séminaires.

1. Encadrement et direction scientifique des chercheurs.

   Le système traditionnel de direction scientifique des chercheurs débutants par les professeurs est encore le plus courant mais ne fonctionne plus de façon satisfaisante dans la plupart des cas. Cela relève à la fois des difficultés universitaires étudiées en B) et du malaise scientifique signalé en A) ci-dessus : d'une part les « patrons de thèse » ont trop d'élèves pour le peu de disponibilité que leur laissent les tâches d'enseignement de masse ; et d'autre part nombre de ces élèves n'ont en fait pas de goût spécial pour la recherche « pure » mais sont contraints d'en faire, afin d'obtenir leur qualification comme enseignants (...) d'où il résulte un grand isolement et beaucoup d'errements chez les jeunes chercheurs dans le choix d'un sujet de recherche, en particulier des orientations dispersées et malsaines du type « abus de la méthode axiomatique » (alinéa A) lesquelles donnent lieu, pour les bons éléments, à des travaux au-dessous de leurs possibilités (car mieux encadrés ils auraient pu participer à des développements moins contingents) et pour les moins bons à des travaux sans intérêt, alors que, plus précisément dirigés, ils auraient pu faire œuvre utile dans des sujets plus appliqués (on peut illustrer ce dernier point par l'exemple de l'analyse numérique - résolution des équations différentielles - où un éventail de thèmes à la fois large - du plus pratique au plus théorique - et centré -il s'agit de résoudre des équations-permet à chaque élève

2. Travail en équipes.

   Le travail est meilleur toutes les fois que des échanges peuvent s'établir directement entre les jeunes chercheurs (et pas seulement chacun d'eux et leur patron) ; soit sous forme de collaborations personnelles, soit sous forme d'équipes plus nombreuses centrées sur un sujet de grande envergure scientifique. Le bon fonctionnement de telles équipes réclame la présence en leur sein d'une proportion assez forte de chercheurs confirmés (français ou étrangers de passage ; disons 1 sur 3 ou 4 pour fixer des idées) consacrant à ce travail une part importante de leur activité. Ces conditions ne sont qu'exceptionnellement réalisées dans la situation actuelle telle qu'elle a été analysée ci-dessus, en particulier puisque la plupart des chercheurs confirmés sont versés, dès l'obtention de leur thèse, dans l'enseignement supérieur où les nécessités de l'enseignement de masse les absorbent au moment même où ils abordent leur période productive.

3. Séminaires.

   Une manifestation symptomatique du malaise de la recherche mathématique actuelle apparaît dans l'ambiance assez morne qui règne dans de nombreux séminaires des mathématiques : même si ces réunions continuent à permettre une diffusion orale indispensable de l'information, il faut souligner que la plupart des auditeurs en demeurent le plus souvent passifs et laissent l'orateur adopter un rythme rapide de conférence-monologue de telle sorte qu'une part importante de l'information est perdue. Entre autres causes de cet inconvénient, on peut signaler d'une part en relation avec le manque d'homogénéité de niveaux et de motivation (voir les alinéas B3 et C1 ci-dessus) du public, le mythe du « mathématicien fort » ; et d'autre part, le manque de préparation et de disponibilité des auditeurs trop préoccupés par ailleurs (voir l'alinea B1 ci-dessus) ainsi que le manque de centrage des thèmes individuels de recherche (voir l'alinea A ci-dessus), en remarquant que l'ambiance est bien plus vivante quand le séminaire est animé par une équipe habituée à un travail coordonné en commun.

– D) Problèmes de moyens pour la recherche mathématiques universitaire.

  D'une manière générale, on peut dire que, conformément au système universitaire traditionnel qui s'est perpétué jusqu'à la période actuelle (...), *les chercheurs mathématiciens travaillant dans le cadre universitaire ne disposent pas de moyens matériels propres à la recherche* : il n'y a pas réellement dans les Facultés de Sciences de laboratoires de mathématiques (comme il y a des laboratoires de physique, de biologie ou de psychologie), mais seulement des moyens (personnels, locaux, matériel de reproduction, bibliothèques, etc.) utilisés à la fois pour l'enseignement et pour la recherche. Comtpe tenu des nécessités de l'enseignement de masse, cet état de fait entraîne une notoire insuffisance de moyens(...)

Liste :

1. Tâches d'organisation et de gestion incombant au personnel scientifique
2. Personnel technicien
3. Absence de locaux réservés à la recherche

   Dans chaque département de mathématiques, les locaux disponibles (amphis, salles de cours, bureaux, bibliothèques, locaus de service et d'accueil) sont communs à l'enseignement et à la recherche, ou, plus exactement, sont des locaux de l'enseignement supérieur susceptibles d'abriter la recherche en plus de l'enseignement. Dans ces conditions, l'enseignement de masse que doivent héberger ces locaux communs impose ses impératifs au détriment du minimum nécessaire à la recherche : même lorsque le volume des locaux disponibles est suffisant pour que chaque mathématicien ait au moins une table de travail à l'université (ce qui n'est pas encore toujours le cas malgré l'importance des constructions nouvelles), les chercheurs sont constamment soumis à l'agitation inhérente aux tâches d'enseignement de masse et de ce fait n'ont pas le calme nécessaire à la recherche. Cela est valable aussi bien pour les professeurs disposant d'un bureau personnel (où ils sont constamment sollicités par les tâches d'organisation et d'administration de l'enseignement) que pour les assistants, maîtres assistants ou boursiers du C.N.R.S. qui doivent travailler dans des salles communes. Face à cette situation, les mathématiciens universitaires sont amenés à travailler à leur domicile personnel, ou à partir à l'étranger (...) ; absence qui seraient tout à fait normales à doses raisonnables, mais qui systématiques imposées, contribuent fortement au manque de dynamisme collectif de la recherche étudié ci-dessus dans les alinéas A et C.

4. Bibliothèques ; moyens de reproduction et de diffusion
5. Missions et invitations de mathématiciens étrangers l'obtention commode de crédits est un problème encore très mal résolu. Lourdeurs administratives.

– Questions diverses relevant du C.N.R.S.

Cette analyse globale, des problèmes relevés assez uniformément dans les universités, connaît quelques solutions locales. Ainsi est mentionné le cas de Strasbourg :

> Souvent, l'obtention de possibilités de travail convenables pour la recherche mathématique est le résultat de l'effort systématique qui est fait par les mathématiciens locaux pour prévoir et mettre en place des moyens propres à la recherche : par exemple à Strasbourg, la nomination d'un directeur de recherche au C.N.R.S. (le seul en mathématiques pures pour la section 1), la réalisation prévue d'un Institut de Recherche mathématiques (I.R.M.A.) avant la fin du Vè plan, et la mise en place d'un laboratoire associé au C.N.R.S. renforcent le potentiel de recherche du département de mathématiques local.(...)

Le rapport conclut donc l'analyse des problèmes :

> En conclusion de l'analyse faite dans cette première partie, laquelle montre que le cadre universitaire dans son devenir actuel n'offre plus aux chercheurs mathématiciens des possibilités de travail suffisantes, on peut dire qu'il apparaît comme urgent d'organiser la relève du système universitaire traditionnel afin de sauvegarder le développement de la recherche mathématique en France.

Le chapitre II présente donc les « Perspectives d'avenir : principes directeurs et moyens à mettre en œuvre. » Ceci est tout d'abord résumé, avant que chacun des points ne soit détaillé :

> a) Au point de vue *orientation scientifique* (alinéa A) : à côté de quelques grands thèmes de défrichage, encourager le regroupement des efforts autour de sujets concrets, soit d'approfondissement de domaines déjà défrichés soit à motivation appliquées
>
> b) Au point de vue *situation des chercheurs* (alinéa B) : décharger les chercheurs qualifiés (à tous les stades de leur carrières, et pas seulement au début) des tâches courantes d'organisation de l'enseignement de masse de manière à leur permettre de jouer pleinement leur rôle de mathématicien pour le développement des mathématiques, leur diffusion dans toutes les branches de l'activité humaine et la formation des futurs chercheurs.
>
> c) Au point de vue *fonctionnement scientifique de la recherche* (alinéa C) : favoriser le développement d'équipes suffisamment fortes centrées autour de thèmes

importants et contribuant, d'une part à la formation, à l'orientation et à la qualification des jeunes chercheurs, et d'autre part à l'insertion de la recherche mathématique dans l'ensemble des activités contemporaines.

d) Au point de vue moyens (alinéa D) : fournir à la recherche mathématique des *moyens* de travail (statut des chercheurs, services, crédits de fonctionnement courant, personnel technique, missions et invitations de chercheurs étrangers) propres à la recherche (c'est-à-dire indépendants des nécessités de l'enseignement de masse) en réalisant de véritables « instituts de recherches mathématiques » (I.R.M.A.) comportant une autonomie et un personnel de gestion suffisant pour pouvoir renforcer le potentiel de recherche et favoriser le contact des mathématiciens de toutes origines (chercheurs purs, enseignants, praticiens, etc.)

La partie B) fonctions de mathématiciens, décrit les 4 « fonctions susceptibles de relever d'un mathématicien » et la manière dont ces fonctions devraient interagir (enseignement des mathématiques, pratique des mathématiques, formation des chercheurs mathématiciens, recherche mathématique).

Détails de C) : reprise de l'introduction du rapport de conjoncture précédent :

> « Même si, en mathématiques, les progrès les plus marquants sont, en fin de compte, avant tout le fait d'un petit nombre de personnalités de premier plan, il n'en reste pas moins qu'un mathématicien ne peut se livrer à la recherche dans des conditions vraiment favorables qu'en travaillant au sein d'une équipe nombreuse maintenant des contacts directs avec des chercheurs attachés aux principaux centres étrangers. Grâce à elle, il restera bien informé des progrès de sa discipline et pourra tirer profit sans délais des idées nouvelles. Seuls des Instituts groupant une équipe de mathématiciens suffisamment forte peuvent assurer l'exploitation de résultats nouveaux, contribuer de manière efficace à la formation des jeunes chercheurs et parfois à l'épanouissement d'un grand talent. Cette nécessité apparaît aujourd'hui plus impérieuse que par le passé. Elle correspond à un changement profond dans le domaine de la recherche mathématique et la manière dont il en sera tenu compte sera sans doute déterminante pour l'avenir. »

Importance de ces équipes pour la formation et l'orientation des jeunes chercheurs. Il existe des solutions au C.N.R.S. : Laboratoire associé (L.A.), Recherche coopérative sur programme (R.C.P.), Groupe de Recherche (G.R.) ou Equipes de Recherche associées (E.R.A.) qui « doivent permettre aux équipes de mathématiques d'obtenir les crédits de fonctionnement ou de missions nécessaires, tout en étant hébergées dans des locaux variables selon les besoins de leur travail (locaux universitaires ou I.R.M.A.), laboratoires divers scientifiques ou industriels, centres de calcul, etc., avec une large décentralisation. »

On a une liste très précise des moyens (personnesl, services..) :

1. PERSONNEL SCIENTIFIQUE (chercheurs titulaires, temporaires ou invités)
2. SERVICES :
   – Locaux de travail (bureaux, petites salles de travail, salles de conférences)
   – Locaux d'accueil (salles de réunion, logements pour étrangers de passage)
   – Secrétariat administratif et scientifique (frappe de manuscrits)
   – Bibliothèques et moyens de reproduction (photocopie)
   – Moyens de diffusion (multigraphie, publications)
3. FONCTIONNEMENT
   – Fonctionneemnt courant (papeterie, documents de travail, personels, vacations diverses, calcul)
   – Missions et invitations de chercheurs étrangers
4. PERSONNEL TECHNICIEN

– Administratif (cadres de gestion, secrétariat)
– Technique (bibliothécaires, personnel pour secrétariat spécialisé, photocopie, multigraphie, publications)

5. MOYENS DE CALCUL
6. INSTANCES SCIENTIFIQUES DE REPARTITION (commission 1 du C.N.R.S.)

En ce qui concerne les services, une proposition concrète : les I.R.M.A. :

> Au point de vue services, la recherche mathématique doit pouvoir s'appuyer sur un certain nombre d'instituts de recherche mathématique (I.R.M.A.).
>
> Un I.R.M.A. est un organisme réservé à la recherche comportant les locaux de travail et d'accueil, la bibliothèque (spécialisée en mathématiques) et ses annexes (secrétariat, photocopie, multigraphie) ainsi que le personnel technique et administratif nécessaire, d'une part pour supporter le travail régulier d'une cinquantaine de chercheurs mathématiciens (travail individuel ou en groupes ; séminaires et cours spécialisés niveau recherche), et d'autre part pour organiser et accueillir des réunions de recherche exceptionnelles (congrès, colloques, écoles d'été). Les locaux de travail doivent comprendre des salles de conférence, des bureaux et de nombreuses petites salles de travail ou de discussion par petits groupes ; et les locaux d'accueil, une salle de réunion et, si possible, quelques logements dans le voisinage pour les chercheurs étrangers de passage.
>
> Un I.R.M.A. est à concevoir plutôt comme un « *service d'hébergement* » de chercheurs mathématiciens que comme un laboratoire : certains chercheurs peuvent y avoir leur lieu habituel de travail, d'autres ne font qu'y passer pour venir utiliser la bibliothèque et ses services ou pour y participer à des réunions d'équipes de recherche (alinéa C ci-dessous), des séminaires ou des colloques ; les disciplines mathématiques représentées peuvent y être assez diverses, pures ou appliquées, avec éventuellement sur place un petit ordinateur ou un terminal de gros ordinateur (...)
>
> AU point de vue administratif, un I.R.M.A. doit jouir d'une autonomie suffisante, avec un directeur administratif responsable de la gestion et de l'animation générale devant un comité scientifique. Un budget indépendant doit permettre l'entretien des locaux, le financement des divers services et l'organisation des diverses rencontres (colloques, écoles d'été, etc.) qui y auront lieu ; par contre, ne relèvent de ce budget, ni les traitements des chercheurs ou du personnel technicien, ni, en principe, les crédits de fonctionnement ou de mission nécessaires aux équipes de recherche, ces derniers devant être obtenus par le canal des formations de recherche du C.N.R.S. (...)
>
> Au point de vue statut public, on peut concevoir un I.R.M.A. comme « unité de recherche » d'un établissement universitaire, ou comme un « service propre » du C.N.R.S.
>
> Au point de vue implantation, les I.R.M.A. doivent être situés à proximité d'établissements universitaires ou d'ensembles de laboratoires afin de venir en renforcer le potentiel de recherche. Toutefois, on peut aussi prévoir un I.R.M.A. isolé destiné à héberger des retraites de travail (individuelles ou en groupe) et des écoles d'été.
>
> Au point de vue nombre, il est naturel d'envisager la mise en place d'un I.R.M.A. adapté aux besoins locaux dans chaque université ayant un groupe de chercheurs mathématiciens actif ; avec un minimum d'un I.R.M.A. par « région universitaire », plus les I.R.M.A. à vocation nationale.

