LE COMMENTAIRE D'AL-MĀHĀNĪ SUR LE CONCEPT DE RAPPORT

Bijan Vahabzadeh

LE COMMENTAIRE D'AL-MĀHĀNĪ SUR LE CONCEPT DE RAPPORT*

BIJAN VAHABZADEH

Nous allons parler ici d'un traité d'al-Māhānī que l'on peut considérer comme étant l'un des premiers commentaires connus sur les concepts de rapport et de proportionnalité — le premier commentaire connu étant un texte très bref d'al-Jawharī (*c.* 830), intitulé *Additions au cinquième Livre de l'ouvrage d'Euclide*, et qui ne contient que trois propositions très élémentaires destinées à justifier les Définitions V. 5 & V. 7 des *Éléments*[1].

Al-Māhānī — plus précisément Abū ʿAbd Allāh Muḥammad Ibn ʿĪsā Ibn Aḥmad al-Māhānī — était un mathématicien et astronome qui a exercé son activité à Bagdad dans la deuxième moitié du IX[e] siècle après J.-C. Il est mentionné dans les *Tables Ḥakémites* d'Ibn Yūsuf comme s'étant livré à des observations astronomiques entre 853 et 866.

En mathématiques, il est mentionné par ʿUmar al-Khayyām comme étant le premier à avoir tenté — sans succès — de résoudre algébriquement un lemme de géométrie qu'Archimède avait admis sans démonstration dans la quatrième proposition du second Livre de son traité *Sur la sphère et le cylindre* ; problème qu'al-Māhānī avait ramené à la résolution d'une équation du troisième degré[2]. Al-Māhānī est aussi l'auteur d'une rédaction inachevée du *Traité sur la sphère* de Ménélaüs d'Alexandrie, et de commentaires sur les Livres I, V, X & XIII des *Éléments* d'Euclide. De ses écrits, il ne nous reste qu'un petit traité *Sur la connaissance de l'azimut*, une explication des passages obscurs du Livre XIII, un fragment d'un commentaire sur le Livre X[3], et enfin un traité sur le concept de rapport[4].

C'est ce dernier texte — le seul qui nous intéresse ici — que nous allons essayer de décrire en détail. Mais nous allons rappeler tout d'abord certaines définitions fondamentales du Livre V des *Éléments* d'Euclide, dont la connaissance est indispensable à la compréhension du traité d'al-Māhānī.

I. APERÇU SUR LE CINQUIÈME LIVRE DES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE ET SUR L' « ANTHYPHÉRÈSE » OU « ALGORITHME D'EUCLIDE »

Toute la théorie des proportions telle qu'Euclide l'avait exposée dans le Livre V de ses *Éléments* s'appuyait sur les définitions que l'on trouve au début de ce Livre, et dont les principales, du moins pour notre propos, sont les suivantes :

---

* Le texte qui suit est une version revue et mise à jour de la communication que nous avions faite lors du colloque "Sciences et philosophies arabes : méthodes, problèmes, cas" organisé par la SIHSPAI (Carthage, 2000), puis lors du colloque "La réception des *Éléments* d'Euclide au Moyen Âge et à la Renaissance" organisé par Sabine Rommevaux (Lille, 2001) ; nous avons ajouté en annexe une traduction française du texte d'al-Māhānī dont il était question.

[1] Voir Gregg De Young, "Al-Jawharī's additions to Book V of Euclid's *Elements*", dans F. Sezgin (éd.), *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 11 (1997) : 153-178. Le lecteur trouvera dans cet article une édition, une traduction anglaise et une analyse du texte d'al-Jawharī.

[2] À savoir : *Un cube plus un nombre sont égaux à des carrés*. Voir Roshdi Rashed et Bijan Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, 1999, pp. 116, 178 et 254.

[3] Voir à ce sujet Marouane Ben Miled, "Les commentaires d'al-Māhānī et d'un anonyme du Livre X des *Éléments* d'Euclide", *Arabic Sciences and Philosophy* 9 (1999) : 89-156.

[4] Voir Yvonne Dold-Samplonius, "Al-Māhānī", dans C.C. Gillispie (éd.), *Dictionary of Scientific Biography*, 16 vols., New York, 1970-1980, vol. IX, pp. 21-22 ; et Fuat Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, 9 vols., Leiden, 1967-1984, vol. V, pp. 260-262.

3. Un rapport *est la relation, telle ou telle, selon la taille, [qu'il y a] entre deux grandeurs du même genre. 3bis. Une* proportion *est l'identité des rapports*[5]*. 5. Des grandeurs sont dites* être dans le même rapport, *une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième, quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, [et] pris de manière correspondante. 6. Et que les grandeurs qui ont le même rapport soient dites* en proportion[6].

Vient ensuite une définition du rapport plus grand, basée elle aussi sur la comparaison de certains équimultiples des grandeurs considérées[7].

En ce qui concerne la Définition V. 3, il faut remarquer que le sens de l'expression « *la relation, telle ou telle, selon la taille* » n'est expliquée nulle part dans les *Éléments*, ce qui pose un problème d'interprétation du fait de son caractère peu explicite. Quant à la Définition V. 5, elle a joué pendant près de deux mille ans un rôle très important du fait qu'elle pouvait s'appliquer à des grandeurs quelconques ; c'est-à-dire qu'elle pouvait s'appliquer que les grandeurs considérées soient commensurables ou incommensurables[8].

Cependant cette Définition posait un certain nombre de problèmes. Tout d'abord, le fait de comparer entre eux des multiples des grandeurs considérées ne semblait pas avoir de lien évident avec la notion de proportionnalité. D'autre part Euclide, selon son habitude, n'avait donné aucune indication sur la manière dont cette Définition avait été conçue ou établie — ce qui aurait peut-être permis d'en éclaircir le sens. Enfin, bien qu'elle avait pour but de définir la similitude de deux rapports, l'exposé d'Euclide ne permettait pas d'établir de lien entre la Définition V. 5 et la Définition V. 3.

Nous ne connaissons aucun commentaire grec sur la Définition V. 5[9]. Par contre, la situation est entièrement différente dans le cas des mathématiques arabes. Cette Définition a en effet suscité de nombreux commentaires de la part des mathématiciens arabes ; commentaires qui avaient pour but soit de la justifier en la démontrant, soit de la remplacer par une autre définition connue sous le nom de « définition anthyphérétique de l'identité des rapports »[10]. Cette dernière définition consiste à

[5] Cette Définition, que l'on trouve dans les versions dites « Isḥāq-Thābit » et « Ḥajjāj » des *Éléments*, est considérée de nos jours comme une interpolation. Voir à ce sujet John William Engroff Jr., *The Arabic Tradition of Euclid's Elements: Book V*, Thèse de Doctorat (inédite), Harvard University, 1980, pp. 277-278 ; Thomas Little Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2e éd., 3 vols., Cambridge, 1926 (réimpr. New York, 1956), vol. II, p. 119 ; et Bernard Vitrac, "La Définition V. 8 des *Éléments* d'Euclide", *Centaurus* 38 (1996) : 97-121.

