LE COMMENTAIRE D'AL-NAYRĪZĪ SUR LES DÉFINITIONS DU CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS

Bijan Vahabzadeh

LE COMMENTAIRE D'AL-NAYRĪZĪ SUR LES DÉFINITIONS DU CINQUIÈME LIVRE DES *ÉLÉMENTS*

BIJAN VAHABZADEH

I. INTRODUCTION

Al-Nayrīzī — plus précisément Abū al-ʿAbbās al-Faḍl ibn Ḥātim al-Nayrīzī — était un géomètre et astronome réputé qui vécut à Bagdad durant le règne du calife al-Muʿtaḍid (892-902). Il est notamment l'auteur de commentaires sur l'*Almageste* et le *Tetrabiblos* de Ptolémée (Ie-IIe siècles), d'un traité sur la construction de l'astrolabe sphérique, et d'éphémérides ; il a également tenter de démontrer le célèbre Postulat des parallèles. Mais il est surtout connu pour son commentaire sur les *Éléments* d'Euclide (*c*. 300 av. J.-C.), un ouvrage qui comprend — en plus d'une traduction des *Éléments* — de larges extraits des commentaires sur les *Éléments* de Héron d'Alexandrie (Ie-IIe siècles) et de Simplicius (VIe siècle), dont les originaux grecs sont perdus[1]. Une préface anonyme, incluse dans l'un des manuscrits du commentaire d'al-Nayrīzī, contient quelques renseignements sur le texte des *Éléments* proprement dit et sur le travail de remaniement du commentateur[2].

Le texte du commentaire d'al-Nayrīzī nous est parvenu dans deux manuscrits : 1° MS Leyde Or. 399/1, qui comprend le commentaire des Livres I-VI plus les premières Définitions du Livre VII ; 2° MS Qom 6526, Bibliothèque publique Āyatollāh al-ʿUẓmā Marʿashī Nadjafī, qui comprend le commentaire des Livres I-V, mais pas la préface susmentionnée. L'*edition princeps* de ce texte a été établie sur la base du MS de Leyde, le seul connu à l'époque[3]. Il existe également une traduction latine de ce traité attribuée à Gérard de Crémone (XIIe siècle), qui comprend les Livres I-X[4] ; la partie traitant du Livre I a été traduite en anglais par A. Lo Bello[5]. Ce dernier a également donné une traduction anglaise des Livres I-IV du texte arabe[6]. À notre connaissance, il n'existe aucune traduction dans une langue moderne des Livres suivants ; seul quelques brefs extraits du commentaire sur le début du Livre V ont été traduits en anglais[7] ; nous nous

[1] Sur la vie et sur les écrits d'al-Nayrīzī, voir [Sezgin, 1974], pp. 283-5, [Sezgin, 1978], pp. 191-2, [Sezgin, 1979], pp. 156, 268-9 et 330 ; [Sabra, 1974], pp. 5-7. (Les références bibliographiques complètes sont données en fin d'article.)

[2] Voir la traduction de cette préface en annexe.

[3] [Besthorn *et alt*., 1897-1932] ; l'édition du texte est accompagnée d'une traduction latine en regard.

[4] Édition du texte complet *in* [Curtze, 1899] ; édition des Livres I-IV *in* [Tummers, 1994].

[5] [Lo Bello, 2003a].

[6] [Lo Bello, 2003b & 2009].

[7] *In* [Plooij, 1950], pp. 51-3 ; [Hogendijk, 2002], pp. 195-7.

proposons donc de donner ci-après une traduction française complète de la partie de ce commentaire traitant des Définitions du Livre V. Notre seul but ici est de proposer un outil de travail destiné à ceux qui voudraient connaître dans le détail les propos d'al-Nayrīzī sur la théorie euclidienne des proportions, mais qui ne sauraient le lire directement dans le texte arabe ni dans sa traduction latine : nous nous sommes simplement contentés d'ajouter à notre traduction quelques brèves remarques destinées à faciliter la lecture du texte.

II. TRADUCTION FRANÇAISE

La traduction qui suit est basée sur une édition de travail du texte que nous avons établie à partir des deux manuscrits connus : 1° Leyde Or. 399/1, ff. 59^{v}-62^{v} ; 2° Qom 6526, ff. 97^{r}-101^{r}.[8] *Comme notre édition ne différait que très peu de l'*editio princeps[9]*, nous avons jugé inutile de l'inclure : nous avons simplement indiqué en note les quelques différences entre les deux éditions.*

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

Au nom de Dieu, le Clément, le Miséricordieux.

Euclide a dit : *La grandeur la plus petite est une partie de la grandeur la plus grande, lorsqu'elle mesure la plus grande ; et la plus grande est un multiple de la plus petite, lorsque tombe sur elle la mesure par la plus petite*[10].

Le commentateur a dit : Le mathématicien mentionne la partie sans les parties, du fait qu'il utilise les multiples dans le cas des grandeurs proportionnelles ; et de plus, le fait qu'il mentionne la partie lui donne la priorité sur les parties.

Euclide a dit : *Le rapport est une certaine relation selon la mesure entre deux grandeurs d'un même genre*[11].

[8] Nous voudrions remercier Sonia Brentjes pour nous avoir fourni une copie de ce passage du manuscrit de Qom.

[9] [Besthorn *et alt*., 1897-1932], Part. III, Fasc. II (1932), pp. 2-26 (cette partie de l'*editio princeps* est due à Junge, Raeder et Thomson).

