2002s-47

Valorisation d'Options par Optimisation du Sharpe Ratio

Yoshua Bengio, Réjean Ducharme,
Olivier Bardou, Nicolas Chapados

Série Scientifique
Scientific Series

CIRANO
Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

Montréal
Mai 2002

ISSN 1198-8177

Valorisation d'options par optimisation du Sharpe Ratio

Yoshua Bengio[*], *Réjean Ducharme*[†], *Olivier Bardou*[‡] *etNicolas Chapados*[§]

Résumé / Abstract

Les travaux précédents sur la valorisation des options entraient en gros dans deux catégories : ou bien ils étaient basés sur de fortes hypothèses distributionnelles ou économiques, ou bien ils essayaient d'imiter la formule de Black-Scholes par des modèles statistiques entraînés à approximer les prix de marché quotidiens à l'aide d'information disponible le jour même. Le travail présenté ici se rapproche plus de la deuxième catégorie mais son objectif est différent : prédire les prix futurs d'une option, et établir sa valeur courante à l'aide d'un scénario de transactions. Ce travail innove donc de deux façons : premièrement, il propose une méthode empirique et sans hypothèse pour comparer différents systèmes de valorisation d'options (en transigeant contre lui-même ou contre le marché) et deuxièmement, il utilise ce critère pour entraîner un modèle statistique non-paramétrique (utilisant dans ce cas-ci des réseaux de neurones) pour estimer un prix pour l'option qui maximise l'utilité espérée lorsque l'on transige contre le marché. À noter que les prix dépendront de la fonction d'utilité ainsi que du portefeuille (i.e. des risques courants) de la personne qui transige. Des résultats préliminaires sur des options d'achat du S&P 500 sont présentés.

Prior work on option pricing falls mostly in two categories: it either relies on strong distributional or economical assumptions, or it tries to mimic the Black-Scholes formula through statistical models, trained to fit today's market price based on information available today. The work presented here is closer to the second category but its objective is different: predict the future value of the option, and establish its current value based on a trading scenario. This work thus innovates in two ways: first it proposes an empirical and hypothesis-free method to compare different option pricing systems (by having trade against each other or against the market), second it uses this criterion to train a non-parametric statistical model (here based on neural networks) to estimate a price for the option that maximizes the expected utility when trading against the market. Note that the price will depend on the utility function and current portfolio (i.e. current risks) of the trading agent. Preliminary experiments are presented on the S&P 500 options.

Mots-clés : Black-Scholes, valorisation d'options, modèle statistique non-paramétrique.

Keywords: *Black-Scholes, option pricing, non-parametric statistical model*.

[*] CIRANO et Département d'informatique et recherche opérationnelle, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7. Tel: +1 (514) 343-6804, email: bengioy@iro.umontreal.ca

[†] CIRANO et Département d'informatique et recherche opérationnelle, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7. Email: ducharme@iro.umontreal.ca

[‡] Département d'informatique et recherche opérationnelle, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7

[§] CIRANO et Département d'informatique et recherche opérationnelle, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7. Email: chapados@iro.umontreal.ca

1 Introduction

Nos travaux précédents (Garcia et Gençay 1998; Dugas, Bengio, Bélisle, Nadeau et Garcia 2001; Bardou et Bengio 2002; Dugas et Bengio 2002; Dugas, Bengio, Bélisle, Nadeau et Garcia 2002) se sont concentrés sur la modélisation du prix des options avec des méthodes statistiques à partir des intrants de la formule de Black-Scholes (Black et Scholes 1973). Ici, nous prenons une direction différente basée sur l'idée de déterminer un prix rationnel des options d'achat européennes de manière empirique. La prémisse est qu'il nous faut un moyen de comparer plusieurs méthode de valorisation d'options sans se référer uniquement au prix du marché au moment de la valorisation (car le prix au marché pourrait ne pas être efficace, et c'est justement ce qu'un spéculateur voudrait découvrir). En effet chacune de ces méthodes peut dépendre de différentes hypothèses statistiques ou économiques : il est difficile de savoir ce qui arrive quand ces hypothèses ne sont pas tout à fait valides. Après avoir élaboré une approche empirique pour comparer *a-posteriori* et de manière empirique la qualité de différentes méthodes de valorisation d'option, nous considérons comment **optimiser** une méthode de valorisation de manière à augmenter sa *qualité*.

