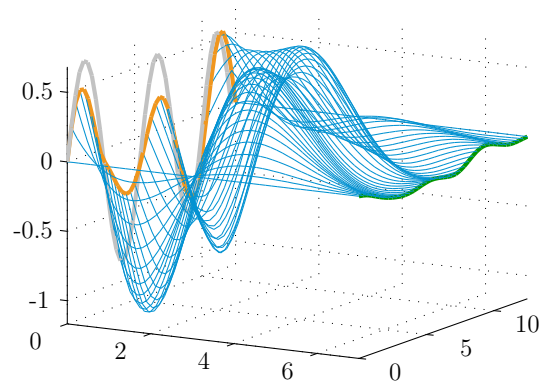
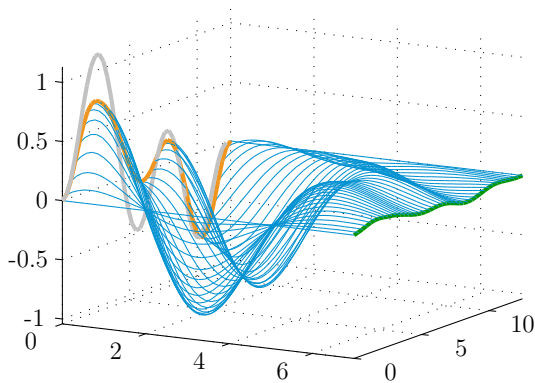


# Online-Optimierung in der Mehrsystemdynamik unter einer erweiterten Klasse von Nebenbedingungen

Optimale Bahnplanung eines deckengeführten  
Bediensystems in der Hochregallagertechnik

von Ramona Stach



## Dissertation

zur Erlangung des Grades einer Doktorin der Ingenieurwissenschaften  
- Dr. Ing. -

Vorgelegt im Fachbereich 3 (Mathematik & Informatik)  
der Universität Bremen  
im Februar 2012



**Online-Optimierung  
in der Mehrsystemdynamik  
unter einer erweiterten Klasse  
von Nebenbedingungen**

**Optimale Bahnplanung eines deckengeführten  
Bediensystems in der Hochregallagertechnik**

von Ramona Stach

**Dissertation**

zur Erlangung des Grades einer Doktorin der Ingenieurwissenschaften  
- Dr. Ing. -

Vorgelegt im Fachbereich 3 (Mathematik & Informatik)  
der Universität Bremen  
im Februar 2012

Datum des Promotionskolloquiums: 18.05.2012

Gutachter: Prof. Dr. Christof Büskens, Universität Bremen  
Prof. Dr. Matthias Gerds, Universität der Bundeswehr München

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde durch die Zentrale Forschungsförderung der Universität Bremen (ZF-Kennzeichen 03/107/04) gefördert und entstand überwiegend während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Zentrum für Technomathematik der Universität Bremen in der Arbeitsgruppe Optimierung und optimale Steuerung. Zu einem Abschluss habe ich die Arbeit nach meinem Wechsel in die Luft- und Raumfahrt als GNC System Engineer bringen können.

Mein Dank gilt daher besonders Prof. Dr. Christof Büskens für die fachliche und die persönliche Unterstützung, für die Motivation und den Freiraum für eigene Ideen. Neben hilfreichen Diskussionen sorgte er für einen gewissen Rückhalt, insbesondere in der Zeit nach meiner Tätigkeit an der Universität.

Herrn Prof. Dr. Matthias Gerdts möchte ich besonders für das entgegengebrachte Interesse an meiner Arbeit und für seine Unterstützung danken.

Vielen Dank auch an Bodo Blume, Dr. Matthias Knauer und besonders Dr. Alexander Schwientek für das Korrekturlesen der Arbeit.

Den Kollegen der Arbeitsgruppe, sowie den damaligen Kollegen am ZeTeM danke ich für die schöne Zeit, die mir sicher in guter Erinnerung bleiben wird.

Allen Freunden und meiner Familie möchte ich für das entgegengebrachte Verständnis, Ihre Geduld und Unterstützung danken.

Danke, Olaf.

---

Die Bilder auf dem Deckblatt zeigen die relative Verschiebung (links) und die relative Geschwindigkeit (rechts) des Lastaufnahmemittels gegenüber der deckengeführten Laufkatze. In Orange ist die tatsächliche optimale Trajektorie aus der Bahnplanung mit integrierten Optimalreglern gegeben. In Blau sind die geregelten Haltebahnen zu jedem diskreten Zeitpunkt dargestellt. Zum Vergleich ist die optimale Trajektorie ohne erweiterte Nebenbedingung in Grau ergänzt.

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungverzeichnis	xi
Tabellenverzeichnis	xiv
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Laufkatzen in der Lagertechnik</b>	<b>5</b>
2.1 Hochregallager . . . . .	5
2.2 Innovatives Regalbediengerät Laufkatze . . . . .	7
2.3 Bahnplanung . . . . .	10
2.4 Eine Frage der Sicherheit . . . . .	11
<b>3 Nichtlineare Optimierung</b>	<b>13</b>
3.1 Problemstellung . . . . .	14
3.2 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . . .	15
3.3 Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung . . . . .	17
3.4 Numerische Lösung von NLP-Problemen . . . . .	18
3.5 Parametrische Sensitivitätsanalyse . . . . .	21
3.5.1 Parametergestörte Optimierung . . . . .	21
3.5.2 Sensitivitätsanalyse der optimalen Lösung . . . . .	22
3.5.3 Sensitivitätsanalyse von Zugehörigkeitsfunktionen . . . . .	26
3.5.4 Approximation gestörter Lösungen . . . . .	28

---

<b>4</b>	<b>Optimale Steuerprozesse</b>	<b>31</b>
4.1	Grundbegriffe optimaler Steuerprozesse . . . . .	32
4.2	Das Minimumprinzip von PONTYAGIN . . . . .	35
4.2.1	Notwendige Optimalitätsbedingung unrestringierter Probleme	36
4.2.2	Notwendige Optimalitätsbedingung restringierter Probleme . .	39
4.3	Berechnung durch direkte Verfahren . . . . .	43
4.3.1	Diskretisierung . . . . .	43
4.3.2	Approximation der Steuerfunktion . . . . .	45
4.3.3	Approximation der Zustandsfunktion . . . . .	46
4.3.4	Beschränkungen . . . . .	47
4.4	Vergleich direkter mit indirekten Verfahren . . . . .	48
4.5	Sensitivitätsanalyse optimaler Steuerprozesse . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Linear quadratische Regulatorprobleme</b>	<b>53</b>
5.1	Das optimale Regelgesetz . . . . .	53
5.2	Grundlagen der Systemtheorie . . . . .	59
5.2.1	Stabilität . . . . .	59
5.2.2	Steuerbarkeit . . . . .	61
5.2.3	Beobachtbarkeit . . . . .	63
5.3	Das suboptimale Regelgesetz . . . . .	64
5.3.1	Auswirkung suboptimaler Regelung . . . . .	65
5.3.2	Herleitung des suboptimalen Regelgesetzes . . . . .	66
5.3.3	Eindeutigkeit der algebraischen RICCATI-Lösung . . . . .	69
5.4	Numerische Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Optimale Steuerprozesse unter erweiterten Nebenbedingungen</b>	<b>77</b>
6.1	Grundlagen gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .	78
6.2	Analyse der LQR-Problemstellung . . . . .	81
6.2.1	Umformung in ein NLP-Problem . . . . .	82
6.2.2	Differenzierbarkeit der Reglermatrix . . . . .	84
6.3	Optimales Steuerungsproblem mit integrierten Optimalreglern . . . .	88
6.3.1	Mathematische Formulierung . . . . .	88
6.3.2	Differenzierbarkeit der erweiterten Nebenbedingung . . . . .	91



---

<b>7</b>	<b>Anwendungsproblem: Laufkatze</b>	<b>95</b>
7.1	Mathematisches Modell . . . . .	96
7.2	Optimale Bahnplanung . . . . .	100
7.2.1	Randbedingungen . . . . .	100
7.2.2	Beschränkungen . . . . .	102
7.2.3	Zielfunktionale . . . . .	104
7.3	Anwendung direkter Verfahren . . . . .	106
7.4	Optimale Regelung . . . . .	107
7.4.1	Ruhelagen . . . . .	107
7.4.2	Linearisierung . . . . .	108
7.4.3	Systemtheoretische Betrachtung des dynamischen Systems . . . . .	111
7.4.4	Linear quadratisches Regulatorproblem der Laufkatze . . . . .	114
7.5	Erweiterte Nebenbedingungen . . . . .	115
7.5.1	Simulation des geschlossenen Kreises . . . . .	115
7.5.2	Kopplung durch Energieterme . . . . .	116
7.5.3	Erweiterte Nebenbedingung der Laufkatze . . . . .	119
7.5.4	Anpassung der Reglermatrix . . . . .	120
7.6	Optimale Bahnplanung unter erweiterten Nebenbedingungen . . . . .	123
<b>8</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>125</b>
8.1	Bahnoptimierung . . . . .	126
8.2	Bahnoptimierung mit variabler Regelung . . . . .	132
8.2.1	Regelung der Laufkatze bei konstanter Seillänge . . . . .	133
8.2.2	Regelung der Laufkatze und des Seils . . . . .	138
8.3	Bahnoptimierung mit konstanter Regelung . . . . .	140
8.4	Variationen im LQR-Problem . . . . .	144
8.4.1	Veränderung der Gewichtung zwischen $Q$ und $R$ . . . . .	144
8.4.2	Veränderung der Einträge von $Q$ . . . . .	150
8.5	Bahnoptimierung mit beschränkter Regelung . . . . .	156
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>163</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>167</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Einblick in die Regalgasse mit einer Laufkatze . . . . .	7
2.2	Aufbau des Laufkatzensystems Aviator <sup>TM</sup> . . . . .	9
4.1	Stückweise lineare Approximation der Steuerung . . . . .	46
7.1	Gegenüberstellung eines mathematischen und physikalischen Pendels	97
7.2	Mathematisches Modell einer Laufkatze . . . . .	99
7.3	Modell einer Laufkatze für die Energieberechnung . . . . .	119
7.4	Vergleichsrechnung zwischen angepasster und originaler Zustandsrückführung . . . . .	122
8.1	Optimale Bahnen bei erhöhter Bestrafung von Pendelverhalten, Steuerenergie und Verfahzeit . . . . .	129
8.2	Optimale Bahnen bei erhöhter Bestrafung von Pendelverhalten, Steuerenergie und Verfahzeit (Fortsetzung) . . . . .	130
8.3	Optimale Bahnen bei erhöhter Bestrafung von Pendelverhalten, Steuerenergie und Verfahzeit - Zielfunktionale . . . . .	131
8.4	Optimale Bahnen bei erhöhter Bestrafung von Pendelverhalten, Steuerenergie und Verfahzeit - Seitenansicht . . . . .	132
8.5	Regelungsmatrix in Abhängigkeit von der Seillänge . . . . .	133
8.6	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen zu verschiedenen Zielfunktionalen im OCP - Laufkatze und Last . . . . .	135
8.7	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen zu verschiedenen Zielfunktionalen im OCP - Seil . . . . .	136
8.8	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen zu verschiedenen Zielfunktionalen im OCP - Auswertung der Energie . . . . .	136

8.9	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen zu verschiedenen Zielfunktionalen im OCP - Seitenansicht . . . . .	137
8.10	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen bei zusätzlicher Regelung des Seils im LQR - Laufkatze, Last und Seil . . . . .	139
8.11	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen bei zusätzlicher Regelung des Seils im LQR - Auswertung der Energie . . . . .	139
8.12	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen mit variabler und konstanter Regelung - Laufkatze und Last . . . . .	142
8.13	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen mit variabler und konstanter Regelung - Seil . . . . .	143
8.14	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen mit variabler und konstanter Regelung - Auswertung der Energie . . . . .	143
8.15	Energiewerte für den Fall der maximalen Pendelauslenkung bei verschiedenen Gewichtungen zwischen $Q$ und $R$ . . . . .	145
8.16	Energiewerte für den Fall der maximalen Pendelgeschwindigkeit bei verschiedenen Gewichtungen zwischen $Q$ und $R$ . . . . .	146
8.17	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlicher Gewichtung im LQR-Zielfunktional - Laufkatze und Last . . . . .	148
8.18	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlicher Gewichtung im LQR-Zielfunktional - Seil . . . . .	149
8.19	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlicher Gewichtung im LQR-Zielfunktional - Auswertung der Energie . . . . .	149
8.20	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlicher Gewichtung im LQR-Zielfunktional - Seitenansicht .	150
8.21	Energiewerte für den Fall der maximalen Pendelauslenkung bei unterschiedlichen Diagonalen von $Q$ . . . . .	151
8.22	Energiewerte für den Fall der maximalen Pendelgeschwindigkeit bei unterschiedlichen Diagonalen von $Q$ . . . . .	152
8.23	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlichen Zustandsgewichtungsmatrizen - Laufkatze und Last	153
8.24	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlichen Zustandsgewichtungsmatrizen - Seil . . . . .	154
8.25	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlichen Zustandsgewichtungsmatrizen - Auswertung der Energie . . . . .	154

---

8.26	Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlichen Zustandsgewichtungsmatrizen - Seitenansicht . . .	155
8.27	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen mit beschränkter Regelung im LQR - Laufkatze und Last . . . . .	159
8.28	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen mit beschränkter Regelung im LQR - Seil . . . . .	160
8.29	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen mit beschränkter Regelung im LQR - Seitenansicht . . . . .	160
8.30	Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen mit beschränkter Regelung im LQR - Auswertung der Energie . . . . .	161

Die Abbildungen am unteren äußeren Rand der Seiten 1 bis 172 zeigen den Verlauf der optimalen Bahn einer Laufkatze, sowie drei ausgewählte Haltebahnen des geregelten Halts zu unterschiedlichen Umschaltezeiten in der optimalen Trajektorie. Die Beschreibung des Problems entspricht dem Set 1 aus Abschnitt [8.5](#).



# Tabellenverzeichnis

2.1	Typische Kennzahlen einer Laufkatze . . . . .	11
6.1	Notation des optimalen Steuerungsproblem unter erweiterten Nebenbedingungen . . . . .	88
7.1	Notation des optimalen Steuerungsproblem der Laufkatze unter erweiterten Nebenbedingungen . . . . .	115
7.2	Designparameter der optimalen Bahnplanung der Laufkatze unter Berücksichtigung des geregelten Halts . . . . .	124
7.3	Optionale Designelemente in der optimalen Bahnplanung der Laufkatze unter Berücksichtigung des geregelten Halts . . . . .	124
8.1	Gewichtungsfaktoren der Zielfunktionale . . . . .	127
8.2	Box-Beschränkungen der Steuerung und des Zustands der Laufkatze .	127
8.3	Anfangs- und Endbedingung der Laufkatze . . . . .	128
8.4	Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess und dem resultierenden nichtlinearen Optimierungsproblem . . . . .	128
8.5	Standard Beschreibung der erweiterten Nebenbedingungen . . . . .	134
8.6	Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterten Nebenbedingung - Variation des Zielfunktional im OCP . . .	134
8.7	Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterten Nebenbedingung - LQR inklusive Regelung der Seillänge . . .	138
8.8	Anfangs- und Endbedingung der Laufkatze für den Vergleich von adaptiver und konstanter Regelung . . . . .	140
8.9	Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterten Nebenbedingung - Vergleich zwischen variabler und konstanter Reglermatrix . . . . .	141

8.10	Beschreibung der erweiterten Nebenbedingung bei Variation des Zielfunktional im LQR . . . . .	145
8.11	Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - Variation des Zielfunktional im LQR . . . .	147
8.12	Beschreibung der erweiterten Nebenbedingung bei Variation der Zustandsgewichtungsmatrix im LQR . . . . .	150
8.13	Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - Variation der Zustandsgewichtungsmatrix im LQR . . . . .	155
8.14	Charakteristische Werte der erweiterten Nebenbedingungen des optimalen Steuerprozess mit beschränkter Regelung . . . . .	156
8.15	Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - Vergleich restringierter Regler aus dem LQR	157



# Einleitung

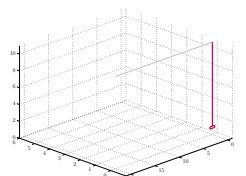
In der Vergangenheit konnten durch erfolgreiche Kooperationen zwischen Mathematikern und Ingenieuren viele neue Konzepte bis zur Realisierung gebracht werden. Eine solche Erfolgsgeschichte schreibt auch das neu entwickelte System in der Hochregallagertechnik, der Aviator<sup>TM</sup>. Vertrieben wird das System derzeit durch die Westfalia Holding GmbH & Co. KG.