Prévision de création des I.R.M.A. d'ici la fin du Vème plan : 3 IRMA

– l'Institut Henri Poincaré, qui doit être rénové à l'automne 1969 pour devenir un I.R.M.A. à vocation nationale de lieu de travail et de rencontres
– Les I.R.M.A. de Grenoble et de Strasbourg qui sont déjà prévus dans le Ve Plan (avec respectivement 4,75 et 4,25 MF inscrits)

Pendant le VIe Plan, il faut prévoir la réalisation d'un minimum de six I.R.M.A. répartis comme suit :

- un I.R.M.A. dans la région parisienne à l'université d'Orsay
- un I.R.M.A. isolé analogue au Centre allemand d'Oberwolfach dans la Forêt-Noire (...)
- quatre I.R.M.A. dans des universités de province ayant des gorupse de recherche mathématique importants : Nice, Marseille ou Toulouse, Rennes, Lille ou Nancy

Le document décrit enfin les budgets et la mise en œuvre du projet. Il prévoit notamment des techniciens, pour éviter que le travail administratif incombe aux mathématiciens.

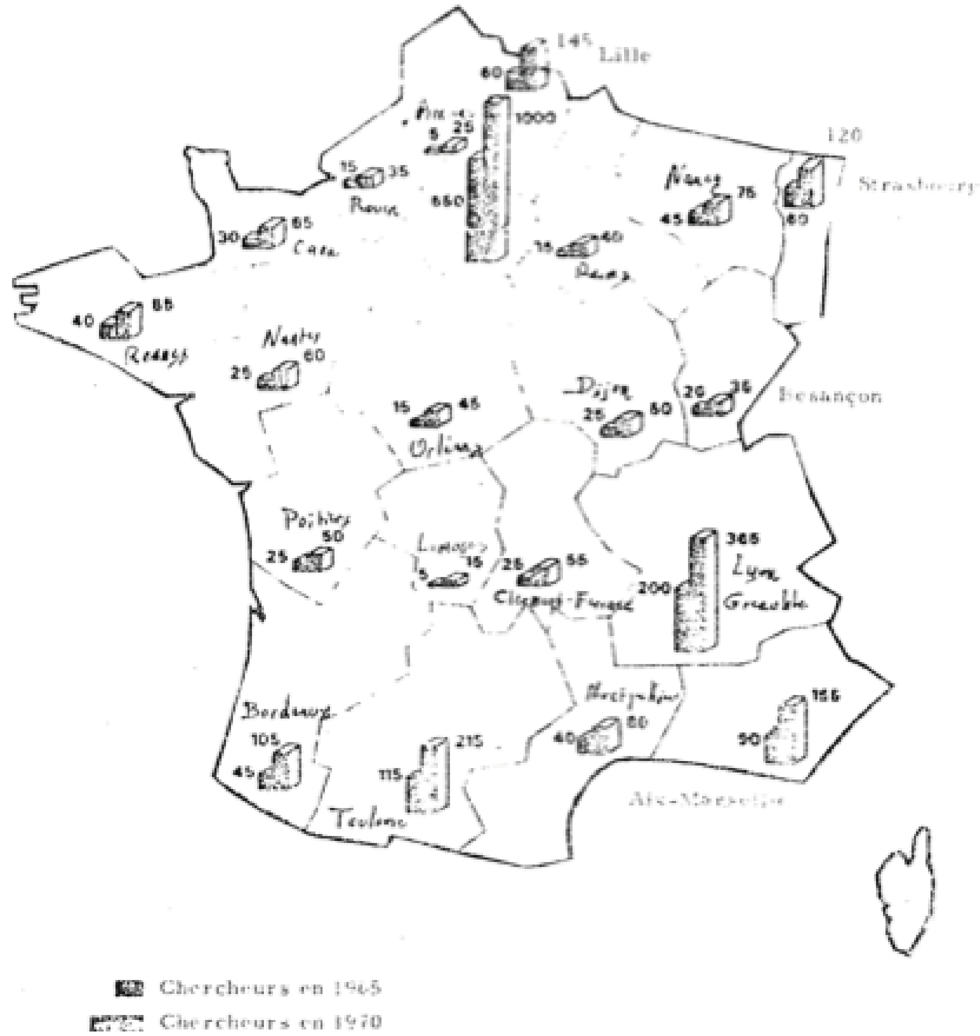
Annexe U

Carte : « la France mathématique : évolution du nombre de chercheurs 1965-1970 »

Cette carte provient d'un document des archives du CIRM « Pour un Oberwolfach français », Annexe 9.

LA FRANCE MATHEMATIQUE

Evolution du nombre des chercheurs au cours de la période 1965 - 1970



Annexe V

Rapport sur le séjour en Pologne de Marcel Berger, Pierre Cartier, Alain Guichardet, Laurent Schwartz, Jean-Louis Verdier du Dimanche soir 14 mars au Jeudi matin 18 mars 1982.

Ce document provient des archives de Michel Broué.

RAPPORT SUR LE SEJOUR EN POLOGNE DE
MARCEL BERGER, PIERRE CARTIER, ALAIN GUICHARDET
LAURENT SCHWARTZ, JEAN-LOUIS VERDIER
du Dimanche soir 14 Mars au Jeudi matin 18 Mars 1982

Signalons d'abord que nous avons été remarquablement accueillis. Les mathématiciens polonais ont considéré comme un geste de particulière amitié le fait d'être venus de Paris pour discuter avec eux des conditions du Congrès de l'été 1982 et ils nous ont reçus avec une très grande chaleur. Les conversations ont toujours été très faciles. Malgré les divergences d'opinion parfois grandes, les mathématiciens polonais sont très soudés les uns aux autres et s'expriment pratiquement sans difficulté les uns devant les autres. Nous avons eu une réunion avec un groupe réduit du comité d'organisation polonais du Congrès des Mathématiciens de la ville de Varsovie, et ensuite une réunion de trois heures avec ce comité au complet. Nous avons pu voir ensuite Łojasiewicz, membre du comité d'organisation, de Cracovie. Parmi les membres du comité d'organisation, ceux avec qui nous avons le plus parlé sont Olech, Président du comité d'organisation, Ciesielski, Président de la Société Mathématique Polonaise, Zelazko, Bojarski. Nous avons aussi vu divers autres mathématiciens, non membres du comité d'organisation mais occupant une place importante dans la communauté mathématique polonaise. Par ailleurs nous avons longuement vu l'ambassadeur de France à Varsovie et diverses personnes de l'ambassade. Nous avons vu aussi M. Nałecz, secrétaire adjoint de l'Académie, qui est un universitaire mais dans une fonction presque politique, et M. Kohorewicz, personnalité politique responsable, Directeur du département de la presse et des relations avec l'étranger au Ministère des Affaires Etrangères, et qui sera donc amené à jouer un rôle important en ce qui concerne la tenue du Congrès.

Il semble très net qu'une large majorité des membres du Comité organisateur du Congrès est favorable à la tenue normale du Congrès à Varsovie en Août prochain. Ils considèrent que, si le Congrès ne se tenait pas, cela pourrait avoir des conséquences graves dans l'avenir pour eux et pour la coopération internationale en général. D'autre part ils ont obtenu des réponses favorables des conférenciers (115 réponses favorables et 15 défavorables sur 130). Pour les conférenciers d'une heure, ils n'ont pratiquement reçu que des réponses favorables, mais, comme la question était posée avec une date limite du 15 Décembre, elle n'est pas significative. Une nouvelle consultation est en cours. Il ne fait de doute pour aucun mathématicien qu'un Congrès réussi est favorable à la poursuite des bonnes relations scientifiques internationales. Mais nous avons pu constater que la communauté mathématique polonaise est plus divisée que le comité organisateur en ce qui concerne la tenue du Congrès. Le principal argument de ceux qui sont négatifs est le suivant : pour un grand nombre de raisons matérielles ou morales, ils pensent qu'il sera difficile de recevoir plusieurs milliers de mathématiciens à Varsovie, que beaucoup de mathématiciens risquent de boycotter le Congrès, que d'autres viendront au Congrès avec l'idée d'en faire un instrument politique plus qu'un véritable Congrès.

Dans ces conditions, le Congrès ne serait pas un véritable Congrès mathématique pouvant jouer effectivement son rôle. Ces collègues pensent qu'alors un congrès, qui ne serait pas un vrai congrès scientifique regroupant une large partie de la communauté mathématique mondiale et restant à un haut niveau mathématique,risquerait d'être plus dangereux que pas de congrès du tout. Il nous a semblé que cet argument est retenu par la très grande majorité des mathématiciens polonais ; les optimistes pensent qu'on peut parvenir à un véritable congrès, les pessimistes pensent qu'on ne le peut pas, mais l'écrasante majorité pense que seul un véritable congrès digne de ce nom est justifié. Sans savoir nettement si nous pouvons nous ranger parmi les optimistes ou parmi les pessimistes, nous sommes revenus tous les cinq avec cette même conviction.

Nous avons ensuite discuté tant avec les mathématiciens qu'avec les autorités politiques responsables que nous avons vues, quelles sont les difficultés techniques ou morales à la tenue d'un congrès. En premier lieu, la Société Mathématique Polonaise a été suspendue ; c'est, semble-t-il, la seule société scientifique qui ait été suspendue, les autres sociétés qui l'ont été sont des sociétés de sciences humaines (philosophique, historique, psychologique, sociologique, sciences politiques...) ; personne n'a pu nous dire la raison exacte de cette suspension. Toujours est-il que les organisateurs du Congrès eux-mêmes mettent comme condition sine qua non à la tenue du Congrès la suppression de cette suspension. Nous sommes donc sur ce point en complet accord avec eux : le Congrès mathématique ne peut pas se tenir à Varsovie si la suspension de la Société Mathématique Polonaise n'est pas rapportée.

Une deuxième question est celle des visas. Conformément à la règlementation générale de l'I.C.S.U. (International Committee of Scientific Unions) il est considéré que les congrès ne peuvent se tenir que dans les pays qui accordent sans discrimination les visas à tous les congressistes. Une modalité possible a été prévue. En même temps qu'ils feront leur premier versement, donc avant le 15 mai, les congressistes français demanderaient leur visa par l'intermédiaire de la Société Mathématique de France. Celle-ci remettrait la totalité des demandes de visas pour le Congrès de Varsovie aux environs du 20 au 25 mai à l'ambassade de Pologne à Paris. Et il serait convenu qu'à une date voisine du 15 au 20 juin, la totalité des réponses positives devrait être parvenue. Le Comité National Français aurait fait connaître à l'avance que, si à cette date limite la totalité des visas n'est pas parvenue, la délégation française retirerait sa participation. Le comité d'organisation polonais du Congrès accepte que la date du 3o juin soit celle où un congressiste qui renonce à venir pourrait récupérer la somme antérieurement versée.

Le problème du couvre-feu est d'abord moral : le règlement de l'I.C.S.U. impose qu'un Congrès ne peut se tenir que dans un pays où il y a "libre circulation des personnes", ce qui est opposé au couvre-feu et à l'état de guerre. Mais, de toute façon, cela pose un problème technique grave. Il est indispensable que les mathématiciens puissent discuter entre eux, un peu tard le soir. L'heure actuelle du couvre-feu, 23h, est impraticable en été. M. Kohorewicz nous a indiqué qu'à son avis le couvre-feu serait d'ici là ou très retardé ou probablement suspendu ; de toute façon qu'il n'y aurait aucune difficulté à donner à tous les congressistes un badge qu'ils pourraient porter à leur boutonnière et qui les dispenserait des règlements du couvre-feu.

La question des mathématiciens prisonniers est plus grave. Comme il y a en a finalement un assez grand nombre, cela pose une question morale de principe en ce qui concerne la participation au Congrès. Nous avons largement discuté ce problème avec le comité organisateur et avec M. Kohorewicz. Ce dernier a compris la gravité du problème, a promis qu'il fournirait au Professeur Olech la liste officielle des mathématiciens prisonniers pour que ceux-ci puissent l'apporter à Paris lors de la réunion de l'I.M.U. les 1er et 2 avril, et il a manifesté sa compréhension du fait que des gestes de libération et de libéralisation faciliteraient les décisions de participation des comités nationaux.

Il reste que, même si le Congrès est avant tout destiné à faire des mathématiques, il existe toujours inévitablement, et c'est souhaitable, un certain nombre de groupes qui désirent se réunir pour certaines discussions paramathématiques. Le comité d'organisation est parfaitement conscient de ce fait et souhaite pouvoir fournir à toutes les demandes des salles de conférences dans le campus où se tiendra le Congrès. Nous en avons également parlé avec M. Kohorewicz qui s'est montré très ouvert, et a bien spécifié sur ce point que le Congrès devait se dérouler dans la liberté, et que le comité d'organisation restait libre de ses décisions dans l'enceinte du campus.