2 L'idée

Supposons que nous connaissions le prix "juste" d'une option d'achat d'un certain type (c'est à dire qui mature à une certaine date, et avec un certain prix d'exercice), pour un certain sous-jacent. À une date initiale t_1, si ce prix est suffisamment supérieur à celui du marché, nous décidons donc d'acheter ces options au prix du marché puis de les revendre à une date ultérieure t_2, toujours au prix du marché (il y a certainement des manières plus sophistiquées d'exploiter un *mis-pricing* du marché mais nous avons d'abord choisi celle-là pour sa simplicité). Inversement, si la valorisation prédite à t_1 est suffisamment inférieure au prix du marché à t_1, on peut vendre une certaine quantité de l'option (à découvert), pour la racheter à une date ultérieure t_2. Dans nos expériences nous considérons pour chaque t_1 où l'option s'est transigée un grand nombre de dates $t_2 > t_1$ mais t_2 inférieure à la date de maturité moins une semaine, telles qu'une transaction à été rapportée dans les donnée pour la date t_2.

Formellement, soient c_t, le prix au marché de l'option d'achat à la date t, η_t, la quantité d'options à transiger à la date t (si η devait être négative, nous vendrions à la date t_1 pour acheter à t_2). Soit enfin f_t, notre prix "juste" de l'option d'achat à la date t. Nous acquérons donc η_{t_1} options d'achat au prix c_{t_1} et les revendons au prix c_{t_2}. Par conséquent, dans le cas d'une transaction sans frais, notre profit sur la période $[t_1, t_2]$ sera :

$$p_{t_1,t_2} = \eta_{t_1}(c_{t_2} - c_{t_1}).$$

De façon plus réaliste, nous devons ajouter à cette formule des frais de transaction additifs (indépendant de la quantité et de la valeur des options transigées)

α, ainsi que des frais multiplicatifs (qui dépendent de la valeur transigée à l'achat ET à la vente) avec un facteur β. Donc, si on tient compte des frais de transaction, le profit d'une transaction s'écrit plutôt :

$$p_{t_1,t_2} = \eta_{t_1}(c_{t_2} - c_{t_1}) - \beta|\eta_{t_1}|(c_{t_2} + c_{t_1}) - 2\alpha$$

Avant d'aller plus loin, et puisque nos transactions s'échelonnent sur différentes périodes de temps, il serait bon d'introduire le concept d'actualisation du prix des options. Ce concept a pour but de tenir compte du fait que 1$ transigé hier vaut plus que 1$ transigé aujourd'hui et qui lui vaut plus que 1$ transigé demain. Ceci peut être expliqué par le fait qu'un placement sans risque de 1$ à un taux d'intérêt quotidien r_t au temps t vaudra, au temps $\tau > t$, $e^{r_{t,\tau}(\tau-t)/365}$ où $r_{t,\tau}$ représente la valeur moyenne du taux d'intérêt quotidien sur la période $[t,\tau]$. Par conséquent, et pour des raisons de lisibilité, tous les prix d'option et de sous-jacents que nous utiliserons par la suite seront en réalité des prix actualisés à une date de référence t_0 antérieure. Par exemple, c_{t_1} devrait être lu comme $c_{t_1}e^{-r_{t_1,t_0}(t_1-t_0)/365}$ (en supposant que les dates sont exprimées en jours).