[10] On trouve dans la marge du manuscrit de Leyde : *La partie, c'est une grandeur relativement à une grandeur, comme la plus petite relativement à la plus grande, lorsqu'elle mesure la plus grande. Le multiple, c'est la plus grande relativement à la plus petite, lorsqu'elle est mesurée par la plus petite.*

[11] On trouve dans la marge du manuscrit de Leyde : *Le rapport est la « quelléité » de ce qui mesure de deux grandeurs homogènes, chacune des deux relativement à l'autre, quelle que soit la mesure.* — Nous reprenons ici, avec une légère variante, un néologisme forgé par J. Jolivet et R. Rashed pour traduire le nom abstrait *ayyiyya* dérivé de l'interrogatif *ayy* (quel). Rappelons que dans le traité où ce néologisme a été introduit (i.e. la *Philosophie Première* d'al-Kindī) la « quelléité » d'une chose est ce qui répond à la question « quelle est-elle ? », question qui s'enquiert de la différence spécifique ; en d'autre termes, elle

Le commentateur a dit : Le mathématicien veut signifier, lorsqu'il dit *une certaine relation*, que le relatif fait partie des dix catégories ; il le mentionne donc pour indiquer qu'elle est dans l'une des catégories ; et il dit *selon la mesure*, pour la séparer ainsi des autres catégories et la placer dans une unique catégorie, à savoir la quantité ; et par *entre deux grandeurs*, il veut signifier l'état qu'a l'une des deux grandeurs relativement à l'autre. Car le rapport est l'état d'une unique grandeur relativement à une autre grandeur d'un même genre : ou l'état de la ligne relativement à la ligne, ou l'état de la surface relativement à la surface, ou l'état du solide relativement au solide, ou l'état du nombre relativement au nombre, ou l'état du discours relativement au discours, ou l'état du temps relativement au temps, ou l'état du lieu relativement au lieu.

Et cet état qu'a l'une des deux grandeurs relativement à l'autre, est le fait de mettre en relation l'une des deux grandeurs à l'autre ; je veux dire le fait qu'elle la mesure. Et cet état est compris par deux genres : l'un d'eux est l'état de la commensurabilité, et l'autre l'état de l'incommensurabilité.

Quant à l'état de la commensurabilité, c'est qu'il y a pour les deux grandeurs une autre grandeur qui les mesure toutes deux, ou que l'une d'elles mesure l'autre. Si donc l'une des deux mesure l'autre, l'état de la plus petite relativement à la plus grande est l'état de la partie, et l'état de la plus grande relativement à la plus petite est l'état du multiple.

Et s'il reste de la plus grande un reste qui est plus petit que la grandeur la plus petite, il est nécessaire ou que ce reste mesure la grandeur la plus petite et l'épuise par la mesure, ou qu'il reste de la plus petite un reste qui est plus petit que le premier reste. Si donc ce reste mesure la grandeur la plus petite et l'épuise par la mesure, ce reste sera la troisième grandeur qui mesure les deux grandeurs commensurables.

Et s'il reste [de la grandeur la plus petite] un reste qui est plus petit que le premier reste, il est aussi nécessaire ou que ce deuxième reste mesure le premier reste et l'épuise par la mesure, ou qu'il reste un reste plus petit que le deuxième reste. Si donc il le

---

indique le caractère par lequel une espèce se différencie des autres espèces du même genre (voir [Jolivet et Rashed, 1998], pp. 10 & 101-102 *Ad* note 6, et pp. 48 & 106 *Ad* note 48). Une autre alternative, qui cependant ne refléterait pas la morphologie du mot arabe, serait de traduire *ayyiyya* par *spécificité*. — L'expression *ce qui mesure* traduit le participe *muqaddir* du verbe *qaddara* (mesurer) ; ce participe n'est pas usuel dans ce contexte, où l'on attendrait plutôt le nom *qadr* (mesure) que l'on retrouve à la fin de la Définition ; c'est justement le cas dans un passage d'un commentaire sur les *Éléments* partiellement édité par G. De Young : « Euclide a dit : *Le rapport est une certaine relation selon la mesure entre deux grandeurs d'un même genre ;* et dans certaines copies : *entre deux grandeurs homogènes, l'une des deux à l'autre*. Et dans la traduction d'al-Ḥajjāj : *c'est la « quelléité » de la mesure de deux grandeurs homogènes, chacune des deux relativement à l'autre, quelle que soit la mesure* » ([De Young, 2002/3], p. 144, note 57). Nous penchons donc vers une erreur de copiste, et pensons qu'il faudrait remplacer *muqaddir* par *qadr*.

mesure et l'épuise par la mesure, ce reste — je veux dire le deuxième reste — est la troisième grandeur qui mesure ensemble les deux grandeurs commensurables.

Et s'il reste de lui [i.e. du premier reste] un reste qui est plus petit que le deuxième reste, cet état de reste mutuel suivra nécessairement deux directions. Ou le nombre des restes aboutira à un reste qui mesure celui qui est avant lui et l'épuise ; ce reste sera alors la troisième grandeur qui mesure les deux grandeurs, et l'état de la plus petite relativement à la plus grande sera l'état des parties, et ce reste sera une partie d'entre les parties de la plus grande. Ou la chose n'aboutit pas à un reste qui épuise par la mesure le reste qui est avant lui, mais le reste mutuel entre eux continue indéfiniment ; et cet état qu'a l'une des deux grandeurs relativement à l'autre est l'état de l'incommensurabilité.

Euclide a dit : *La proportion est la similitude des rapports ; et elle est au moins en trois grandeurs*.

Le commentateur a dit : La similitude dans le rapport a lieu lorsque les grandeurs sont en plus grand nombre que deux grandeurs, et que le rapport de la première à la deuxième est comme le rapport d'une autre grandeur relativement à une autre grandeur : ou comme le rapport de la deuxième relativement à la troisième, et la troisième relativement à la quatrième, et de même avec les grandeurs successives[12] ; ou comme le rapport de la première à la deuxième, et la troisième relativement à la quatrième, et la cinquième relativement à la sixième, et de même avec les grandeurs successives[13]. Et cette similitude est au moins en trois grandeurs.