Toutes ces conversations ont été ouvertes et fructueuses. Nous avons bien indiqué que nous n'étions pas en mesure de prendre une décision et que la décision du Comité National Français, en ce qui concerne la participation, viendrait après la décision de l'I.M.U. et serait prise en France. Nous sommes toutefois tous tombés d'accord sur le fait qu'il y avait des solutions mauvaises à éviter à tout prix :
Tout d'abord il est souhaitable que l'I.M.U. prenne une décision claire : ou le Congrès a lieu en Août 1982 à Varsovie, ou il n'a pas lieu du tout, ou il est reporté à l'été prochain. Toute décision tendant à porter le Congrès dans une autre ville d'un autre pays serait très néfaste. Et il a semblé a tous dangereux que l'I.M.U. ne prenne aucune décision et laisse les Comités Nationaux se décider librement, car cela risquerait fort d'aboutir à une grande diversité et dispersion des décisions, avec un Congrès raté. Si l'I.M.U. prend une décision négative ou une décision de report, les Comités Nationaux ne pourront évidemment pas aller en sens inverse. Si l'I.M.U. prend une décision positive, les Comités Nationaux gardent le droit de refuser leur participation ; mais ces comités doivent alors sentir le poids de leur responsabilité, pour éviter à tout prix un congrès que ne serait pas un vrai Congrès.

Sources.

Fonds d'archives consultés.

- Archives de l'École polytechnique, Fonds Laurent Schwartz
- Archives de l'École polytechnique, procès-verbaux des conseils de perfectionnement et d'instruction. Archives des laboratoires (statuts et rapports).
- Archives départementales de Meurthe et Moselle, liasse W 1018/96 versée par le Rectorat.
- Archives de l'Institut Élie Cartan de Nancy, Fonds Jean Delsarte
- Archives Bourbaki numérisées (http ://math-doc.ujf-grenoble.fr/archives-bourbaki/)
- Archives du C.N.R.S., Gif-sur-Yvette
- Archives de l'Académie des Sciences, dossiers biographiques Gustave Choquet, Jean Leray, Jacques-Louis Lions, Laurent Schwartz, Fonds spécifique André Weil
- Archives personnelles de Michel Broué
- Archives personnelles de François Laudenbach

Entretiens

- Michel Broué, 12 janvier 2012
- Pierre Cartier, 7, 14 et 21 avril 2011
- Pierre Dolbeault, 4, 7 et 26 mars 2013
- Alain Guichardet, 2 juillet 2010 et 14 février 2011
- François Laudenbach, 4 octobre 2010
- Bernard Malgrange, 1er décembre 2010
- Gilles Pisier, 21 avril 2011
- Pierre Schapira, 18 juin 2010

Ces entretiens d'accompagnent de nombreuses discussions informelles.

Revues dépouillées

- *L'Enseignement Mathématique* (1900-1950)
- *Annales de l'Université de Paris* (1926-1941)
- *Gazette des Mathématiciens* (1962-2013)
- *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* (1955-1975)

Bases de données et archives en ligne exploitées

- Numdam (http ://www.numdam.org/)
- Mathscinet (www.ams.org/mathscinet)

– Zentralblatt MATH (zbmath.org/)
– Archives Bourbaki (http ://portail.mathdoc.fr/archives-bourbaki/ et http ://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/)

Bibliographie

1903-2003 : Un siècle de mathématiques à Nancy 2003 , Institut Elie Cartan, Nancy, 2003.

Abir-Am Pnina (éd.)

1998 *La mise en mémoire de la science : pour une ethnographie historique des rites commémoratifs.* Amsterdam : Édition des archives contemporaines, 1998.

Actes des Journées X-UPS 2011 2011 , Éditions de l'École Polytechnique, 2011.

Albers Donald J., Alexanderson G. L. et Reid Constance

1987 *International mathematical congresses. An illustrated history, 1893-1986*, New-York : Springer-Verlag, 1987.

Alexanderson Gerard L.

2010 « Review : [P.Curbera 2009] », *The Mathematical Intelligencer* **32** (3) (2010), p. 65–66.

Alfonsi Liliane

2011 *Étienne Bézout (1730-1783), Mathématicien des Lumières*, Paris : L'Harmattan, 2011.

2012 « Un « savant » du siècle des Lumières : Étienne Bézout (1730-1783) mathématicien, académicien et enseignant, » dans *[Rollet et Nabonnand 2012, Chapitre 2, p.29-48]*.

Alleg Henri

1958 *La Question*, Paris : Les Éditions de Minuit, 1958.

Andler Martin

1994 « Les mathématiques à l'Ecole normale supérieure au XX$^{\text{ème}}$ siècle : une esquisse », dans *[Sirinelli 1994, p.351-404]*.

Annales de l'Université de Paris 1926 .

Annales de l'Université de Paris 1933 .

Ascher Philippe

2003 « Laurent Schwartz et les réformes de l'enseignement supérieur », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.137-148]*.

Aspray William

1988 « The Emergence of Princeton as A World Center for Mathematical Research, 1896-1939 », dans *[Aspray et Kitcher 1988]*.

Aspray William et Kitcher Phillip (éds.)

1988 *History and Philosophy of Mathematics*, Minneapolis : University of Minnesota Press, 1988.

Attal Stéphane

2003 « Disparition de Paul-André Meyer », *Gazette des Mathématiciens* **96** (2003), p. 7–14.

AUBIN David

1997 « The Withering Immortality of Nicolas Bourbaki: A Cultural Connector at the Confluence of Mathematics. », *Science in Context* **10** (1997), p. 297–342.

1998 *A Cultural History of Catastrophes and Chaos: Around the Institut des Hautes Études Scientifiques, France. 1958-1980*, Ph. D. in History (Program in the History of Science), Princeton University.

2001 « From Catastrophy to Chaos : The Modeling Practices of Applied Topologists », dans *[Bottazzini et Dalmedico 2001, p.255-280]*.

À paraître « "I'm Just a Mathematician": Why and How Mathematicians Collaborated with Military Ballisticians at Gâvre », http://hal.upmc.fr/hal-00639895.

AUBIN David et DAHAN-DALMEDICO Amy

2002 « Writing the History of Dynamical Systems and Chaos : *Longue Durée* and Revolution, Disciplines and Cultures », *Historia Mathematica* **29** (2002), p. 1–67.

AUBIN David, GISPERT Hélène et GOLDSTEIN Catherine

2011 « Les mathématiciens français dans la Grande Guerre », dans *[Bouloc, Cazals et Loez 2011, p.183-197]*.

À paraître « The Total War of Paris Mathematicians », http://hal.upmc.fr/hal-00830377.

AUBIN David et GOLDSTEIN Catherine

À paraître « Placing World War I in the History of Mathematics », http://hal.upmc.fr/hal-00830121.

AUDIN Maurice

1957 *Sur les équations linéaires dans un espace vectoriel*, thèse de doct., Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

AUDIN Michèle

2009a « Publier sous l'Occupation I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences », *Revue d'histoire des mathématiques* **15** (2009), p. 7–57.

2009b *Une histoire de Jacques Feldbau*, La Série T, Société Mathématique de France, 2009.

2011 *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928-1991)*, Société Mathématique de France, 2011.

2012a « Cartan, Lebesgue, de Rham et l'analysis situs dans les années 1920. Scènes de la vie parisienne. », *Gazette des mathématiciens* **134** (2012), p. 49–75.

2012b « La guerre des recensions (autour d'une note d'André Weil en 1940) », *Mathematische Semesterberichte* **59** (2012), p. 243–260.

2013 *Une vie brève*, Paris : L'arbalète Gallimard, 2013.

AUDIN Michèle et SABBAH Claude

2013 « Marie-Hélène Schwartz », *Images des Mathématiques, CNRS* (2013), http://images.math.cnrs. Helene–Schwartz.html (1 août 2013).

AZÉMA J. et al.

2006 « Témoignages », dans *[Emery et Yor 2006, p.35-46]*.

Baouendi Salah

2003 « What would Schwartz do ? », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.49-52].*

Barany. Michael J.

2010 « '[B]ut this is blog maths and we're free to make up conventions as we go along': Polymath1 and the Modalities of 'Massively Collaborative Mathematics.' », dans *Proceedings of the 6th International Symposium on Wikis and Open Collaboration, Gdansk, Poland, 2010. New York: ACM.*

Barany Michael J.

2010 *Mathematical Research in Context*, mém.de maîtr., Dissertation submitted for the degree of MSc by research in Science & Technology Studies, University of Edinburgh, http://www.princeton.edu/ mbarany/EdinburghDissertation.pdf (09/09/2013).

Barany Michael J. et MacKenzie Donald

2014 « Chalk: Materials and Concepts in Mathematics Research », dans *[Coopmans et al. 2014, Chap.6 pp.107-129]*, sous la dir. de Janet Vertesi Catelijne Coopmans Michael Lynch et Steve Woolgar.

Barillon Emile-Georges

1960 « Séance Annuelle des prix du 10 décembre 1960 », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **251** (1960), p. 2805–2806.

Barthes Roland

1984 « La mort de l'Auteur », dans *[p.61-67 ; 1968] Le bruissement de la langue.*

Baruch C. et Bloch C.

1966 « L'Université face à sa réforme : Conditions d'efficacité de la recherche fondamentale », *Revue de l'enseignement supérieur* (4) (1966), p. 165–167.

Baruch Pierre

2006 « 1950-1960 : âge d'or des laboratoires ? La physique à l'École normale supérieure », dans *[Chatriot et Duclert 2006, p.293-300].*

Beaulieu Liliane

1989 *Bourbaki : une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944)*, thèse de doct., Université de Montréal.

1993 « A Parisian café and ten proto-Bourbaki meetings », *The Mathematical Intelligencer* **15** (1) (1993), p. 27–35.

1998 « Jeux d'esprit et jeux de mémoire chez N. Bourbaki », dans *[Abir-Am 1998, p.75-123].*

2003 « Bourbaki à Nancy », dans *[*1903-2003 : Un siècle de mathématiques à Nancy *2003, p.33-45].*

2009 « Regards sur les mathématiques en France entre les deux guerres. Introduction », *Revue d'histoire des sciences* **62** (1) (2009), p. 9–38.

Belhoste Bruno

1994 « Recension de [Gispert 1991] », *Histoire de l'éducation* **62** (1994), p. 155–156.

Belhoste Bruno, Dahan Dalmedico Amy et Picon Antoine (éds.)

1994 *La formation polytechnicienne 1794-1994*, Paris, Dunod, 1994.

Bellet Daniel

1911 « L'enseignement technique supérieur américain et l'école d'ingénieurs de l'Illinois », *La Revue du Mois* **11** (1911), p. 330–346.

Berger Marcel

2005 *Cinq siècles de mathématiques en France*, adpf ministère des Affaires étrangères, Paris, 2005.

Berline Nicole et Sabbah Claude (éds.)

2007 *Distributions dans le sillage de Laurent Schwartz*, Lectures from Mathematical Days X-UPS held in Palaiseau, May 19–20, 2003, Les Éditions de l'École polytechnique, 2007.

Bigg Charlotte et Aubin David

2007 « Neither Genius nor Context Incarnate: Norman Lockyer, Jules Janssen and the Astrophysical Self », dans *[Söderqvist 2007, p.51-70]*.

Bochner S.

1952a « Review of [Halperin 1952] », *Bulletin of the American Mathematical Society* **58** (6) (1952), p. 679–680.

Bochner Salomon

1932 *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1932.

1952b « Review of *Théorie des distributions* by Laurent Schwartz [1950, 1951] », *Bulletin of the American Mathematical Society* **58,** (1952), p. 78–85.

Bogdanowicz W.

1961 « A proof of Schwartz's theorem on kernels. », *Studia Mathematica* **20** (1961), p. 77–85.

Bogoliubow N. N. et Parasiuk O. S.

1957 « Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder », *Acta Mathematica* **97** (1957), p. 227–266.

Bohr Harald

1952 « Address of Professor Harald Bohr », dans *[Society 1952, p.127-134]*.

Bombal Fernando

2003 « Laurent Schwartz, the mathematician who wanted to change the world », *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **6** (1) (2003), p. 177–201.

Bony Jean-Michel

2003 « L'analyse et Laurent Schwartz », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p. 55-58]*.

Borel Armand

1998 « Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973. », *Notices of the American Mathematical Society* **45** (3) (1998), p. 373–380.

BORRELLI Arianna

2010 « Dirac's bra-ket notation and the notion of a quantum state », dans *Proceedings of the 3rd International Conference of the European Society for the History of Science (Vienna 2008)*, sous la dir. de Felicitals Seebacher HERMANN HUNGER et Gerhard HOLZER, 361–371.

BOTTAZZINI Umberto et DALMEDICO Amy Dahan (éds.)

2001 *Changing Images in Mathematics. From the French Revolution to the New Millenium.* 2001.

BOULOC F., CAZALS R. et LOEZ A. (éds.)

2011 *1914-1918. Identités troublées : les appartenances sociales et nationales à l'épreuve de la guerre*, Toulouse, Privat, 2011.

BOURBAKI Nicolas

1950 « Sur certains espaces vectoriels topologiques. », *Annales de l'Institut Fourier* **2** (1950), p. 5–16.

BOURGUIGNON Jean-Pierre, BROUÉ Michel et VIDAL-NAQUET Pierre

2003 « En guise d'introduction... », dans *Laurent Schwartz (1915-2002)*, p. 7–16.

BOURGUIGNON Jean-Pierre et LEVY David

2002 « In Memoriam. Laurent Schwartz (1915-2002) », *La Jaune et la Rouge* **580** (2002).

BRACONNIER Jean

1945 *Sur les groupes topologiques localement compacts*, thèse de doct., Université de Nancy.

BRECHENMACHER Frédéric

2006 *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)*, thèse de doct., Centre Alexandre Koyré - Centre de Recherche en Histoire des Sciences et des Techniques.