Pour définir la *qualité* d'une stratégie de valorisation, il nous faut malheureusement faire un choix qui peut sembler un peu arbitraire, soit celui d'une fonctionnelle qui mesure cette qualité. Comme notre but n'est pas seulement de maximiser les profits, mais également de minimiser les risques, nous avons ici choisi comme critère le *Sharpe Ratio* (Sharpe 1994) défini par :

$$Sharpe\ Ratio = \frac{E[p_{t_1,t_2}|t_1]}{\sqrt{Var[p_{t_1,t_2}|t_1]}}$$

3 Choix de η

Ce qu'il nous faut maintenant c'est choisir $\eta_{t_1} = f(y_{t_1} - c_{t_1})$, où y_{t_1} est la valorisation de c_{t_1} faite par un réseau de neurones et $f()$ est une fonction monotone croissante qui nous reste à déterminer. Pour ce faire, nous ferons les suppositions statistiques suivantes :

$$E[c_{t_2}|t_1] = y_{t_1}$$
$$Var[c_{t_2}|t_1] = \sigma^2 c_{t_1}^2$$

Cas spécial à une seule paire de transactions Pour ce cas spécial, on peut écrire le profit comme :

$$p_{t_1,t_2} = \eta(c_{t_2} - c_{t_1}) - 2\alpha\mathcal{I}_{\eta\neq 0} - \beta|\eta|(c_{t_2} + c_{t_1})$$

où $\mathcal{I}$ est la fonction identité. Étant donnée cette formule pour le profit, on obtient les statistiques suivantes :

$$\begin{aligned} E[p_{t_1,t_2}|t_1] &= \eta(y_{t_1} - c_{t_1}) - 2\alpha\mathcal{I}_{\eta\neq 0} - \beta|\eta|(y_{t_1} + c_{t_1}) \\ &= \eta y_{t_1}(1 - \beta sign(\eta)) - \eta c_{t_1}(1 + \beta sign(\eta)) - 2\alpha\mathcal{I}_{\eta\neq 0} \\ Var[p_{t_1,t_2}|t_1] &= \eta^2\sigma^2 c_{t_1}^2(1 - \beta sign(\eta))^2 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $|\eta| = \eta sign(\eta)$. La formule du *Sharpe Ratio* devient alors :

$$\begin{aligned}
Sharpe\ Ratio &= \frac{\eta y_{t_1}(1-\beta sign(\eta)) - \eta c_{t_1}(1+\beta sign(\eta)) - 2\alpha\mathcal{I}_{\eta\neq 0}}{\sqrt{\eta^2\sigma^2 c_{t_1}^2(1-\beta sign(\eta))^2}} \\
&= \frac{y_{t_1}(1-\beta sign(\eta)) - c_{t_1}(1+\beta sign(\eta))}{sign(\eta)\sigma c_{t_1}(1-\beta sign(\eta))} - \frac{2\alpha\mathcal{I}_{\eta\neq 0}}{\eta sign(\eta)\sigma c_{t_1}(1-\beta sign(\eta))} \\
&= \frac{\Delta}{sign(\eta)\sigma c_{t_1}(1-\beta sign(\eta))} - \frac{2\alpha\mathcal{I}_{\eta\neq 0}}{\eta sign(\eta)\sigma c_{t_1}(1-\beta sign(\eta))}
\end{aligned}$$

avec $\quad \Delta \equiv y_{t_1}(1-\beta sign(\eta)) - c_{t_1}(1+\beta sign(\eta))$.

Étant donné que *Sharpe Ratio* $\sim \frac{-1}{\eta sign(\eta)}$ (pour ce cas spécial), la fonction d'utilité est maximale lorsque $\eta \to \pm\infty$, ce qui n'est pas vraiment intéressant. Mais on peut quand même trouver la condition pour laquelle le profit espéré sera positif.

$$\begin{aligned}
Sharpe\ Ratio > 0 &\Leftrightarrow \eta\Delta - 2\alpha > 0 \\
&\Leftrightarrow \eta\Delta > 2\alpha
\end{aligned}$$

Cas 1 : $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \eta > \frac{2\alpha}{\Delta}$

Cas 2 : $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad \eta < \frac{2\alpha}{\Delta}$

Sinon, il est préférable de choisir $\eta = 0$.