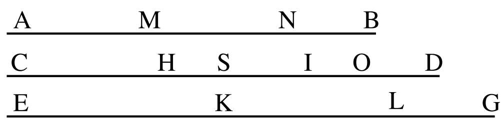
Et la similitude est la comparaison de l'état qu'il y a entre deux grandeurs à l'état qu'il y a entre les deux grandeurs qui sont selon son rapport. Donc lorsque cet état qu'il y a entre les deux premières grandeurs est l'état qu'il y a entre les deux autres grandeurs, on dit à ce moment-là que cet état est l'état de la similitude dans le rapport. Et lorsqu'il n'en est pas ainsi, cet état n'est pas à ce moment-là l'état de la similitude et il n'y a pas de proportion.

Et s'il a dit *similitude*, c'est uniquement parce que cet état est une qualité, non une quantité. Car si l'état qu'il y a entre les deux premières grandeurs est l'état de l'égalité, l'état qu'il y a entre les deux autres grandeurs est aussi l'état de l'égalité ; et si l'état qu'il y a entre les deux premières grandeurs est l'état du multiple, ou l'état de la partie, ou l'état des parties, ou l'un des autres états du rapport qu'ont les grandeurs

[12] C'est le cas de la proportion continue.
[13] C'est le cas de la proportion discontinue.

commensurables, l'état entre les deux autres grandeurs est aussi ce même état. Et ce sont des qualités, non des quantités.

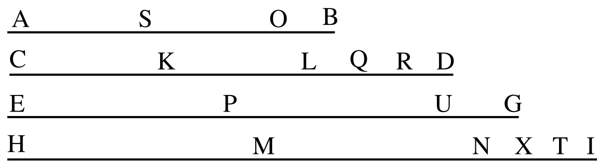
Et de même l'état dans le cas des grandeurs incommensurables. En effet si le rapport est par exemple en trois grandeurs — une première, une deuxième et une troisième — et que le rapport de la première à la deuxième est comme le rapport de la deuxième à la troisième ; la première mesure par exemple la deuxième, et il reste un certain reste ; puis la deuxième mesure la troisième, et il reste un certain reste ; mais la grandeur dont la deuxième mesure la troisième est la grandeur dont la première mesure la deuxième ; puis le reste qui reste de la deuxième mesure aussi la première grandeur, et il reste d'elle un reste plus petit que le premier reste qui restait de la deuxième ; et le reste restant de la troisième mesure aussi la deuxième grandeur, et il reste un reste plus petit que le premier reste qui restait de la troisième ; mais la grandeur dont le reste restant de <la troisième grandeur> mesure la deuxième est la grandeur dont <le reste restant de la deuxième> mesure la première grandeur ; <puis le deuxième reste qui reste de la deuxième mesure aussi le reste qui reste de la troisième,> et il reste <un reste plus petit que> le deuxième reste <qui reste de la deuxième>[14] ; puis cette alternance dans la mesure des restes ne cesse d'avoir lieu selon l'égalité indéfiniment ; alors lorsque les grandeurs sont selon cet état, on dit qu'elles sont proportionnelles ; et cet état qui est le leur est l'état de la similitude du rapport.



Exemple. Nous posons que la première grandeur est la grandeur AB, la deuxième CD, et la troisième EG. Que AB mesure CD deux fois — CH, HI — et qu'il reste ID plus petite que AB ; et que CD mesure EG de cette même mesure — EK, KL — et qu'il reste LG plus petite que CD. Puis ID mesure la grandeur AB ; posons qu'elle la mesure aussi deux fois — AM, MN — et qu'il reste NB plus petite que ID ; et que LG mesure la grandeur CD de cette même mesure — CS, SO — et qu'il reste OD plus petite que LG. Et que cette alternance entre ces trois grandeurs ait toujours lieu selon l'égalité indéfiniment. Cet état est l'état de la similitude des rapports, et c'est la proportion qu'il y a entre les grandeurs.

[14] Les trois dernières additions ne se trouvent pas dans l'*editio princeps*.

Quant à celui qu’ont les grandeurs commensurables, il s’étend à la quantité discrète et à toutes les grandeurs continues, si elles sont commensurables. Quant à cet autre état qui est l’état de l’incommensurabilité, il est propre aux grandeurs continues.



De même si nous posons quatre grandeurs dont le rapport de la première à la deuxième est comme le rapport de la troisième à la quatrième, que la première soit AB, la deuxième CD, la troisième EG, et la quatrième HI. Que AB mesure CD, et posons qu’elle la mesure deux fois — CK, KL — et qu’il reste LD plus petite que AB ; et que EG mesure de même la grandeur HI — que ce soit HM, MN — et qu’il reste un reste plus petit que EG, i.e. NI. Que LD mesure AB, et posons qu’elle la mesure aussi deux fois — AS, SO — et qu’il reste OB plus petite que LD ; et que NI mesure de même EG — que ce soit EP, PU — et qu’il reste UG plus petite que NI. Puis OB mesure LD, et qu’elle la mesure aussi autant de fois que nous voudrons quant à la mesure : posons qu’elle la mesure deux fois — LQ, QR — <et qu’il reste RD plus petite que OB>[15] ; et que UG mesure de même également la grandeur NI — que ce soit NX, XT — et qu’il reste TI plus petite que UG.

C’est donc de cette manière qu’a lieu l’état dans le cas de ces quatre grandeurs, si elles sont proportionnelles : quand la grandeur AB mesure la grandeur CD par un certain nombre et qu’il reste un reste plus petit que AB, c’est par ce même nombre que EG mesure HI et qu’il reste un reste plus petit que EG ; et de même lorsque le reste LD mesure la grandeur AB par un nombre quelconque <et qu’il reste un reste plus petit que LD>[16], c’est par ce même nombre que NI mesure la grandeur EG et qu’il reste un reste plus petit que NI ; et cette alternance entre elles quant aux restes a toujours lieu indéfiniment.