2011 « Autour des pratiques algébriques de Poincaré », `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00630959`.

BREMERMANN H.J., OEHME R. et TAYLOR J.C.

1959 « Une démonstration possible des relations de dispersion », dans *[*Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs *1959, p.169-178]*.

BRIAN Éric

1989 « Y a-t-il un objet Congrès ? Le cas du Congrès international de satistique (1853-1976) », *Cahiers Georges Sorel* **7** (1989), p. 9–22.

BROUÉ Michel, CARTAN Henri et SCHWARTZ Laurent

1984 « L'arrestation à Moscou du mathématicien Chikhanovitch », *La Recherche* **15** (1984), p. 566.

BRU Bernard

2002 « L'oeuvre scientifique de Robert Fortet. », dans *[(ed.) 2002, p.19-50]*.

BRUNEAU Olivier

2011 *Colin Maclaurin, l'obstination mathématicienne d'un newtonien*, Presses Universitaires de Nancy, 2011.

BRUNO BELHOSTE AMY DAHAN DALMEDIC Dominique Pestre Antoine Picon SOUS LA DIRECTION DE

1995 *La France des X. Deux siècles d'histoire.* Sous la dir. d'ECONOMICA, 1995.

Bulletin n˚3. Institute for Advanced Studies. 1934 .

BUSTAMANTE Martha Cecilia

A paraître *Cours de Paul Langevin au Collège de France, « Les difficultés de la théorie du rayonnement », 1912-1913. Notes prises par Emile Borel.* A paraître.

CARDANO Girolamo

2002 *The book of my life*, sous la dir. de New York Review BOOK, 2002.

CARLEMAN Torsten

1949 « Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier », dans *[CNRS 1949, p.45-54]*.

CARTAN Henri

1970 « Essays on Topology and Related Topics. Mémoires dédiés à Georges de Rham. », dans sous la dir. d'André Haefliger. Raghavan NARASIMHAN., Springer-Verlag., chap. Les travaux de Georges de Rham sur les variétés différentiables, p. 1–11.

2003 « Quelques souvenirs d'une longue amitié », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n˚98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.25-31]*.

CARTIER Pierre

1971 « Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs », dans *Séminaire Bourbaki, 23eme année (1970/1971), Exp. No. 388*, 107–122. Lecture Notes in Math., Vol. 244.

1974 « Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs II. Prolongement analytique. », dans *Séminaire Bourbaki, 25eme année (1972/1973), Exp. No. 418*, 1–33. Lecture Notes in Math., Vol. 383.

1998 « La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich: évolution des notions d'espace et de symétrie », dans *[*Les relations entre les mathématiques et la physique théorique *1998, p.23-42]*.

2000 « Un pays dont on ne connaîtrait que le nom (Grothendieck et les « motifs » », *Prépublications de l'IHES.* **IHES/M/00/75** (2000), p. 2–33.

CARTIER Pierre et al.

2010 « Cartan as a teacher », *Notices of the American Mathematical Society* **57** (8) (2010), p. 961–971.

CERF Jean

2004 « Trois quarts de siècle avec Henri Cartan », *Gazette des mathématiciens* **100** (2004), p. 7–8.

CHABERT Jean-Luc et GILAIN Christian

À paraître. « Debating the Place of Mathematics at the Ecole polytechnique around World War I ».

À paraître « Sans amour et sans haine : le difficile principe de Jacques Hadamard ».

CHARLE Christophe

1994a « Essai de bibliographie commentée sur les universités germaniques », *Histoire de l'éducation* **62** (1994), p. 111–125.

1994b *La République des universitaires 1870-1940*, Paris : Seuil, 1994.

1994c « Les universités germaniques : des mythes fondateurs à l'histoire sociale. », *Histoire de l'éducation* **62** (1994), p. 5–14.

1994d « Paris/Berlin. Essai de comparaison des professeurs de deux universités centrales (vers 1870- vers 1930) », *Histoire de l'éducation* **62** (1994), p. 75–109.

CHARLE Christophe et TELKES Eva

1989 *Les professeurs de la Faculté des sciences de Paris. Dictionnaire biographique 1901-1939*, inrp-cnrs, 1989.

CHATELET Albert

1970 « Remise d'une épée à Mr Gaston Julia dans les salons de la Sorbonne le 6 décembre 1950. Allocution de M. Chatelet. », dans *[Julia 1970c, p.142-148]*.

CHATRIOT Alain et DUCLERT Vincent (éds.)

2006 *Le gouvernement de la recherche. Histoire d'un engagement politique de Pierre Mendès France à Charles de Gaulle (1953-1969)*, La Découverte, Paris, 2006.

CHEVALLEY Claude

1970a « Jubilé scientifique de M. Gaston Julia, célébré dans les salons de la Sorbonne le 16 décembre 1961. Allocution de M. Chevalley. », dans *[Julia 1970c, p.325-333]*.

1970b « Oeuvres de Gaston Julia, Volume IV », dans sous la dir. de Michel HERVÉ, Paris, Gauthier-Villars, chap. Allocution de M. Claude Chevalley, professeur à la Sorbonne, à l'occacion du Jubilé scientifique de Monsieur Gaston Julia, membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne et à l'Ecole Polytechnique, célébré dans les salons de la Sorbonne le 16 décembre 1961, p. 287–405.

CHEVASSUS-AU-LOUIS Nicolas

2004 *Savants sous l'occupation : enquête sur la vie scientifique française entre 1940 et 1944*, Paris : Éditions du Seuil, 2004.

CHOQUET Gustave

1962 « L'analyse et Bourbaki », *L'Enseignement Mathématique* **8** (1962), p. 109–135.

1974 « Notice sur les travaux scientifiques de Gustave Choquet ».

2004 « Laurent Schwartz », *Annuaire de l'association amicale de secours des anciens élèves de l'École Normale Supérieure* (2004).

CHOQUET Gustave et DENY Jacques

1944 « Sur quelques propriétés de moyenne caractérisques des fonctions harmoniques et polyharmoniques », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **72** (1944), p. 118–140.

CHORLAY Renaud

2007 *L'émergence du couple local / global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux 1851-1953.* Thèse de doct., Université Paris 7.

CHÂTELET François

1944 *Variations sur un thème de H. Poincaré*, thèse de doct., Faculté des Sciences de Paris.

CNRS Paris (éd.)

1949 *Analyse harmonique : Nancy, 15-22 juin 1947*, Colloques internationaux du Centre national de la recherche scientifique, XV, 1949.

— (éd.)

1950 *Algèbre et théorie des nombres : Paris, septembre 1949*, Colloques internationaux du Centre national de la recherche scientifique, XXIV, 1950.

COLLINOT Anne

2012 « L'enquête biographique pour comprendre l'émergence d'une discipline », dans *[Rollet et Nabonnand 2012, p.411-425]*.

COLLINS Harry

2010 *Tacit and Explicit Knowledge*, The University of Chicago Press., 2010.

COLLINS H.M.

1985 *Changing Order : Replication and Induction in Scientific Practice*, Londres, Sage, 1985.

Colloque consacré à la Théorie des Probabilités, 1937, Genève. Présidé par M. Maurice Fréchet. 1938-39 , Hermann, Paris, 1938-39.

Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz. Vol. 1 1985 , Papers from the colloquium held at the École Polytechnique, Palaiseau, May 30–June 3, 1983, Astérisque No. 131 (1985), Paris : Société Mathématique de France, 1985, p. 1–411.

Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz. Vol. 2 1985 , Papers from the colloquium held at the École Polytechnique, Palaiseau, May 30–June 3, 1983, Astérisque No. 132 (1985), Paris : Société Mathématique de France, 1985.

COLOMBO Serge

1949 « La transformation de Laplace et l'étude des phénomènes transitoires (suite et fin) », *Annales des Télécommunications* **4** (10) (1949), p. 358–362.

1953 « La fonction de Dirac et son utilisation en physique mathématique », *Annales des Télécommunications* **8** (4) (1953), p. 131–144.

Comptes-Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 1950 , 231.

CONNES Alain

2002 « Hommage à Laurent Schwartz », *Gazette des Mathématiciens* (94) (2002), p. 7–8.

COOKE Roger

1999 « Review : [Goldstein, Gray et (dir.) 1996] », *Historia Mathematica* **26 (2)** (1999), p. 173–175.

COOPMANS Catelijne et al. (éds.)

2014 *Representation in Scientific Practice Revisited*, MIT Press, 2014.

CORCY-DEBRAY Stéphanie

2002 « Jérôme Carcopino et les lois d'exception », *Revue d'histoire moderne et contemporaine* **N°49-4** (2002), p. 91–100.

COSTABEL P.

2008 *"Pérès, Joseph Jean Camille." Complete Dictionary of Scientific Biography.*

COUTY Raymond, GLAESER Georges et PEROL Charles

1995 « L'essor des mathématiques à Strasbourg-Clermont entre 1940 et 1945. », *Gazette des mathématiciens* **65** (1995), p. 19–22.

CRAWFORD Elisabeth et OLFF-NATHAN Josiane (éds.)

1970 *La science sous influence. L'université de Strasbourg, enjeu des conflits franco-allemands. 1872-1945.* La Nuée Bleue, 1970.

CREMIEUX-BRILHAC Jean-Louis

1995 « Le mouvement pour l'expansion de la recherche scientifique, 1954-1968. », *Reprint des Cahiers pour l'histoire de la recherche, CNRS Editions* (1995).

DAHAN Amy et PESTRE Dominique (éds.)

2004 *Les sciences pour la guerre*, Éditions de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, 2004.

DAHAN DALMEDICO Amy

1994 « Rénover sans se renier. L'École polytechnique de 1945 à nos jours. », dans *[Belhoste, Dahan Dalmedico et Picon 1994]*, p. 299–332.

1995 « Polytechnique et l'école française de mathématiques appliquées », dans *[Bruno Belhoste 1995].*

1996 « L'essor des mathématiques appliquées aux Etats-Unis : l'impact de la Seconde Guerre Mondiale », *Revue d'Histoire des Mathématiques* **2** (1996), p. 149–216.

2005 *Jacques-Louis Lions, un mathématicien d'exception*, Paris : éditions de la Découverte, 2005.

DALMEDICO Amy Dahan

2001 « An Image Conflict in Mathematics after 1945 », dans *[Bottazzini et Dalmedico 2001, p.223-254].*

DARDY Claudine, DUCARD Dominique et MAINGUENEAU Dominique

2002 *Un genre universitaire. Le rapport de soutenance de thèse.* Presses universitaires du Septentrion., 2002.

DARRIGOL Olivier

1984 « La genèse du concept de champ quantique », *Annales de physique* **9** (1984), p. 433–501.

DECAILLOT Anne-Marie

2010 « Zurich 1897 : premier congrès international de mathématiciens », *Revue germanique internationale* **12. La fabrique internationale de la science.** (2010), p. 123–137.

DEHEUVELS René

1966 « Finalité des universités », *AEERS* (1966).

DEMAZURE Michel

2003 « Quelques souvenirs de Laurent Schwartz », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n˚98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.33-35].*

D'ENFERT Renaud

2012 « Pour une prosopographie des enseignants de mathématiques des premières écoles normales d'instituteurs (années 1830-1840) : enjeux et problèmes », dans *[Rollet et Nabonnand 2012, p.291-309].*

DENJOY Arnaud

1938 « Aspects actuels de la pensée mathématique », *Annales de l'Université de Paris* **13** (1938), p. 151–163.

DHOMBRES Jean

1992 « Des théorèmes de la Révolution, ou l'inscription des mathématiques dans l'Histoire. », dans *Mélanges de l'Ecole française de Rome. Italie et Méditerranée T. 104, N˚1.* P. 191–214.

2007 « In Memoriam Jean Bass (1913-2007) », *Annales de la Fondation Louis de Broglie* **32** (4) (2007), p. 547–550.

DIEUDONNÉ Jean et SCHWARTZ Laurent

1949 « La dualité dans les espaces (F) et (LF). », French, *Annales de l'Institut Fourier* **1** (1949), p. 61–101.

DIEUDONNÉ Jean

1942 « La dualité dans les espaces vectoriels topologiques », *Annales de l'École Normale Supérieure* **59** (1942), p. 108–139.

1978 « Present trends in pure mathematics », *Adv. in Math.* **27** (3) (1978), p. 235–255, ISSN : 0001-8708.

1981 *History of functional analysis.* Amsterdam-New York : North-Holland Publishing Co., 1981.

1984 « Review of *The Prehistory of the Theory of Distributions*, by Jesper Lützen », *The American Mathematical Monthly* **91** (6) (1984), p. 374–379.

2007 « De l'analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique », dans *[Pierre Cartier 2007, p.1-14].*

DIRAC Paul A. M.

1951 « The relation of classical to quantum mechanics », dans *Proc. Second Canadian Math. Congress, Vancouver, 1949*, p. 10–31.

DIRAC Paul A.M.

1927 « The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics », *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **Vol. 113** (Num. 765) (1927), pp. 621–641.

DU BOIS-REYMOND Paul

1888 « Bemerkungen über $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.. », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **103** (1888), p. 204–229.

DUBREIL P.

1970 « Remise d'une épée à Mr Gaston Julia dans les salons de la Sorbonne le 6 décembre 1950. Allocution de M. Dubreil. », dans *[Julia 1970c, p.151-152].*

DUBREIL Paul

1982 « L'algèbre, en France, de 1900 à 1935 », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **3** (1982), p. 69–81.

DUCLERT Vincent

2006a « Le colloque de Caen, second temps de l'engagement mendésiste », dans *[Chatriot et Duclert 2006, p.81-100].*

2006b « L'invention d'une haute institution gouvernementale. La Délégation générale à la recherche scientifique et technique », dans *[Chatriot et Duclert 2006, p.132-149].*

DUGAC

1995 *Jean Dieudonné mathématicien complet*, Editions Jacques Gabay, 1995.