Entgegen den gängigen und bewährten Regalfahrzeugen, bestehend aus einem bodengebundenem Fahrwerk, Hubwerk und Lastaufnahmemittel, zur Be- und Entladung der Regalstellplätze, wurde ein alternativer Weg in der Weiterentwicklung dieser Technologie beschritten. Über ein deckengeführtes kranähnliches System, wird eine flurfreie Be- und Entladung ermöglicht. Das System besteht aus einem Fahrmodul, die Laufkatze, welches über Seile mit dem Lastaufnahmemittel verbunden ist.

Durch die ineinandergreifende Zusammenarbeit von Universität und Industrie konnten bereits erste Erfolge bei der optimalen Bahnplanung von Referenztrajektorien für die Bewegung der Laufkatze unter Berücksichtigung des Pendelverhaltens des Lastaufnahmemittels für beliebige Start- und Zielbedingungen gefeiert werden. In einem ersten Schritt erprobte man die optimalen Bahnen an einem eigens dafür erbauten Prototypen. Dabei konnten die Zielvorgaben der Ingenieure durch die Möglichkeiten der Mathematiker mehr als erfüllt werden, so dass mittlerweile über eine eigens dafür entwickelte Softwarebibliothek die Bahnen im industriellen Einsatz berechnet werden.

Gleichzeitig zeigten sich auch einige Schwachstellen, die nicht berücksichtigt wurden und ergänzende Anforderungen zur Folge hatten. Zum einen mussten weitere Systemgrenze in die mathematischen Formulierung mit aufgenommen werden, zum anderen analysierte man, unabhängig von der eigentlich Bahnoptimierung, spezielle Sicherheitsbestimmungen und dessen Machbarkeit und Einhaltung.

Die neu aufgeworfenen Fragestellungen konnten zum Teil nicht mit den bewährten



Methoden gelöst werden. Neue, komplexere Zusammenhänge sind hier gefragt, sowie die Forderung nach dessen Lösungsverfahren.

Ziel dieser Arbeit ist es, die entstandene Lücke zwischen der Bahnplanung und der separaten Sicherheitsanalyse zu schließen. Die Sicherheitsanforderung des „geregelten Halts“ soll bereits in der Bahnplanung berücksichtigt werden und zur Laufzeit gegebenenfalls sofort zur Verfügung stehen.

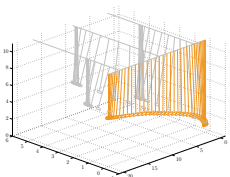
In Knauer [Kna09] wird bereits eine Möglichkeit der optimalen Bahnplanung eines deckengeführten Regalbediensystems vorgestellt. In Anbetracht der zusätzlichen Sicherheitsanforderung, die Existenz einer ergänzenden Haltebahn, wurde ein Lösungsweg über Bilevel-Optimalsteuerungsmethoden besprochen. Allerdings verlangt die Umsetzung einen hohen Rechenaufwand der in der Lagerlogistik, mit ihren hohen Ansprüchen an die Verfügbarkeit und Auslastung der Anlagen bei kleiner Taktung, nicht zu realisieren ist.

An diese Arbeit anknüpfend, soll eine effiziente Lösungsmethode entwickelt werden, die den Anforderungen, unter anderem nach einer akzeptablen Berechnungszeit, bei der Verwendung in der Praxis gerecht wird. Hierzu wird genauer auf den Aspekt der Regelung des Systems und deren Berechnung eingegangen werden. Bisweilen wurde dieses in Bezug auf die Bahnplanung vollständig außer Acht gelassen. In der vorliegenden Arbeit tritt die Regelung der bereitzustellenden Haltebahnen in den Vordergrund und motiviert die Kombination optimaler Steuerprozesse mit der Berechnung von Optimalreglern.

Kapitel 2 stellt die zugrunde liegende Anwendung vor. Nach der Beschreibung der allgemeinen Hochregallagertechnik und dessen Verfahren aus Ingenieurssicht wird die Innovation durch ein deckengeführtes, kranähnliches Regalbediensystem vorgestellt. Neben den Vorteilen wird ebenso auf zusätzliche Sicherheitsanforderung eingegangen, so dass zur eigentlichen Planung der Referenzbahn ergänzende Haltebahnen in jedem Zustand bereitgestellt werden müssen. Mittels einer unterlagerten Regelung für den „geregelten Halt“ wird sowohl die Haltebahn in der Planung berücksichtigt, als auch im eigentlichen Betrieb zur Verfügung stehen. Die Genauigkeit mit der die Haltebahn eingehalten wird, ist ebenfalls durch die Regelung gewährleistet.

Kapitel 3 bietet eine kompakte Einführung in die Theorie der nichtlinearen Optimierung. Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen werden für die Lösung dieser Problemklasse bereitgestellt, sowie dessen numerische Lösungsmethoden. Durch die Einführung eines zusätzlichen Parameters können Aussagen über die Sensitivität der optimalen Lösung in Abhängigkeit von dieser Größe formuliert werden. In einer abgewandelten Form kommt Letzteres bei der Einbettung optimaler Regelstrategien in optimale Steuerprozesse zum Einsatz.

Kapitel 4 beschreibt zeitabhängige, sowohl unrestringierte als auch restringierte, dynamische Systeme, die unter vorgegebenen Zielkriterien optimiert werden sollen. Die Lösung dieser optimalen Steuerprozesse kann auf zwei unterschiedlichen Arten erfolgen. Zum einen kann die Problemstellung mittels Auswertung von notwendi-



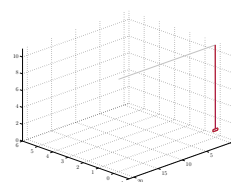
gen Optimalitätsbedingungen in ein Randwertproblem umformuliert werden. Dieses Verfahren wird gerade bei der Aufstellung von Optimalreglern angewendet. Zum anderen ist mithilfe einer gewählten Diskretisierung die Rückführung auf ein nicht-lineares Optimierungsproblem möglich. Für die numerische Lösung der Bahnoptimierung auf oberster Ebene kommt in dieser Arbeit eine solche Alternative über direkte Verfahren zum Einsatz.

Kapitel 5 führt in die Theorie der optimalen Regelstrategien ein. Für die Erweiterung der optimalen zeitabhängigen Lösung auf ein zeitinvariantes Regelgesetz wird zusätzlich ein kompakter Überblick über die Grundlagen der Systemtheorie gegeben. Es wird gezeigt, dass die zeitinvariante Lösung, optimal im Sinne eines Zielfunktional mit unendlichem Zeithorizont, eindeutig bestimmt werden kann, sofern das zugrunde liegende System zusätzlichen Bedingungen genügt. Für die Integration in die Berechnung der optimalen Steuerprozesse wird abschließend ein Abriss über die numerische Berechnung der optimalen Zustandsrückführung gegeben.

Kapitel 6 bildet das Bindeglied zwischen den drei Disziplinen der nichtlinearen Optimierung, der optimalen Steuerprozesse und der optimalen Regelung. Die Ergebnisse der drei vorherigen Kapitel werden auf eine neu Art und Weise zusammengefügt, so dass ein optimales Steuerungsproblem unter einer neuen erweiterten Klasse von Nebenbedingungen aufgestellt werden kann. Zusätzlich zur Formulierung der kompletten Problemstellung wird der Beweis zur Anwendbarkeit direkter Lösungsmethoden erbracht, sowie der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit einer asymptotisch stabilen Zustandsrückführung zu jedem Zeitpunkt des überlagerten optimalen Steuerprozesses gegeben. Die Beweisführung stützt sich auf zusätzliche Eigenschaften der linear quadratischen Regulatorprobleme, die ebenfalls vorgestellt und bewiesen werden.

Kapitel 7 schließt den Kreis zum eigentlichen Anwendungsproblem der Laufkatze, das dieser Arbeit zugrunde liegt. Sowohl das mathematische Modell einer Laufkatze, einschließlich der Bewegungen des Lastaufnahmemittels, wird vorgestellt, als auch die zugehörige Beschreibung der Bahnoptimierung inklusive aller auftretenden Beschränkungen. Zusätzlich werden Untersuchungen des Modells präsentiert, die sich auf die Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen optimalen Regelung beziehen. Abschließend werden Möglichkeiten für eine erweiterte Nebenbedingung in der Bahnoptimierung einer Laufkatze präsentiert, in der die Berechnung von Optimalreglern integriert ist.

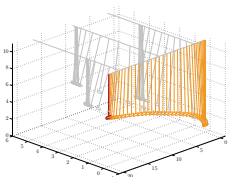
Kapitel 8 präsentiert die Ergebnisse der numerischen Simulationen für das Bahnoptimierungsproblem. Beginnend mit der ursprünglichen Bahnoptimierung ohne erweiterte Nebenbedingungen werden darauf aufbauend diverse Kopplungen zwischen optimalen Steuerprozessen und Optimalreglern gezeigt und diskutiert. Die Variation in den Analysen besteht hauptsächlich in den verwendeten Beschreibungen des unterlagerten linear quadratischen Regulatorproblems. Nach Kenntnis der Autorin finden sich in der Literatur keine vergleichbaren, anwendungsorientierten Resultate, die durch die Einbettung linear quadratischer Regulatorprobleme in optimale



Steuerungsprobleme, inklusive deren Lösung mittels der Algorithmen aus der nicht-linearen Optimierung, erhalten wurden.

Kapitel 9 fasst die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere Anwendungsmöglichkeiten und zusätzliche Arbeiten für Erweiterungen der in dieser Arbeit formulierten erweiterten Nebenbedingungen.

Für eine bessere Unterscheidung zwischen den drei Problemklassen, werden diese ab der erstmaligen Zusammenführung in Kapitel 6 farblich hinterlegt präsentiert. Die farbliche Absetzung vom Fließtext wird in den darauf folgenden Kapiteln fortgeführt, sofern der jeweilige Abschnitt keine eindeutige Zuordnung zulässt.



# Laufkatzen in der Lagertechnik

Zu Beginn wird ein Überblick über den derzeitigen Stand der Entwicklung in der Hochregallagertechnik gegeben, sowie der technische Hintergrund dieser Systeme kurz erläutert. Neben den meist bekannten Vorteilen autonomer Lagersysteme werden auch einige Nachteile beschrieben, die letztendlich die in dieser Arbeit behandelte mathematische Aufgabenstellung einer erweiterten Klasse von Nebenbedingungen in optimalen Steuerprozessen motivierte.

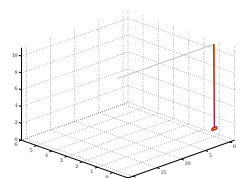
Abschnitt 2.1 bietet einen ersten Einblick in die Bedeutung von Lagersystemen. Zusätzlich wird der technische Hintergrund und die weitverbreitete Bauweise eines Hochregallagers beschrieben.

Für eine Automatisierung eines Hochregallagers kommen Regalbediengeräte zum Einsatz, die weitestgehend autonom arbeiten. In Abschnitt 2.2 wird speziell das Prinzip der Laufkatze als deckengeführtes Kransystem zur Be- und Entladung der Regale mit Stückgut vorgestellt.

Eine damit notwendig werdende Bahnplanung für das schwingende System der Laufkatze im industriellen Einsatz wird im Abschnitt 2.3 dargestellt. Abschließend werden in Abschnitt 2.4 sicherheitsrelevante Aspekte beschrieben, die über die eigentliche Bahnplanung hinaus an das System gestellt werden.

## 2.1 Hochregallager

Bereits in den 60er Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts vollzog sich ein Wandel in der Produktionstechnik. Durch die Entwicklung von Robotern konnten bestehende Produktionsabläufe automatisiert werden. Gleichzeitig ergaben sich neue Möglichkeiten auf dem Bausektor, so dass große Warenlager erbaut werden konnten. Die beginnende Massenproduktion konnte so erfolgreich umgesetzt werden um einer steigenden Nachfrage gerecht zu werden.



Durch die Lagerhaltung ist es den Lieferanten möglich auf Schwankungen bei der Nachfrage zu reagieren. Besonders entscheidend ist dieses innerhalb einer Produktionskette. So kann mit kostenintensiven Produktionsanlagen, die sich nur für sehr große Stückzahlen rentieren, im Vorfeld ein Überschuss produziert werden, der erst später in die Weiterverarbeitung geht. Gleiches gilt ebenfalls für den Fall, dass manche Produktionsanlagen nur zu Wartungszwecken stillstehen, und eine ständige Versorgung gesichert sein muss.

Mittels entsprechend großer Lager kann sichergestellt werden, dass sowohl immer genügend Ausgangsmaterial zur Weiterverarbeitung zur Verfügung steht, als auch bereits produzierte Waren eingelagert werden können.

Allerdings ist dabei zu beachten, dass eine Lagerhaltung hohe Kosten verursacht und das Kapital gebunden ist. Durch die Betriebs-, Verwaltungs- und Personalkosten wird es daher ein Ziel sein, die Anzahl der eingelagerten Waren auf ein Minimum zu reduzieren, den sogenannten optimalen Lagerbestand.

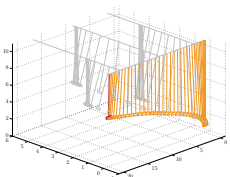
Der Begriff des Hochregallagers bezeichnet ein Lager ab einer Gebäudehöhe von  $12m$ , welches für eine effiziente Lagerhaltung verwendet wird. Hochregallager können sowohl direkt an eine Produktionsstätte angeschlossen sein oder für den reinen Warenumschlag genutzt werden.

Der eigentliche Lagerbereich nimmt den größten Bereich des Hochregallagers ein. Die einzelnen Regalwände, jeweils unterteilt in Stellfächer, sind parallel angeordnet und bieten somit ausreichend Platz für mehrere tausend Paletten. Zwischen zwei Regalwänden ist jeweils ein Gasse freigehalten, über die auf die einzelnen Fächer zugegriffen werden kann.

Der eigentliche Transport der Waren innerhalb einer Gasse ist weitestgehend automatisiert und erfolgt mittels Regalbediengeräten auf Schienen. Das Lagergut wird ähnlich wie bei einem Gabelstapler auf die entsprechende Regalfachhöhe gebracht. Zusätzlich besitzt jede Gasse einen festen Ein- und Auslagerbereich, über den vollautomatisiert das Lagergut über eine weitere Fördertechnik bereitgestellt bzw. abgeholt wird.

Die Fördertechnik stellt die Verbindung zwischen Lager und Vorzone dar. Hier werden die einzelnen Waren nach der Anlieferung für die weitere Einlagerung erfasst, identifiziert und im System registriert. Ebenfalls werden ausgelagerte Waren hier für den Abtransport bereitgestellt.

Für die Logistik sind heutzutage ebenfalls automatische Lagerverwaltungssysteme verantwortlich. Durch sie wird entschieden, welche Ware in welches Fach eingelagert werden soll und in welcher Reihenfolge Waren ausgelagert werden. Diese Verwaltung basiert häufig auf einem chaotischen Ansatz, der zusätzlich gewissen Regeln unterliegt. Dadurch kann sichergestellt werden, dass bei Störungen in einzelnen Regalgassen bestimmte Produktgruppen dennoch lieferbar bleiben. Zusätzlich kann bei einer geringen Auslastung eine Umstrukturierung des Lagers durch Umlagerungen



vorgenommen werden, bzw. es können Fächer angefahren werden, die vom Auslagerbereich weiter entfernt liegen.



Abbildung 2.1: Einblick in die Regalgasse mit einer Laufkatze <sup>1</sup>

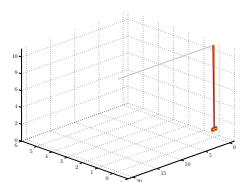
## 2.2 Innovatives Regalbediengerät Laufkatze

Bisher kommen in der Hochregallagern bodengeführte Regalbediengeräte zum Einsatz, die ähnlich einem Gabelstapler sind und innerhalb einer Regalgasse agieren. Damit das Lastaufnahmemittel jedes beliebige Regalfach erreichen kann, reichen einfache Reglervorschriften aus. Die gesamte Bewegung ist dabei aus zwei Bewegungen zusammengesetzt. Zum einen die Bewegung entlang der Regalgasse und zum anderen der Hub. Beide Bewegungen werden in der Regel aus Sicherheitsgründen voneinander getrennt ausgeführt.

Eine mögliche Realisierung der zugehörigen Regelung könnte die Folgende sein. Zu Beginn wird maximal beschleunigt bis die zulässige Höchstgeschwindigkeit erreicht ist. Entsprechend wird rechtzeitig das Bremsmanöver eingeleitet um an der richtigen Position in der Regalgasse zu halten.

Das Fahrzeug sollte dabei zusammen mit der Last ein starres Einzelkörpersystem darstellen. Durch die Einhaltung im Vorfeld bestimmter Maximalwerte für Geschwindigkeit und Beschleunigung kann dieses auch gewährleistet werden.

<sup>1</sup>Bildnachweis: Westfalia Holding GmbH & Co. KG



Bei einem deckengeführten Kransystem handelt es sich hingegen um ein Mehrkörpersystem. Die Aufgaben der *Positionierung* und der *Lastaufnahme* sind auf zwei Körper verteilt, die beide mit einem Seil verbunden sind.