Cas à deux paires de transaction Dans ce cas, la fonction d'utilité s'écrit :

$$\begin{aligned}
Sharpe\ Ratio &= \frac{\eta_1\Delta_1 + \eta_2\Delta_2 - 4\alpha\mathcal{I}_{\eta\neq 0}}{\sqrt{\eta_1^2\sigma_1^2 c_{1t}^2(1-\beta sign(\eta_1))^2 + \eta_2^2\sigma_2^2 c_{2t}^2(1-\beta sign(\eta_2))^2}} \\
&\equiv \frac{\mu_p}{\sigma_p}
\end{aligned}$$

On suppose maintenant que η_1 et η_2 sont non-nuls. On fixe alors η_2 et on cherche η_1 (relatif à η_2) qui maximise le *Sharpe Ratio* . Étant donné que le *Sharpe Ratio* n'est plus une fonction simple de η_1, on se retrouve maintenant avec la dérivée suivante :

$$\frac{\partial Sharpe\ Ratio}{\partial\eta_1} = \frac{\Delta_1}{\sigma_p} - \frac{\eta_1\Delta_1 + \eta_2\Delta_2 - 4\alpha}{\sigma_p^3}\eta_1\sigma_1^2 c_{1t}^2(1-\beta sign(\eta_1))^2 = 0$$

ou, après quelques calculs,

$$\eta_1 = \frac{\Delta_1\eta_2^2}{\Delta_2\eta_2 - 4\alpha}\frac{\sigma_2^2 c_{2t}^2(1-\beta sign(\eta_2))^2}{\sigma_1^2 c_{1t}^2(1-\beta sign(\eta_1))^2}$$

Maintenant, pour simplifier un peu, on suppose que $\sigma_1 \approx \sigma_2$, $c_{1t} \approx c_{2t}$, et en prenant avantage du fait que $\frac{1-\beta sign(\eta_2)}{1-\beta sign(\eta_1)} \approx 1$, on a :

$$\eta_1 = \frac{\Delta_1 \eta_2^2}{\Delta_2 \eta_2 - 4\alpha}$$

ou

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2 - 4\alpha/\eta_2}$$

Étant donné que η_2 représente une "autre paire de transactions" arbitraire, nous proposons le système de décision suivant (en ne considérant qu'une paire de transactions à la fois) :

$$direction = \tanh(\gamma_1(y_{t_1} - c_{t_1}))$$

$$\Delta = y_{t_1}(1 - \beta * direction) - c_{t_1}(1 + \beta * direction)$$

$$\tilde{\eta}_{t_1} = C * \Delta$$

$$n = \tilde{n} \text{ sigmoid}(\beta(\tilde{n}\Delta - 2\alpha))$$
$$\eta_{t_1} = \tilde{\eta}_{t_1} * sigmoid(\gamma_2(\tilde{\eta}_{t_1}\Delta - 2\alpha))$$

où C représente notre capital disponible, et γ_1 et γ_2 sont 2 paramètres de lissage.

4 Mise en œuvre

Comme dans nos travaux précédents, nous utiliserons un réseau de neurones à 1 couche cachée, pour apprendre la valorisation des options, de la forme :

$$y_{t_1} = v_0 + v * \tanh(w * x_{t_1} + w_0)$$

où x_{t_1} représente le vecteur d'entrée au temps t_1, et les paramètres appris sont $(w, w_0, v, v0)$. Le vecteur d'entrées est constituée des données suivantes :

- $T - t_1$ (T = maturité de l'option)
- r_{t_1} (taux d'intérêt)
- $\log(c_{t_1}/K)$ (K = prix "strike" à maturité)
- $\log(s_{t_1}/K)$ (s_t = prix "spot" du sous-jacent au temps t)

à cela, on ajoute également des moyennes mobiles sur 1, 2, 5, 10 et 20 jours de c_t et s_t.