DURAND Antonin, MAZLIAK Laurent et TAZZIOLI Rossana (éds.)

2013 *Des mathématiciens et des guerres. Histoires de confrontations (XIX^e^-XX^e^ siècle)*, CNRS éditions, Paris, 2013.

(ED.) Brissaud Marcel (TEXTES RÉUNIS PAR) (éd.)

2002 *Écrits sur les processus aléatoires, mélanges en hommage à Robert Fortet.* Paris : Hermès Science Publications, 2002.

EGETHER Gérard

2003 « Jean Delsarte », dans [1903-2003 : Un siècle de mathématiques à Nancy *2003, p.25-31].*

EHRENPREIS Leon

1956 « On the theory of kernels of Schwartz. », English, *Proceedings of the American Mathematical Society* **7** (1956), p. 713–718, DOI : 10.2307/2033379.

EHRHARDT Caroline

2007 *Évariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811-1910).* Thèse de doct., École des hautes études en sciences sociales.

2010 « La naissance posthume d'Éveriste Galois (1811-1832) », *Revue de synthèse* **tome 131, 6e série, n° 4** (2010), p. 543–568.

2011a *Evariste Galois. La fabrication d'une icône des mathématiques, , 2011.* Paris, Éditions de l'EHESS, 2011.

EHRHARDT Caroline

2011b « How mathematicians remember », *International Social Science Journal* **n° 203-204** (2011), p. 103–120.

2012 « Approche biographique et biographie en histoire des mathématiques : le cas d'Évariste Galois », dans *[Rollet et Nabonnand 2012, p.95-117]*.

ELIAS Norbert

1991 *La société des individus*, Fayard, 1991.

EMERY Michel

2011 « Laurent Schwartz probabiliste », dans *[Schwartz 2011d, p.249-254]*.

EMERY Michel et YOR Marc (éds.)

2006 *In Memoriam Paul-André Meyer: Séminaire de Probabilités XXXIX*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006.

« Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens » 1902 , *L'Enseignement Mathématique* **4** (1902), p. 208–211.

ESAMBERT Bernard

2004 « Laurent Schwartz, un normalien amoureux de l'École polytechnique », *La Jaune et la Rouge* **596** (2004).

FERRIER Jean-Pierre

à paraître. « La dualité dans les EVT de Bourbaki : entre exposition et création », *http://www.iecn.u-nancy.fr/ ferrier/ (mai 2013)* (à paraître.).

FEUERHAHN Wolf et RABAULT-FEUERHAHN Pascale

2010 « Présentation : la science à l'échelle internationale », *Revue germanique internationale* **12. La fabrique internationale de la science.** (2010), p. 5–15.

FOUCAULT Michel

1969 « « Qu'est-ce qu'un auteur ? » », *Bulletin de la Société française de philosophie* **63** (3) (1969), p. 73–104.

FREDHOLM Ivar

1900 « Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. », *Öfversigt af Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandligen Stockholm* **57** (1900), p. 39–46.

1903 « Sur une classe d'équations fonctionnelles », *Acta Mathematica* **27** (1) (1903), p. 365–390, ISSN : 0001-5962.

FRÉCHET Maurice

1920 « Les mathématiques à l'Université de Strasbourg », *Revue du Mois* (1920), p. 337–362.

1929 « The inauguration of the Institute Henri Poincaré in Paris », *Bulletin of the American Mathematical SOciety* **35** (2) (1929), p. 198–200.

1963 « Notice nécrologique sur Jacques Hadamard, membre de la Section de Géométrie », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **257** (1963), p. 4081–4086.

G. Wallenborn P. Marage et (éd.)

1995 *Les Conseils Solvay et les débuts de la physique moderne*, Université Libre, Bruxelles, 1995.

Gårding Lars

1950 « On a lemma by H. Weyl », *Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar [Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund]* **20** (1950), p. 250–253.

1963 « Hörmander's work on linear differential operators », dans *[*Proceedings of the International Congress of Mathematicians *1963]*.

1988 « Lars Hörmander wins the Wolf prize », *Normat. Nordisk Matematisk Tidskrift* **36** (3) (1988), p. 133–134, issn : 0801-3500.

1997a *Some Points of Analysis and Their History*, American Mathematical Society, 1997.

1997b « The Impact of Distributions in Analysis », dans *[Gårding 1997a, Chapter 12, p.77-88]*.

Garnir H. G.

1951 « Sur la formulation des problèmes aux limites dans la théorie des distributions », *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* **20** (1951), p. 497–513, 639–649, issn : 0037-9565.

Gask H.

1961 « A proof of Schwartz's kernel theorem. », *Mathematica Scandinavica* **8** (1961), p. 327–332.

Gates Jr. Leslie D.

1952 « Differential equations in the distributions of Schwartz », *Iowa State College Journal of Science* **27** (1952), p. 105–111.

Gaudillière Jean-Paul

2001 « Beyond One-Case Statistics : Mathematics, Medicine and the Management of Health and DIsease in the Post-War Era », dans *[Bottazzini et Dalmedico 2001, p.281-296]*.

2002 *Inventer la biomédecine : La France, l'Amérique et la production des savoirs du vivant après 1945*, Paris : Éditions La Découverte, 2002.

Ghys Étienne

2010 « A propos des congrès de mathématiques », *Images des Mathématiques, CNRS* (2010), `URL:http://images.math.cnrs.fr/A-propos-des-congres-de.html`.

Gilain Christian

1991 « Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre », *Archive for history of exact sciences* **42** (1991), p. 91–136.

Gingras Yves

2008 « The Collective Construction of Scientific Memory : the Einstein-Poincaré Connection and its Discontents, 1905-2005 », *History of Science* **46** (1) (2008), p. 75–114.

Ginzburg Carlo

1980 *Le fromage et les vers. L'univers d'un meunier du XVI*[e], Paris : Aubier, 1980.

Girin Jacques et Goffman Erving

1987 *Façons de parler (Forms of Talk), trad.* éditions de Minuit, 1987.

Gispert Hélène

1991 *La France mathématique, la Société mathématique de France (1870-1914)*, sous la dir. de Paris : Société française d'histoire des sciences et des techniques & Société mathématique de France, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, 1991.

2007 « Les milieux mathématiques en France (1870-1914), enjeux historiographiques d'un pluriel. », dans *[Hert et Paul-Cavallier 2007]*.

2012 « L'entreprise biographique à l'épreuve : écueils, défis, atouts du cas d'Émile Borel », dans *[Rollet et Nabonnand 2012, p.120-175]*.

Gispert Hélène, Nabonnand Philippe et Peiffer Jeanne

2013 « Échanges mathématiques : études de cas (18[e]-20[e]). Rencontre mathématique 16-20 septembre 2013 - CIRM - Luminy. »

Godeaux J.

1975 « Lucien Godeaux », *Gazette des Mathématiciens* (1975), p. 101–105.

Godefroy Gilles

2011 « L'influence de Laurent Schwartz en théorie des espaces de Banach », dans *[Schwartz 2011d, p.7-10]*.

Goldstein C.

1995 *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Histoires de science, Presses universitaires de Vincennes, 1995, isbn : 9782910381103.

Goldstein Catherine

1999 « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870–1914) », *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum* **28** (New series 3) (1999), p. 187–214.

2010 « Des passés utiles : mathématiques, mathématiciens et histoires des mathématiques », *Noesis* **17** (2010), p.137–152.

2012 « Les autres de l'un : deux enquêtes prosopographiques sur Charles Hermite », dans *[Rollet et Nabonnand 2012, p.509-540]*.

Goldstein Catherine, Gray Jeremy et (dir.) Jim Ritter (éds.)

1996 *L'Europe mathématique. Mythes, histoires, identités/ Mathematical Europe. Myth, history, identity*, Paris : Editions de la Maison des sciences de l'homme, 1996.

Goldstein Catherine et Schappacher Norbert

2007 « Several Disciplines and a Book (1860-1901) », dans *[Goldstein, Schappacher et Schwermer 2006, p.67-104]*.

GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (éds.)

2006 *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae, Heidelberg, Berlin, etc.* Springer, 2006.

GOWERS Timothy et NIELSEN Michael

2009 « Massively collaborative mathematics », *Nature* **461** (2009), p. 879–880.

GRAFTON Anthony

2002 « Introduction », dans *[Cardano 2002, p.ix-xx]*.

GREIFFENHAGEN Christian

2008 « Video Analysis of Mathematical Practice? Different Attempts to "Open Up" Mathematics for Sociological Investigation », *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research* **9** (3) (2008), Art. 32, `http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0803323`.

GROTHENDIECK Alexander

1952 « Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires. », *Annales de l'Institut Fourier* **4** (1952), p. 73–112.

1954 *Espaces vectoriels topologiques*, Instituto de matematica pura e applicada do conselhol nacional des pesquisas e do departemento de matematica da faculdade de filosofia, ciencias e letras da universidade de Sao Paulo, 1954.

GROTHENDIECK Alexandre

1950a « Critères généraux de compacite dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces (LF). », French, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **231** (1950), p. 940–941.

1950b « Quelques resultats relatifs a la dualite dans les espaces (F). », English, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **230** (1950), p. 1561–1563.

1950c « Sur la completion du dual d'un espace vectoriel localement convexe. », French, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **230** (1950), p. 605–606.

1951a « Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **233** (1951), p. 839–841.

1951b « Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion. », French, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **233** (1951), p. 1556–1558.

1955 « Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. », French (1955).

1986 « Récoltes et semailles ».

GUESLIN André (éd.)

1994 *Les facs sous Vichy : étudiants, universitaires et Universités de France pendant la Seconde Guerre Mondiale*, Publications de l'Institut d'Etudes du Massif Central, 1994.

GUICHARDET Alain

2003a « Les mille et un engagements de Laurent Schwartz », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.169-174]*.

GUICHARDET Alain

2003b *Les mille et un engagements de Laurent Schwartz. Colloque Laurent Schwartz, présentation.* Bibliothèque de l'École polytechnique. Reproduit dans [Guichardet 2003a].

2005 « Laurent Schwartz et l'École polytechnique », *Bulletin de la SABIX (Société des Amis de la Bibliothèque de l'X)* **39** (2005).

2011 « Laurent Schwartz et les séminaires », dans *[Schwartz 2011c, p.5-8]*.

GUTHLEBEN Denis

2009 *Histoire du CNRS de 1939 à nos jours. Une ambition nationale pour la science.* Armand Colin, 2009.

HADAMARD Jacques

1937 « Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard », dans Paris : Gauthier-Villars, chap. Allocutions prononcées à la cérémonie du 7 janvier 1936.

1945 *An Essay on The Psychology of Invention in the Mathematical FIeld*, sous la dir. de Princeton University PRESS, 1945.

1949 *An essay on The Psychology of Invention in the Mathematical FIeld*, sous la dir. de DOVER, 1949.

1959 *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, J. Gabay, 1959.

HALBWACHS Maurice

1997 *La mémoire collective.* 1ère édition aux Presses Universitaires de France en 1950. éd., Albin Michel., 1997.

HALPERIN Israel

1952 *Introduction to the theory of distributions. Based on the lectures given by Laurent Schwartz.* English, (Canadian Mathematical Congress, Lecture Series, No.1). Toronto: University of Toronto Press. 35 p., 1952.

HANKINS Thomas L.

1979 « In defence of biography : the use of biography in the history of science », *History of Science* **17** (1979), p. 1–16.

« Heinz König zum 80. Geburtstag gewidmet » 2009 , *Arch. Math. (Basel)* **92** (5) (2009), p. 383, ISSN : 0003-889X.

HERREMAN Alain

1999 « Découvrir et transmettre. Une analyse de la dimension collective des mathématiques dans *Récoltes et semailles* d'Alexandre Grothendieck », *Prépublications de l'IHES.* **34-73** (1999), IHES/M/00/75.

2005 « Landmarks Writings in Western Mathematics 1640-1940 », dans Elsevier Science, chap. 1934 Seifert/Threlfall, *Lehrbuch der Topologie* and 1935 Alexandroff/Hopf, *Topologie.*

HERT P. et PAUL-CAVALLIER M.

2007 *Sciences et frontières: délimitations du savoir, objets et passages*, Échanges (Éditions Modulaires Européennes), Editions Modulaires Européenes, 2007.

HILBERT D.

1904 « Basis of a general theory of linear integral equations (First communication). (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Erste Mitteilung.).) », German, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* **1904** (1904), p. 49–91.

HÖRMANDER Lars

1955 « On the theory of general partial differential operators », *Acta Mathematica* **94** (1955), p. 161–248, ISSN : 0001-5962.

1963 *Linear partial differential operators*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116, Publishers, New York : New-York, Academic Press Inc., 1963.

1983 *The analysis of linear partial differential operators. I: Distribution theory and Fourier analysis.* English, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 256. Berlin Heidelberg-New York - Tokyo: Springer-Verlag. IX, 391 p., 1983.

1990 *The analysis of linear partial differential operators. I*, Second éd., t. 256, Distribution theory and Fourier analysis, Berlin : Springer-Verlag, 1990, ISBN : 3-540-52345-6.

2003 *The analysis of linear partial differential operators. I*, Second éd., t. 256, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Distribution theory and Fourier analysis, Berlin : Springer-Verlag, 2003, p. xii+440.

HOUZEL Christian

2004 « Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle », *Gazette des mathématiciens* **100** (2004), p. 52–63.

HULIN Nicole

1994 « La section des sciences de l'Ecole normale supérieure. Quelques jalons de son histoire. », dans *Ecole normale supérieure. Le livre du bicentenaire.* Sous la dir. de Presses Universitaires de FRANCE, p. 321–349.

HUMBERT Pierre et COLOMBO Serge

1947 *Le calcul symbolique et ses applications à la physique mathématique*, Mémor. Sci. Math., no. 105, Paris : Gauthier-Villars, 1947, p. 52.