Ähnlich wie bei einem Kran wird die waagerechte Position durch einen Wagen, der sogenannten *Laufkatze*, verändert, die oberhalb der Regalfächer auf Schienen längs der Regalgasse fährt. Der Antrieb der Laufkatze ist durch eigenen Motoren gegeben. Zwei weitere Motoren auf der Laufkatze dienen der Steuerung der Seillängen. Die Aufhängung des *Lastaufnahmemittels* ist durch vier parallel verlaufenden Stahlseilen gegeben.

Nach der Positionierung des Lastaufnahmemittels innerhalb der Regalgasse wird es zusätzlich an der Regalwand verankert um eine sicheres Be- und Entladen zu gewährleisten. Die Gabel des Lastaufnahmemittels kann so in das entsprechende Regalfach hineinfahren um z. B. eine Palette aufzunehmen.

## Vorteile

Der Anbieter dieser neuen Technologie auf dem Gebiet der Regallagerbediengeräte verspricht sich eine Vielzahl von Vorteilen durch dessen Entwicklung. Gerade auf dem Sektor der Speziallösungen sieht er große Stärken des Systems, vgl. [Wes09] und [Wes08].

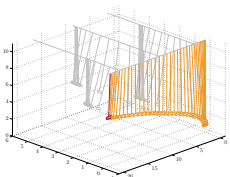
**Flurfreiheit:** Das System der Laufkatze bewegt sich in allen Lagertypen flurfrei. Diese Flurfreiheit ermöglicht eine weitere Befahr- und Begehrbarkeit bestimmter Lagerbereiche und verkürzt die Kommissionierwege. Speziell bauliche Hindernisse wie z. B. Höhenunterschiede bei Hallenerweiterungen auf einem sehr unebenen Gelände, sowie geplante Wartungstunnel für die Sichtung des autonomen Systems durch das Personal stellen keine Probleme dar.

**Planungsfreiheit:** Durch die Möglichkeit der Ver- und Entsorgung von oben, sind die unterschiedlichsten räumlichen Anordnungen von Lager- und Fördersystemen sowie Kommissionierzonen zulässig. Bei Hochregallagern die direkt in eine Produktionskette eingebunden sind, können so die Abläufe des Warenflusses vereinfacht werden im Vergleich zu bodengeführten Systemen. Das deckengeführte System kann entsprechend erweitert und auf direktem Weg in die Produktion fortgesetzt werden.

**Leistung:** Eine hohe Ein- und Auslagerungsleistung des gesamten Systems, die abhängig von der aktuellen Auftragslage variabel gestaltet werden kann, wird durch speziell errechnete Bahnkurven unterstützt. Eine zusätzliche Möglichkeit die Lagerleistung<sup>2</sup> zu steigern und auch den damit verbundenen Lagerdurchsatz<sup>3</sup> bietet sich geradezu an, indem in die bereits bestehenden Regalgassen

<sup>2</sup>Maximal mögliche Anzahl an Ein- und Auslagerungen pro Zeiteinheit

<sup>3</sup>Anzahl an Ein- und Auslagerungen pro Zeiteinheit





weitere Laufkatzen integriert werden. Dadurch werden aber höhere Sicherheitsanforderungen an das Gesamtsystem gestellt werden müssen, da eine Kollision unter den Laufkatzen und den Lastaufnahmemitteln vermieden werden muss.

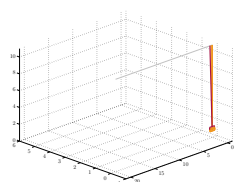
**Flexibilität und Nachrüstung:** Neben der Erweiterung von einer Laufkatze auf zwei in einer Regalgasse können auch Lagersysteme mit geringer Umschlagleistung durch Umsetzeinrichtungen wirtschaftlich automatisiert werden. In die bereits bestehenden Lager, die zumeist noch manuell bedient werden, muss lediglich das Schienensystem für die Laufkatze an der Hallendecke angebracht werden.

**Materialkosten:** Durch das System der Laufkatze können im Vergleich zu herkömmlichen Regalbediensystemen Materialkosten eingespart werden. Die Anschaffung sehr robuster Stahlkonstruktionen zugunsten der Stabilität des Systems, gerade bei sehr großen Höhen, kann entfallen. Durch Höhenregulierung des Lastaufnahmemittels mit Hilfe der Laufkatze entstehen keine weiteren Anforderungen an die Regalgasse und die Regalwände die abhängig von der Höhe wären. Zusätzlich können Energiekosten gespart werden, da die Gesamtlast, die bewegt werden muss, im Vergleich zu den herkömmlichen Bediengeräten geringer ausfällt.



Abbildung 2.2: Aufbau des Laufkatzensystems Aviator<sup>TM</sup> 4

<sup>4</sup>Bildnachweis: Westfalia Holding GmbH & Co. KG



## 2.3 Bahnplanung

Grundsätzlich wird als Laufkatze nur der Wagen bezeichnet, der entlang der Schiene fährt. Für die Bahnplanung wird jetzt das gesamte System aus Wagen, Seilen und Lastaufnahmemittel betrachtet. Oftmals ist dann ebenfalls die Rede von der Bahnplanung eine Laufkatze. In diesem Zusammenhang dient der Begriff Laufkatze bereits als Bezeichnung für das gesamte System.

Für den Einsatz einer Laufkatze im Hochregallager muss gerade bei den Ein- und Ausladevorgängen mit hoher Präzision bei der Positionierung gearbeitet werden. Durch eine zusätzliche Arretierung an der Regalwand ist lediglich die Stabilität und ein in Ruhe befindliches System während der Be- und Entladung gegeben. Jedoch muss das System bereits zuvor mit einer hohen Genauigkeit und ohne bleibenden Schwingungen an das Regalfach heran gefahren werden.

Grundsätzlich lassen sich Schwingungen während der Fahrt nicht unterbinden. Sobald das gesamte System eine seitliche Bewegung durch die Beschleunigung des Wagens erfährt, hat das eine relative Verschiebung von Wagen und Lastaufnahmemittel zur Folge. Auch durch eine zweigeteilte Bewegung in eine horizontale und eine vertikale Bewegung kann dieses nicht verhindert werden. Durch eine Verlängerung des Seils, kann eine Schwingung am Ende der waagerechten Bewegung nicht kompensiert werden.

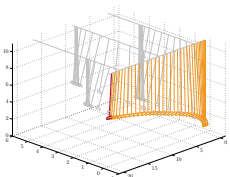
Durchaus denkbar aber viel zu zeitintensiv wäre eine Regelung am Ende der Fahrt um das System in Ruhe zu bringen. Der Ansatz das Lastaufnahmemittel während der Fahrt immer im Lot zum Wagen zu halten, versagt schon beim Anfahren des Systems. Bereits beim Anfahren tritt eine relative Verschiebung aufgrund der Trägheit des Lastaufnahmemittels auf. Eine entsprechende Regelung würde dann sofort ein Bremsmanöver einleiten und den Wagen in entgegengesetzte Richtung fahren lassen.

Es ist daher wesentlich eine relative Verschiebung der Last zum Wagen der Laufkatze zuzulassen. Bei der Bahnplanung werden somit zeitliche Verläufe der Einzelkörper generiert, die die genaue Bewegung vorschreiben. Das Ergebnis bilden die Bahnkurven, oder auch Trajektorien genannt, die das dynamische Verhalten jeder einzelnen Systemgröße wiedergeben. Die wichtigste Forderung an die Bahndynamik ist unter anderem der schwingungsfreie Endzustand.

Auf der Laufkatze selber ist eine speicherprogrammierbare Steuerung (SPS)<sup>5</sup> angebracht, mit der die Drehraten der Antriebsmotoren geregelt werden. Da diese Steuereinheiten keine ausreichende Rechenleistung zur Verfügung stellen, wird die eigentliche Bahnplanung von einem PC übernommen. Durch ein leistungsfähiges Bussystem werden die notwendigen Daten im Anschluss an die Bahnberechnung auf die Steuereinheit übertragen.

Bei den bisherigen Realisierungen der Regalbedienung mittels einer Laufkatze handelt es sich bisweilen nur um Einzelanfertigungen bzw. kleinere Testanlagen der

<sup>5</sup>engl: programmable logic controller (PLC)



Firma selbst. Die mechanischen Komponenten wurde daher speziell auf die jeweilige Lagergröße, Maximalgewicht des Lagergutes, Durchsatz usw. angepasst. Offizielle Datenblätter mit einer Auflistung der Kenngrößen sind daher noch nicht verfügbar. Eine kurzer Überblick über ein paar typische Werte gibt die Tabelle 2.1.

Länge einer Gasse	40m - 80m
Regalhöhe	5m - 16m
max. Nutzlast	5t
max. Geschwindigkeit in der Horizontalen	$3 \frac{m}{s}$
max. Geschwindigkeit in der Vertikalen	$1.5 \frac{m}{s}$
max. Beschleunigung in der Horizontalen	$1 \frac{m}{s^2}$
max. Beschleunigung in der Vertikalen	$1 \frac{m}{s^2}$

**Tabelle 2.1:** *Typische Kennzahlen einer Laufkatze*

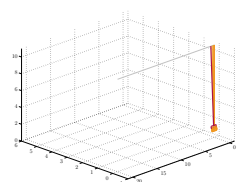
## 2.4 Eine Frage der Sicherheit

Für den industriellen Einsatz der Laufkatze muss sowohl das System selbst als auch die Bahnplanung diversen Sicherheitsanforderungen genügen. Gerade bei der Betrachtung eines autonomen Systems ist die Frage der Sicherheit und der möglichen Interaktion von Außen von großer Bedeutung.

**Kollisionsvermeidung:** Innerhalb des Bahnplanungsprozesses muss bereits sichergestellt sein, dass sich weder die Laufkatze noch das Lastaufnahmemittel über die Regalgrenzen hinaus bewegen. Gleiches gilt für feste Hindernisse die innerhalb der Regalgasse liegen, wie etwaige Servicetunnel für das Lagerpersonal. Sollten mehrere Laufkatzen innerhalb einer Regalgasse zeitgleich agieren, so muss auch hier eine Kollision zwischen den einzelnen Körpern ausgeschlossen werden.

**Geregelter Halt:** Bei einer Anforderung von Außen durch das Lagerpersonal muss die Steuereinheit der Laufkatze zu jedem beliebigen Zeitpunkt in der Lage sein, innerhalb eines gesetzten Zeitraums das System kontrolliert anzuhalten, so dass das Lastaufnahmemittel am Ende in Ruhe ist. Die letztendlich eingenommene Position der Laufkatze und Höhe des Lastaufnahmemittels spielen dabei eine untergeordnete Rolle. Die zugehörige Regelung wird dabei durch die Steuereinheit auf der Laufkatze durchgeführt, die sich der gleichen Motoren bedient, wie sie für die normale Bahnverfolgung verwendet werden.

**Notstopp:** Der Notstopp stellt die letzte Möglichkeit dar, das System zum Stehen zu bringen. Sollten aus irgendeinem Grund die Kommunikation zwischen dem



Gesamtsystem und dem lokalen auf der Laufkatze abreißen oder die Stromversorgung ausfallen, muss das System dennoch zum Stillstand gebracht werden. Durch zusätzliche mechanische Bremsen wird sichergestellt, das zumindest die Laufkatze im Notfall hält. Durch das ruckartige Verhalten verursacht, wird hingegen das Lastaufnahmemittel noch zusätzlich in Schwingung versetzt. Die Aufgabe der Bahnplanung ist es daher schon im Vorfeld, diesen Fall zu berücksichtigen und sicherzustellen, dass das Lastaufnahmemittel keine Kollision verursacht.

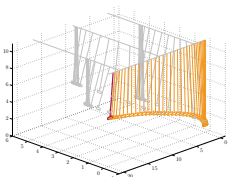
Speziell die Sicherheitsanforderung des geregelten Halts führt auf eine mathematisch sehr interessante Fragestellung die in dieser Arbeit weiter verfolgt wird. Neben der eigentlichen Berechnung einer zulässigen Bahn für das System der Laufkatze muss sichergestellt sein, dass jederzeit durch ein Kommando das System von der aktuellen Bahn auf eine Bahn umspringt, die das System geregelt zum Stillstand bringt, unabhängig von der noch zu fahrenden Strecke.

Aufgrund der begrenzten Zeit für den geregelten Halt und der Wichtigkeit des stillstehenden Systems zum Endzeitpunkt ist es notwendig, dass nicht nur ein solcher alternativer Verlauf existiert, sondern dass dieser auch durch einen Regler realisiert werden kann. Es ist dabei zu beachten, dass weder die Haupttrajektorie noch die Trajektorien aus dem geregelten Halt und damit der Regler selbst ohne die Kenntnis der jeweils anderen ermittelt werden können.

In Knauer [Kna09] wurde bereits ein Ansatz über Bilevel-Optimalsteuerungsproblemen gewählt, der sicherstellt, dass Alternativbahnen zur Haupttrajektorie existieren. Allerdings wurde eine zugehörige Regelung nicht mit berücksichtigt. Darüber hinaus sind die Bilevel-Optimalsteuerungsprobleme sehr rechenintensiv und bereits bei einer moderaten Taktfrequenz der Aufträge zur Ein- und Auslagerung der Güter im Hochregallager nicht geeignet.

In dieser Arbeit wird eine andere Herangehensweise über Optimalregler gewählt. Die optimale Bahnplanung wird zusätzlich durch die Berücksichtigung von alternativen Haltebahnen beschränkt, die aus einer dynamischen Regelung resultieren. Durch die Berechnung der Trajektorien der nominalen Bahn und des geregelten Halts ist nicht nur deren Verlauf bekannt, sondern ebenfalls wird der entsprechende Regler für einen geregelten Halt bereitgestellt. Eine weitere Reglerauslegung muss nicht mehr zusätzlich vorgenommen werden.

Damit die bestmögliche Lösung einer Haupttrajektorie berechnet werden kann, müssen sowohl die alternativen Trajektorien bzw. die zukünftigen Bahnverläufe einer optimalen Regelung zum Zeitpunkt der Bahnoptimierung bekannt sein und berücksichtigt werden. Dieses Problem, bei dem unter anderem ein optimales Regelgesetz, basierend auf einem optimalen Steuerungsproblem, innerhalb des eigentlichen Optimalsteuerungsproblem in den Nebenbedingungen berücksichtigt wird, soll in dieser Arbeit als eine erweiterte Klasse von Nebenbedingungen für optimale Steuerungsprobleme formuliert und gelöst werden.



# Nichtlineare Optimierung

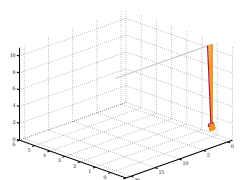
Im Allgemeinen wird von einem Optimierungsproblem gesprochen, wenn Parameter eines komplexen Systems so zu bestimmen sind, dass eine Zielfunktion minimiert oder maximiert wird. Innerhalb der angewandten Mathematik stellt die Theorie der mathematischen Optimierung ein mächtiges Werkzeug dar. Auch in jeder anderen wissenschaftlichen Disziplin, wo mathematische Modelle mit unbekanntem Parametern aufgestellt werden können, kommen lineare und nichtlineare Optimierungsprobleme zum Einsatz.

Von linearen Optimierungsproblemen ist dann die Rede, wenn sowohl die Zielfunktion als auch die Nebenbedingungen in linearer Form auftreten. Nichtlineare Optimierungsprobleme liegen vor, sobald die Zielfunktion oder die Nebenbedingungen nichtlineare Terme aufweisen. Bei der Lösung von nichtlinearen Problemstellungen muss zwischen globalen und lokalen Minimalstellen unterschieden werden, so dass eine Lösung nur lokal gültig ist. Ohne weiterführende Betrachtungen zusätzlicher Eigenschaften ist eine Verallgemeinerung nicht möglich.

Im Abschnitt 3.1 werden zunächst nichtlineare Optimierungsprobleme beschrieben. In den nachfolgenden Abschnitten 3.2 und 3.3 werden sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen bereitgestellt, mit denen eine Lösung auf Optimalität untersucht werden kann.

Eine kurze Einführung in die numerische Lösung von Optimierungsproblemen mittels SQP-Verfahren wird in Abschnitt 3.4 gegeben. Eine umfassende Übersicht über weitere numerische Verfahren sowie über Verfahren für lineare Optimierungsprobleme ist u. a. in Nocedal und Wright [Noc99] gegeben.

Eine Erweiterung der nichtlinearen Optimierungsprobleme mit Störparametern behandelt Abschnitt 3.5. Für die Untersuchung von Einflüssen der Störparameter auf die optimale Lösung mit Hilfe der parametrischen Sensitivitätsanalyse werden hier weitere Definitionen und Sätze zusammenfassend bereitgestellt.