Et si l’état des grandeurs quant à la similitude entre elles n’est pas cet état, elles ne sont pas proportionnelles. Si donc la première mesure la deuxième par un nombre[17] plus petit que ce dont la troisième mesure la quatrième ; qu’il reste de la deuxième un reste qui mesure la première grandeur par un nombre qui est aussi plus petit que ce dont le

[15] Cette addition ne se trouve pas dans l’*editio princeps*.
[16] Cette addition ne se trouve pas dans l’*editio princeps*.
[17] Le manuscrit de Qom a la leçon : *par une mesure*.

reste restant de la quatrième grandeur mesure la troisième ; qu'il reste aussi deux restes de la première et la troisième dont l'état relativement aux deux premiers restes qui restaient de la deuxième et la quatrième est ce même état ; et que cet état a toujours lieu entre les restes alternativement d'une manière indéfinie ; alors cet état ne se passe pas selon la similitude, mais c'est un état dans lequel le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième[18].

Et s'il n'en est pas ainsi, et que le nombre des fois <par>[19] lesquelles la première mesure la deuxième est plus grand que le nombre des fois par lesquelles la troisième mesure la quatrième ; que le reste qui reste de la deuxième mesure aussi la première par un nombre qui est aussi plus grand que ce dont <le reste qui reste de>[20] la quatrième mesure la troisième ; qu'il reste des deux [i.e. de la première et la troisième] des restes dont l'état relativement aux premiers restes est ce même état ; et que cet état ne cesse d'avoir lieu dans les restes alternatifs indéfiniment[21] ; alors cet état est un état dont on dit que le rapport de la première à la deuxième est plus petit que le rapport de la troisième à la quatrième[22].

Euclide a dit : *Les grandeurs dont on dit qu'elles ont entre elles un rapport sont celles qui peuvent, si elles sont multipliées, s'excéder les unes les autres.*

Le commentateur a dit : Le mathématicien signifie par cela l'état qu'il y a entre les grandeurs quant au rapport, lorsque cet état a lieu entre les grandeurs homogènes sur lesquelles tombe la mesure par une même espèce d'entre les espèces des grandeurs, ou par une chose d'entre elles. Car lorsqu'elles sont multipliées, on dit à propos d'elles que les multiples sont égaux entre eux, ou que certains d'entre eux excèdent d'autres par une grandeur qui leur est commensurable [ou : commune], ou qu'il reste de chacun d'entre eux des restes d'une même espèce : des lignes si ce sont des lignes, des surfaces si ce sont des surfaces, des solides si ce sont des solides, des lieux si ce sont des lieux, des

[18] Cette définition du rapport plus grand n'est pas correcte. En effet si le nombre par lequel la première grandeur mesure la deuxième est *plus petit* que le nombre par lequel la troisième mesure la quatrième, le rapport de la première à la deuxième sera de fait plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième, sans qu'il soit nécessaire de passer à la deuxième étape du processus de soustractions alternées : le processus continue uniquement lorsque ces nombres sont *égaux* ; le cas échéant, les nombres correspondants aux étapes suivantes doivent être alternativement *plus grand* et *plus petit*. Il est possible que le commentateur ait raisonné par analogie avec la *première* étape du processus, qui est effectivement énoncée correctement.

[19] Cette addition ne se trouve pas dans l'*editio princeps*.

[20] Cette addition ne se trouve pas dans l'*editio princeps*.

[21] Dans les deux manuscrits, on trouve après *indéfiniment* les mots *wāqiʿa fīhā* (*de tomber en eux*, *d'avoir lieu en eux*) que nous considérons comme superflus.

[22] Cette définition est également fausse pour les mêmes raisons que celles mentionnées dans la note 18, sauf que dans ce cas, les nombres correspondants aux étapes suivantes doivent être alternativement *plus petit* et *plus grand* (au lieu de *plus grand* et *plus petit*).

temps si ce sont des temps, un discours si c'est un discours, des nombres si ce sont des nombres. Par exemple quand je dis : Si le rapport des lignes aux lignes est comme le rapport des surfaces aux surfaces, le reste qui reste de la mesure de la deuxième par la première sera une ligne, et le reste qui reste de la surface relativement à la surface sera une surface ; donc l'état de l'alternance des restes entre elles sera cet état : ce qui reste de la ligne est une ligne, et de la surface une surface.

Et si l'état que l'on appelle *proportion* a lieu entre une ligne et une surface, une surface et un solide, ou autre chose que cela, il n'est pas possible de mesurer la ligne par la surface, ni la surface par le solide ; il n'est pas non plus possible, si la ligne est multipliée, de dire à son sujet qu'elle est égale à la surface, ou plus grande qu'elle par telle ou telle grandeur. C'est pour cela que Héron a dit à propos de cela : *ce sont celles qui, si elles sont multipliées, peuvent être plus grandes les unes que les autres ;* il signifie par cela celles qui sont homogènes. C'est-à-dire que la ligne, fût-elle multipliée à l'infini, ne sera jamais plus grande que la surface ; et de même toutes les choses qui ne sont pas homogènes. Celles qui sont homogènes sont les espèces qui peuvent être comparées les unes aux autres, comme la ligne relativement à la ligne, comme l'angle relativement à l'angle, et comme le solide relativement au solide. Et le mathématicien appelle les grandeurs homogènes *celles qui, si elles sont multipliées, peuvent être plus grandes les unes que les autres*. Quant à Archimède, il les appelle *les grandeurs que l'on compare les unes aux autres*.