HUNT Bruce J.

1991 *The Maxwellians*, sous la dir. d'Ithaca (N.Y.) : Cornell university PRESS, 1991.

HÖRMANDER Lars

2003 « A tribute to Laurent Schwartz », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.59-62].*

ISHIHARA Tadashige

1955 « Note on an extension of multiplication of distributions », *Proceedings of the Japan Academy* **31** (1955), p. 141–146, ISSN : 0021-4280.

JACKSON Allyn

1997 « Chinese Acrobatics, an Old-Time Brewery, and the "Much Needed Gap" : The Life of *Mathematical Reviews* », *Notices of the American Mathematical Society* **44** (3) (1997), p. 330–337.

JACKSON Allyn

2007 « Interview with Mikio Sato », *Notices of the American Mathematical Society* **54** (2) (2007), p. 208–222.

JEAN-JACQUES MARIE Tania Mathon ET

1976 *L'affaire Plioutch*, Paris, Seuil, 1976.

JOURNOUD Pierre

2013 « Laurent Schwartz et le Vietnam : la « perte de l'innocence » », dans *[***maths-guerre***]*.

JULIA Gaston

1970b « Oeuvres de Gaston Julia », dans Paris, Gauthier-Villars, chap. Allocution de M. Gaston Julia à l'occasion de son Jubilé, p. 378–394.

1970a « Oeuvres de Gaston Julia », dans Paris, Gauthier-Villars, t. VI, chap. Allocution de M. Gaston Julia, à l'occasion du Jubilé scientifique de M. Elie Cartan, célébré à la Sorbonne le 19 mai 1939, p. 61–62.

1970c *Oeuvres de Gaston Julia, Volume IV*, sous la dir. de Michel HERVÉ, Paris, Gauthier-Villars, 1970.

KAHANE Jean-Pierre

2011 « Analyse et synthèse harmoniques », dans *[*Actes des Journées X-UPS 2011 *2011, p.17-54]*.

KANTOR Jean-Michel

2004a « Mathematics east and west, theory and practice: the example of distributions. With an appendix by Adolf P. Yushkevich [translated from Istor.-Mat. Issled. No. 34 (1993), 256–267] », *Math. Intelligencer* **26** (1) (2004), p. 39–50.

2004b « Mathématiques d'Est en Ouest. Théorie et pratique: l'exemple des distributions », *Gazette des mathématiciens* **100** (2004), p. 33–43.

KILMISTER C.W.

1995 « Obituary. George Frederick James Temple », *Bulletin of the London Mathematical Society* **27 (3)** (1995), p. 281–287.

KISELMAN Christer O.

2002 « Generalized Fourier transformations: the work of Bochner and Carleman viewed in the light of the theories of Schwartz and Sato », dans *Microlocal analysis and complex Fourier analysis*, p. 166–185.

KNAPP Anthony W.

1999 « Editorial », *Notices of the American Mathematical Society* **46** (1999), p. 420.

KODAIRA K.

1949 « Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory) », *Annals of Mathematics* **50** (1949), p. 587–665.

KÖNIG Heinz

1953 « Neue Begründung der Theorie der “Distributionen” von L. Schwartz », *Mathematische Nachrichten* **9** (1953), p. 129–148, ISSN : 0025-584X.

1955 « Multiplikation von Distributionen. I », *Mathematische Annalen* **128** (1955), p. 420–452.

1957 « Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Distributionen », *Bayer Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. Abh. (N.F.)* (82) (1957), p. 80.

Koosis P.

1959 *Review : [Schwartz 1959]*, Mathematical Reviews.

Krief Claude

1966 « Révolution dans l'Université Jacques Monod, Laurent Schwartz, Raymond Aron », *Nouvel Observateur* **Numéro spécial** (1966).

Krige John

2006 *American Hegemony and the Postwar Reconstruction of Science in Europe*, Cambridge: MIT Press, 2006.

Kutateladze S. S.

2004 « Some Comments on Sobolev and Schwartz », *Mathematical Intelligencer* **1** (2004), p. 51.

2005 « Sergeĭ Sobolev and Laurent Schwartz », *Rossiĭskaya Akademiya Nauk. Vestnik* **75** (4) (2005), p. 354–359, ISSN : 0869-5873.

2008 « Sobolev and L. Schwartz: two fates, two fames », *Sibirskiĭ Zhurnal Industrialnoĭ Matematiki* **11** (3) (2008), p. 5–14, ISSN : 1560-7518.

Lamont Michèle

2009 *How Professors Tihnk. Inside the Curious World of Academic Judgement*, Harvard University Press, Cambridge, 2009.

Lang Serge

2001 « Comments on Non-References in Weil's works. », *Gazette des Mathématiciens* **90** (2001), p. 46–52.

Laudenbach François

2002 « Laurent Schwartz », *X info* **130** (2002).

Laudenbach François et al.

2013 « Hommage à Marie-Hélène Schwartz », *Gazette des Mathématiciens* **138** (2013), p. 55–71.

Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens 2003 ,
Paris, Société Mathématique de France, 2003.

Lax Peter

2004 « The Reception of the Theory of Distributions , » *Mathematical Intelligencer* **26** (No. 4) (2004), p. 52.

Lê Dũng Tráng

2003 « Souvenirs de Laurent Schwartz par un Vietnamien », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.155-160].*

LEBORGNE Gilles

2012 « Noyaux intégraux, espace de Hilbert à noyau reproduisant : introduction. (Notes de cours de l'ISIMA, deuxième année http://www.isima.fr/leborgne) ».

LEFEBVRE Muriel

2003 « L'ambivalence des mathématiciens face à l'image. Tension entre normes et usage », *Communication et langages* **136** (2003), p. 13–28.

2007 *Images et pratiques d'écritures en mathématiques*, Hert P., Paul Cavaillier, M., dirs, Sciences et frontières. Délimitations du savoir, objets et passages, Namur, Intercommunications/EME, p. 211-228.

LEHTO Olli

1994 « L'influence française sur la recherche mathématique finlandaise », *Gazette des mathématiciens* **59** (1994), p. 45–56.

1998 *Mathematics without borders: a history of the International Mathematical Union.* Springer-Verlag, 1998.

LELOUP Juliette

2009 *L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France.* Thèse de doct., Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

LELOUP Juliette et GISPERT Hélène

2009 « Des patrons des mathématiques en France dans l'entre-deux-guerres », *Revue d'histoire des sciences* **62** (1) (2009), p. 39–117.

LERAY Jean

1990 « La vie et l'œuvre de Serge Sobolev », *La Vie des sciences, série générale* **t. 7** (n° 6) (1990), p. 467–471.

Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs 1959 , Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXV, Lille, 3-8 Juin 1957. Paris, 1959, p. ix+183.

« Les quinze points de Caen » 1966 , *Revue de l'Enseignement Supérieur. L'université face à sa réforme.* (4) (1966), p. 199–208.

Les relations entre les mathématiques et la physique théorique 1998 , Festschrift for the 40th anniversary of the IHÉS, Bures : Institut des Hautes Études Scientifiques, 1998, p. 197.

LESOURME Jacques (sous la direction de) (éd.)

1994 *Les polytechniciens dans le siècle : 1894-1994*, Paris, Dunod, 1994.

LICHNÉROWICZ André

1966 « Pour des universités », *Revue de l'enseignement supérieur* **L'Université face à sa réforme.** (4) (1966), p. 60–69.

LIONS J. L.

1953 « Supports dans la transformation de Laplace », *Journal d'Analyse Mathématique* **2** (1953), p. 369–380, ISSN : 0021-7670.

1955a « Problèmes aux limites en théorie des distributions », *Acta Mathematica* **94** (1955), p. 13–153.

LIONS Jacques-Louis

1951a « Support de produits de composition. II », *Compte rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **232** (1951), p. 1622–1624.

1951b « Supports de produits de composition. I », *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **232** (1951), p. 1530–1532.

1955b « Espaces de Beppo Levi et quelques applications », dans *Séminaire Bourbaki, Vol. 3 (1954-1956)*, Exp. No. 117, 169–181.

1955c « Problèmes aux limites de type mixte », dans *Second colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles, 1954*, p. 25–36.

LOVE E. R.

1957 « A Banach space of distributions. I », *Journal of the London Mathematical Society. Second Series* **32** (1957), p. 483–498, ISSN : 0024-6107.

« Loève's correspondence with Lévy, Fréchet and Neyman » 2010 , *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique* **6** (1) (2010).

LÜTZEN Jesper

1979/80 « Heaviside's operational calculus and the attempts to rigorise it », *Archives for History of Exact Sciences* **21** (2) (1979/80), p. 161–200, DOI : 10.1007/BF00330405.

LÜTZEN Jesper

1982 *The prehistory of the theory of distributions.* Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Vol. 7. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. VIII, 232 p. DM 118.00; $ 49.20, 1982.

2011a « Examples and Reflections on the Interplay between Mathematics and Physics in the 19th and 20th Century », dans *[Schlote et Schneider 2011b, p.17-42]*.

2011b « The Physical Origin of Physically Useful Mathematics », *Interdisciplinary Science Reviews* **36** (3) (2011), p. 229–243.

MACKENZIE Donald

2001 *Mechanizing Proof: Computing, Risk, and Trust*, Cambridge, Mass.: MIT Press, 2001.

MAHWIN Jean

2005 « Les histoires belges de Jacques-Louis Lions », *Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique* **7-12** (2005), p. 219–226.

MAILLET Ed.

1901 « Courrier d'un lecteur », *L'Enseignement Mathématique* **3** (1901), p. 58–59.

MALGRANGE Bernard

1955–1956 « Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution », *Annales de l'Institut Fourier* **6** (1955–1956), p. 271–355.

1960 « Division des distributions », dans *Séminaire Bourbaki, Vol. 5 (1958-1960)*, Exp. No. 203, 477–481.

2003 « Laurent Schwartz et la théorie des distributions », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n˚98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.67-74].*

MALGRANGE Bernard

2004a « COURRIER DES LECTEURS A propos du dernier numéro de la Gazette », *Gazette des mathématiciens* **101** (2004), p. 99–100.

2004b « Laurent Schwartz », *Annuaire de l'association amicale de secours des anciens élèves de l'École Normale Supérieure* (2004).

2011 « La théorie des distributions », dans *[Schwartz 2011b, p.37-47].*

MALLIAVIN Paul

Notice sur les travaux, sous la dir. d'Académie des SCIENCES.

MANDELBROJT Szolem

1985 « Souvenirs à bâtons rompus de Szolem Mandelbrojt, recueillis en 1970 et préparés par Benoît Mandelbrot », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **6** (1985), p. 1–46.

MANDELBROJT Szolem et SCHWARTZ Laurent

1965 « Jacques Hadamard (1865-1963) », *Bulletin of the American Mathematical Society* **71** (1965), p. 107–129.

MARAGE P. et WALLENBORN G.

2011 « Les Conseils Solvay et la physique moderne », dans *[*Histoire des sciences en Belgique 1815-2000*, p.109-121].*

MATHON Tania et MARIE Jean-Jacques

1976 *L'affaire Pliouchtch. Dossier rassemblé, annoté et traduit par Tania Mathon et Jean-Jacques Marie. Préface de Michel Broué, Henri Cartan et Laurent Schwartz (Comité des mathématiciens)*, Editions du Seuil, 1976.

MAUREY Bernard

2003 « Le Séminaire Rouge », dans *Laurent Schwartz (1915-2002)*, p. 75–79.

MAZ'YA Vladimir Gilelevich et SHAPOSHNIKOVA Tatyana

1998 *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, AMS, 1998.

2005 *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, EDP Sciences, 2005.

MEHRA J.

1975 *The Solvay Conferences on Physics. Aspect s of the Development of Physics since 1911*, Reidel, Dordrecht-Boston, 1975.

MENCHOV D.E.

1985 « Impressions sur mon voyage à Paris en 1927. », French (1985).

MERLIN Pierre et SCHWARTZ Laurent

1994 *Pour la qualité de l'Université française*, puf, Paris, 1994.

MIKUSIŃSKI J. et SIKORSKI R.

1957 « The elementary theory of distributions. I », *Rozprawy Mat.* **12** (1957), p. 54.

1961 « The elementary theory of distributions. II », *Rozprawy Mat.* **25** (1961), p. 47.

MIKUSIŃSKI Jan G.

1948 « Sur la méthode de généralisation de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible », *Fundamenta Mathematica* **35** (1948), p. 235–239, ISSN : 0016-2736.

1949 « Sur les fondements du calcul opératoire », *Studia Mathematica* **11** (1949), p. 41–70, ISSN : 0039-3223.

1950 « Une nouvelle justification du calcul de Heaviside », *Atti Accad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) Sez. I.* **2** (1950), p. 113–121.

MILLOUX Henri

1956 « Georges Valiron (1884-1954) », *L'Enseignement Mathématique* **2** (1956), p. 217–223.

MONTBRIAL Thierry DE

2003 « Témoignage d'un élève et d'un collègue », dans *Laurent Schwartz (1915-2002)*, p. 81–95.

MÜNTZ Charles

1914 « Ueber den Approximationssatz von Weierstrass », dans *Mathematische Abhandlungen (Schwarzes Festschrift)*, p. 309–312.

NIRENBERG Louis

2003 « Laurent Schwartz and some of his mathematical work », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.97-103].*

Notices et discours. Tome quatrième (1957-1962). Académie des Sciences. Institut de France 1964 .

NYE Mary Jo (éd.)

2003 *The Cambridge History of Science, vol. 5 Modern Physical and Mathematical Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

O'KEEFFE Jeremiah

1957a « Distribution theory of the operational calculus », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II* **6** (1957), p. 157–170, ISSN : 0009-725X.

1957b « Singularities of Hadamard's finite part of improper integrals in the distributions of Schwartz », *RRendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II* **6** (1957), p. 65–82, ISSN : 0009-725X.