Die in diesem Kapitel beschriebenen Resultate kommen im Kapitel 4 bei der Diskretisierung optimaler Steuerprozesse auf nichtlineare Optimierungsprobleme zur Anwendung. Die Ergebnisse der parametrischen Sensitivitätsanalyse werden zusätzlich bei der Formulierung von LQR-Problemen in Kapitel 6 angewendet.

### 3.1 Problemstellung

Bei den nichtlinearen Optimierungsproblemen unterscheidet man zwischen restringierten und unrestringierten Problemen. In dieser Arbeit werden im Wesentlichen die differenzierbaren nichtlinearen Optimierungsprobleme mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen untersucht und behandelt.

Es wird folgendes Minimierungsproblem betrachtet:

#### Definition 3.1 (Nichtlineares Optimierungsproblem)

Gegeben sei die Zielfunktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und die nichtleere zulässige Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Das Problem

$$\begin{aligned} \min_x f(x), \\ \text{unter } x \in X \end{aligned} \tag{3.1}$$

heißt *nichtlineares Optimierungsproblem (NLP Problem<sup>6</sup>)*. Die zulässige Menge  $X$  werde nachfolgend mit der Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch Gleichungs- und Ungleichungsbedingungen beschrieben:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m_e, \quad g_j(x) \leq 0, j = m_e + 1, \dots, m\}.$$

Ein Punkt  $x \in X$  heißt dann *zulässiger Punkt*. ◇

Zur Lösung dieses Optimierungsproblem wird der Begriff der Minimalstelle formuliert.

#### Definition 3.2 (Minimalstelle)

i. Ein Punkt  $x^* \in X$  heißt *lokale Minimalstelle* von (3.1), wenn eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^n$  von  $x^*$  existiert mit

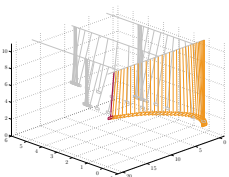
$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in X \cap V.$$

ii. Ein Punkt  $x^* \in X$  heißt *strenge lokale Minimalstelle* von (3.1), wenn eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^n$  von  $x^*$  existiert mit

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in X \cap V, x \neq x^*.$$

---

<sup>6</sup>engl: nonlinear programming



iii. Ein Punkt  $x^* \in X$  heißt (strenge) globale Minimalstelle von (3.1), wenn die in i. oder ii. genannten Eigenschaften für jede Umgebung  $V \in \mathbb{R}^n$  von  $x^*$  gelten.  $\diamond$

Für den Bereich der differenzierbaren Optimierungsprobleme wird die Differenzierbarkeit der Zielfunktion  $f$  und die stetige Differenzierbarkeit der Beschränkung  $g$  in einer Umgebung von  $x^*$  vorausgesetzt.

Wäre die Zielfunktion in der Form  $f(x) = c^T x$  und die Funktionen der Nebenbedingungen in der Form  $g(x) = Ax + b$  darstellbar, mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  und  $c \in \mathbb{R}^n$ , so spricht man von einem *linearen Optimierungsproblem*.

Im Weiteren soll von nichtlinearen Optimierungsproblemen ausgegangen werden. Im Gegensatz zur linearen Optimierung sind hierbei die lokalen Minimalstellen nicht notwendigerweise auch globale Minimalstellen.

## 3.2 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Um die Optimalitätsbedingungen für eine lokale Minimalstelle  $x^*$  formulieren zu können, bedarf es zunächst der Definition der LAGRANGE-Funktion.

### Definition 3.3 (LAGRANGE-Funktion)

Für  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  heißt die Funktion

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda^T g(x)$$

die LAGRANGE-Funktion zum Optimierungsproblem (3.1). Die Komponenten des Vektors  $\lambda$  werden LAGRANGE-Multiplikatoren genannt.  $\diamond$

Zusätzlich wird der Begriff der aktiven Indexmenge eingeführt.

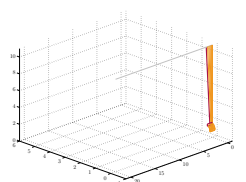
### Definition 3.4 (Aktive Indexmenge)

Sei  $x^*$  eine optimale Lösung des Problems (3.1). Die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x^*) &:= \{i \in \{m_e + 1, \dots, m\} \mid g_i(x^*) = 0\} \\ \mathcal{J}(x^*) &:= \mathcal{I}(x^*) \cup \{1, \dots, m_e\} \end{aligned}$$

werden Mengen der aktiven Indizes genannt.  $\diamond$

Um den Nachweis zu erbringen, dass der Punkt  $x^*$  optimal ist, wird folgende Regularitätsbedingung formuliert [Man67].



**Definition 3.5 (Regularitätsbedingung von MANGASARIAN-FROMOVITZ<sup>7</sup>)**

Ein zulässiger Punkt  $x^* \in X$  des Optimierungsproblems (3.1) heißt regulär, wenn gilt:

i. Die Gradienten

$$\nabla_x g_i(x^*), \quad i \in \{1, \dots, m_e\}$$

sind linear unabhängig.

ii. Es existiert ein Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\begin{aligned} \nabla_x g_i(x^*) d &< 0, & i \in \mathcal{I}(x^*), \\ \nabla_x g_i(x^*) d &= 0, & i \in \{1, \dots, m_e\}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Als zentraler Satz dieses Abschnittes gelten die notwendigen Bedingungen erster Ordnung.

**Satz 3.6 (Multiplikatorenmethode von LAGRANGE)**

Sei  $x^* \in X$  lokale Minimalstelle von (3.1). Die Funktion  $f$  sei stetig differenzierbar und die Funktionen  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , seien in einer Umgebung von  $x^*$  stetig differenzierbar. Ist  $x^*$  regulär, dann gilt für die LAGRANGE-Funktion

$$\nabla_x L(x^*, \lambda) = \nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_x g_i(x^*) = 0, \quad (3.2)$$

mit einem  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  und weiter

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0, & \text{für } i \in \mathcal{I}(x^*) \\ \lambda_i &= 0, & \text{für } i \notin \mathcal{J}(x^*). \end{aligned} \quad (3.3) \quad \diamond$$

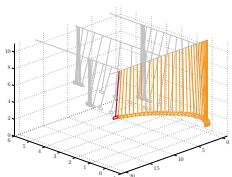
**Beweis:**

Einen Beweis findet man in Fletcher [Fle87] und Geiger [Gei02]. ■

Benannt nach Karush, Kuhn und Tucker, die diesen Satz unabhängig voneinander, sogar unter schwächeren Voraussetzungen bewiesen haben, wird nachfolgend bei den Bedingungen (3.2) und (3.3) von den *KKT-Bedingungen* gesprochen.

Geometrisch lassen sich die KKT-Bedingungen wie folgt interpretieren:

<sup>7</sup>kurz: MFCQ, Mangasarian-Fromovitz constraint qualification





**Bemerkung 3.7**

Die Gleichung (3.2) besagt, dass der negative Gradient  $-\nabla_x f(x^*)$  genau in dem Kegel liegt, der von den Gradienten der aktiven Ungleichungsrestriktionen aufgespannt wird.

Man beachte, dass für die inaktiven Restriktionen  $i \notin \mathcal{J}(x^*)$  aufgrund der KKT-Bedingungen ohnehin  $\lambda_i = 0$  gilt. Gleichung (3.2) lässt sich damit vereinfachen zu

$$\nabla_x L(x^*, \lambda) = \nabla_x f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{J}(x^*)} \lambda_i \nabla_x g_i(x^*) = 0. \quad \diamond$$

### 3.3 Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Punkte  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , die den KKT-Bedingungen zu (3.1) genügen, sind mögliche Kandidaten für die Minimalstelle und werden *kritische Punkte* oder *Extremalpunkte* genannt.

Es ist allerdings nicht gesichert, dass jeder kritische Punkt gleichzeitig auch eine lokale Minimalstelle von (3.1) ist. Mit den Bedingungen zweiter Ordnung kann dieses überprüft werden, indem nachgewiesen wird, dass die HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion  $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$  über der Menge  $C$  positiv definit ist. Der konvexe Kegel  $C$  ist dabei gegeben durch

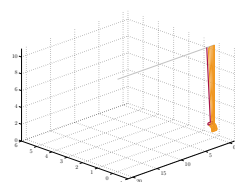
$$C := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{ll} \nabla_x g_i(x^*)v \leq 0, & i \in \mathcal{I}(x^*), \quad \lambda_i = 0, \\ \nabla_x g_i(x^*)v = 0, & i \in \mathcal{I}(x^*), \quad \lambda_i > 0, \\ \nabla_x g_i(x^*)v = 0, & i \in \{1, \dots, m_E\} \end{array} \right\}. \quad (3.4)$$

Die im Folgenden definierte Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit ist eine stärkere Regularitätsbedingung als die von MANGASARIAN-FROMOVITZ in Definition 3.5. In Geiger [Gei02] wird gezeigt, dass die Gültigkeit der MANGASARIAN-FROMOVITZ Bedingung durch die Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit impliziert wird, die Umkehrung im Allgemeinen aber nicht richtig ist. Zusätzlich sind sie wohl die am häufigsten benutzten Bedingungen in der Optimierung.

**Definition 3.8 (Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit<sup>8</sup>)**

Ein zulässiger Punkt  $x^* \in X$  des Optimierungsproblems (3.1) heißt *normal* oder *streng regulär*, wenn die Gradienten  $\nabla_x g_i(x^*)$ ,  $i \in \mathcal{J}(x^*)$  linear unabhängig sind.  $\diamond$

<sup>8</sup>kurz: LICQ, linear independence constraint qualification



**Satz 3.9**

Sei  $x^* \in X$  ein zulässiger Punkt des Optimierungsproblems (3.1). Die Funktion  $f$  sei zweimal stetig differenzierbar und  $g$  sei zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung der lokalen Minimalstelle  $x^*$ . Weiter sei  $x^*$  normal, dann gilt für den Kegel  $C$  aus (3.4):

*i.* **(Notwendige Bedingung zweiter Ordnung)**

Ist  $x^*$  eine lokale Minimalstelle von (3.1), so gibt es eindeutig bestimmte LAGRANGE-Multiplikatoren  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{J}(x^*)$ , derart, dass die KKT-Bedingungen (3.2) und (3.3) gelten und

$$v^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda) v \geq 0, \quad \forall v \in C.$$

*ii.* **(Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)**

Es gebe Zahlen  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{J}(x^*)$  gemäß den KKT-Bedingungen (3.2) und (3.3) und weiter

$$v^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda) v > 0, \quad \forall v \in C \setminus \{0\}.$$

Dann gibt es  $\varepsilon > 0$  und eine Konstante  $c > 0$  mit

$$f(x) \geq f(x^*) + c \|x - x^*\|^2 \quad \text{für } x \in X, \quad \|x - x^*\| \leq \varepsilon.$$

Insbesondere ist  $x^*$  eine strenge lokale Minimalstelle von (3.1). ◇

**Beweis:**

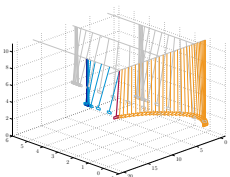
Ein Beweis befindet sich ebenfalls bei Fletcher [Fle87] oder auch Geiger [Gei02]. ■

### 3.4 Numerische Lösung von NLP-Problemen

Bei der numerischen Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen haben in den letzten Jahren SQP-Verfahren<sup>9</sup> immer mehr an Bedeutung gewonnen. Auch bei der Lösung der nichtlinearen Optimierungsprobleme dieser Arbeit, die durch die Diskretisierung von optimalen Steuerungsproblemen entstehen, siehe Kapitel 4.3, kommt ein SQP-Verfahren zum Einsatz.

Umfassende Übersichten auch über weitere Lösungsmethoden sind in zahlreichen Lehrbüchern wiederzufinden, darunter Nocedal und Wright [Noc99], Alt [Alt02] oder Geiger und Kanzow [Gei02]. Nachfolgend wird auf eine ausführliche Beschreibung verzichtet und nur ein kurzer Überblick über die prinzipielle Idee der SQP-Verfahren gegeben.

<sup>9</sup>engl: sequential quadratic programming



Es sei nachfolgend von einem gleichungsrestringierten nichtlinearen Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_x & f(x), \\ \text{unter } & g(x) = 0, \quad g(x) \in \mathbb{R}^{m_e} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ausgegangen und für die weiteren Ausführungen seien alle auftretenden Funktionen als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt.

Generell basieren die SQP-Verfahren auf der Formulierung und dem Lösen von quadratischen Teilproblemen (QP-Probleme), mit deren Hilfe eine lokale Näherung des Ausgangsproblem (3.5) beschrieben wird. Die verwendeten Teilprobleme werden durch eine quadratische Approximation der LAGRANGE-Funktion und eine Linearisierung der Beschränkung beschrieben

$$\begin{aligned} \min_p & (\nabla_x f(x_k))^T p + \frac{1}{2} p^T H_k p, \\ \text{unter } & g(x_k) + \nabla_x g(x_k) p = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei  $H_k$  eine geeignete Approximation der HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion  $L$  von (3.5) ist. Die Lösung  $p_k$  des QP-Problems liefert gerade die Suchrichtung für die iterative Lösung des übergeordnete nichtlineare Optimierungsproblem. Darüber hinaus erfüllen die LAGRANGE-Multiplikatoren  $\lambda_k$  des QP-Problems (3.6) die entsprechende KKT-Bedingungen mit der einfachen Struktur

$$H_k p_k + \nabla_x f(x_k) = (\nabla_x g(x_k))^T \lambda_k$$

und können als Näherung für die zu (3.5) gehörigen LAGRANGE-Multiplikatoren  $\lambda$  genutzt werden.

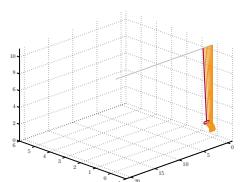
Die Herleitung des QP-Problems basiert auf den KKT-Bedingungen aus Satz 3.6. Diese gelten in einem kritischen Punkt  $x^*$  des Ausgangsproblems in Verbindung mit dem LAGRANGE-Multiplikator  $\lambda$ . Die Auswertung der Bedingung führt auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \nabla_x L(x^*, \lambda) \\ g(x^*) \end{pmatrix} = 0.$$

Die Lösung kann mit Hilfe von NEWTON-Verfahren<sup>10</sup> berechnet werden. Dabei wird zusätzlich zur JACOBI-Matrix auch die HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion des Ausgangsproblems benötigt.

Zusammenfassend besteht die sequentiellen Abarbeitung aus Haupt- und Nebeniterationen. Die Nebeniterationen dienen der Lösung der QP-Probleme, während in den

<sup>10</sup>Das komplette Verfahren wird auch als LAGRANGE-NEWTON-Verfahren bezeichnet



Hauptiterationen ein Quasi-NEWTON-Verfahren zum Einsatz kommt, um eine Folge von Iterierten  $\{x_k\}$  zu generieren, die gegen die optimale Lösung  $x^*$  konvergieren:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k.$$

Dabei beschreibt  $x_k$  den aktuellen Wert der Näherung und  $\alpha_k$  die Schrittlänge der sogenannten Suchrichtung  $p_k$ . Eine typische Iteration eines Quasi-Newton-Verfahrens ist gegeben durch:

- i. Berechnung der Suchrichtung  $p_k$  durch Lösen der QP-Unterprobleme.
- ii. Bestimmung einer geeigneten Schrittlänge mittels Anpassung von Bewertungsfunktionen<sup>11</sup>.
- iii. Berechnung bzw. Update der approximierten HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion.

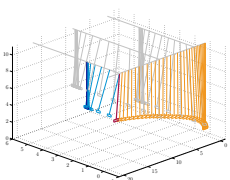
Auf eine exakte Berechnung der HESSE-Matrix wird oftmals verzichtet, wenn die Bestimmung einen zu großen Rechenaufwand nach sich zieht. Stattdessen kommen nach den Entwicklern Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno benannte BFGS-Methoden zum Einsatz, wodurch eine Quasi-NEWTON-Korrektur der HESSE-Matrix am Ende jeder Hauptiteration durchgeführt wird.

Sofern die exakte HESSE-Matrix im Algorithmus verwendet wird, kann gezeigt werden, dass das Verfahren unter weiteren Bedingungen superlinear bzw. quadratisch konvergiert, vgl. [Gei02]. Der erlittene Verlust in der Konvergenzgeschwindigkeit bei einer BFGS-Approximation, kann hingegen häufig durch die beschleunigte Berechnung der approximierten HESSE-Matrix ausgeglichen werden.

Weitere Einzelheiten bzgl. der Berechnung und Bewertung einer geeigneten Schrittlänge  $\alpha_k$  für gleichungsrestringierte Probleme, sowie eine Möglichkeit zur numerischen Überprüfung hinreichender Optimalitätskriterien aus Satz 3.9 mit Hilfe der projizierten HESSE-Matrix sind in Büskens [Büs98] gegeben. Für eine ausführliche Ausarbeitung sei auf die Arbeiten von Schittkowski [Sch80], [Sch81a], [Sch81b], [Sch81c], Gill, Murray und Wright [Gil81] und Gill et al. [Gil85] verwiesen.