Nous avons testé notre modèle sur les données d'options d'achat du S&P500 pour les années 1994-1997 et janvier 2000 à août 2001. Nous n'avons pas utilisé nos données de 1987-1983 car le volume des transactions n'y est pas disponible et nous n'avons pas confiance au supposé prix au marché pour les journées où

Tab. 1: *Sharpe Ratio* pour les options d'achat du S&P500 pour les années 1994-1997 et 2000 à aujourd'hui. α représente les frais de transaction additifs (en \$), β les frais multiplicatifs (en %), et SR est un acronyme pour *Sharpe Ratio* . Le *Sharpe Ratio* naïf est calculé à partir de l'achat d'un nombre constant du sous-jacent sur l'ensemble de test.

α (\$)	β (%)	SR (train)	SR (test)	SR naïf
0	0	0.526799	0.52882	0.0424136
0	0.1	0.523222	0.525131	0.0424136
0	5	0.457221	0.458096	0.0424136
20	0	0.117902	0.130939	0.0424136
20	0.1	0.117506	0.130491	0.0424136
20	5	0.097403	0.10761	0.0424136

il n'y a pas eu de transaction. Pour chaque option transigée à t_1 (avec maturité T), nous avons gardé toutes les données avec t_2 pour lesquelles $t_1 < t_2 < T$ qui ont été transigées. Au total, ceci nous donne une base de données contenant 1029006 entrées.

5 Résultats et discussion

Dans cette section, nous présenterons nos résultats préliminaires. Pour chaque expérience, nous avons utilisé un réseau de neurones (comme décrit précédemment) avec 90 unités cachées et entraîné avec un maximum de 200 itérations utilisant un gradient conjugué batch (étant donné le coût *Sharpe Ratio* , il n'est pas possible d'utiliser le gradient stochastique). Pour chaque résultat, nous avons indiqué la valeur des frais de transaction (en \$ pour les frais additifs et en % pour les frais multiplicatifs), la valeur du *Sharpe Ratio* sur l'ensemble d'entraînement et de test. Nous avons également ajouté une valeur de référence (qu'il nous faut battre) et qui consiste à calculer le *Sharpe Ratio* (sur le même ensemble de test) pour un système naïf qui achète toujours le même nombre d'actions du sous-jacent ("naïf SR" dans le tableau), donc du SP500. Dans tous les cas, les données ont été mélangées au préalable, et la moitié des données furent utilisées pour l'entraînement et l'autre moitié pour le test.

Premièrement, rappelons que ce tableau ne résume que des résultats très préliminaires. Aussi, nous avons mené nos expériences avec des données mélangées pour vérifier la faisabilité de notre heuristique quant au choix de η (le nombre d'options à acheter ou à vendre, étant donné le prix appris par notre modèle).

Ce qui ressort des résultats du tableau 1, c'est que notre modèle est très performant à modéliser la distribution stationnaire des données, c'est-à-dire qu'il fait très bien sur des données mélangées. Pour toutes les combinaisons de frais de transaction, il fait beaucoup mieux que l'acheteur naïf qui achète toujours le même nombre d'actions du sous-jacent.

Pour la suite de notre projet de recherche, nous voulons évidemment étendre nos prévisions à des données non-mélangées qui conservent leur caractère temporel. Nous espérons également améliorer nos prédictions en augmentant notre base de données avec, entre autres, d'autres séries d'options provenant d'indices financiers différents. Il serait également intéressant de tester notre modèle avec des options de vente.

Références

BARDOU, O. et Y. BENGIO (2002), « Régularisation du prix des option : Stacking », Rapport technique 2002s-44, CIRANO, Montréal, Québec, Canada.

BLACK, F. et M. SCHOLES (1973), « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy 81*(3), p. 637–654.

DUGAS, C. et Y. BENGIO (2002), « Étude du biais dans le prix des options », Rapport technique 2002s-45, CIRANO, Montréal, Québec, Canada.