OLECH C.

1987 « International Mathematical Congresses », *The Mathematical Intelligencer* **9** (2) (1987).

OLESKO Kathryn

1989 « Physics Instruction in Prussian Secondary Schools before 1859 », *Osiris, 2nd series* **5** (1989), p. 94–120.

1991 *Physics as a calling. Discipline and Practice in the Königsberg Seminar for Physics.* Cornell History of Science Series, Cornell University Press, USA, 1991.

Osiris 5 : Science in Germany : The Intersection of Institutional and Intellectual Issues., 1989 .

PARSHALL Karen H. et RICE Adrian C. (éds.)

2002 *Mathematics unbound : the evolution of an international mathematical research community 1800-1945*, American Mathematical Society, 2002.

PAUMIER Anne-Sandrine

2009 « Le théorème des noyaux de Schwartz. (Mémoire de Master 2, Mathématiciques Fondamentales, UPMC) ».

2013 « Laurent Schwartz, un mathématicien face aux guerres », dans *[Durand, Mazliak et Tazzioli 2013, p.95-109].*

PAUMIER Anne-Sandrine et AUBIN David

À paraître. « Polycephalic Euclid? Collective aspects in the history of mathematics in the Bourbaki era. », http://hal.upmc.fr/hal-00871784.

P.CURBERA Guillermo

2009 *Mathematicians of the world, unite! : the International Congress of Mathematicians : a human endeavor*, A K Peters, Ltd., 2009.

PENZLIN Fritz

1955/56 « Distributionentheoretische Behandlung von Anfangswertproblemen relativistischer Wellengleichungen », *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena* **5** (1955/56), p. 137–149.

PESTRE Dominique

1992 « Les physiciens dans les sociétés occidentales de l'après-guerre. Une mutation des pratiques techniques et des comportements sociaux et culturels », *Revue d'histoire moderne et Contemporaine* **39)1** (1992), p. 56–72.

1994 « Le renouveau de la recherche à l'École Polytechnique et le laboratoire de Louis Leprince-Ringuet (1936-1965) », dans *[Belhoste, Dahan Dalmedico et Picon 1994]*, p. 333–356.

2006 *Introduction aux Science Studies*, La Découverte, Paris, 2006.

PICARD Jean-François et PRADOURA Elisabeth

1988 (remanié en 2009) « La longue marche vers le CNRS (1901-1945) », *Cahiers pour l'histoire du CNRS* **1** (http://www.vjf.cnrs.fr/histcnrs/pdf/cahiers-cnrs/picard-pradoura-88.pdf (consulté le 7 août 2013)) (1988 (remanié en 2009)).

PIER Jean-Paul

1990 *L'analyse harmonique : son développement historique.* Masson, Paris, 1990.

1992 « De l'analyse de Fourier à l'analyse harmonique », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **2** (1992), p. 1–11.

PIERRE CARTIER LUC ILLUSIE Nicholas M. Katz Gérard Laumon Yuri I. Manin-Kenneth A. Ribet (éd.)

2007 *The Grothendieck Festschrift. Vol. I*, Birkhäuser, 2007.

PISIER Gilles

2003 « Des applications radonifiantes à la géométrie des espaces de Banach », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.105-112].*

2004 « Discours prononcé en séance publique le 13 janvier 2004 en hommage à Laurent Schwartz (5 mars 1915-4 juillet 2002) », *x* (2004), Académie des Sciences.

PLIOUTCH Leonid

1977 *Dans le carnaval de l'histoire*, Paris, Seuil, 1977.

POINCARÉ Raymond et LICHTENBERGER Henri

1931 « Inauguration de l'Institut d'Etudes Germaniques », *Annales de l'Université de Paris* **6** (1931), p. 50–63.

POURPRIX Marie-Thérèse

2009 *Des Mathématiciens à la faculté des sciences de Lille [Texte imprimé] : 1854-1971 / Marie-Thérèse Pourprix*, Paris : l'Harmattan, 2009.

Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1963 , Djursholm : Institut Mittag-Leffler, 1963, p. 1+597.

PROCHASSON Christophe

1989 « Les Congrès : lieux de l'échange intellectuel », *Cahiers Georges Sorel* **7** (1989), p. 5–8.

PÉRÈS Joseph

1970 « Jubilé scientifique de M. Gaston Julia, célébré dans les salons de la Sorbonne le 16 décembre 1961. Allocution de M. Pérès. », dans *[Julia 1970c, p.151-152].*

R. HALLEUX VANDERSMISSEN A. Despy-Mayer G. Vanpaemel (éd.)

Histoire des sciences en Belgique 1815-2000, La Renaissance du Livre, Bruxelles, 2001, vol. 2.

RAYMOND François-Henri

1954 « Observations élémentaires sur le calcul symbolique », *Annales des Télécommunications* **9** (7-8) (1954), p. 194–196.

RECHERCHE SCIENTIFIQUE Centre National DE LA (éd.)

1949 *Le Calcul des probabilités et ses applications (Lyon, 28 juin au 8 juillet 1948)*, t. XIII, Centre National de la Recherche Scientifique, 1949.

« Regards sur les mathématiques en France entre les deux guerres. » 2009 , *Revue d'histoire des sciences* **62** (1) (2009).

RHAM Georges DE

1928 « Sur la dualité en Analysis situs. », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **186** (1928), p. 670–672.

1929 « Intégrales multiples et Analysis situs », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **188** (1929), p. 1651–1652.

1931 « Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **9e série, tome 10** (1931), p. 115–200.

1936 « Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples. », *L'Enseignement Mathématique* **35** (1936), p. 213–228.

Rham Georges de

1955 *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques.* T. III, Actualités scientifiques et industrielles. Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago, Hermann & Cie, 1955.

1980 « Quelques souvenirs des années 1925-1950 », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **1** (1980), p. 19–36.

Rham Georges de et Kodaira K.

1950 *Harmonic integrals*, Princeton, Institute for Advanced Studies, 1950.

Rhéaume Charles

2004 *Sakharov. Science, morale et politique. Préface d'Elena Bonner.* Les Presses de l'Université de Laval, 2004.

Richard Anne

2003 « Les papillons de Laurent Schwartz », *La Recherche* **362** (2003), p. 72–78.

Rioux J.-P. et Sirinelli J.-F.

1988 *La guerre d'Algérie et les intellectuels français*, sous la dir. de Complexe Bruxelles, 1988.

Robert Raoul

2003 « Le palais d'Atlas », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.41-43].*

Rollet Laurent et Nabonnand Philippe (éds.)

2012 *Les uns et les autres... Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Nancy, Presses Universitaires de Nancy - Éditions Universitaires de Lorraine, 2012.

Rosental Claude

2003 *La trame de l'évidence : sociologie de la démonstration en logique*, Paris, PUF, 2003.

2009 « Anthropologie de la démonstration », *Revue d'anthropologie des connaissances* **3** (2) (2009), p. 233–252.

Roubaud Jacques

1997 *Mathématique:* Seuil, Paris, 1997.

2011 « Esquisse d'un portrait de Jean Bénabou, catégoricien », *Images des Mathématiques, CNRS* (2011), `http://images.math.cnrs.fr/Esquisse-d-un-portrait-de-Jean.html`.

Rowe David

1989 « Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition », *Osiris, 2nd Series* **5** (1989), p. 186–213.

2003 « Mathematical Schools, Communities, and Networks », dans *[Nye 2003, p.113-132]*.

Rudin Walter

1973 *Functional analysis.* English, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York etc.: McGraw-Hill Book Comp. XIII, 397 p., 1973.

Ryll-Nardzewski C.

1954 « Sur le corps des opérateurs de Mikusiński », *Studia Mathematica* **14** (1954), 247–248 (1955).

Salam A.; Wigner E.P

1972 *Aspects on quantum theory*, Cambridge University Press, 1972.

Salomon Jean-Jacques

2006 *Les scientifiques, entre pouvoir et savoir*, sous la dir. d'Albin Michel Paris, 2006.

Samuel Pierre

1974 « Mathématiques, mathématiciens et société », *Publications mathématiques d'Orsay* **86** (1974).

Schapira Pierre

2003 « Mikio Sato, un visionnaire des mathématiques », *Gazette des Mathématiciens* **97** (2003), p. 23–71.

Scharlau Hrsg. Winfried

1990 *Mathematische Institute in Deutschland 1800 1945*, Braunschweig: Vieweg, 1990.

Schlote Karl-Heinz et Schneider Martina

2011a « Introduction », dans *[Schlote et Schneider 2011b, p.1-7]*.

— (éds.)

2011b *Mathematics meets physics. A contribution to their interaction in the 19th and the first half of the 20th century*, Frankfurt-am-Main, Harri Deutsch, 2011.

Schubring Gert

1985a « Das mathematische Seminar der Universität Münster, 1831/1875 bis 1951 », *Sudhoffs Archiv* **69** (1985), p. 154–191.

1985b « Die Entwicklung des mathematischen Seminars der Universität Bonn, 1864?1929 », *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **87** (1985), p. 139–163.

1989 « The Rise and Decline of the Bonn Natural Sciences Seminar », *Osiris, 2n* **5 : Science in Germany : The Intersection of Institutional and Intellectual Issues** (1989), p. 56–93.

1990 « Zur strukturellen Entwicklung der Mathematik an den deutschen Hochschulen 1800-1945 », dans *[Scharlau 1990, p.264-278]*.

1991 « 'Einsamkeit und Freiheit' neu besichtigt, Unreformen une Disziplinenbildung in Preussen als Modell für Wissenschaftspolitik im Europa des 19. Jahrhunderts », dans Franz Steiner Verlag, Stuttgart, chap. Spezialschulmodell versus Universitätsmodell- die Institutionalisierung von Forschung, p. 276–326.

2000 « Kabinett - Seminar - Institut: Raum und Rahmen des forschenden Lernens », *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* **23** (2000), p. 269–285.

Schwartz Claudine

2007 « Autour des premiers travaux de Laurent Schwartz sur les distributions. », *Gazette des mathématiciens* **113** (2007), p. 113–118.

2011a « Mathématiques en famille », dans *Oeuvres scientifiques de Laurent Schwartz*.

Schwartz Daniel

2003a « Souvenir d'enfance », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.45]*.

Schwartz Laurent

1941a « Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités. », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **212** (1941), p. 418–421.

1941b « Sur les fonctions à variation bornée et les courbes rectifiables. », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **212** (1941), p. 331–333.

1943a « Approximation d'un fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires. », *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* **serie 4, vol 6** (1943), p. 111–176.

1943b *Étude des sommes d'exponentielles réelles.* T. Actualités Sci. Ind., no. 959, Hermann, Paris, 1943.

1944 « Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **72** (1944), p. 141–145.

1945 « Généralisation de la notion de fonction, de derivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques. », French, *Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., n. Ser.* **21** (1945), p. 57–74.

1946 « Sur les fonctions moyenne-périodiques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **223** (1946), p. 68–70.

1948a « Généralisation de la notion de fonction et de dérivation. Théorie des distributions », *Ann. Télécommun.* **3** (1948), p. 135–140.

1948b « Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **227** (1948), p. 424–426.

1949a « Sur un deuxième mémoire de Petrowsky : « Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen ». , Exposé No. 15, 1 p. », *Séminaire Bourbaki, 1 (1948-1951)* (1949).

1949b « Sur un mémoire de Petrowsky : «Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen». , Exposé No. 11, 5 p. », *Séminaire Bourbaki, 1 (1948-1951)* (1949).

1949c « Théorie des distributions et transformation de Fourier », dans *[CNRS 1949, p.1-8]*.

1950a « Sur un mémoire de Kodaira : «Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory)», I. Exposé No. 26, 19 p. », *Séminaire Bourbaki, 1 (1948-1951)* (1950).

1950b « Sur un mémoire de Kodaira : «Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory)», II. , Exposé No. 32, 12 p. », *Séminaire Bourbaki, 1 (1948-1951)* (1950).

1950c *Théorie des distributions. Tome I.* French, Paris: Hermann & Cie. 148 p., 1950.

1951a « Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions », *Canadian Journal of Mathematics* **3** (1951), p. 503–512.

1951b « Les mathématiques en France pendant et après la guerre », dans *Proceedings of the Second Mathematical Congress, (Vancouver, 1949)*, sous la dir. de Toronto : University of Toronto Press, p. 49–67.

1951c « Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables. Exposé No. 45, 9 p. », *Séminaire Bourbaki, 1 (1948-1951)* (1951).

1951d *Théorie des distributions. Tome II.* French, Actualités scientifiques et industrielles. 1122. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg. X. Paris: Hermann & Cie. 169 p., 1951.

1952a « Théorie des noyaux. », French, dans *[Society 1952, p.220-230]*.

1952b « Transformation de Laplace des distributions », *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]* **1952** (Tome Supplementaire) (1952), p. 196–206.

1953a « Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe », dans *Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953*, p. 185–195.

1953b « Homomorphismes et applications complètement continues. », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **236** (1953), p. 2472–2473.

1953c « Solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Exposé No. 87, 6 p. », *Séminaire Bourbaki, 2 (1951-1954)* (1953).

1954a « Les opérateurs de convolution. Le théorème des noyaux. », dans *[Schwartz 1954b, Exposé n°11]*.

1954b *Séminaire Schwartz de la Faculté des Sciences de Paris, 1953/1954. Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications*, 11 rue Pierre Curie, Paris : Secrétariat mathématique, 1954, p. iii+144.

1954c « Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. », French, *C. R. Acad. Sci., Paris* **239** (1954), p. 847–848.

1954d *Tome 1 (1953-54) Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires.* Paris : Secrétariat Mathématique, 1954.

1955a « Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe », *Summa Brasil. Math.* **3** (1955), 181–209 (1955).

1955b « Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. », French, *J. Anal. Math.* **4** (1955), p. 88–148, doi : `10.1007/BF02787718`.