Eine robuste Implementierung des SQP-Verfahrens stellt unter anderem die kommerzielle NAG-Bibliothek [NAG09b] der *Numerical Algorithms Group Ltd.* bereit. Speziell für diese Arbeit wurde die Routine `e04ucf`, vgl. [NAG09a], verwendet, die im Wesentlichen auf der Arbeit von Gill, Murray und Wright [Gil81] und Gill et al. [Gil85] basiert.

<sup>11</sup>In der Literatur auch als *Merit-Funktion* beschrieben.



## 3.5 Parametrische Sensitivitätsanalyse

Bei vielen praktischen Anwendungen ist es häufig der Fall, dass die Probleme gewissen Störungen bzw. nicht exakt bestimmbar Parametern unterliegen. Für die mathematische Formulierung eines nichtlinearen Optimierungsproblems der Form (3.1) sind die zur Verfügung stehenden Informationen oftmals noch ausreichend und führen im günstigsten Fall zu einer Lösung. Unterliegt das Problem allerdings kleinen Störungen, so reicht die optimale Lösung nicht mehr aus und man möchte auch Informationen über die entsprechenden Auswirkungen der Störungen auf die optimale Lösung erhalten.

Durch die parametrische Sensitivitätsanalyse ist es möglich, die Auswirkung kleiner Änderungen in den Modellparametern auf die Modellfunktion bzw. auf die optimale Lösung zu schätzen. In der Regel werden diese Untersuchungen auf mögliche Änderungen in der Zielfunktion, in den Beschränkungen und in den Optimierungsvariablen eingegrenzt.

Bereits bei kleinen Änderungen in den Systemparametern werden sensitive Lösungen empfindlich gestört. Hingegen reagieren insensitive Lösungen erst bei erheblichen Abweichungen der Systemparameter vom Nominalwert, vgl. Dinkelbach [Dim69].

In diesem Unterabschnitt wird nicht das Ziel der Vollständigkeit angestrebt, stattdessen werden vielmehr einige wichtige Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse zusammenfassend präsentiert. Eine umfangreichere Darstellung der Theorie findet man im Fiacco [Fia83], sowie eine entsprechende Anwendung der Ergebnisse auf nichtlineare Optimierungsprobleme in Büskens und Maurer [Büs01d].

### 3.5.1 Parametergestörte Optimierung

Für eine Verallgemeinerung wird nachfolgende Erweiterung des nichtlinearen Optimierungsproblems (3.1) betrachtet.

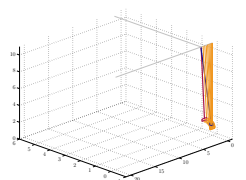
**Definition 3.10 (gestörtes Problem der nichtlinearen Optimierung)**

Seien  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ ,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben. Das Problem

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x, p), \\ \text{unter} \quad & g_i(x, p) = 0, \quad i \in \{1, \dots, m_e\}, \\ & g_i(x, p) \leq 0, \quad i \in \{m_e + 1, \dots, m\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

heißt *gestörtes Problem der nichtlinearen Optimierung* ( $\mathbf{NLP}(p)$ ). ◇

Im Vergleich zum Optimierungsproblem (3.1) hängen die Funktionen  $f$  und  $g$  nun zusätzlich vom Störparameter  $p$  ab, weswegen auch die zulässige Menge  $X(p)$  abhängig vom Parameter  $p$  ist.



Nachfolgend wird für einen Referenzwert  $p = p_0 \in \mathbb{R}^{n_p}$  das Problem (3.7) als das *ungestörte* oder *nominelle* Problem bezeichnet. Für das nominelle Problem mit  $f(x) := f(x, p_0)$  und  $g(x) := g(x, p_0)$  gelten dann die Optimalitätsbedingungen (3.2) und (3.3).

Besteht die Möglichkeit die Lösung des gestörten Optimierungsproblems (3.7) in der Form  $x(p) \in \mathbb{R}^n$  explizit in Abhängigkeit vom Störparameters  $p$  anzugeben, so könnte eine umfassende Aussage über den Einfluss des Störparameters erfolgen.

Mit weitaus geringerem Rechenaufwand lässt sich bereits das lokale Verhalten der optimalen Lösung  $x^*$  des ungestörten Problems bei kleinen Störungen untersuchen. Basierend auf der Differentiation der KKT-Bedingungen (3.2) und (3.3) nach dem Störparameter lassen sich die Sensitivitätsableitungen  $\frac{dx}{dp}(p_0)$  und  $\frac{d\lambda}{dp}(p_0)$  bestimmen.

Näheres zu dieser Vorgehensweise findet man in Fiacco [Fia83].

### 3.5.2 Sensitivitätsanalyse der optimalen Lösung

Durch den zentralen Satz der Sensitivitätstheorie werden die Änderungen der optimalen Lösung bei kleinen Störungen in den Parametern durch eine stetig differenzierbare Abhängigkeit beschrieben.

Ausgehend von dem gestörten nichtlinearen Optimierungsproblem (3.7) seien im Folgenden ohne Einschränkung die Mengen der aktiven Indizes für  $m_0 \leq m$  zu

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x^*) &= \{i \in \{m_e + 1, \dots, m\} \mid g_i(x^*, p_0) = 0\} = \{m_e + 1, \dots, m_0\} \\ \mathcal{J}(x^*) &= \mathcal{I}(x^*) \cup \{1, \dots, m_e\} = \{1, \dots, m_0\} \end{aligned}$$

vereinfacht für die Referenzlösung  $x^*$ .

Eine wichtige Rolle in der Beweisführung des darauf folgenden Sensitivitätssatzes spielt der aus der Analysis bekannte Satz über implizite Funktionen.

#### Satz 3.11 (Satz über implizite Funktionen)

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$  und  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine einmal stetig differenzierbare Abbildung. Für  $(x^*, p_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p}$  gelte  $F(x^*, p_0) = 0$  und die JACOBI-Matrix  $\nabla_x F(x^*, p_0)$  sei invertierbar.

Dann gibt es offene Umgebungen  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $x^*$  und  $P \subset \mathbb{R}^{n_p}$  von  $p_0$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion

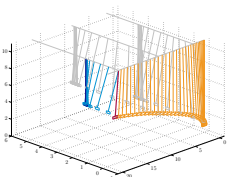
$$x : P \rightarrow U \text{ mit } x(p_0) = x^* \text{ und } F(x(p), p) = 0 \text{ für alle } p \in P.$$

Ist  $(x, p) \in U \times P$  ein Punkt mit  $F(x, p) = 0$ , so folgt

$$x = x(p).$$

Außerdem gilt für die JACOBI-Matrix von  $x$

$$\nabla_p x(p_0) = -(\nabla_x F(x^*, p_0))^{-1} \nabla_p F(x^*, p_0). \quad \diamond$$



**Beweis:**

Der Beweis des Satzes über implizite Funktionen kann z. B. in Forster [For08] gefunden werden. ■

**Satz 3.12 (Sensitivitätssatz)**

Sei  $x^* \in X(p_0)$  ein zulässiger Punkt von (3.7),  $f$  und  $g$  seien bzgl.  $x$  zweimal stetig differenzierbar, die Gradienten  $\nabla_x f$  und  $\nabla_x g$  sowie  $g$  selbst seien bzgl.  $p$  einmal stetig differenzierbar in einer Umgebung von  $(x^*, p_0) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p}$ . Weiterhin gelte:

- i. In  $x^*$  seien die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung mit den zugehörigen LAGRANGE-Multiplikatoren  $\lambda_i^*$ ,  $i \in \mathcal{J}(x^*)$  erfüllt,
- ii.  $x^*$  sei normal,
- iii.  $\lambda_i^* > 0$  für  $i \in \mathcal{I}(x^*)$ .

Dann gibt es in einer Umgebung  $P \subset \mathbb{R}^{n_p}$  von  $p_0$  eindeutig bestimmte, einmal stetig differenzierbare Funktionen  $x : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\lambda_i : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i \in \mathcal{J}(x^*)$  mit den folgenden Eigenschaften:

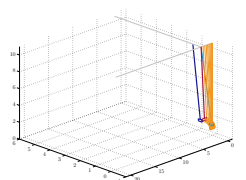
- a.  $x(p_0) = x^*$ ,
- b.  $\lambda_i(p_0) = \lambda_i^*$ ,  $i \in \mathcal{J}(x^*)$ ,
- c. Für alle  $p \in P$  erfüllt  $x(p)$  mit den Multiplikatoren  $\lambda_i(p)$ ,  $i \in \mathcal{J}(x^*)$  die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung des gestörten Problems (3.7) und ist damit eine eindeutig bestimmte strenge lokale Minimalstelle,
- d. Für alle  $p \in P$  bleibt die Menge der aktiven Indizes unverändert,
- e.  $x(p)$  bleibt normal,
- f.  $\lambda_i(p) > 0$  für  $i \in \mathcal{I}(x^*)$ .

Insbesondere ist  $x^*$  eine isolierte Minimalstelle des Problems (3.7) und die LAGRANGE-Multiplikatoren sind eindeutig bestimmt. ◇

**Beweis:**

Den vollständigen Beweis findet man in Fiacco [Fia83]. Eine kompaktere Form ist in Büskens [Büs98] zu finden, die sich im Wesentlichen an den aktiven Beschränkungen orientiert und dadurch deutlich kürzer ist. ■

In der Beweisführung zum Satz 3.12 werden Formeln der Sensitivitätsableitungen entwickelt. In den folgenden zwei Sätzen wird dieses Ergebnis noch einmal zusammenfassend dargestellt, und dienen der Auswertung späterer Überlegungen.



**Satz 3.13**

Es seien  $f$  und  $\tilde{g}$  zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung der lokalen Minimalstelle  $x^*$  des nichtlinearen Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x), \\ \text{unter} \quad & \tilde{g}(x) = 0, \quad \tilde{g}(x) := (g_1(x), \dots, g_m(x))^T. \end{aligned}$$

$x^*$  sei normal und erfülle die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung aus Satz 3.9 mit den LAGRANGE-Multiplikatoren  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) & \nabla_x \tilde{g}^T(x^*) \\ \nabla_x \tilde{g}(x^*) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

regulär. ◇

**Beweis:**

Mit der vorausgesetzten Normalität von  $x^*$  und die daraus folgende Eindeutigkeit der LAGRANGE-Multiplikatoren kann durch einfache algebraische Überlegungen die Regularität der Matrix gezeigt werden. ■

**Satz 3.14 (Sensitivitätsableitungen)**

Es seien die Voraussetzungen in Satz 3.12 erfüllt. Weiter sei die Funktion  $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$  gegeben durch  $\tilde{g}(x, p) := (g_i(x, p))_{i \in \mathcal{J}(x^*)}$ . Dann gelten für die in Satz 3.12 auftretende Funktion  $x : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und den LAGRANGE-Multiplikatoren  $\nu : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$ , gegeben durch  $\nu(p) := (\lambda_i(p))_{i \in \mathcal{J}(x^*)}$ , folgende explizit gegebenen Sensitivitätsableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dp}(p_0) \\ \frac{d\nu}{dp}(p_0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x^2 L & \nabla_x \tilde{g}^T \\ \nabla_x \tilde{g} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \nabla_{xp} L \\ \nabla_p \tilde{g} \end{pmatrix},$$

unter Berücksichtigung der Abkürzungen  $L := L(x^*, \lambda^*, p_0)$  und  $\tilde{g} := \tilde{g}(x^*, p_0)$ . ◇

**Beweis:**

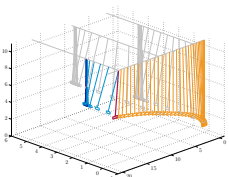
Sei  $x^*$  eine zulässige Lösung des Problems (3.7). Weiter sei von dem reduzierten nichtlinearen Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x, p), \\ \text{unter} \quad & \tilde{g}(x, p) = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ausgegangen, wobei gilt  $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$  mit  $\tilde{g}(x, p) = (g_i(x, p))_{i \in \mathcal{J}(x^*)}$ .

Nach Konstruktion ist  $x^*$  dann ebenfalls eine strenge lokale Minimalstelle des Problems

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x, p_0), \\ \text{unter} \quad & \tilde{g}(x, p_0) = 0. \end{aligned}$$





Da die gesuchte lokale Minimalstelle  $x(p)$  von (3.7) stetig differenzierbar sein soll, muss für  $i \notin \mathcal{J}(x^*)$  gelten  $g_i(x(p), p) < 0$ . Somit ist  $x(p)$  auch lokale Minimalstelle des reduzierten nichtlinearen Optimierungsproblems (3.8). Die zugehörige LAGRANGE-Funktion lautet

$$L(x, \nu, p) = f(x, p) + \nu(p)^T \tilde{g}(x, p)$$

mit den eindeutig bestimmten LAGRANGE-Multiplikatoren  $\nu : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$ . Es werden entsprechend nur die LAGRANGE-Multiplikatoren  $\nu(p) = (\lambda_i(p))_{i \in \mathcal{J}(x^*)}$  zu den Gleichungsrestriktionen berücksichtigt.

Die KKT-Bedingung (3.2) zusammen mit der Gleichungsnebenbedingung lässt sich mit  $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_0} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_0}$  schreiben als

$$K(x, \nu, p) := \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \nu, p) \\ \tilde{g}(x, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x f(x, p) + \nu^T \nabla_x \tilde{g}(x, p) \\ \tilde{g}(x, p) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.9)$$

Die JACOBI-Matrix der Abbildung  $K$  bzgl. der Argumente  $x$  und  $\nu$  ausgewertet an der Stelle der Nominallösung  $(x^*, \nu^*, p_0)$  lautet

$$\nabla_{(x, \nu)} K(x^*, \nu^*, p_0) = \begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(x^*, \nu^*, p_0) & \nabla_x \tilde{g}(x^*, p_0)^T \\ \nabla_x \tilde{g}(x^*, p_0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Gemäß Satz 3.13 ist die Matrix in (3.10) regulär.

Die Voraussetzungen des Satzes 3.11 über implizite Funktionen sind somit erfüllt und ist auf die Gleichung (3.9) anwendbar. Es ergibt sich eine Umgebung  $P \in \mathbb{R}^{n_p}$  von  $p = p_0$  und die Existenz zweier stetig differenzierbaren Funktionen  $x : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\nu : P \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$  mit der Eigenschaft

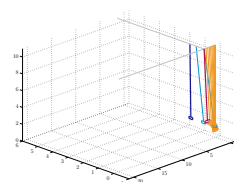
$$K(x(p), \nu(p), p) \equiv 0 \quad \text{für alle } p \in P.$$

Differenzieren von  $K(x(p), \nu(p), p)$  nach  $p$  mit Hilfe der Kettenregel und Auswerten in  $p_0$  liefert:

$$\begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(x^*, \nu^*, p_0) & \nabla_x \tilde{g}(x^*, p_0)^T \\ \nabla_x \tilde{g}(x^*, p_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dp}(p_0) \\ \frac{d\nu}{dp}(p_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_{xp} L(x^*, \nu^*, p_0) \\ \nabla_p \tilde{g}(x^*, p_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgrund der Invertierbarkeit der JACOBI-Matrix nach Satz 3.13 und unter Zuhilfenahme der Abkürzungen  $L := L(x^*, \nu^*, p_0)$  und  $\tilde{g} := \tilde{g}(x^*, p_0)$  lassen sich die *Sensitivitätsableitungen* explizit angeben. ■

Die Sensitivitätsableitungen der Optimierungsvariable  $\frac{dx}{dp}(p_0)$  und die der LAGRANGE-Multiplikatoren  $\frac{d\nu}{dp}(p_0)$  lassen sich direkt aus der Nominallösung ermitteln.



### 3.5.3 Sensitivitätsanalyse von Zugehörigkeitsfunktionen

Die erhaltenen Resultate aus dem vorherigen Abschnitt können ebenfalls auf weitere Größen, sogenannte Zugehörigkeitsfunktionen, übertragen werden. Damit sind Funktionen beschrieben, die eine bewertende Aussage über die Lösung gestörter nichtlinearer Optimierungsprobleme ermöglichen. Der optimale Zustand und die adjungierten Differentialgleichungen eines optimalen Steuerprozesses nach der Diskretisierung, siehe Kapitel 4.5, können ebenfalls als Zugehörigkeitsfunktionen aufgefasst werden.

#### Definition 3.15 (Zugehörigkeitsfunktion)

Sei  $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_0} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_h}$  eine einmal stetig differenzierbare Funktion. Weiter seien die Voraussetzungen von Satz 3.12 für in einer Umgebung  $P \subset \mathbb{R}^{n_p}$  von  $p = p_0$  gegebenen stetig differenzierbaren Funktionen  $x : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\nu : P \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$ ,  $\nu(p) = (\lambda_i(p))_{i \in \{1, \dots, m_0\}}$  erfüllt. Dann wird die Funktion

$$h(p) := \tilde{h}(x(p), \nu(p), p)$$

eine zum Problem (3.8) zugehörige Funktion genannt.  $\diamond$

Offensichtlich stellt die LAGRANGE-Funktion gerade eine solche Zugehörigkeitsfunktion dar, sofern  $f$  und  $\tilde{g}$  bzgl.  $p$  einmal stetig differenzierbar sind. Ebenfalls stellen die Zielfunktion  $f$  und die Nebenbedingungen  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  selber Zugehörigkeitsfunktionen dar.