[6] Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, Traduction et commentaires par Bernard Vitrac, vol. II, Paris, 1994, pp. 36 & 41.

[7] Il s'agit de la Définition V. 7 : « *Et quand parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième et que d'autre part le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la quatrième, alors la première [grandeur] est dite* avoir un plus grand rapport *relativement à la deuxième que celui de la troisième relativement à la quatrième* » [Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, vol. II, p. 46].

[8] Et ce contrairement à l'autre définition de la proportionnalité que l'on trouve au début du Livre VII — i.e. la Définition VII. 21 — qui dans les *Éléments* ne s'appliquait qu'aux nombres, mais pouvait aisément être étendue au cas des grandeurs commensurables : « *Des nombres sont* en proportion *quand le premier, du deuxième, et le troisième, du quatrième, sont équimultiples, ou la même partie, ou les mêmes parties* » [Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, vol. II, p. 262].

[9] Voir Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, vol. II, pp. 539-543 ; Vitrac, "La Définition V. 8 des *Éléments* d'Euclide", pp. 114-115.

[10] Voir Edward Bernard Plooij, *Euclid's Conception of Ratio and His Definition of Proportional Magnitudes as Criticized by Arabian Commentators*, Rotterdam, 1950, pp. 48-62 ; et John E. Murdoch, "The medieval language of proportion: Elements of the interaction with Greek foundations and the development of new mathematical techniques", dans A.C. Crombie (éd.), *Scientific Change*, London, 1963, pp. 251-255.

appliquer à deux grandeurs homogènes un certain processus appelé « anthyphérèse » ou « algorithme d'Euclide ». Ce processus consiste, deux grandeurs quelconques étant données, à retrancher la plus petite de la plus grande un certain nombre de fois, jusqu'à ce que l'on obtienne un reste qui soit plus petit que la plus petite grandeur ; ensuite à retrancher ce reste de la plus petite grandeur un certain nombre de fois, jusqu'à ce que l'on obtienne un deuxième reste plus petit que le premier reste ; ensuite à procéder de même continuellement avec chaque paire de restes obtenus. La suite des nombres entiers que l'on obtient de cette manière permettra en quelque sorte de « caractériser » le rapport des deux grandeurs données. Si maintenant le rapport entre deux autres grandeurs est lui aussi caractérisé par la *même* suite de nombres entiers, alors les quatre grandeurs seront dites *proportionnelles*, c'est-à-dire qu'elles auront le *même rapport*.

Bien que ce processus soit explicitement utilisé dans les *Éléments* d'Euclide[11], il n'apparaît pas que l'anthyphérèse ait été utilisée par des mathématiciens grecs pour définir la proportionnalité des grandeurs — bien qu'il s'agisse là d'une question très controversée dans laquelle nous ne souhaitons ni ne saurions entrer, n'ayant pas les compétences nécessaires[12].

II. LE COMMENTAIRE D'AL-MĀHĀNĪ

Le *Traité d'al-Māhānī sur la difficulté relative à la question du rapport* nous a été conservé dans neuf manuscrits[13]. Jusqu'à une époque récente, ce traité n'avait jamais été édité ; seul le début du texte avait été traduit en anglais par Plooij à partir d'un seul manuscrit[14]. C'est à partir de cette seule traduction anglaise, qui ne contenait que les définitions du rapport et de la proportionnalité, que l'on se basait en général pour décrire l'apport d'al-Māhānī à l'histoire de la théorie des proportions. Or cette traduction ne contenait ni la définition du rapport plus grand, ni les quatre propositions qui constituent l'objectif même du traité d'al-Māhānī.

Depuis, Jan Hogendijk a analysé ce traité d'une manière beaucoup plus approfondie, et édité et traduit en anglais un certain nombre de passages[15]. Nous avons nous-mêmes édité et traduit en anglais tout le traité, en ajoutant un commentaire mathématique en notation moderne[16]. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de donner une description détaillée du contenu de l'ensemble de ce traité ; et, en annexe, une traduction française du texte arabe.

---

[11] Voir *infra*.

[12] Nous pensons en effet que cette question est surtout du ressort des spécialistes des mathématiques grecques. Voir notamment Wilbur Richard Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht, 1975 ; et David H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy: A New Interpretation*, 2e éd., Oxford, 1999. Pour une étude détaillée des problèmes et des débats qui se rattachent à cette question, nous renvoyons le lecteur aux commentaires de Vitrac dans Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, vol. II, pp. 515-523 ; ainsi qu'à Vitrac, "ʿUmar al-Khayyām et l'anthyphérèse : Étude du deuxième Livre de son commentaire *Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide*", *Farhang,* vol. 14, no. 39-40 (Téhéran, 2002) : 137-192 (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00174930), voir notamment IV, A & B.

[13] Voir Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. V, p. 261. Aux six manuscrits mentionnés par Sezgin, il faut ajouter Qom, Āyatollāh Marʿashī, MS 4521 ; St-Petersburg, Or. Inst., MS A585 ; et Téhéran, Sepahsālār, MS 690. (Nous remercions Faïza Bancel, Marouane Ben Miled et Jan P. Hogendijk pour nous avoir fourni ces informations supplémentaires ainsi qu'une copie de la plupart des manuscrits.)

[14] Voir Plooij, *Euclid's Conception of Ratio*, pp. 50-51.

[15] Jan P. Hogendijk, "Anthyphairetic ratio theory in medieval Islamic mathematics", dans Y. Dold-Samplonius, J.W. Dauben, M. Folkerts & B. Van Dalen (éds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Stuttgart, 2002, Boethius Band 46, pp. 187-2002.

[16] Vahabzadeh, "Al-Māhānī's commentary on the concept of ratio", *Arabic Sciences and Philosophy* 12 (2002) : 9-52.

Le traité d'al-Māhānī commence par une introduction d'une concision extrême, dans laquelle il explique que l'on peut justifier les Définitions V. 5 & V. 7 des *Éléments* en partant d'une conception numérique du rapport et des premières propositions du Livre X des *Éléments* — propositions dans lesquelles Euclide avait utilisé l'anthyphérèse comme critère d'incommensurabilité (Proposition X. 2) et pour trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs (Proposition X. 3), et dans lesquelles il avait démontré que les grandeurs commensurables sont celles dont le rapport est le même que le rapport de deux nombres entiers (Propositions X. 5 & X. 6).