Euclide a dit : *On dit des grandeurs qu'elles sont dans un même rapport, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième, quand les multiples de la première et de la troisième égaux en fois [i.e. en nombre] ou sont supérieurs ensemble aux multiples de la deuxième et de la quatrième égaux en fois, quelques multiples que ce soient, ou leur sont égaux ensemble, ou leur sont inférieurs ensemble, lorsqu'ils sont comparés successivement les uns aux autres.*

Le commentateur a dit : Il ne veut pas dire que c'est le multiple lui-même [i.e. le nombre du multiple] qui est supérieur, ou inférieur, ou égal ; mais c'est de toute la grandeur elle-même qui est le multiple de la première qu'il dit : s'il excède le multiple de la deuxième, le multiple de la troisième excède le multiple de la quatrième ; s'il est inférieur, il est inférieur ; et s'il est égal, il est égal.

Et il veut que l'excès soit égal en fois au nombre commensurable [ou : commun] dont la première mesure la deuxième et la troisième la quatrième, ce lorsque la première est commensurable à la deuxième et la troisième commensurable à la quatrième. Et si les deux ne sont pas commensurables mais incommensurables, le nombre des grandeurs dont le multiple de la première mesure le multiple de la deuxième est égal au nombre des grandeurs dont le multiple de la troisième mesure le multiple de la quatrième ; et le nombre des grandeurs dont le reste de la deuxième mesure la première est égal au nombre des grandeurs <dont le reste de la quatrième mesure la troisième ; et le nombre des grandeurs dont le reste de la première mesure le reste de la deuxième est égal au nombre des grandeurs>[23] dont le reste de la troisième mesure le reste de la quatrième ; puis il ne cesse d'en être ainsi indéfiniment. Car Euclide ne visait à rien d'autre qu'à ceci[24].

Et quant à ceux qui désireraient produire des démonstrations concernant ceci et concernant d'autre choses, ce serait d'une manière arbitraire, puisqu'ils seraient forcés de faire appel à des propositions dont les sections sont postérieures[25]. Et s'ils aspiraient à la vérité même, ils devraient savoir que ceci est une chose qui n'a pas besoin d'une démonstration, car elle fait partie des choses premières pour celui qui est arrivé à cet endroit ; en effet chaque Livre a des choses premières conformément au degré de ce Livre.

Euclide a dit : *Et que les grandeurs dont le rapport est le même par soi*[26] *soient appelées proportionnelles. Et quand les multiples égaux en fois sont tels, que d'une part le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième, et d'autre part le multiple de la troisième n'est pas supérieur au multiple de la quatrième, on dit que le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième.*

Le commentateur a dit : On a déjà suffisamment parlé de ceci.

Euclide a dit : *Et la proportion est au moins en trois termes. Et lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, on dit que le rapport de la première à la troisième est le double du rapport qu'elle a à la deuxième ; et lorsque quatre grandeurs sont*

---

[23] Cette addition ne se trouve pas dans l'*editio princeps* qui, au lieu de cela, a dans la suite du texte remplacé *dont le reste de la troisième mesure le reste de la quatrième* par *dont le reste de la quatrième mesure la troisième* ; cette addition est identique à celle de Jan P. Hogendijk ([2002], p. 196 n. 14).

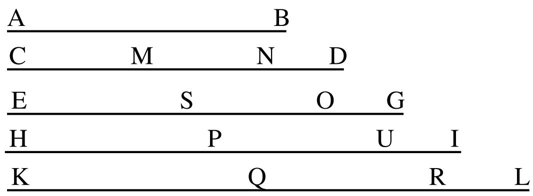
[24] Hogendijk ([2002], p. 196) a remarqué qu'en supprimant dans ce paragraphe les quatre occurrences des mots *le multiple de*, on obtient l'énoncé d'une définition générale de l'identité des rapports au moyen de l'anthyphérèse ou algorithme d'Euclide ; si c'est bien d'un tel énoncé qu'il s'agit ici, le pronom *ceci*, dans la dernière phrase de ce paragraphe, doit représenter la définition anthyphérétique de l'identité des rapports.

[25] Al-Nayrīzī fait peut-être allusion à son prédécesseur al-Māhānī (IX^{e} siècle) qui, afin de démontrer l'équivalence entre les Définitions V.5 & V.7 des *Éléments* et les définitions anthyphérétiques correspondantes, avait dû admettre les Propositions V.1-3 & V.5-6 des *Éléments* (voir [Hogendijk, 2002], p. 190-1 ; [Vahabzadeh, 2002], p. 33]).

[26] L'expression *par soi*, que l'on retrouve dans plusieurs manuscrits de la version Isḥāq-Ṯābit des *Éléments* (voir [Engroff, 1980], pp. 64 & 165), n'est pas usuelle dans ce contexte.

proportionnelles, on dit que le rapport de la première à la quatrième est le triple du rapport qu'elle a à la deuxième ; et c'est sur ce modèle qu'a lieu ce qui suit cela.

Le commentateur a dit : Il veut dire par *double* que si le nombre homonyme aux fois [i.e. au nombre de fois] que la première mesure la deuxième est multiplié par lui-même, le nombre qu'on obtient ainsi sera le rapport de la première à la troisième. Et si l'on a quatre grandeurs, on multiplie ce nombre carré par le premier nombre, et le résultat sera le rapport de la première à la quatrième ; et de même si l'on a cinq grandeurs, on multiplie le résultat par le premier nombre, et ce sera le rapport qu'il a à la cinquième.