Zugunsten einer besseren Übersicht, wird im Folgenden auf die Argumente der Funktionen verzichtet. Aus dem Satz 3.14 ergibt sich zusammen mit der Kettenregel die Sensitivitäten von Zugehörigkeitsfunktionen:

#### Satz 3.16

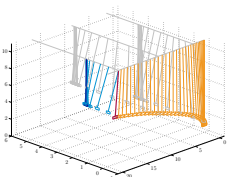
Sei  $h : P \rightarrow \mathbb{R}^{n_h}$  eine Zugehörigkeitsfunktion. Die Voraussetzungen von Satz 3.12 seien für das gestörte nichtlineare Optimierungsproblem (3.8) mit der optimalen Lösung  $x^*$ ,  $\nu^*$ , für  $p = p_0$  erfüllt. Dann gilt:

$$\frac{dh}{dp}(p_0) = - \begin{pmatrix} \nabla_x h & \nabla_\nu h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x^2 L & \nabla_x \tilde{g}^T \\ \nabla_x \tilde{g} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \nabla_{xp} L \\ \nabla_p \tilde{g} \end{pmatrix} + \nabla_p h. \quad \diamond$$

Entsprechend ergibt sich für die Nebenbedingung:

#### Folgerung 3.17

Die Voraussetzungen von Satz 3.12 seien für das gestörte nichtlineare Optimierungsproblem (3.7) bzw. (3.8) mit der optimalen Lösung  $x^*$ ,  $\lambda^*$  für  $p = p_0$  erfüllt. Dann



*gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{dg_i}{dp}(p_0) &= - \begin{pmatrix} \nabla_x g_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x^2 L & \nabla_x \tilde{g}^T \\ \nabla_x \tilde{g} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \nabla_{xp} L \\ \nabla_p \tilde{g} \end{pmatrix} + \nabla_p g_i \\ &= \nabla_x g_i \frac{dx}{dp}(p_0) + \nabla_p g_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

*Insbesondere gilt:*

$$\frac{dg_i}{dp}(p_0) = 0, \quad i \in \mathcal{J}(x^*). \quad \diamond$$

Auch die Zielfunktion stellt eine Zugehörigkeitsfunktion dar. Analog zu den vorherigen Überlegungen kann die Sensitivitätsableitung aus den Sensitivitäten  $\frac{dx}{dp}$  und  $\frac{dv}{dp}$  berechnet werden. Eine alternative Formulierung zeigt, dass gänzlich auf die Sensitivitäten  $\frac{dx}{dp}$  und  $\frac{dv}{dp}$  verzichtet werden kann und die Sensitivitätsableitung mit der Ableitung der LAGRANGE-Funktion übereinstimmt.

### Folgerung 3.18

*Unter den Voraussetzungen von Satz 3.12 gilt für die Zielfunktion  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ , sofern diese einmal stetig differenzierbar bzgl.  $p$  ist:*

$$\begin{aligned} \frac{df}{dp}(p_0) &= \nabla_x f \frac{dx}{dp}(p_0) + \nabla_p f \\ &= \nabla_p L. \end{aligned} \quad \diamond$$

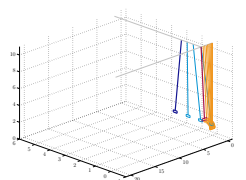
### Beweis:

Die erste Gleichung ist eine direkte Folgerung aus Satz 3.16, die zweite ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dp}(p_0) &\stackrel{\text{Satz 3.16}}{=} \nabla_x f \frac{dx}{dp}(p_0) + \nabla_p f \\ &\stackrel{\text{KKT-Bedingung (3.2)}}{=} -\nu^{*T} \nabla_x \tilde{g} \frac{dx}{dp}(p_0) + \nabla_p f \\ &\stackrel{\text{Satz 3.14}}{=} -\nu^{*T} (-\nabla_p \tilde{g}) + \nabla_p f \\ &= \nabla_p (\nu^{*T} \tilde{g} + f) = \nabla_p L. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Da diese Darstellung der Sensitivitätsableitung der Zielfunktion unabhängig von der HESSE-Matrix ist, kann sie viel effizienter berechnet werden im Gegensatz zu den Sensitivitäten der Optimierungsvariablen.

Unter zusätzlichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen lassen sich sogar Sensitivitätsableitungen zweier Ordnung der Zielfunktion angeben.



### 3.5.4 Approximation gestörter Lösungen

Mit der optimalen Lösung  $x^*$  und  $\nu^*$  des nominellen Problems und den aufgestellten Sensitivitätsableitungen in Satz 3.14 können einfache Abschätzungen für das gestörte nichtlineare Optimierungsproblem angeben.

Sofern der Parameter  $p$  im gestörten Optimierungsproblem (3.7) innerhalb der durch Satz 3.12 gegebenen Umgebung variiert, bleibt die Menge der aktiven Indizes, sowie die kompakte Darstellung (3.8) unverändert. Mit Hilfe der TAYLOR-Entwicklung erster Ordnung erhält man folgende Schätzungen der Optimierungsvariable und LAGRANGE-Multiplikatoren:

$$\begin{aligned} x(p) &\approx x^*(p_0) + \frac{dx}{dp}(p_0) \cdot (p - p_0) \\ \nu(p) &\approx \nu^*(p_0) + \frac{d\nu}{dp}(p_0) \cdot (p - p_0). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Bei Angabe der Sensitivitätsableitung der Gleichungsnebenbedingung, vgl. Folgerung 3.17, muss davon ausgegangen werden, dass im Allgemeinen die Gleichungsrestriktionen aus (3.7) durch die Approximation von  $x(p)$  durch kleine Fehler  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{m_0}$ ,  $\varepsilon \neq 0$  verletzt werden.

$$g\left(x^*(p_0) + \frac{dx}{dp}(p_0) \cdot (p - p_0), p\right) = \varepsilon$$

Der so entstandene Fehler kann ebenfalls als ein weiterer Störparameter aufgefasst werden. Nach Büskens [Büs01a] kann die Verletzung der Beschränkung dadurch schrittweise reduziert werden, indem das gestörte nichtlineare Optimierungsproblem durch eine Ergänzung des Parametersatzes zu  $(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_p+m_0}$  formuliert wird.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x, p), \\ \text{unter} \quad & \tilde{g}(x, p) - \varepsilon = 0, \end{aligned}$$

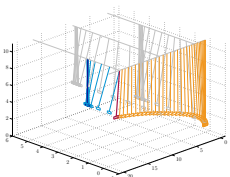
wobei die Lösung  $x(p, \varepsilon)$  für  $\varepsilon = 0$  gerade der Lösung von (3.8) entspricht.

Bei Störungen  $(p, \varepsilon) \neq (p_0, 0)$  ist es möglich, dass mit Hilfe der zusätzlichen Sensitivitätsableitung  $\frac{dx}{d\varepsilon}(0)$  iterativ Lösungen  $x(p, \varepsilon)$  berechnet werden, die gegen den Fixpunkt  $x(p, 0)$  konvergieren.

Die notwendigen Sensitivitätsableitung  $\frac{dx}{dp}(p_0)$  und  $\frac{dx}{d\varepsilon}(0)$  können jeweils offline berechnet werden, so dass bei der ursprünglichen Anwendung in der online-Approximation der Lösung von Optimierungsproblemen eine effiziente Berechnung möglich ist.

Bei der beschriebenen Vorgehensweise wird mitunter auch von einer *open- and closed-loop* Strategie gesprochen. *Open-loop*<sup>12</sup> beschreibt die Möglichkeit, eine Lö-

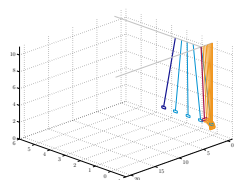
<sup>12</sup>deutsche Entsprechung: offener Kreis, Steuerung

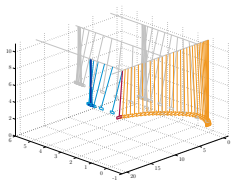


sung bei auftretenden Störungen durch die Approximationsvorschriften (3.11) zu berechnen. Mit der Bezeichnung *closed-loop*<sup>13</sup> ist der zusätzliche Korrekturschritt durch die Iteration gemeint, so dass die Nebenbedingungen eingehalten werden können.

---

<sup>13</sup>deutsche Entsprechung: geschlossener Kreis, Regelung





# Optimale Steuerprozesse

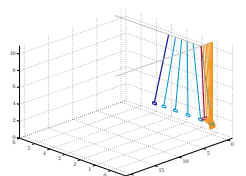
In Kapitel 3 wurden bereits nichtlineare Optimierungsprobleme behandelt deren Aufgaben sich auf die Bestimmung von Zahlen unter Einhaltung gegebener Beschränkungen und der Minimierung eines Zielfunktional einschränken. Dabei ist es nur gestattet, statische, also zeitunabhängige Systeme zu untersuchen. Bei den optimalen Steuerprozessen werden auf eine ähnliche Art und Weise Funktionen gesucht unter Berücksichtigung eines gegebenen dynamischen Systems und weiteren Nebenbedingungen, so dass ein Zielfunktional minimiert wird.

Die Problemstellung der optimalen Steuerung wird in Abschnitt 4.1 beschrieben. Die zugehörigen notwendigen Optimalitätsbedingungen werden in Abschnitt 4.2 bereitgestellt. Insbesondere werden diese Ergebnisse und Aussagen ebenfalls in Kapitel 5 bei der Behandlung von Optimalreglern zur Anwendung kommen.

Für die numerische Lösung optimaler Steuerprozesse können sowohl indirekte Verfahren als auch direkte zur Anwendung kommen. In dieser Arbeit werden die Probleme mittels direkter Verfahren gelöst. Sie basieren auf der Möglichkeit die optimalen Steuerprozesse über eine Diskretisierung auf Optimierungsprobleme zurückzuführen. Das detaillierte Vorgehen ist in Abschnitt 4.3 beschrieben. Ein Vergleich zu den indirekten Verfahren, die auf den Ergebnissen in Abschnitt 4.2 basieren, wird in Abschnitt 4.4 gegeben.

Die Übertragbarkeit der parametrischen Sensitivitätsanalyse nichtlinearer Optimierungsprobleme auf eine Sensitivitätsanalyse optimaler Steuerprozesse wird in Abschnitt 4.5 vorgestellt.

Die entsprechende Theorie der optimalen Steuerprozesse wird ausführlich in vielen Lehrbüchern behandelt, darunter sind beispielsweise Bryson und Ho [Bry75] und Athans and Falb [Ath66]. Die Methoden der direkten Verfahren für die in dieser Arbeit dargestellten Probleme sind in Büskens [Büs98] enthalten.



## 4.1 Grundbegriffe optimaler Steuerprozesse

Die in dieser Arbeit zur Anwendung kommenden optimalen Steuerprozesse unterliegen einer Dynamik, die durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben wird. Dazu wird ein System von  $n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, dessen Zustand zum Zeitpunkt  $t$  durch den Zustandsvektor  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$  beschrieben wird und durch den Steuervektor  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$  beeinflusst werden kann.

### Definition 4.1 (Dynamik des Systems)

Das System von Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (4.1)$$

nennt man *Dynamik des Systems*. Hierbei sei  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige und bezüglich  $x$  und  $u$  stetig partiell differenzierbare Funktion.  $t_0 \in \mathbb{R}$  bezeichne den Anfangs- und  $t_f \in \mathbb{R}$  den Endzeitpunkt ( $t_0 < t_f$ ).  $\diamond$

Der Anfangszeitpunkt wird ohne Einschränkung zu  $t_0 = 0$  gesetzt, während der Endzeitpunkt  $t_f$  entweder fest vorgeschrieben oder frei wählbar sein kann.

Es sei  $x \in \mathcal{W}^{1,\infty}(0, t_f; \mathbb{R}^n)$  ein Vektor stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Funktionen und die Komponenten von  $u \in \mathcal{L}^\infty(0, t_f; \mathbb{R}^m)$  stückweise stetige Funktionen. Ein Funktionenpaar  $(x(t), u(t))$  heißt *Lösung des Systems*, wenn es die Gleichung (4.1) erfüllt.

Des Weiteren wird verlangt, dass der Zustand des Systems gewissen Anfangs- und Endbedingungen genügt, die im Folgenden beschrieben werden.

### Definition 4.2 (Randbedingungen)

Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq r \leq 2n$ . Genügt der Anfangszustand  $x(0)$  und der Endzustand  $x(t_f)$  der Bedingung

$$\psi(x(0), x(t_f)) = 0 \quad (4.2)$$

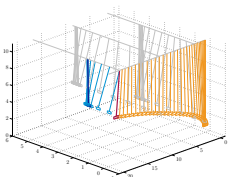
mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ , so wird (4.2) eine *allgemeine Randbedingung* genannt.  $\diamond$

In praktischen Anwendungen tritt häufig ein Spezialfall von Definition 4.2 auf.

### Definition 4.3 (Standard-Randbedingungen)

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  fest und sei  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r_2}$ ,  $r_2 \in \mathbb{N}$ ,  $r_2 \leq n$ , stetig differenzierbar. Dann werden Randbedingungen der Art

$$\hat{\psi}(x(0), x(t_f)) := (x(0) - x_0, \psi(x(t_f))) = 0 \quad (4.3)$$





als *Standard-Randbedingungen* bezeichnet.  $\diamond$

Neben den oben beschriebenen Randbedingungen können zusätzliche Beschränkungen an den Zustand und die Steuerung der Form

$$C(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f]$$

gestellt werden, wobei  $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  bezüglich ihrer Argumente hinreichend oft stetig differenzierbar ist. Für weitere Betrachtungen unterscheidet man zwischen gemischten Beschränkungen und Zustandsbeschränkungen.

#### Definition 4.4 (Vektor der Beschränkungen)

Es sei  $C(x(t), u(t)) = (C_1(x(t), u(t)), \dots, C_l(x(t), u(t)))^T$ .

i. Sei  $C_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  für  $k \in \{1, \dots, l\}$ . Dann werden Beschränkungen der Form

$$C_k(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (\text{d.h. } \nabla_u C_k \neq 0)$$

*gemischte Beschränkungen* genannt.

ii. Sei  $C_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für  $k \in \{1, \dots, l\}$ . Dann werden Beschränkungen der Form

$$C_k(x(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (\text{d.h. } \nabla_u C_k = 0)$$

*Zustandsbeschränkungen* genannt.

iii. Seien  $l_m \in \mathbb{N}$ ,  $l_z \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l := l_m + l_z$  und  $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ , sowie

$$C_k(x(t), u(t)) := \begin{cases} C_k(x(t), u(t)), & k = 1, \dots, l_m \\ C_k(x(t)), & k = l_m + 1, \dots, l. \end{cases}$$

Dann wird

$$C(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f], \tag{4.4}$$

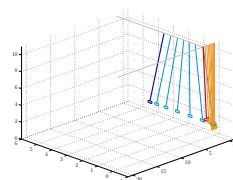
*Vektor der Beschränkungen* genannt.  $\diamond$

#### Bemerkung 4.5

i. Einfache Steuerbeschränkungen der Form  $u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$ ,  $\forall t \in [0, t_f]$  mit  $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^m$ , können als *gemischte Beschränkungen* aufgefasst werden. Für diese sogenannten *Box-Beschränkung* bezeichnet

$$U := [u_{1,\min}, u_{1,\max}] \times \dots \times [u_{m,\min}, u_{m,\max}] \subset \mathbb{R}^m$$

den *zulässigen Steuerbereich*.



- ii. Durch  $-C_k(x(t), u(t)) \leq 0$  mit  $k \in \{1, \dots, l\}$  werden Beschränkungen der Form  $C(x(t), u(t)) \geq 0$  berücksichtigt. Den Fall  $C_k(x(t), u(t)) = 0$  erhält man, wenn sowohl  $C_k(x(t), u(t)) \leq 0$  als auch  $-C_k(x(t), u(t)) \leq 0$  gesetzt wird.  $\diamond$

Die weitere Vorgehensweise wird dadurch beschrieben, dass der Vektor der Steuervariable  $u(t)$  und evtl. der Endzeitpunkt  $t_f$  so zu bestimmen sind, dass eine vorgegebene Zielfunktion minimiert wird.