C'est ainsi qu'al-Māhānī est amené à caractériser un rapport quelconque au moyen du processus anthyphérétique. Il considère que le rapport entre deux grandeurs — ou entre deux nombres — est un certain état qui survient à chacune d'elle lorsqu'elle est mesurée par l'autre. Il explique que cet état survient suivant trois modalités : ou bien la plus petite mesure la plus grande sans laisser de reste, et la plus petite sera alors une *partie* de la plus grande ; ou bien le processus anthyphérétique continue jusqu'à ce que finalement un reste mesure le reste qui le précède, et alors la plus petite sera des *parties* de la plus grande ; ou bien ce processus continue indéfiniment, auquel cas les deux grandeurs seront *incommensurables*.

Conformément à cela, quatre grandeurs auront donc le *même rapport*, c'est-à-dire que ces quatre grandeurs seront *proportionnelles*, si l'état de la première, lorsqu'elle est mesurée par la deuxième, est *comme* l'état de la troisième, lorsqu'elle est mesurée par la quatrième. En d'autres termes, deux rapports seront identiques, s'ils sont tous les deux caractérisés par la même suite de nombres entiers obtenus au moyen de l'anthyphérèse.

Al-Māhānī énonce ensuite une définition du rapport plus grand, qui elle aussi se base sur l'anthyphérèse. Cette définition, qui par sa concision est de prime abord complètement hermétique, devient un peu plus claire lorsqu'on examine comment al-Māhānī l'applique dans les démonstrations des deuxième et quatrième propositions de son traité : on voit alors qu'il suppose implicitement que le processus anthyphérétique a été appliqué aux quatre grandeurs en question, que ce processus s'est déroulé d'une manière identique jusqu'à une certaine étape seulement, à la suite de quoi l'on obtient quatre restes qui doivent satisfaire l'une des conditions exprimées dans sa définition[17].

Ces prémisses étant posées, al-Māhānī se propose de démontrer les Définitions V. 5 & V. 7 des *Éléments*, et ce en partant des définitions anthyphérétiques correspondantes qu'il vient d'énoncer. Il y parviendra au moyen de trois propositions — mais en admettant cependant les Propositions V. 1-3 & V. 5-6 des *Éléments*.

Dans la première proposition de son traité, al-Māhānī démontre que si quatre grandeurs vérifient la condition des équimultiples que l'on trouve dans la Définition V. 5 des *Éléments*, alors ces quatre grandeurs seront proportionnelles selon la définition anthyphérétique de l'identité des rapports. Dans la deuxième proposition, il démontre que si quatre grandeurs vérifient la condition des équimultiples que l'on trouve dans la Définition V. 7 des *Éléments*, alors le rapport de la première à la deuxième sera plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième selon la définition anthyphérétique du rapport plus grand.

Comme l'anthyphérèse fait en général intervenir un nombre infini d'étapes, al-Māhānī contourne la difficulté de la manière suivante. Dans la première proposition, il suppose que quatre grandeurs vérifient la condition exprimée par la Définition V. 5. Il applique ensuite à ces quatre grandeurs le processus anthyphérétique, démontre que ce processus se déroule de la même manière pour chaque paire de grandeurs, et obtient ainsi quatre restes et quatre équimultiples de ces derniers. Il démontre alors que ces

[17] Selon nous la définition du rapport plus grand énoncée par al-Māhānī est juste mathématiquement, contrairement à celle de son successeur al-Nayrīzī.

quatre restes ainsi que leurs équimultiples vérifient eux aussi la condition exprimée par la Définition V. 5. C'est ainsi qu'al-Māhānī pourra justifier le fait que le processus anthyphérétique devra nécessairement se dérouler de la même manière à chaque étape successive de l'anthyphérèse.

Dans la deuxième proposition, il suppose que quatre grandeurs vérifient la condition exprimée par la Définition V. 7. Il applique ensuite à ces quatre grandeurs le processus anthyphérétique, et obtient de nouveau quatre restes et quatre équimultiples de ces derniers. Il démontre alors que, ou bien ces quatre restes vérifient l'une des conditions exprimées dans la définition anthyphérétique du rapport plus grand, auquel cas le rapport de la première à la deuxième sera plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième ; ou bien que ces quatre restes et leurs équimultiples vérifient la condition exprimée par la Définition V. 7, et que de plus, le nombre d'au moins un de ces multiples aura nécessairement diminué. Ainsi, chaque fois que l'on devra passer à l'étape suivante de l'anthyphérèse, le nombre d'au moins un des multiples considérés aura nécessairement diminué. On obtiendra ainsi une suite strictement décroissante de nombre entiers positifs, de sorte que le processus ne saurait se répéter indéfiniment. On aboutira donc nécessairement après un nombre fini d'étapes à des restes qui vérifient l'une des conditions exprimée dans sa définition anthyphérétique du rapport plus grand[18].

Dans la troisième proposition, il démontre par l'absurde la réciproque des deux propositions précédentes ; c'est-à-dire que si deux rapports sont identiques ou plus grand selon les définitions anthyphérétiques, ils vérifieront alors les conditions énoncées dans les définitions euclidiennes correspondantes.

Al-Māhānī a donc démontré au moyen de ces trois propositions, que la conception anthyphérétique de l'identité des rapports et du rapport plus grand était en fait équivalente à la conception euclidienne.

Dans la quatrième et dernière proposition de son traité[19], al-Māhānī montre comment trouver les équimultiples mentionnés dans la Définition V. 7 des *Éléments*, en supposant que l'un des rapports est plus grand que l'autre selon la définition anthyphérétique ; il s'agit en effet, dit-il, d'une chose dont Euclide a besoin dans la démonstration de la Proposition V. 13 des *Éléments*.

III. CONCLUSION

Ainsi, l'on voit que le traité d'al-Māhānī est non seulement l'un des premiers commentaires sur le Livre V des *Éléments* qui nous soient parvenus, mais qu'il s'agit également du premier texte mathématique connu dans lequel l'anthyphérèse est explicitement utilisée pour définir l'identité des rapports de grandeurs. On peut donc dire que dans ce texte, l'on voit pour la première fois dans le détail comment l'anthyphérèse a été manipulée par le passé dans des démonstrations mathématiques où intervenaient des rapports entre grandeurs.

Cela nous permet de retoucher quelque peu le tableau que l'on dresse habituellement de l'histoire des commentaires arabes sur le Livre V des *Éléments*. En effet, contrairement à ce que l'on affirmait d'habitude[20], ce n'est pas Ibn al-Haytham, mais plutôt al-Māhānī, qui le premier a établi un lien entre les conceptions euclidienne et

[18] La fin de cette démonstration étant particulièrement délicate à interpréter, nous ne saurions être certains que la démonstration d'al-Māhānī est tout-à-fait valide.