Exemple. Nous posons cinq grandeurs AB, CD, EG, HI, KL[27]. Que AB mesure CD deux fois, et qu'il reste le tiers de AB ; il est donc évident que AB mesure CD deux fois et un tiers, et que le nombre homonyme est deux-et-un-tiers. Lors donc que nous multiplions deux-et-un-tiers par lui-même, le résultat sera cinq-et-quatre-neuvièmes ; et c'est le nombre homonyme aux fois que AB mesure EG. Si donc nous multiplions ce résultat, je veux dire cinq-et-quatre-neuvièmes, par deux-et-un-tiers, le résultat est douze-et-six-neuvièmes-et-un-tiers-de-neuvième ; et c'est la grandeur dont AB mesure la grandeur HI. Et si nous multiplions aussi douze-et-six-neuvièmes-et-un-tiers-de-neuvième par deux-et-un-tiers, le résultat sera vingt-neuf-et-cinq-neuvièmes-et-sept-neuvièmes-de-neuvième ; et c'est le nombre de fois que AB mesure la grandeur KL.

Que AB mesurant la grandeur CD fasse CM, MN, et qu'il reste ND le tiers de AB ; que CD mesure la grandeur EG, et que ES, SO soient chacune égale à CD, et qu'il reste OG le tiers de CD ; que EG mesure la grandeur HI, et que HP, PU soit chacune égale à EG, et qu'il reste UI le tiers de EG ; et que HI mesure la grandeur KL, et que KQ, QR soient chacune égale à HI, et qu'il reste RL le tiers de HI.

Donc du fait que ES est égale à CD et CD à deux fois AB et son tiers, le nombre commensurable [ou : commun] qui les mesure totalement est le tiers de AB. Donc le nombre commensurable mesure ES sept fois ; il mesurera donc EO quatorze fois. Mais OG est le tiers de CD. Donc la grandeur commensurable [ou : commune] mesurera OG deux fois et un tiers ; elle mesurera donc EG seize fois et un tiers. Donc la grandeur

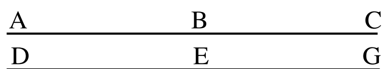
[27] Sous-entendu : continuellement proportionnelles.

commensurable qui mesure EG et AB doit être le neuvième de AB ; elle mesurera donc AB neuf fois, EG quarante-neuf fois, et CD vingt-et-une fois. Et neuf-vingt-et-unièmes est un-tiers-et-deux-septièmes-du-tiers ; et lorsqu'on le multiplie par lui-même, c'est comment AB mesure EG. Donc puisque la grandeur AB est ce que le nombre commensurable mesure neuf fois, et qu'il mesure EG quarante-neuf fois, AB mesurera EG cinq fois et quatre-neuvièmes de fois[28]. Et c'est de cette manière que l'on connaîtra tout ce qui reste.

Et lorsque les grandeurs sont incommensurables, la même chose est inhérente au nombre de fois que la première mesure la deuxième, <la deuxième la troisième,>[29] et la troisième la quatrième, et aux restes qui mesurent de cette manière suivant le chemin que nous avons exposé précédemment.

Euclide a dit : *On dit des grandeurs qu'elles sont ordonnées dans le rapport, lorsque les [grandeurs] antécédentes sont comparées avec les [grandeurs] antécédentes et les conséquentes avec les conséquentes. Inverser le rapport, c'est prendre la conséquente à la place de l'antécédente relativement à l'antécédente qui est prise à la place de la conséquente*[30].

Le commentateur a dit : *Exemple*. Que le rapport de AB, l'antécédente, à BC, la conséquente, soit comme le rapport de DE, l'antécédente, à EG, la conséquente. Inverser ce rapport, c'est prendre BC <et EG> comme antécédentes[31] et AB et DE comme conséquentes, de sorte que le rapport de CB à AB sera comme le rapport de EG à DE.



Euclide a dit : *Alterner le rapport, c'est prendre l'antécédente relativement à l'antécédente, et la conséquente relativement à la conséquente.*

Le commentateur a dit : La première figure est un exemple de cela. Que les deux antécédentes soient AB, DE, et les deux conséquentes BC, EG. Puisque le rapport de AB à BC est comme le rapport de DE à EG, alors lorsque nous alternons, le rapport de

[28] Et l'on a bien $5\frac{4}{9} = (2\frac{1}{3})^2$.

[29] Cette addition ne se trouve pas dans l'*editio princeps*.

[30] On trouve dans la marge du manuscrit de Leyde : *Les grandeurs qui sont ensemble dans un même rapport, les antécédentes aux antécédentes* [nous pensons qu'il faudrait plutôt dire : *les antécédentes aux conséquentes*], *le sont aussi d'une manière contraire : comme la conséquente est à l'antécédente, comme cela la conséquente est à l'antécédente ; et d'une manière alterne aussi : comme l'antécédente est à l'antécédente, comme cela la conséquente est à la conséquente.*

[31] Les deux manuscrits (et l'*editio princeps*) ont la leçon : *c'est prendre* BC *comme antécédente*.

AB, l'antécédente, à DE, l'antécédente, sera comme le rapport de BC, la conséquente, <à> EG, la conséquente.

Euclide a dit : *Composer le rapport, c'est prendre l'antécédente avec la conséquente à la place d'une même chose relativement à la conséquente*[32].

Le commentateur a dit : Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, et que AB, DE sont antécédentes et BC, EG conséquentes, alors lorsque nous composons, c'est le fait que nous prenons l'antécédente avec la conséquente ensemble comme une même chose — je veux dire que nous prenons AB avec BC comme une même ligne, et DE avec EG comme une même ligne — de sorte que le rapport de AC à CB sera comme le rapport de DG à GE, qui [i.e. CB et GE] sont les conséquentes.

Euclide a dit : *Séparer le rapport, c'est prendre l'excès de l'antécédente sur la conséquente relativement à la conséquente*[33].