1955c « Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques », dans *Second colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles, 1954*, p. 13–24.

1956a *Variedades analiticas complejas. (Course given in July-October 1956)*, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.E., Colombia, 1956.

1957 « Théorie des distributions à valeurs vectorielles. », French, *Ann. Inst. Fourier* **7** (1957), p. 1–141.

SCHWARTZ Laurent

1958a « La fonction aléatoire du mouvement brownien. Exposé No. 161, 23 p », *Séminaire Bourbaki, 4 (1956-1958)* (1958).

1958b « Sur un mémoire de Kodaira : «Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory)», I. Exposé No. 26, 19 p. », *Séminaire Bourbaki,* (1958).

1958c « Sur un mémoire de Kodaira : «Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory)», II. , Exposé No. 32, 12 p. », *Séminaire Bourbaki* (1958).

1958d « Théorie des distributions à valeurs vectorielles. II. », English, *Ann. Inst. Fourier* **8** (1958), p. 1–209.

1959 *Étude des sommes d'exponentielles. 2ième éd*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, V. Actualités Sci. Ind. Paris : Paris, Hermann, 1959, p. 151.

1962 « Sous-espaces hilbertiens et antinoyaux associés. Exposé No. 238 », *Séminaire Bourbaki, 7 (1961-1962)* (1962).

1963-1964a « Opérateurs différentiels et espaces fibrés à fibre vectorielle », dans *Séminaire Henri Cartan, tome 16, 1963-1964*, chap. Exposé n°2, p. 1–9.

1963-1964b « Opérateurs elliptiques et indices », dans *Séminaire Henri Cartan, tome 16, 1963-1964*, chap. Exposé n°2, p. 1–9.

1964 « Les travaux de Seeley sur les opérateurs intégraux singuliers sur une variété. Exposé No. 269, 15 p. », *Séminaire Bourbaki, 8 (1962-1964)* (1964).

1966 *Théorie des distributions*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée, Paris : Hermann, 1966, p. xiii+420.

1970 « Produits tensoriels g_p et d_p, applications p-sommantes, applications p-radonifiantes. Exposé No. 386, 26 p. », *Séminaire Bourbaki, 13 (1970-1971)* (1970).

1972 « La « fonction » delta et les noyaux », dans *[Salam 1972, p.179-182]*.

1973 « Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure », *J. Analyse Math.* **26** (1973), p. 1–168, ISSN : 0021-7670.

1977 « Processus de Markov et désintégrations régulières », *Annales de l'Institut Fourier* **27** (3) (1977), p. xi, 211–277, ISSN : 0373-0956.

1981a « Contribution de M. Laurent Schwartz », dans *Etudes et rapports de la Commisison du BIlan. La France en mai 1981. TOme 4 : l'enseignement et le développement scientfique.*

1981b « Notice sur les travaux scientifiques de Laurent Schwartz », dans *in [Schwartz 2011b, p.17-34]*.

1983 *Pour sauver l'Université*, Éditions du Seuil, Paris, 1983.

1987 « De certains processus mentaux dans la découverte en mathématiques », *Revue des sciences morales et politiques* **65** (1987), p. 325–340.

1994a « Ma bataille pour réformer l'École polytechnique », dans *[Lesourme 1994]*, p. 451–458.

1994b « Souvenirs sur J. Dieudonné », *Pour la Science* **200** (1994).

1997 *Un mathématicien aux prises avec le siècle.* Paris: Editions Odile Jacob., 1997.

1998 « Commémoration de la thèse de Maurice Audin, assassiné pendant la guerre d'Algérie », *Gaz. Math.* (75) (1998), p. 11–16, ISSN : 0224-8999.

2003b « Ma bataille pour moderniser l'École polytechnique », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.127-131]*, 98, suppl. Laurent Schwartz (1915–2002), p. 127–131.

2011b *Œuvres scientifiques. I*, Documents Mathématiques (Paris), 9, Paris : Société Mathématique de France, 2011.

2011c *Œuvres scientifiques. II*, Documents Mathématiques (Paris), 10, Paris : Société Mathématique de France, 2011.

2011d *Œuvres scientifiques. III*, Documents Mathématiques (Paris), 11, Paris : Société Mathématique de France, 2011.

SCHWARTZ Laurent et SCHWARTZ Marie-Hélène

1973 « Seminar Schwartz. Table of Contents: Laurent Schwartz, Cylindrical probabilities and p-summing and p-radonifying maps (notes by John Lloyd) ; M.-H. Schwartz, Local theory of analytic functions of several complex variables (notes by J. F. Price) », *Notes on Pure Mathematics, Department of Pure Mathematics, Department of Mathematics, Australian National University, Canberra* **7** (1973), not consecutively paged.

SCHWARTZ Marie-Hélène

1940 « Sur une propriété de la fonction $m(r, A)$ de M. Nevanlinna dans les fonctions méromorphes. », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **210** (1940), p. 525–526.

1941c « Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs deficientes non asymptotiques. », French, *C. R. Acad. Sci., Paris* **212** (1941), p. 382–384.

1949d « Sur les indices de ramification de M. Nevanlinna. », French, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **228** (1949), p. 45–56.

1949e « Sur les surfaces de Riemann possedant des points critiques arbitrairement rapproches. », French, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **228** (1949), p. 154–155.

1950d « Applications A-interieures et formule de Gauss-Bonnet généralisée. », French, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **230** (1950), p. 1337–1338.

1950e « Applications A-interieures et théorie des defauts. », French, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **230** (1950), p. 1376–1378.

1950f « Applications interieures régulières dans les variétéss à n dimensions. », French, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **230** (1950), p. 1244–1245.

1954e « Formules apparentées à celles de Nevanlinna-Ahlfors pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre. », French, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **82** (1954), p. 317–360.

1954f « Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet pour certaines applications d'une varété à *n* dimensions dans une autre. », French, *Acta Mathematica* **91** (1954), p. 189–244.

1956b *Espacios fibrados : curso explicado / por Marie-Hélène Schwartz en Los meses ; Julio-septiembre de 1956*, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.E., Colombia, 1956.

SCHWARTZ Marie-Hélène

2003c « Sur certains engagements de Laurent Schwartz », *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003]* (2003), p. 205–210.

SIEGMUND-SCHULTZE Reinhard

1994 « « Scientific Control » in Mathematical Reviewing and German-U.S.-American Relations between the Two World Wars », *Historia Mathematica* **21** (1994), p. 306–324.

2001 *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars*, Birkhäuser, 2001.

SIKORSKI R.

1954 « A definition of the notion of distribution », *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.* **2** (1954), p. 209–211.

SILVA J. SEBASTIÃO E

1955 « Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions », *Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. (2)* **4** (1955), p. 79–186.

1956 « Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions », *Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. (2)* **5** (1956), p. 169–170.

SIMON Marielle

2010 « An insight into the life of Michel Loève through his correspondences with Paul Lévy, Maurice Fréchet and Jerzy Neyman », *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique* **6** (1) (2010), 15 p.

SIRINELLI Jean-François

1988 *Génération intelectuelle. Khâgneux et Normaliens dans l'entre-deux-guerres*, Favard, Paris, 1988.

1994 *Ecole Normale Supérieure. Le livre du bicentenaire*, puf, Paris, 1994.

SKÓRNIK Krystyna

2007 « Professor Jan Mikusiński - life and work », *Notices from the ISMS* (2007), p. 1–20.

SŁOWIKOWSKI W.

1955a « A generalization of the theory of distributions », *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.* **3** (1955), p. 3–6.

1955b « On the theory of operator systems », *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.* **3** (1955), p. 137–142.

SMALE Stephen

1984 « On the steps of Moscow University », *The Mathematical Intelligencer* **6** (2) (1984), p. 21–27.

SOCIETY American Mathematical (éd.)

1952 , *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Massachussets, Aug. 30-Sept. 6, 1950)*, 1.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (éd.)

1973 *Colloque international C.N.R.S. sur les équations aux dérivées partielles linéaires, Nancy 1972*, CNRS, 1973.

STEINGART Alma

2012 « A group theory of group theory: Collaborative mathematics and the 'uninvention' of a 1000-page proof », *Social Studies of Science* **42** (2) (2012), p. 185–213.

STRAUSS Léon

1994 « L'université de Strasbourg repliée. Vichy et les Allemands », dans *[Gueslin 1994]*.

SYNOWIEC John

1983 « Distributions: the evolution of a mathematical theory », *Historia Mathematica* **10** (2) (1983), p. 149–183.

Séminaire Bourbaki. vol. 1948-1949, 1949-1950 exposés 1-32 1966 , New York : W. A. Benjamin, 1966.

SÖDERQVIST Thomas (éd.)

2007 *The History and Poetics of Scientific Biography*, Aldershot, Ashgate, 2007.

TEMPLE G.

1952 « La théorie de la convergence généralisée et des fonctions généralisées et leurs applications à la physique mathématique », *Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5)* **11** (1952), 111–122 = Consiglio Naz. Ricerche. Pubbl. Ist. Appl. Calcolo no. 356 (1953).

1954 « Weak functions and the "finite part" of divergent integrals », dans *Studies in mathematics and mechanics presented to Richard von Mises*, p. 135–140.

1955 « The theory of generalized functions », *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* **228** (1955), p. 175–190.

1956 « Generalized functions and Dirichlet's principle », *Proceedings of the Royal Society. London. Series A. Mathematical* **235** (1956), p. 444–453.

THURSTON William P.

1994 « On proof and progress in mathematics », *Bulletin of the American Mathematical Society* **30** (2) (1994), p. 161–177, ISSN : 0273-0979.

TREVES François

1967 *Topological vector spaces, distributions and kernels.* English, New York-London: Academic Press 1967. XVI, 565 p., 1967.

TREVES François, PISIER Gilles et YOR Marc

2003 « Laurent Schwartz (1915-2002) », *Notices of the American Mathematical Society* **50** (9) (2003), p. 1072–1084.

TRÈVES François

2003 « Théorie des distributions et analyse fonctionnelle », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.113-118]*.

TURNER Laura E.

2013 « The Mittag-Leffler Theorem: The origin, evolution, and reception of a mathematical result, 1876–1884 », *Historia Mathematica* **40** (2013), p. 36–83.

VALATIN J.G.

1959 « Sur la divergence dans la théorie quantique des champs », dans *[*Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs *1959, p.179-]*.

VALLÉE Robert

2000 « Serge Colombo (1911-2000) », *Gazette des Mathématiciens* **86** (2000), p. 101.

VERDIER Norbert

2010 « Entretien avec Jesper Lützen : une invitation à lire ses travaux », *Bulletin de la SABIX (Société des Amis de la Bibliothèque de l'X)* **45** (2010), p. 23–26.

VIDAL-NAQUET Pierre

1958 *L'Affaire Audin (1957-1978) Préface de Laurent Schwartz*, Editions de Minuit, 1958.

VITERBO Claude

2002 « La Fondation du "Centre de Mathématiques de Laurent Schwartz" », *Lettre du C.N.R.S.* **40** (2002).

WALDSCHMIDT Michel

2003 « Préface », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.3]*.

WAQUET Françoise

2003 *Parler comme un livre. L'oralité et le savoir (XVIe - XXe siècle)*, Albin Michel, 2003.

WARWICK Andrew

2003 *Masters of Theory. Cambridge and the Rise of Mathematical Physics.* The University of Chicago Press. Chicago et London., 2003.

WEIL André

1940 *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* French, Hermann, Actualités scientifiques et industrielles 869, 1940.

1979 *Œuvres scientifiques. Collected Papers.* Springer, 1979.

1979 (1954) « Mathematical Teaching in Universities », dans *[Weil 1979, Volume 2, p.118-120]*.

1991 *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser, 1991.

WEYL Hermann

1954-1957 « Address of the President of the Fields Medal Committee 1954 », dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Amsterdam, September 2-9)*, **1**, p. 161–174.

WHITNEY Hassler

1948 « On Ideals of Differentiable Functions », *American Journal of Mathematics* **70** (No. 3) (1948), p. 635–658.

WIENER Norbert

1930 « Generalized harmonic analysis », *Acta Mathematica* **55** (1) (1930), p. 117–258.

1953 *Ex-prodigy. My childhood and youth*, Simon et Schuster, New York, 1953.

1956 *I am a mathematician : the later life of a prodigy : an autobiographical account of the mature years and career of Norbert Wiener and a continuation of the account of his childhood in Ex-prodigy*, M.I.T. Press, 1956.

WIGHTMAN A. S.

1959 « Quelques problèmes mathématiques de la théorie quantique relativiste », dans *[*Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs *1959, p.1-38]*.

1985 « Une perspective sur la théorie quantique des champs », dans *[*Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz. Vol. 1 *1985, p. 175-185]*, Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1 (Palaiseau, 1983).

1996 « How it was learned that quantized fields are operator-valued distributions », *Fortschr. Phys.* **44** (2) (1996), p. 143–178, ISSN : 0015-8208.

YOR Marc

2003 « Deux maîtres es-probabilités », dans *[*Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au n°98 de la Gazette des Mathématiciens *2003, p.]*.

2006 « The Life and Scientific Work of Paul André Meyer (August 21st, 1934 - January 30th, 2003) 'Un modèle pour nous tous' », dans *[Emery et Yor 2006, p.13-26]*.

YUSKEVITCH Adolphe P.

2004 « Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées », *Gazette des Mathématiciens* (100) (2004), p. 44–50.

YUSKEVITCH A.P.

1993 « Some remarks to the history of the theory of generalized solutions of partial differential equations and of generalized functions. », *Istor.-Mat. Issled* **34** (1993), p. 256–267.

ZALLEN Doris T.

1989 « The Rockefeller Foundation and French Research », *Cahiers pour l'histoire du CNRS* **5** (1989).

Zarca Bernard

2012 *L'univers des mathématiciens. L'ethos professionnel des plus rigoureux des scientifiques.* Presses universitaires de Rennes, 2012.