[19] Il s'agit plutôt d'un problème que d'une proposition.

[20] Voir par exemple Adolf P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes*, Paris, 1976, p. 84 ; Dold-Samplonius, "Al-Māhānī", pp. 21-22.

anthyphérétique de l'identité des rapports — et même du rapport plus grand — en démontrant que les deux points de vue sont équivalents[21].

On voit aussi que dès sa première apparition dans un texte mathématique, la définition anthyphérétique est explicitement liée à une conception numérique du rapport ; et que, à l'instar de ses successeurs, al-Māhānī énonce cette définition sans la moindre explication ou justification, comme quelque chose allant de soi. Or cela soulève selon nous des questions importantes, et ce indépendamment du fait de savoir s'il s'agit là d'une reprise d'une définition plus ancienne ou non. En effet : Quelle est la raison pour laquelle des mathématiciens ont considéré que la définition anthyphérétique était celle qui exprimait véritablement la notion de proportionnalité ? Et pourquoi préférer cette définition à celle d'Euclide ?

En ce qui concerne la première question, une réponse possible serait de supposer que les mathématiciens de l'époque savaient que l'anthyphérèse permettait d'obtenir une succession de rapports rationnels qui s'approchent d'un rapport donné *entre grandeurs*, c'est-à-dire d'un rapport *quelconque*. Si l'on reconnaît ce fait, la définition anthyphérétique exprimera alors que deux rapports seront identiques, s'ils peuvent être approximés par les mêmes rapports rationnels. Et cela peut en effet sembler assez naturel. Mais il nous faut cependant avouer que nous ne connaissons aucun texte — grec ou arabe — ou cette propriété de l'anthyphérèse soit mentionnée explicitement. Il s'agit donc là d'une simple conjecture.

En ce qui concerne la deuxième question, la seule réponse que nous ayons trouvée jusqu'ici se base sur une distinction importante qui existe entre les définitions euclidienne et anthyphérétique de l'identité des rapports; à savoir, que la définition anthyphérétique permet de caractériser d'une manière indépendante chacun des deux rapports qui constituent une proportion, dans la mesure où le processus anthyphérétique peut être appliqué à chacun des deux rapports indépendamment de l'autre ; c'est-à-dire que cette définition permet — et ce contrairement à la définition euclidienne — de concevoir un rapport *en soi*[22]. Mais là encore il s'agit d'une simple conjecture, qui n'est pas confirmée par les textes que nous avons consultés à ce jour.

Quoiqu'il en soit de la réponse à ces questions, ce qui nous semble toutefois fondamental, c'est que le fait de définir un rapport d'une manière *indépendante* est — du moins logiquement parlant — une condition nécessaire pour pouvoir ensuite considérer un rapport quelconque *en tant que nombre*. Or al-Māhānī parle dans son traité de reconnaître le rapport d'une manière numérique, se conformant en cela aux prescriptions de Thābit Ibn Qurra — mais le texte est malheureusement d'une concision désespérante, et ne permet pas d'en tirer quelque chose de vraiment explicite[23].

Nous savons aussi qu'al-Māhānī avait déjà interprété d'une manière numérique les quantités que l'on rencontre dans le Livre X des *Éléments* ; et que chez ses successeurs immédiats, notamment Ibn ʿIṣma et al-Khāzin, la notion de rapport est explicitement

[21] En fait Ibn al-Haytham n'a pas du tout démontré ce lien, ni même défini la proportionnalité au moyen de l'anthyphérèse. Le but d'Ibn al-Haytham était de démontrer la Définition V. 5 en distinguant deux cas : 1° Le cas commensurable, où il présupposait que les grandeurs proportionnelles vérifient une propriété qui se ramène en substance à la Définition VII. 21 des *Éléments*. 2° Le cas incommensurable qu'il réduisait au cas commensurable en présupposant une propriété « évidente » que doivent nécessairement vérifier quatre grandeurs proportionnelles, et en admettant par ailleurs la dichotomie indéfinie des grandeurs et le « Lemme d'Eudoxe-Archimède ». Voir Barbara Hooper Sude, *Ibn al-Haytham's Commentary on the Premises of Euclid's Elements*, Thèse de Doctorat (inédite), Princeton University, 1974, pp. 188-204.

[22] Pour plus de détails sur ces questions, voir Vahabzadeh, "Al-Khayyām's Conception of Ratio and Proportionality", *Arabic Sciences and Philosophy* 7 (1997) : 247-263, pp. 253-257.

[23] Le lecteur trouvera cependant une conjecture tout-à-fait remarquable sur les motivations de Thābit Ibn Qurra dans Vitrac, "ʿUmar al-Khayyām et l'anthyphérèse", IV, C, § 11, p. 174.

utilisée pour exprimer la mesure de ces mêmes quantités, quantités qu'ils interprétaient eux aussi d'une manière numérique[24].

Nous dirons donc en guise de conclusion, qu'il n'est pas déraisonnable d'émettre l'hypothèse que l'introduction de la définition anthyphérétique du concept de rapport dans le cas général des grandeurs pourrait en fait être liée à une certaine évolution assez caractéristique des mathématiques arabes ; évolution dans laquelle une grandeur quelconque était conçue non plus seulement *en tant que grandeur géométrique*, comme c'était le cas dans les mathématiques grecques[25], mais également *en tant que nombre*[26]. Mais il s'agit là d'une simple hypothèse qui — bien qu'elle permette de justifier théoriquement l'introduction de la définition anthyphérétique, et d'établir un certain lien conceptuel entre les commentaires arabes sur les Livres V & X des *Éléments* — n'est cependant pas confirmée par les textes traitant de l'anthyphérèse que nous avons consultés à ce jour.

---

[24] Voir M. Ben Miled, "De l'unité de mesure chez al-Khayyām et ses prédécesseurs" dans *Opérer sur le continu : traditions arabes du Livre X des* Éléments *d'Euclide*, Beït al-Ḥikma, Carthage, Tunisie, 2005, pp. 251-275 ; on y trouvera des extraits des commentaires d'Ibn ʿIṣma et d'al-Khāzin sur le Livre X des *Éléments* dans lesquels ces derniers font explicitement intervenir la notion de rapport dans la mesure des quantités rationnelles et irrationnelles, quantités qu'ils interprètent d'une manière numérique. Voir aussi Galina Matvievskaya, "The theory of quadratic irrationals in medieval oriental mathematics", dans D.A. King and G. Saliba (éds.), *From Deferent to Equant*, Annals of the New York Academy of Science, vol. 500, New York, 1987, pp. 253-277.