Le commentateur a dit : Il dit que lorsque nous avions posé premièrement les grandeurs proportionnelles, elles étaient AB, BC et DE, EG ; donc les deux antécédentes étaient à ce moment-là AB, DE, et les deux conséquentes BC, EG. Donc lorsque nous composons, on aura après la composition quatre autres grandeurs qui malgré cela sont proportionnelles, dont les antécédentes sont AC, DG et les conséquentes BC, EG. Donc maintenant qu'<il>[34] sépare, il indique ces deux antécédentes et ces deux conséquentes — je veux dire les deux antécédentes AC, DG et les deux conséquentes BC, EG — et dit : Lorsqu'on sépare, le rapport de l'excès de l'antécédente sur la conséquente à la conséquente, est comme le rapport de l'excès de l'antécédente sur la conséquente à la conséquente.

Soit la première figure. L'excès de l'antécédente, qui est AC, sur la conséquente, qui est BC, sera AB ; de même l'excès de la deuxième [grandeur] antécédente, qui est DG, sur la conséquente, qui est EG, sera la grandeur DE. Donc le rapport de AB, qui est l'excès, à BC, qui est la conséquente, sera comme le rapport de DE, qui est l'excès, à EG, qui est la conséquente. Donc les grandeurs reviennent à l'état qui était le leur dans la première situation, celle antérieure à la composition.

---

[32] On trouve dans la marge du manuscrit de Leyde : *Composer le rapport, c'est que comme l'antécédente et la conséquente ensembles sont à la conséquente, comme cela l'antécédente et la conséquente ensembles sont à la conséquente*.

[33] On trouve dans la marge du manuscrit de Leyde : *Séparer le rapport, c'est le rapport de l'excès de l'antécédente sur la conséquente à la conséquente*.

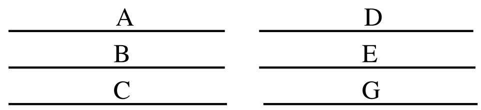
[34] Les deux manuscrits ont un *alif-nūn* qui ne fait pas sens, quel que soit la vocalisation qu'on adopte ; nous y avons ajouté un *hā'* et lisons *annahu* (qu'il). Dans l'*editio princeps*, le *alif-nūn* est supprimé et le verbe suivant *faṣṣala* (il sépare) est remplacé par *faṣṣalna* (nous séparons).

Euclide a dit : *Convertir le rapport, c'est prendre l'antécédente relativement à son excès sur la conséquente*[35].

Le commentateur a dit : Il dit : Le rapport de AC, qui est l'antécédente après la composition, à AB, qui est l'excès sur la conséquente, qui est BC, est comme le rapport de DG à DE.

Euclide a dit : *Le rapport d'égalité, c'est quand il y a des grandeurs quelconques et d'autres grandeurs selon leur multitude, et qu'elles sont telles, que lorsque l'on prend deux d'entre les premières, elles sont selon le rapport de deux d'entre les autres ; et que l'on prend les extrêmes sans ce qu'il y a entre eux*[36].

Le commentateur a dit : Il dit : Nous avons pris des grandeurs quelconques et d'autres grandeurs, chaque paire d'entre les premières selon le rapport de deux d'entre les autres ; alors dans le rapport d'égalité, elles seront proportionnelles ; et le rapport d'égalité est le rapport des extrêmes.



Exemple. Nous posons que les premières grandeurs sont A, B, C, et les autres grandeurs D, E, G, et que le rapport de deux d'entre les premières est selon le rapport de deux d'entre les autres : le rapport de A à B comme le rapport de D à E, et le rapport de B à C comme le rapport de E à G. Lors donc que nous enlevons les [termes] intermédiaires, le rapport de A à C est comme le rapport de D à G. Et de même si la multitude des grandeurs avait été quelconque.

Euclide a dit : *La proportion ordonnée, c'est quand l'antécédente relativement à la conséquente est comme l'antécédente relativement à la conséquente, et la conséquente relativement à une autre chose comme la conséquente relativement à une autre chose*.

Le commentateur a dit : *Exemple*. A, D sont les deux antécédentes, B, E les deux conséquentes, et C, G les deux autres choses. Il dit donc : Le rapport de A, l'antécédente, relativement à B, la conséquente, est comme le rapport de D, l'antécédente, à E, la conséquente ; et le rapport de B, la conséquente, relativement à C,

[35] On trouve dans la marge du manuscrit de Leyde : *Convertir le rapport, c'est le rapport de l'antécédente à son excès sur la conséquente*.

[36] On trouve dans la marge du manuscrit de Leyde : *Le rapport d'égalité, c'est le rapport des extrêmes les uns aux autres, lorsque les grandeurs sont plus que deux grandeurs, qu'il y a avec elles d'autres grandeurs selon leur multitude selon un même rapport, et qu'on laisse tomber la multitude intermédiaire selon un même niveau.*

qui est une autre chose, est comme le rapport de E, la conséquente, à G, qui est une autre chose.

Euclide a dit : *La proportion perturbée, c'est quand l'antécédente relativement à la conséquente est comme l'antécédente relativement à la conséquente, et la conséquente relativement à une autre chose est comme une autre chose relativement à la conséquente*.

Le commentateur a dit : Il dit que A, D sont deux antécédentes, B, E deux conséquentes, et C, G les deux autres choses. Il dit alors : Le rapport de A, l'antécédente, à B, la conséquente, est comme le rapport de D, l'antécédente, à E, la conséquente ; et le rapport de B, la conséquente, à C, qui est une autre chose, est comme le rapport de G, qui est une autre chose, à E, qui avait été posé comme antécédente[37] dans la première figure.

La postulation est achevée.

[37] Le commentateur doit probablement se référer à la proportion entre *B*, *C*, *E*, *G* mentionnée dans le commentaire sur la définition de la proportion ordonnée, où la grandeur *E* est effectivement antécédente.