### Definition 4.6 (Zielfunktional)

Ein Funktional

$$\Phi(x, u) := g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (4.5)$$

wird als Zielfunktional bezeichnet. Dabei sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und bezüglich  $x$  und  $u$  stetig partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen  $f_{0,x} := \nabla_x f_0$ ,  $f_{0,u} := \nabla_u f_0$  seien stetig.  $\diamond$

Die in dieser Arbeit betrachteten Zielfunktionale sind speziell auf die zu untersuchenden mechanischen Vorgänge ausgelegt und werden ausschließlich durch Funktionen  $f_0 = f_0(x(t), u(t))$  beschrieben. Daher wird im weiteren Verlauf auf die zusätzliche Abhängigkeit der Zeit verzichtet.

Mit Hilfe des vorgegebenen Zielfunktional (4.5) ist es möglich, das optimale Steuerungsproblem zu formulieren, in dem eine Steuerung  $u(t)$  unter Einhaltung der Systemdynamik (4.1) und den Zulässigkeitsbedingungen (4.3) und (4.4) zu bestimmen ist, so dass das Zielfunktional minimiert wird.

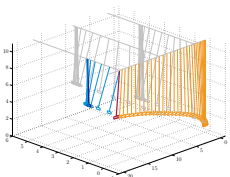
### Definition 4.7 (Optimaler Steuerprozess)

Das Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(x, u) = g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t)) dt \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ & x(0) = x_0, \\ & \psi(x(t_f)) = 0, \\ & C(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (4.6)$$

heißt optimaler Steuerprozess (**OCP**<sup>14</sup>).  $\diamond$

<sup>14</sup>engl: optimal control problem



Ein Steuerproblem dieser Art wird auch BOLZA-Problem genannt. Alternative Formulierungen sind LAGRANGE-Probleme mit  $g \equiv 0$  und MAYER-Probleme mit  $f_0 \equiv 0$ . Insbesondere lassen sich diese Spezialfälle durch geeignete Transformationen des Zustandsvektors in (4.6) erreichen.

Ähnliches gilt auch bei Aufgabenstellungen, deren Endzeit  $t_f$  frei wählbar ist und zusätzlich optimal bestimmt werden muss. Durch die Einführung einer weiteren Zustandsvariable  $x_{n+1}$  kann das System auf ein System mit fester Endzeit transformiert werden, so dass bei einem optimalen Zustand  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$  ebenfalls  $t_f$  optimal ist.

Eine Lösung zu (4.6) bei fester Verfahrzeit  $t_f$  lässt sich wie folgt charakterisieren:

**Definition 4.8 (Zulässige und optimale Lösung)**

Ein Lösungspaar  $(x^*, u^*)$  des Systems (4.1), bestehend aus der Steuerung  $u^* : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$  und der zugehörigen Trajektorie  $x^* : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , das für (4.6) die genannten Zulässigkeitsbedingungen (4.3) und (4.4) erfüllt, heißt zulässige Lösung zur Endzeit  $t_f$ .

Erfüllt ein zulässiges Funktionenpaar  $(x^*, u^*)$  zusätzlich

$$\Phi(x^*, u^*) \leq \Phi(x, u)$$

für alle zulässigen Lösungen  $(x, u)$ , mit  $u : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $x : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so wird es optimale Lösung des durch (4.6) erklärten Steuerprozesses genannt.

$x^*$  nennt man optimale Trajektorie und  $u^*$  optimale Steuerung. ◇

**Definition 4.9 (Autonomer Steuerprozess)**

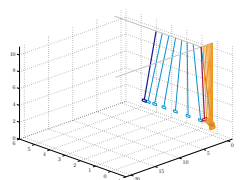
Falls die Zeit  $t$  explizit im Zielfunktional oder in der Dynamik des optimalen Steuerprozesses auftritt, so bezeichnet man das Problem (4.6) als nichtautonom, andernfalls als autonom. ◇

Jeder nichtautonome Steuerprozess kann durch Einführung eines neuen Zustands  $x_{n+1}$  mit  $\dot{x}_{n+1} = 1$ ,  $x_{n+1}(0) = 0$  ebenfalls in einen äquivalenten autonomen Steuerprozess umformuliert werden.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit beschränken sich die weiteren Untersuchungen auf autonome MAYER-Probleme mit fester Endzeit.

## 4.2 Das Minimumprinzip von PONTRYAGIN

Um ein Optimalsteuerungsproblem zu lösen, kann auf zwei unterschiedliche Klassen von Lösungsansätzen zurückgegriffen werden. Auf der einen Seite handelt es sich



um die *direkten Verfahren*, die im nachfolgenden Abschnitt 4.3 ausführlicher erklärt werden.

Eine andere Möglichkeit bieten die *indirekten Verfahren*. Hierbei wird das Optimalsteuerungsproblem (4.6) auf ein Randwertproblem zurückgeführt. Die Steuerung  $u$  wird dabei mit Hilfe der notwendigen Bedingungen der Theorie optimaler unrestringierter als auch restringierter Steuerungsprozesse aus der gegebenen Problemstellung (4.6) eliminiert.

Eine Lösung des aufgestellten Randwertproblems kann dann mit speziellen Randwertproblemlösern berechnet werden.

Indirekte Verfahren kommen nicht ausschließlich bei der Berechnung numerischer Lösungen von optimalen Steuerungsproblemen zum Einsatz. Sie dienen vielmehr der reinen theoretischen Betrachtung optimaler Steuerprozesse. Weitere Einzelheiten über die Anwendung auf eine Problemstellung mit quadratischem Gütemaß werden in Kapitel 5 beschrieben.

### 4.2.1 Notwendige Optimalitätsbedingung unrestringierter Probleme

Es werde zunächst von der unbeschränkten Variante des Optimalsteuerungsproblems (4.6) ausgegangen, wobei nur reine Steuerbeschränkungen der Form  $u \in U$  zugelassen sind.

Eine zentrale Rolle nimmt das Minimumprinzip von PONTRYAGIN ein. Dafür werden zunächst sogenannte adjungierte Variablen eingeführt und die Definition der HAMILTON-Funktion angegeben, die von tragender Bedeutung für das Minimumprinzip ist.

#### Definition 4.10 (HAMILTON-Funktion)

Sei  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_0^+$  und  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . Dann heißt

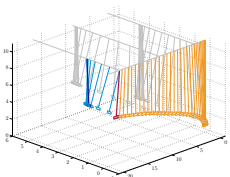
$$H(x, \lambda, u) := \lambda_0 f_0(x, u) + \lambda^T f(x, u) \quad (4.7)$$

die HAMILTON-Funktion zum Steuerprozess (4.6) ohne Zustandsbeschränkungen. Der Spaltenvektor  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  wird adjungierte Variable zu  $x$  oder auch Kozustand genannt.  $\diamond$

Die Bedeutung der skalarwertigen HAMILTON-Funktion wird im folgenden Satz deutlich, der ein zentrales Resultat der Theorie der optimalen Steuerprozesse ist.

#### Satz 4.11 (Minimumprinzip von PONTRYAGIN)

Für eine optimale Lösung  $(x^*, u^*)$  des unbeschränkten Problems (4.6) existiert eine reelle Zahl  $\lambda_0 \geq 0$ , eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion  $\lambda :$



$[0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sowie ein Vektor  $\sigma \in \mathbb{R}^r$  mit  $(\lambda_0, \lambda^T(t), \sigma) \neq 0$  für alle  $t \in [0, t_f]$ , so dass folgende Gleichungen gelten:

i. *Minimumbedingung:*

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{u \in U} H(x^*(t), \lambda(t), u(t)), \quad \text{für fast alle } t \in [0, t_f],$$

ii. *Adjungierte Differentialgleichungen:*

$$\dot{\lambda}^T(t) = -\nabla_x H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)), \quad \text{für fast alle } t \in [0, t_f], \quad (4.8)$$

iii. *Transversalitätsbedingungen:*

$$\begin{aligned} \lambda^T(0) &= -\nabla_{x(0)} (\sigma^T \psi(x^*(0), x^*(t_f))), \\ \lambda^T(t_f) &= \nabla_{x(t_f)} (\lambda_0 g(x^*(t_f)) + \sigma^T \psi(x^*(0), x^*(t_f))), \end{aligned} \quad (4.9)$$

iv. *Speziell für autonome Probleme gilt:*

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \text{const}, \quad \forall t \in [0, t_f],$$

v. *Im Falle einer freien Endzeit  $t_f$  gilt für die optimale Endzeit  $t_f^*$ :*

$$H(x^*(t_f^*), \lambda(t_f^*), u^*(t_f^*)) = 0. \quad \diamond$$

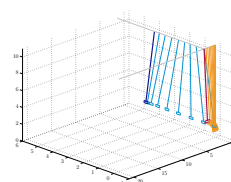
### Beweis:

Ein Beweis des Minimumprinzips kann in Pontryagin et al. [Pon67] oder auch in Ioffe und Tichomirov [Iof79] gefunden werden. Einen Überblick über verschiedene Systeme und unterschiedlichen Voraussetzungen ist in Athans und Falb [Ath66] gegeben. ■

### Bemerkung 4.12

Im Falle von  $\lambda_0 > 0$  lässt sich leicht erkennen, dass eine Skalierung  $(\lambda_0, \lambda) \rightarrow (1, \frac{\lambda}{\lambda_0})$  keine Einschränkung der Aussagen von Satz 4.11 bedeutet. Es ist also ausreichend, sich auf die Fälle  $\lambda_0 = 0$  und  $\lambda_0 = 1$  zu beschränken. ◇

Über die Bedingungen des Minimumprinzips wird nun versucht, die Steuerung  $u$  durch die Variablen  $\lambda$  und  $x$  auszudrücken und sie aus dem Problem (4.6) zu eliminieren. Dabei spielt die Regularität der auszuwertenden HAMILTON-Funktion eine wichtige Rolle.



**Definition 4.13 (reguläre HAMILTON-Funktion)**

Die HAMILTON-Funktion  $H$  heißt regulär bzgl. einer optimalen Lösung  $x^*(t)$ ,  $\lambda^*(t)$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass für die Menge

$$D_\varepsilon := \{(x, \lambda, t) \mid \|x - x^*(t)\| < \varepsilon, \|\lambda - \lambda^*(t)\| < \varepsilon, t \in [t_0, t_f]\}$$

gilt: Die Funktion  $H(x, \lambda, \cdot)$  hat eine eindeutig bestimmte Minimalstelle

$$u^*(x, \lambda) = \arg \min_{u \in U} H(x, \lambda, u), \quad \forall (x, \lambda, t) \in D_\varepsilon. \quad \diamond$$

Bei optimalen Steuerprozessen mit linear auftretender Steuerung ist die HAMILTON-Funktion in der Regel nicht regulär. Dieses kann dazu führen, dass die Steuerung  $u$  an einigen Punkten nicht eindeutig bestimmt werden kann und unstetig ist. Ein bekanntes Beispiel hierzu sind die bang-bang Probleme, bei denen die Steuerung  $u^*(t)$  oft nur Werte  $u_{\max}$  und  $u_{\min}$  annimmt. Damit besitzt sie in endlich vielen Punkten einen Sprung. Einen kurzen Überblick über Probleme mit linear auftretender Steuerung wird z.B. in Büskens [Büs98] gegeben. In Vossen [Vos06] werden speziell Probleme mit bang-bang und singulären Steuerungen eingehender betrachtet.

Ist eine reguläre HAMILTON-Funktion gegeben, so ist die optimale Steuerung der eindeutig bestimmte Wert

$$u(t) = u^*(x(t), \lambda(t)), \quad t \in [0, t_f].$$

In dieser Arbeit werden Steuerprozesse betrachtet, deren Steuerung nichtlinear in die HAMILTON-Funktion eingeht.

Im Fall eines unbeschränkten Problems mit regulärer HAMILTON-Funktion folgt aus der Auswertung der Minimumbedingung für eine Lösung  $(x(t), \lambda(t), u(t))$  die LEGENDRE-CLEBSCH-Bedingung:

$$\nabla_u H(x, \lambda, u) = 0, \quad \nabla_u^2 H(x, \lambda, u) \geq 0, \quad (4.10)$$

wobei der Operator  $\nabla_u^2$  die HESSE-Matrix bezeichnet. Eine Verschärfung der Bedingung (4.10) zur strengen LEGENDRE-CLEBSCH-Bedingung

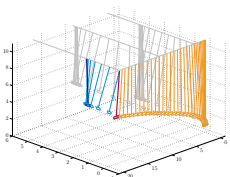
$$\nabla_u H(x, \lambda, u) = 0, \quad \nabla_u^2 H(x, \lambda, u) > 0 \quad (4.11)$$

stellt sicher, dass der Satz über implizite Funktionen (3.11) auf die Gleichung  $\nabla_u H = 0$  angewendet werden kann. Die Existenz und Eindeutigkeit der lokalen Lösung  $u = u^*(x, \lambda)$  ist damit sichergestellt.

Nachfolgend werde die Gleichung

$$\nabla_u H(x, \lambda, u) = 0 \quad (4.12)$$

auch als *stationäre* Bedingung bezeichnet.



**Definition 4.14 ( $\mathcal{C}^k$ -reguläre HAMILTON-Funktion)**

Die HAMILTON-Funktion  $H$  heißt bzgl. einer optimalen Lösung  $x^*(t)$ ,  $\lambda^*(t)$   $\mathcal{C}^k$ -regulär, wenn  $H$  regulär ist und die Funktion

$$u^*(x, \lambda, t) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^m} H(x, \lambda, u, t)$$

für ein  $\varepsilon > 0$  auf der Menge

$$D_\varepsilon := \{(x, \lambda, t) \mid \|x - x^*(t)\| < \varepsilon, \|\lambda - \lambda^*(t)\| < \varepsilon, t \in [t_0, t_f]\}$$

eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion ist. ◇

Durch Einsetzen von  $u$  in (4.8) und in die Dynamik von (4.6) erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(x, \lambda)) && =: h_1(x, \lambda), \\ \dot{\lambda} &= -\nabla_x H(x, \lambda, u^*(x, \lambda))^T && =: h_2(x, \lambda). \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Funktion

$$h(x, \lambda) = \begin{pmatrix} h_1(x, \lambda) \\ h_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

ist im Falle einer  $\mathcal{C}^k$ -regulären HAMILTON-Funktion ebenfalls eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion. Unter Hinzunahme von (4.3) und (4.9) erhält man dann ein Randwertproblem (**RWP**) für die Funktionen  $x$  und  $\lambda$ .

**Folgerung 4.15**

Ist eine HAMILTON-Funktion  $\mathcal{C}^k$ -regulär, dann hat das resultierende Randwertproblem eine  $\mathcal{C}^k$ -Lösung  $(x(t), \lambda(t))$  und die optimale Steuerung  $u^*(t) = u^*(x^*(t), \lambda(t))$  ist eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion. ◇

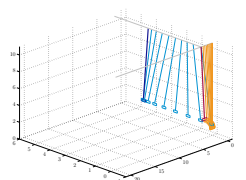
**Bemerkung 4.16**

Für  $U \subset \mathbb{R}^m$  kann man zeigen, dass bei einer  $\mathcal{C}^k$ -regulären HAMILTON-Funktion die optimale Steuerung  $u^*(t)$  in jedem Ein- und Austrittspunkt<sup>15</sup> stetig ist. Die Steuerung braucht damit nur auf den inneren Teilstücken bestimmt werden. Da die Steuerbeschränkung dort nicht aktiv ist, lässt sich der Fall  $U \subset \mathbb{R}^m$  auf den unbeschränkten Fall zurückführen. ◇

## 4.2.2 Notwendige Optimalitätsbedingung restringierter Probleme

Für die Behandlung von beschränkten Problemen, wie sie in (4.6) beschrieben sind, bedarf es noch zusätzlicher Definitionen. Speziell für die Untersuchung von reinen Zustandsbeschränkungen wird die *Ordnung einer Zustandsbeschränkung* eingeführt.