[25] Il serait peut-être plus exact de dire : *comme par exemple dans les écrits d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius*. Sur cette importante caractéristique des mathématiques grecques, voir Fowler, "Inventive interpretations", *Revue d'histoire des mathématiques* 5 (1999) : 149-153.

[26] Sur cette question, voir notamment Vitrac, "ʿUmar al-Khayyām et Eutocius : Les antécédents grecs du troisième chapitre du commentaire *Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide*", *Farhang*, vol. 12, no. 29-32, Téhéran, 2000 : 51-105 (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00174927); Vahabzadeh, "KHAYYAM, OMAR vi. As Mathematician", *Encyclopædia Iranica Online*, 2014 (http://www.iranicaonline.org/articles/khayyam-omar-vi-mathematician), I, § *Compounding of ratios and irrational numbers*. Sur le rôle de l'Algèbre dans cette évolution des mathématiques arabes, voir Rashed, *Entre arithmétique et algèbre : recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, 1984, pp. 34-6, 48-9, 192 et 310-11.

ANNEXE : TRADUCTION FRANÇAISE[27]

Au nom de Dieu, le Clément, le Miséricordieux

TRAITÉ D’AL-MĀHĀNĪ SUR LA DIFFICULTÉ RELATIVE A LA QUESTION DU RAPPORT ÉCRIT PAR ABŪ ʿABD ALLĀH[28]

Il a dit : Ceci est la première chose que j’avais trouvée concernant le rapport des grandeurs et leur proportionnalité ; et je m’y suis appliqué pour démontrer les multiples auxquels Euclide s’est appliqué concernant les grandeurs dont le rapport est le même et concernant le rapport plus grand dans le début du cinquième Livre, dès lors que Thābit Ibn Qurra l’eut prescrit ; du fait que la science du rapport des grandeurs et de leur proportionnalité selon les règles, est une chose sur laquelle on pourra s’arrêter en partant de la connaissance du rapport selon la voie numérique, puis des propositions qui sont dans le début du dixième Livre.

Du rapport

Le rapport entre chaque paire de grandeurs homogènes — et aussi entre chaque paire de nombres — est l’état qui survient à chacune des deux lorsqu’elle mesure son conjoint ou que son conjoint la mesure. Et ce qui survient quant à cela est [selon] trois espèces : [1] ou la plus petite, lorsqu’elle mesure la plus grande, l’épuise par la mesure et il ne reste rien d’elle ; [2] ou elle ne l’épuise pas, mais il reste de la plus grande un reste plus petit que la plus petite tel, que lorsque la plus petite est mesurée par lui, il l’épuise par la mesure ; ou il reste d’elle [i.e. de la plus petite] un reste plus petit que le premier reste tel, que lorsque le premier [reste] est mesuré par lui, il l’épuise ; ou il reste de lui [i.e. du premier reste] un reste tel, que lorsque le deuxième [reste] est mesuré par lui et que l’on fait cela continuellement, on aboutit à un reste qui épuise le reste qui le précède ; [3] ou si l’on fait cela continuellement, on n’aboutit pas à un reste qui épuise le reste qui le précède. Et les deux premières espèces d’entre les espèces de la mesure surviennent dans les nombres et les grandeurs, et la troisième dans les grandeurs seulement.

---

[27] Le lecteur trouvera dans cette annexe une traduction littérale du commentaire d’al-Māhānī. Cette traduction a été faite à partir de l’édition critique du texte arabe que nous avions établie sur la base de six des neufs manuscrits connus [Vahabzadeh, “Al-Māhānī’s commentary”, pp. 41-52]. Depuis la parution de notre édition, nous avons obtenu une copie des trois autres manuscrits ; une étude des ces derniers n’a mis en évidence aucune nouvelle variante, mais il y a cependant une correction à faire dans le texte de la définition du rapport plus grand, conformément à la leçon adoptée par Hogendijk [“Anthyphairetic ratio theory”, p. 192 n. 11] : il faut remplacer dans notre édition (p. 45, l. 17) le mot *ayyumā* par *ayyuhumā* et supprimer la note correspondante dans l’apparat critique. Dans la traduction qui suit, les crochets < > comprennent des ajouts nécessaires à la cohérence du texte qui ne se trouvent dans aucun des neufs manuscrits. D’autre part, chaque fois que nous avons opté pour une leçon qui différait du texte de tous les neuf manuscrits, nous avons indiqué en note le texte que nous avons modifié. Le lecteur qui ne saurait consulter l’édition arabe aura de cette manière une idée précise des quelques ajouts et modifications que nous avons introduits dans le texte. Quant aux crochets [ ], ils comprennent des indications que nous avons rajoutées uniquement pour faciliter la compréhension du texte.

[28] L’on trouve en marge dans l’un des manuscrits : *Glose sur le début du dixième Livre des Éléments*.

De la proportionnalité

Et c'est que l'état de celle d'entre les deux premières grandeurs qui est rapportée [i.e. l'antécédent] relativement à celle d'entre les deux à laquelle elle est rapportée [i.e. le conséquent], quant à l'exhaustion par la mesure et le nombre des fois de la mesure, est comme l'état de celle d'entre les deux autres qui est rapportée relativement à celle d'entre les deux à laquelle elle est rapportée, quant à la mesure et le nombre de ses fois [i.e. des fois de cette mesure] ; ou bien que l'état de celle à laquelle elle est rapportée relativement à celle qui est rapportée parmi les deux premières et les deux autres, est comme nous l'avons mentionné. Et conformément à ceci, la proportionnalité, dans le cas des deux dernières espèces d'entre les espèces du rapport, réside dans la conservation des degrés de la mesure et l'égalité des fois [i.e. du nombre de fois] de chaque paire de mesures qui sont dans un même degré.

De la proportion

Les grandeurs dont le rapport est le même sont celles qui sont telles, que lorsque la première et la troisième sont mesurées par la deuxième et la quatrième — ou inversement — les fois de leur mesure sont égales ; et que s'il reste d'elles deux grandeurs plus petites que les deux plus petites, et que les deux plus petites soient mesurées par elles, les fois de cette mesure sont aussi égales ; et ainsi indéfiniment.

Du rapport plus grand

On dit que le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième, lorsque la première, ou un excès restant d'elle qui n'est pas plus petit que la deuxième ou <qu'>un excès qui reste de la deuxième correspondant à l'excès restant de la première, est supérieur à la deuxième, ou à un excès restant d'elle correspondant à l'excès restant de la première, l'un des deux étant [supérieur] à[29] ce qui y correspond[30] ; tandis que la troisième, ou un excès qui reste d'elle et dans le degré de l'excès qui reste de la première dans le même [degré] que le degré de l'excès restant de la deuxième, <n'>est <pas> supérieur à la quatrième, ou à un excès qui reste de la quatrième dans le degré de l'excès restant de la deuxième[31].