ANNEXE

Nous donnons ici une traduction de la préface du commentaire d'al-Nayrīzī que l'on trouve dans le seul manuscrit de Leyde :

Ceci est l'ouvrage concis d'Euclide sur la science des éléments qui introduisent à la science de la mesure [i.e. la géométrie], comme la science des lettres de l'alphabet qui sont les éléments de l'écriture introduit à la science de l'écriture. Et c'est l'ouvrage que [le vizir] Yaḥyā <ibn> Khālid ibn Barmak avait ordonné de traduire de la langue grecque vers la langue arabe durant le califat d'al-Rashīd Hārūn ibn al-Mahdī[38], le Commandeur des Croyants, par les soins d'al-Ḥajjāj ibn Yūsuf <ibn> Maṭar.

Et lorsque Dieu eut rendu son califat vacant pour l'Imam al-Ma'mūn ʿAbd Allāh ibn Hārūn[39], le Commandeur des Croyants (et il adorait la science, et avait une prédilection pour la philosophie, et aimait s'entourer de savants, et était bienfaisant envers eux), al-Ḥajjāj ibn Yūsuf vit qu'il pourrait l'approcher en rectifiant cet ouvrage et en le rendant bref et concis. Il n'y laissa donc pas une superfluité qu'il ne retranchât, ni un manque qu'il ne comblât, ni un défaut qu'il n'amendât et affermît, jusqu'à ce qu'il le rectifia et le vérifia et le rendit bref et concis selon ce qu'il y a dans cette copie, pour les personnes comprenant et se préoccupant de cette[40] science, sans rien y altérer quant au sens ; et il laissât la première copie en l'état pour le commun des hommes.

Puis Abū al-ʿAbbās al-Faḍl ibn Ḥātim al-Nayrīzī le commenta ; et il élagua [ou : il polit] certaines expressions ; et il ajouta dans chaque section du propos d'Euclide ce qui lui convenait d'entre les propos des autres géomètres anciens, et d'entre les propos de ceux parmi eux qui commentèrent l'ouvrage d'Euclide.[41]

---

[38] Hārūn al-Rashīd fut calife de 786 à 809.
[39] Al-Ma'mūn fut calife de 813 à 833.
[40] Le mot a été partiellement effacé dans le manuscrit ; nous lisons *bihāḏā*.
[41] Leyde Or. 399/1, f. 1v ; [Besthorn *et alt.*, 1897-1932], Part. I, Fasc. I, pp. 4-6.

BIBLIOGRAPHIE

Besthorn *et alt.*

[1897-1932] *Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii*, édition, traduction latine et notices par R.O. Besthorn, J.L. Heiberg, G. Junge, J. Raeder et W. Thomson, Hauniae (1897-1932). Réimpression *in* F. Sezgin (éd.), *Islamic Mathematics and Astronomy*, vols. 14 & 15, Frankfurt am Main (1997).

Curtze (M.)

[1899] *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata*, Leipzig, 1899. Réimpression *in* F. Sezgin (éd.), *Historiography and Classification of Science in Islam*, vol. 44, Frankfurt am Main (2006).

De Young (G.)

[2002/3] The Arabic version of Euclid's *Elements* by al-Ḥajjāj ibn Yūsuf ibn Maṭar: New light on a submerged tradition, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 15 (2002/2003) : 125-164.

Engroff (J. W., Jr.)

[1980] *The Arabic Tradition of Euclid's* Elements: *Book V*, Thèse de Doctorat (inédite), Université de Harvard, Cambridge, Massachusetts (1980).

Hogendijk (J. P.)

[2002] Anthyphairetic ratio theory in medieval Islamic mathematics, *in* Y. Dold-Samplonius, J.W. Dauben, M. Folkerts, B. Van Dalen (éds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Boethius, Band 46, Stuttgart (2002), pp. 187-202.

Jolivet (J.) et Rashed (R.)

[1998] *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindī, vol. II, Métaphysique et Cosmologie*, Leiden-Boston-Köln (1998).

Lo Bello (A.)

[2003a] *Gerard of Cremona's Translation of the Commentary of al-Nayrizi on Book I of Euclid's* Elements of Geometry*, With an Introductury Account of the Twenty-Two Early Extant Arabic Manuscripts of the* Elements, Boston-Leiden, 2003.

[2003b] *The Commentary of Al-Nayrizi on Book I of Euclid's* Elements of Geometry*, With an Introduction on the Transmission of Euclid's* Elements *in the Middle Ages*, Boston-Leiden, 2003.

[2009] *The Commentary of Al-Nayrizi on Books II-IV of Euclid's* Elements of Geometry*, With a Translation of That Portion of Book I Missing from MS Leiden Or. 399. 1 but Present in the Newly Discovered Qom Manuscript Edited by Rüdiger Arnzen*, Boston-Leiden, 2009.

Plooij (B.)

[1950] *Euclid's Conception of Ratio and His Definition of Proportional Magnitudes as Criticized by Arabian Commentators*, Rotterdam (1950). Réimpression *in* F. Sezgin (éd.), *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 19, Frankfurt am Main (1997), pp. 167-243.

Sabra (A. I.)

[1974] Al-Nayrīzī, *in* C. C. Gillispie (éd.), *Dictionnary of Scientific Biography*, vol. X, New York (1974), pp. 5-7.

Sezgin (F.)

[1974] *Geschichte des arabischen Schrifttums,* Band V (1974).

[1978] *Geschichte des arabischen Schrifttums,* Band VI (1978).

[1979] *Geschichte des arabischen Schrifttums,* Band VII (1979).

Tummers (P. M. J. E., éd.)

[1994] *Anaritius' Commentary on Euclid. The Latin Translation, I-IV,* Artistarium: Supplementa IX, Nijmegen: Ingenium (1994).

Vahabzadeh (B.)

[2002] Al-Māhānī's commentary on the concept of ratio, *Arabic Sciences and Philosophy*, 12 (2002) : 9-52.