DUGAS, C., Y. BENGIO, F. BÉLISLE, C. NADEAU et R. GARCIA (2001), « A Universal Approximator of Convex Functions Applied to Option Pricing », *Advances in Neural Information Processing Systems*, Denver, CO,

DUGAS, C., Y. BENGIO, F. BÉLISLE, C. NADEAU et R. GARCIA (2002), « Incorporating Second-Order Functional Knowledge for Better Option Pricing », Rapport technique 2002s-46, CIRANO, Montréal, Québec, Canada.

GARCIA, R. et R. GENÇAY (1998), « Pricing and Hedging Derivative Securities with Neural Networks and a Homogeneity Hint », Rapport technique 98s-35, CIRANO, Montréal, Québec, Canada.

SHARPE, W. F. (1994), « The Sharpe Ratio », *The Journal of Portfolio Management 21*(1), p. 49–58.

Liste des publications au CIRANO*

Série Scientifique / *Scientific Series* (ISSN 1198-8177)

* Consultez la liste complète des publications du CIRANO et les publications elles-mêmes sur notre site Internet :

http://www.cirano.qc.ca

2002s-29 Tax Incentives and Fertility in Canada: Permanent vs. Transitory Effects / Daniel Parent et Ling Wang

2002s-28 The Causal Effect of High School Employment on Educational Attainment in Canada / Daniel Parent

2002s-27 Employer-Supported Training in Canada and Its Impact on Mobility and Wages / Daniel Parent

2002s-26 Restructuring and Economic Performance: The Experience of the Tunisian Economy / Sofiane Ghali and Pierre Mohnen

2002s-25 What Type of Enterprise Forges Close Links With Universities and Government Labs? Evidence From CIS 2 / Pierre Mohnen et Cathy Hoareau

2002s-24 Environmental Performance of Canadian Pulp and Paper Plants : Why Some Do Well and Others Do Not ? / Julie Doonan, Paul Lanoie et Benoit Laplante

2002s-23 A Rule-driven Approach for Defining the Behavior of Negotiating Software Agents / Morad Benyoucef, Hakim Alj, Kim Levy et Rudolf K. Keller

2002s-22 Occupational Gender Segregation and Women's Wages in Canada: An Historical Perspective / Nicole M. Fortin et Michael Huberman

2002s-21 Information Content of Volatility Forecasts at Medium-term Horizons / John W. Galbraith et Turgut Kisinbay

2002s-20 Earnings Dispersion, Risk Aversion and Education / Christian Belzil et Jörgen Hansen

2002s-19 Unobserved Ability and the Return to Schooling / Christian Belzil et Jörgen Hansen

2002s-18 Auditing Policies and Information Systems in Principal-Agent Analysis / Marie-Cécile Fagart et Bernard Sinclair-Desgagné

2002s-17 The Choice of Instruments for Environmental Policy: Liability or Regulation? / Marcel Boyer, Donatella Porrini

2002s-16 Asymmetric Information and Product Differentiation / Marcel Boyer, Philippe Mahenc et Michel Moreaux

2002s-15 Entry Preventing Locations Under Incomplete Information / Marcel Boyer, Philippe Mahenc et Michel Moreaux

2002s-14 On the Relationship Between Financial Status and Investment in Technological Flexibility / Marcel Boyer, Armel Jacques et Michel Moreaux

2002s-13 Modeling the Choice Between Regulation and Liability in Terms of Social Welfare / Marcel Boyer et Donatella Porrini

2002s-12 Observation, Flexibilité et Structures Technologiques des Industries / Marcel Boyer, Armel Jacques et Michel Moreaux

2002s-11 Idiosyncratic Consumption Risk and the Cross-Section of Asset Returns / Kris Jacobs et Kevin Q. Wang

2002s-10 The Demand for the Arts / Louis Lévy-Garboua et Claude Montmarquette

2002s-09 Relative Wealth, Status Seeking, and Catching Up / Ngo Van Long, Koji Shimomura

2002s-08 The Rate of Risk Aversion May Be Lower Than You Think / Kris Jacobs

2002s-07 A Structural Analysis of the Correlated Random Coefficient Wage Regression Model / Christian Belzil et Jörgen Hansen