De la démonstration des multiples auxquels Euclide s'est appliqué

Ce sont là des propositions par lesquelles on démontre les multiples auxquels Euclide s'est appliqué concernant les grandeurs dont le rapport est le même et concernant le rapport plus grand, et l'inverse de cela. Et il faudra les lire après avoir compris les trois premières du cinquième Livre ; et après avoir compris la cinquième de ce [Livre] qui est l'inverse de la première, et la sixième proposition qui est semblable à l'inverse de la deuxième.

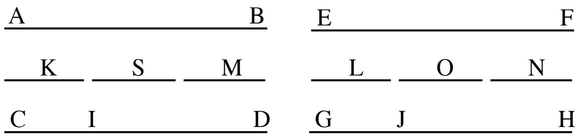
---

[29] Nous avons suivis dans ce passage l'interprétation de Hogendijk qui suppose une ellipse du mot *supérieur* [Hogendijk, "Anthyphairetic ratio theory", p. 192].

[30] Nous avons choisi cette tournure pour signifier *celui qui lui correspond* ou *celle qui lui correspond*, selon que le pronom *ce* se rapporte à un excès ou à une grandeur ; cela permettra en effet de rendre en français le caractère invariable de l'original arabe, qui se rapporte dans chacun des cas à un mot du genre masculin.

[31] Le contenu de cette définition abstruse, dont le texte semble problématique dans tous les manuscrits, deviendra cependant (un peu) plus clair une fois que l'on aura examiné dans le détail comment al-Māhānī l'applique dans les démonstrations des propositions *b* et *d* ci-dessous.

a. — *Chaque fois que quatre grandeurs, comme AB, CD, EF, GH, sont telles, que les multiples égaux de la première et de la troisième, quelques multiples qu'ils soient, relativement aux multiples égaux de la deuxième et de la quatrième, quelques multiples qu'ils soient, chacun relativement à ce qui y correspond, ou sont supérieurs ensemble, ou sont égaux <ensemble>, ou sont inférieurs ensemble ; alors la première est à la deuxième comme la troisième est à la quatrième.*



Que AB soit donc plus petite que CD ; EF sera alors plus petite que GH. Que AB, EF mesurent donc de CD, GH des fois égales [i.e. un nombre de fois égal] les grandeurs DI, HJ, jusqu'à ce qu'il reste CI, JG pas plus grandes que AB, EF. Et que soient pris de CI, GJ des multiples égaux K, L ; et de ID, HJ des multiples égaux M, N. Et qu'il y ait dans S en fait de ID comme ce qu'il y a dans K en fait de CI ; et dans O en fait de HJ comme ce qu'il y a dans L en fait de GJ.

Donc à cause de ce qu'il y a dans la première proposition du cinquième Livre, le multiple K de CI sera comme le multiple S, K de CD ; et le multiple L de GJ sera aussi comme le multiple L, O de GH. Mais le multiple K de CI a été posé comme le multiple L de GJ. Par conséquent le multiple K, S de CD est comme [le multiple] L, O de GH.

Et à cause de ce qu'il y a dans la deuxième proposition du cinquième [Livre], le multiple S, M de ID sera comme [le multiple] O, N de HJ. Mais puisque AB, EF mesurent ID, JH des fois égales, le multiple ID de AB sera comme [le multiple] HJ de EF. Donc à cause de ce qui se passe dans la troisième proposition du cinquième [Livre], le multiple S, M de AB sera comme [le multiple] O, N de EF.

Et à cause de ce que l'on avait supposé concernant les multiples égaux de AB, EF, à savoir S, M [et] O, N, et de CD, GH, à savoir K, S [et] L, O ; si S, K est supérieur ou est inférieur ou est égal à M, S, ainsi sera L, O pour [i.e. par rapport à] O, N. Donc lorsque nous omettons S, O qui sont communs, il restera une supériorité et une infériorité et une égalité : K pour M comme L pour N.

Il apparaît donc, de l'état des quatre grandeurs, que les multiples égaux de AB, EF — à savoir M, N — relativement aux multiples [égaux] de CI, GJ — à savoir K, L — chacun relativement à ce qui y correspond, ou sont supérieurs ou sont inférieurs ou sont égaux ensemble. Mais il restait CI pas plus grande que AB. Donc GJ ne sera pas plus grande que EF. Si donc CI est comme AB, GJ sera comme EF ; et AB mesurera CD comme EF mesure GH. Et si elle est plus petite, elle sera plus petite[32].

Et comme nous avons démontré que AB, EF mesuraient CD, GH[33] des fois égales, soit exhaustivement, soit qu'il reste après les fois égales deux grandeurs plus petites que AB, EF, [et ce] en partant de la condition des multiples que l'on avait posée pour elles, — c'est donc comme cela que nous démontrerons que CI, GJ mesurent AB, EF des fois égales, soit exhaustivement, soit qu'il reste deux grandeurs plus petites que CI, GJ, chacune [plus petite] que ce qui y correspond; et [nous démontrerons] que CI, GJ et les deux derniers excès restants sont nécessairement accompagnés par la condition mentionnée concernant leurs multiples égaux, comme nous l'avons démontré précédemment.

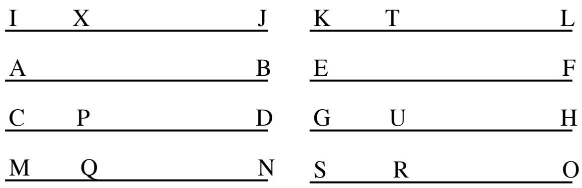
[32] C'est-à-dire que si CI est plus petite que AB, alors GJ sera plus petite que EF.

[33] Littéralement : *de CD, GH*.

Puis nous démontrerons aussi [à partir] de cela [i.e. la condition mentionnée concernant leurs multiples égaux] qu'ils [i.e. les deux derniers excès] mesureront CI, GJ des fois égales ; et que les deux excès restant d'eux mesureront ce[ux] qui les précèdent des fois égales ; et que cela ne cessera jamais pour eux : chaque paire de grandeurs excédentes mesureront les deux qui les précèdent des fois égales.

Par conséquent le rapport de AB à CD est comme le rapport de EF à GH. Et c'est cela que nous voulions démontrer.

b. — *Chaque fois que quatre grandeurs, comme AB, CD, EF, GH, sont telles, que l'on a pris de la première et de la troisième des multiples égaux IJ, KL ; et de la deuxième et de la quatrième des multiples égaux, comme MN, SO ; et que le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième, tandis que le multiple de la troisième n'est pas supérieur au multiple de la quatrième ; alors le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième.*



Et que les multiples IJ, KL de AB, EF, chacun de ce qui y correspond, soient plus grands en nombre que les multiples MN, SO de CD, GH, chacun de ce qui y correspond. Donc puisque KL n'est pas supérieur à SO, EF ne sera pas non plus supérieure à GH. Si donc AB est plus grande que CD, AB est à CD plus grand [de rapport] que EF à GH.

Et que AB soit aussi plus petite que CD. Et que AB, EF mesurent de CD, GH des fois égales [deux grandeurs] jusqu'à ce qu'il reste de l'une des deux [i.e. de CD ou de GH] quelque chose qui est plus petit que ce qui y correspond : à savoir [que AB, EF mesurent des fois égales les deux grandeurs] DP, HU. Et nous retranchons sans cesse des multiples des deux plus grandes, comme MN, SO, deux grandeurs <jusqu'à ce que> leurs multiples de ce que les deux plus petites avaient mesuré des deux plus grandes selon l'égalité, à savoir DP, UH, soient comme le multiple MN de CD : et qu'ils [i.e. leurs multiples] soient NQ, OR. Il restera donc SR, QM [qui seront] des multiples égaux de CP, GU — les deux excédents des deux plus grandes — chacun de ce qui y correspond, comme le multiple MN de CD.

Et puisque QN, RO sont des multiples égaux de DP, HU ; et DP, HU des multiples égaux de AB, EF ; QN, RO seront des multiples égaux de AB, EF. Mais IJ est plus grand que QN. Donc le multiple IJ de AB est plus grand en nombre que [les multiples égaux] QN, RO de AB, EF[34], chacun de ce qui y correspond. Mais le multiple IJ de AB est comme le multiple KL de EF. Donc le multiple KL de EF est plus grand en nombre que le multiple RO de EF. Donc KL est plus grand que RO[35].

Retranchons donc QN, RO de IJ, KL — qui sont les multiples des deux plus petites — chacun de ce qui y correspond : quant à JX, elle est égale à QN ; et quant à LT, elle est égale à RO. Donc JX, LT seront des multiples égaux de AB, EF, chacun de ce qui y correspond. Mais IJ, KL sont des multiples égaux de AB, EF, chacun de ce qui y correspond. Il restera donc IX, KT [qui seront] ou comme AB, EF ; ou des multiples égaux d'elles, chacun de ce qui y correspond, à cause de ce qui a été établi dans la sixième proposition du cinquième [Livre] ; et ils seront plus petits en nombre que le

[34] Tous les manuscrits ont la leçon *CD*.
[35] Tous les manuscrits ont la leçon *EF*.

multiple IJ de AB. Et puisque IJ est supérieur à MN, et que KL n'est pas supérieur à SO ; et que JX est comme QN, et LT comme RO ; il restera IX qui sera supérieure à MQ, et KT qui ne sera pas supérieure à SR.

Si donc les multiples IX, KT de AB, EF sont comme [les multiples] MQ, SR de CP, GU, ou plus grand qu'eux en nombre ; et ayant démontré que KT n'était pas supérieure à SR ; EF sera plus petite que GU. Mais nous avons dit que l'une de CP, GU est plus petite que ce qui y correspond de AB, EF ; et GU n'est pas plus petite que EF. Donc CP est plus petite que AB. Donc AB sera supérieure à CP, tandis que EF ne sera pas supérieure à GU. Donc AB est à CD plus grand [de rapport] que EF à GH.

Et si les multiples IX, KT de AB, EF sont plus petits en nombre que les multiples MQ, SR de CP, GU, chacun de ce qui y correspond ; AB sera aussi plus grande que CP, puisque IX est supérieure à MQ. Et que EF soit aussi plus grande que GU[36].

Et nous faisons dans le cas de la mesure de AB, EF par CP, GU ce que nous avons fait dans le cas de la mesure de CD, GH par AB, EF ; et dans le cas des multiples plus petits en nombre, à savoir IX, KT, comme ce que nous avons fait dans le cas de MN, SO ; et dans le cas de MQ, SR, ce que nous avons fait dans le cas de IJ, KL ; selon cette manière ; jusqu'à ce que nous trouvions de CP, GU, les deux plus petites, des multiples égaux qui soient plus petits en nombre que le multiple MQ[37] de CP ; et que nous trouvions des deux excédents de AB, EF des multiples égaux qui soient comme le multiple IX de AB ; et que le multiple de l'excès restant de AB soit supérieur au multiple de CP, tandis que le multiple de ce qui reste de EF n'est pas supérieur au multiple de GU.

Si donc ces multiples sont égaux [en nombre], chacun à ce qui y correspond, nous démontrerons comme précédemment que AB est à CD plus grand [de rapport] que EF à GH.

Et s'ils ne sont pas égaux [en nombre], nous procéderons selon ce procédé. Et l'on aboutira nécessairement à des grandeurs que l'on aura retranchées des [quatre] premiers multiples telles, que ce qu'il y a dans chacune en fait de [grandeurs] égales à ce qui y correspond, sera comme ce qu'il y a dans l'autre en fait de [grandeurs] égales à ce qui y correspond ; puisque chaque fois que les fois des multiples [i.e. le nombre des multiples] différaient, nous avons trouvé d'autres multiples qui étaient plus petits en nombre que les premiers multiples [i.e. les multiples précédents], et que l'on avait commencé par diminuer des fois données [i.e. un nombre de fois donné][38].

Et nous démontrerons comme nous l'avons démontré précédemment que AB est à CD plus grand [de rapport] que EF à GH. Et c'est ce qui est recherché.

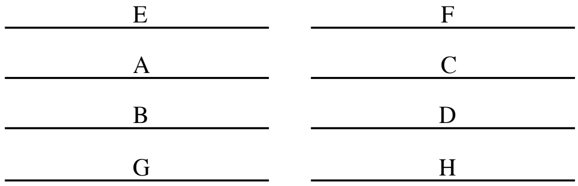
c. — *Lorsque la première est à la deuxième comme la troisième est à la quatrième, i.e. A à B comme C à D, <tous> les multiples égaux pris de la première et de la troisième, comme E, F, relativement à tous les multiples égaux pris de la deuxième et de la quatrième, comme G, H, <chacun> relativement à ce qui y correspond, ou sont égaux ou sont supérieurs ou sont inférieurs ensemble. Et si la première est à la deuxième plus grand [de rapport] que la troisième à la quatrième, le multiple égal de la première sera supérieur à [celui de] la deuxième, tandis que celui de la troisième ne sera pas supérieur à [celui de] la quatrième.*

---

[36] Al-Māhānī passe sur le cas où EF n'est pas plus grande que GU, puisque l'on serait alors ramené à la situation du paragraphe précédent, et AB serait à CD plus grand de rapport que EF à GH.

[37] Tous les manuscrits ont la leçon *MN*.

[38] Il semble qu'al-Māhānī raisonne ici par analogie avec le cas qui s'était déjà présenté dans l'étape précédente de l'anthyphérèse, où le procédé s'était poursuivi uniquement du fait que les multiples IX, KT de AB, EF étaient *plus petits en nombre* que les multiples MQ, SR de CP, GU.

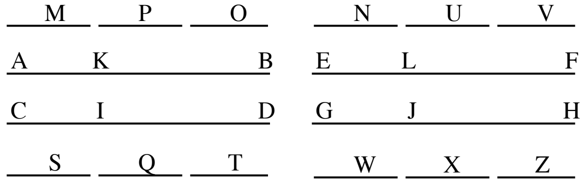


Car si E est supérieur à G, et que F n'est pas supérieur à H, alors A est à B plus grand [de rapport] que C à D ; mais il n'en est pas ainsi. Par conséquent si E est supérieur à G, F sera supérieur à H. Et de plus si E est comme G, et que F est supérieur à H, C serait à D plus grand [de rapport] que A à B ; mais il n'en est pas ainsi. Et de même si E est comme G et que F est plus petit que H, H serait supérieur à F tandis que G ne serait pas supérieur à E ; et B serait à A plus petit[39] [de rapport] que D à C ; mais il n'en est pas ainsi. Par conséquent lorsque E est comme G, F est comme H. Et nous démontrerons de même que si E est plus petit que G, F sera plus petit que H.

Et que A soit à B plus grand [de rapport] que C à D. Alors il sera possible qu'il existe de A, C[40] et de B, D des multiples égaux tels, que le multiple de A soit supérieur au multiple de B, tandis que le multiple de C n'est pas supérieur au multiple de D. Car s'il n'en était pas ainsi, tous les multiples que l'on prendrait selon la manière que nous avons mentionnée seraient ou supérieurs ou égaux ou inférieurs ensemble ; mais il n'en est pas ainsi, car sinon A serait à B comme C est à D, [et] cela est impossible ; ou [alors] l'on prendrait des multiples égaux selon ce que nous avons mentionné, et le multiple F serait supérieur au multiple H, tandis que le multiple E ne serait pas supérieur au multiple G ; mais s'il en était ainsi, C serait à D plus grand [de rapport] que A à B, et il n'en est pas ainsi. Par conséquent le multiple égal de A pourra être supérieur à <celui de> B, tandis que celui de C ne sera pas supérieur à celui de D. Et c'est ce qui est voulu.

Et l'on a démontré la dernière notion [i.e. celle énoncée dans le paragraphe précédent] d'une autre façon, par laquelle nous montrons aussi comment l'on trouve les multiples mentionnés des [grandeurs] égales à ces grandeurs ; et ceci est une chose dont on a besoin dans la douzième proposition du cinquième [Livre][41]. Et cette opération fait partie de l'inverse de la seconde proposition d'entre ces propositions [i.e. de l'inverse de la proposition *b* ci-dessus].

d. — *Que AB soit à CD plus grand [de rapport] que EF à GH. Et nous voulons montrer comment nous trouvons les multiples égaux — ceux de AB, EF et ceux de CD, GH — qui sont tels, que le multiple de AB est supérieur au multiple de CD, tandis que le multiple de EF n'est pas supérieur au multiple de GH.*



Que AB, EF soient donc plus petites que CD, GH ; et qu'elles mesurent de CD, GH des fois égales [deux grandeurs] ; et que leur excès mesurent de AB, EF des fois égales [deux grandeurs] ; et que l'on fasse de même continuellement jusqu'à ce que l'on

[39] Tous les manuscrits ont la leçon *plus grand*.
[40] Tous les manuscrits ont la leçon *A, B*.
[41] Proposition V. 13 dans l'édition de Heiberg.

aboutisse à ce qu'il reste de AB un excès qui est plus grand que l'excès restant de CD, tandis que l'excès restant de EF n'est pas plus grand que celui qui reste de GH : et que AB, EF mesurent de CD, GH selon l'égalité les grandeurs DI, HJ, et qu'il reste CI, GJ plus petites que AB, EF ; et qu'ils [i.e. CI, GJ] mesurent de AB, EF selon l'égalité BK, FL, et qu'il reste AK plus grande que CI, tandis que EL n'est pas plus grande que GJ.

Et nous prenons de AK, EL, CI, GJ des multiples égaux, à savoir M[42], N, S, W. Alors M sera aussi supérieur à S, tandis que N ne sera pas supérieur <à W.> Et nous posons les multiples P, U de KB, LF comme les multiples M, N de AK, EL, chacun de ce qui y correspond. Donc les multiples M, P [et] N, U de AB, EF, chacun de ce qui y correspond, seront comme le multiple M de AK. Et nous posons Q comme P, et X comme U.

Donc puisque P, U sont des multiples égaux de BK, LF, chacun de ce qui y correspond ; et que BK, FL sont des multiples égaux de CI, GJ, chacun de ce qui y correspond ; P, U seront aussi des multiples égaux de CI, GJ, chacun de ce qui y correspond. Donc Q, X sont des multiples égaux de CI, GJ, chacun de ce qui y correspond. Mais S, W étaient des multiples égaux de CI, GJ. Donc S, Q [et] W, X sont des multiples égaux de CI, GJ, chacun de ce qui y correspond. Mais puisque M est supérieur à S, tandis que N n'est pas supérieur à W ; et que P est comme Q, et U comme X ; M, P sera supérieur à S, Q, tandis que N, U ne sera pas supérieur à W, X.

Puis nous posons T, Z multiples égaux de DI, JH, de telle sorte que le multiple de chacune soit, de ce qui y correspond, comme les multiples S, Q [et] W, X de CI, GJ, chacun de ce qui y correspond. Et nous posons O comme T, et Z comme V. Puis nous démontrerons comme nous l'avons démontré que M, P, O [et] N, U, V sont des multiples égaux de AB, EF ; et que S, Q, T [et] W, X, Z sont des multiples égaux de CD, GH ; et que M, P, O sera supérieur à S, Q, T, tandis que N, U, V ne sera pas supérieur à W, X, Z. Et c'est cela que nous voulions.

Le traité a été achevé avec l'aide de Dieu le Très-Haut.

[42] Tous les manuscrits ont la leçon *U*.