<sup>15</sup>siehe Definition 4.20



**Definition 4.17 (Ordnung einer Beschränkung)**

Sei  $f$  die rechte Seite des Differentialgleichungssystem  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  als eine  $C^l$ -Funktion,  $l \in \mathbb{N}$ , gegeben. Weiter sei  $q \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq q \leq l$  und die  $C^q$ -Funktionen  $C^i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} C^0(x, u) &:= C(x), \\ C^{i+1}(x, u) &:= \nabla_x C^i(x, u) f(x, u) \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann nennt man die Zustandsbeschränkung  $C(x) \leq 0$  eine Zustandsbeschränkung der Ordnung  $q$  bzgl. des Differentialgleichungssystems  $f$  aus (4.1), wenn gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_u C^i(x, u) &\equiv 0, \quad i = 0, \dots, q-1 \\ \nabla_u C^i(x, u) &\neq 0. \end{aligned}$$

Die Ordnung  $q$  einer gemischten Beschränkung  $C(x, u) \leq 0$  ist 0.  $\diamond$

**Folgerung 4.18**

Sei  $C(x)$  eine Zustandsbeschränkung der Ordnung  $q$  und  $(x(t), u(t))$  Lösung des Differentialgleichungssystem  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ . Dann gilt:

$$\frac{d^i}{dt^i} C(x(t)) = \begin{cases} C^i(x(t)), & i = 0, \dots, q-1, \\ C^q(x(t), u(t)), & i = q. \end{cases}$$

$q$  gibt demnach die Höhe derjenigen Ableitung von  $C$  nach  $t$  an, die erstmalig die Steuerung  $u$  explizit enthält.  $\diamond$

**Definition 4.19 (Erweiterte HAMILTON-Funktion)**

Sei  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  und  $\mu \in \mathbb{R}^l$ . Dann heißt

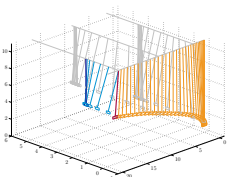
$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, \lambda, \mu, u) &:= \lambda_0 f_0(x, u) + \lambda^T f(x, u) + \mu^T C(x, u) \\ &= H(x, \lambda, u) + \mu^T C(x, u) \end{aligned} \tag{4.13}$$

die erweiterte HAMILTON-Funktion zum autonomen Steuerprozess (4.6) mit der Beschränkung (4.4). Der Spaltenvektor  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  ist die adjungierte Variable zu  $x$  und der Spaltenvektor  $\mu \in \mathbb{R}^l$  wird Multiplikator zur Nebenbedingung  $C$  genannt.  $\diamond$

Weitere Begriffe die im Zusammenhang mit den allgemeinen Beschränkungen (4.4) stehen, werden in der folgenden Definition zusammengefasst.

**Definition 4.20 (Randstück, Verbindungspunkt, Kontaktpunkt)**

Sei  $(x(t), u(t))$  eine Lösung des restringierten Problems (4.6).





i. Sei  $k \in \{1, \dots, l\}$ . Ein Intervall  $[t_1, t_2] \subset [0, t_f]$  mit  $t_1 < t_2$  heißt Randstück der  $k$ -ten Komponente  $C_k(x, u)$ , wenn  $C_k(x(t), u(t)) = 0$  für  $\forall t \in [t_1, t_2]$  gilt.

$[t_1, t_2]$  heißt Randstück der Beschränkung  $C(x(t), u(t)) \leq 0$ , wenn  $[t_1, t_2]$  Randstück von  $C_k(x, u)$  ist für alle  $k = 1, \dots, l$ .

Der Punkt  $t_1$  bzw.  $t_2$  heißt Auf- bzw. Absprungpunkt des Randstücks  $[t_1, t_2]$  von  $C_k(x, u)$ , wenn ein  $\delta > 0$  existiert mit  $C_k(x(t_1 - \varepsilon), u(t_1 - \varepsilon)) < 0$  bzw.  $C_k(x(t_2 + \varepsilon), u(t_2 + \varepsilon)) < 0$  für alle  $\varepsilon \in ]0, \delta[$ .

Auf- und Absprungpunkte werden auch Verbindungspunkte genannt.

ii. Sei  $k \in \{1, \dots, l\}$ . Ein Intervall  $[t_1, t_2] \subset [0, t_f]$  mit  $t_1 < t_2$  heißt inneres Teilstück der  $k$ -ten Komponente  $C_k(x, u)$ , wenn  $C_k(x(t), u(t)) < 0$  für  $t \in [t_1, t_2]$  gilt.

$[t_1, t_2]$  heißt inneres Teilstück der Beschränkung  $C(x, u) \leq 0$ , wenn  $[t_1, t_2]$  inneres Teilstück von  $C_k(x, u)$  ist für alle  $k = 1, \dots, l$ .

iii. Sei  $k \in \{1, \dots, l\}$ , so dass  $C_k(x)$  eine reine Zustandsbeschränkung ist. Ein Punkt  $t_1 \in ]0, t_f[$  heißt Kontaktpunkt der  $k$ -ten Komponente  $C_k(x)$ , wenn ein  $\delta > 0$  existiert mit  $C_k(x(t_1)) = 0$  und  $C_k(x(t_1 \pm \varepsilon)) < 0$  für alle  $\varepsilon \in ]0, \delta[$ .  $\diamond$

In Erweiterung zu Satz (4.11) auf Probleme mit Beschränkungen der Ordnung  $q$  gibt der folgende Satz weitere Bedingungen für Kontaktpunkte oder Randstücke an. Zur Vereinfachung wird nachfolgend von  $l$  aktiven Beschränkungen ausgegangen, so dass auf die Einführung von Indexmengen aktiver Komponenten der Beschränkung verzichtet werden kann.

#### Satz 4.21 (Erweitertes Minimumprinzip)

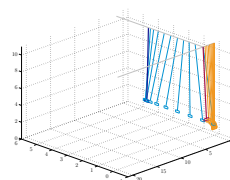
Es sei ein autonomer restringierter optimaler Steuerprozess der Form (4.6) mit einer Beschränkung der Ordnung  $q$  gegeben. Weiter sei  $(x^*, u^*)$  eine optimale Lösung, für die die Gleichung  $C^q(x, u) = 0$  eindeutig auflösbar nach  $u = u(x)$  ist mit einer  $C^{q+1}$ -Funktion  $u(x)$  und auf jedem Randstück für die Randsteuerung  $u(t)$  gilt:

$$\nabla_u C^q(x(t), u(t)) \neq 0, t \in [t_1, t_2].$$

Damit ist die eindeutige Abhängigkeit  $u(t) = u(x(t))$  auf dem Randstück  $[t_1, t_2]$  gegeben.

Außerdem gelte  $u^*(t) \in \text{int } U$ , für  $t \in ]t_1, t_2[$ .

Dann existieren  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^r$ , eine stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion  $\lambda : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , eine stückweise stetige Multiplikator-Funktion  $\mu : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^l$  und Multiplikatoren  $\nu(t_i) \geq 0$ ,  $\nu(t_i) \in \mathbb{R}^l$  in jedem Verbindungs- oder Kontaktpunkt  $t_i \in ]0, t_f[$ , so dass folgende Aussagen gelten:



i. *Minimumbedingung:*

$$\tilde{H}(x^*(t), \lambda(t), \mu(t), u^*(t)) = \min_{u \in U} \tilde{H}(x^*(t), \lambda(t), \mu(t), u) = \text{konst},$$

für fast alle  $t \in [0, t_f]$ ,

ii. *Adjungierte Differentialgleichungen:*

$$\dot{\lambda}^T(t) = -\nabla_x \tilde{H}(x^*(t), \lambda(t), \mu(t), u^*(t)), \quad \text{für fast alle } t \in [0, t_f],$$

iii. *Transversalitätsbedingungen:*

$$\lambda^T(t_f) = \lambda_0 \nabla_x g(x^*(t_f)) + \sigma^T \nabla_x \psi(x^*(t_f)), \quad \text{für } C(x^*(t_f), u^*(t_f)) < 0.$$

iv. *Für alle  $t \in [0, t_f]$  gilt:*

$$\mu(t) \geq 0, \quad \mu^T(t) C(x^*(t), u^*(t)) = 0.$$

v. *In jedem Verbindungs- oder Kontaktpunkt  $t_i$  gelte im Falle reiner Zustandsbeschränkungen die Sprungbedingung:*

$$\lambda(t_i^+)^T = \lambda(t_i^-)^T - \nu^T(t_i) \nabla_x C(x^*(t_i)).$$

*Bei gemischten Beschränkungen sind die adjungierten Variablen  $\lambda$  stetig in  $[0, t_f]$ , d.h. es ist  $\nu^T(t_i) = 0$ .*

vi. *Im Falle einer freien Endzeit  $t_f$  gilt:*

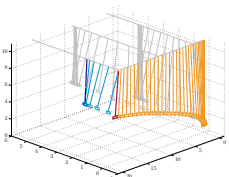
$$\tilde{H}(x^*(t_f), \lambda(t_f), \mu(t_f), u^*(t_f)) = 0 \quad \diamond$$

### Beweis:

Der Beweis für den Fall einer gemischten Beschränkung wird in Neustadt [Neu76] erbracht. Für Zustandsbeschränkungen kann der Beweis in Maurer [Mau79] nachgeschlagen werden. ■

Für den Fall der reinen Zustandsbeschränkung kann sogar noch eine Verallgemeinerung von Satz 4.21 angegeben werden. Einzelheiten dazu sind in Büskens [Büs98] gegeben, sowie in Maurer [Mau76b] und Hartl, Sethi und Vickson [Har95]. In Ergänzung dazu sind in Maurer [Mau76a] Resultate speziell für Probleme mit linear auftretender Steuerung formuliert.

Eine Verallgemeinerung für Kombinationen aus gemischten Beschränkungen und Zustandsbeschränkungen ist noch nicht bewiesen, vgl. Hartl, Sethi und Vickson [Har95].



Hinreichende Optimalitätsbedingungen lassen sich unter weiteren Konvexitätsannahmen an die Funktionen im Steuerprozess, sowie an die HAMILTON-Funktion formulieren, siehe dazu Feichtinger und Hartl [Fei86] für den unbeschränkten Steuerprozess. In Malanowski und Maurer [Mal96] werden unter anderem hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung für Steuerprobleme mit gemischten Beschränkungen untersucht.

## 4.3 Berechnung durch direkte Verfahren

Bei den *direkten Verfahren* wird das unendlich dimensionale Optimalsteuerungsproblem (4.6) mittels Diskretisierung der Steuerung und der Zustandsvariablen durch ein nichtlineares Optimierungsproblem (3.1) mit endlich vielen Parametern approximiert.

### 4.3.1 Diskretisierung

Das Prinzip der numerischen Auswertung beruht darauf, dass sowohl das Integral in der Zielfunktion als auch die Differentialgleichungen des optimalen Steuerungsproblems (4.6) an ausgewählten Stützpunkten näherungsweise bestimmt werden.

In den nachfolgenden Ausführungen wird die Diskretisierung des Zeitintervalls  $[t_0, t_f]$  mit einer einfachen EULER-Integration für das Integral im Zielfunktional und das Differentialgleichungssystem vorgenommen. Es ist zu beachten, dass hierdurch eine Approximation der Steuerung an Intervallinnenpunkten entfällt.

Sei  $N \in \mathbb{N}_+$  und seien  $t_i, i = 1, \dots, N$  nicht notwendigerweise äquidistante Stützstellen mit

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f.$$

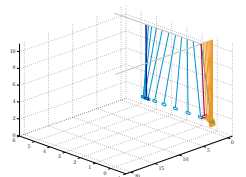
Die Näherung des Zustandes  $x(t_i)$  und der Steuerung  $u(t_i)$  an den gegebenen Gitterpunkten wird nachfolgend durch  $x_i$  und  $u_i$  gekennzeichnet.

$$x_i \approx x(t_i), \quad u_i \approx u(t_i)$$

Für die Näherung des Integrals wird exemplarisch das EULERSche-Polygonzugverfahren<sup>16</sup> verwendet, so dass folgende Iterationsvorschrift zur Anwendung kommt:

$$\int_{t_1}^{t_{i+1}} f_0(x(t), u(t)) dt \approx \int_{t_1}^{t_i} f_0(x(t), u(t)) dt + (t_{i+1} - t_i) f_0(x_i, u_i).$$

<sup>16</sup>Alternativ können auch Verfahren höherer Ordnung verwendet werden, z. B. RUNGE-KUTTA-Verfahren



Der Steuerprozess (4.6) wird damit durch ein diskretisiertes Steuerproblem wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} \min \quad & g(x_N) + \sum_{i=1}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) f_0(x_i, u_i) \\ \text{unter} \quad & x_{i+1} = x_i + (t_{i+1} - t_i) f(x_i, u_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ & x_1 = x_0, \quad \psi(x_N) = 0, \\ & C(x_i, u_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dabei sind die freien Parameter der diskretisierten Form gerade  $(u_i)_{i=1, \dots, N}$  für die Steuerung und  $(x_i)_{i=1, \dots, N}$  für den Zustand.

Schreibt man die Beschränkungen in (4.14) in der Form

$$\begin{aligned} g_j(x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_N) &= 0, \quad j = 1, \dots, N+r, \\ g_j(x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_N) &\leq 0, \quad j = N+r+1, \dots, 2N+r, \end{aligned}$$

liegt ein Standardproblem der nichtlinearen Optimierung in den Variablen  $(x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^{(n+m)N}$  vor. Man spricht auch von einer vollen Diskretisierung, da die Zustandsvariablen diskretisiert und als Optimierungsvariablen aufgenommen werden.

Zur Reduktion der Dimension können die Optimierungsvariablen auf die diskretisierten Steuerfunktionen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  reduziert werden, in dem der Zustand rekursiv über die EULER-Gleichung ausgewertet wird. Die Werte der Zustandsvariablen können so bei bekannten Anfangswerten über die Steuervariablen ausgewertet werden. Durch ein Integrationsverfahren, hier erneut das EULER-Verfahren, erhält man die Abhängigkeit:

$$x_1 := x_0, \quad x_i := x_i(u_1, \dots, u_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N.$$

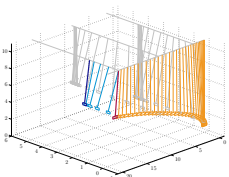
Explizit ist diese gegeben mit  $u := (u_1, \dots, u_N)^T$  durch

$$\begin{aligned} x_1(u) &:= x_0, \\ x_{i+1}(u) &:= x_i(u) + (t_{i+1} - t_i) f(x_i(u), u_i), \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Damit reduziert sich (4.14) zu

$$\begin{aligned} \min \quad & g(x_N(u)) + \sum_{i=1}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) f_0(x_i(u), u_i) \\ \text{unter} \quad & \psi(x_N(u)) = 0, \\ & C(x_i(u), u_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Im Falle von freien Anfangswerten in  $x_1$ , werden diese den Optimierungsvariablen hinzugefügt.



Insbesondere für große  $N$  lassen sich diese Optimierungsprobleme sehr effizient mit Hilfe von SQP-Verfahren lösen. Dabei hat (4.16) gegenüber der vollen Diskretisierung (4.14) den Vorteil, dass die Anzahl der Optimierungsvariablen erheblich reduziert wird, da die Dimension des Zustandes in der Regel um einiges größer ist als die der Steuerung. Durch Ausnutzung einer speziellen sparsamen Struktur ist es auch bei der vollen Diskretisierung möglich, den erhöhten Rechenaufwand und Speicherplatzbedarf in einem erträglichen Rahmen zu halten. Weitere Einzelheiten sowie Vor- und Nachteile sind ausführlich in [Büs98] beschrieben.

Für die Lösung der Problemapproximationen (4.14) sowie (4.16) kommt die Fortran-Routine NUDOCCCS zur Anwendung, die von Büskens entwickelt wurde, [Büs96]. Neben dem hier verwendeten EULER-Verfahren sind ebenfalls noch weitere Verfahren höherer Ordnung implementiert. In Malanowski, Büskens und Maurer [Mal97] wurden bereits Bedingungen formuliert, unter denen die Lösung des mit dem EULER-Verfahren approximierten Problems gegen die Lösung des optimalen Steuerprozesses (4.6) konvergiert.

Innerhalb von NUDOCCCS wird auf eine Optimierungsroutine zurückgegriffen, so dass das nichtlineare Optimierungsproblem gelöst werden kann, vgl. Kapitel 3.4. Des Weiteren sind diverse Integrations- und Interpolationsverfahren in der Routine realisiert, so dass ein Vielzahl an Kombinationen möglich ist.

Bei der Diskretisierung treten im Wesentlichen Fehler durch die Interpolation der Steuerung, sowie damit verbundene Integrationsfehler bei der Lösung des Differentialgleichungssystems auf. Um diese Fehler zu reduzieren, besteht zusätzlich die Möglichkeit in NUDOCCCS, die als äquidistant und fest gegebenen Gitterpunkte variabel zu halten und nachträglich automatisch anzupassen.

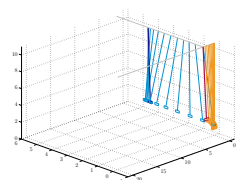
In dieser Arbeit werden die Steuerungen durch eine lineare Interpolation angenähert. Die Zustandsvariablen ergeben sich aus den Steuerungen durch die numerische Integration mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung.

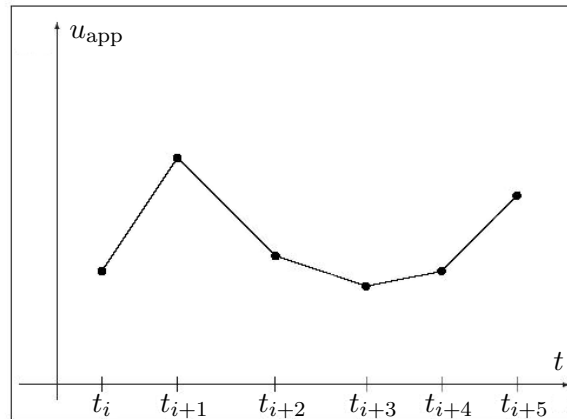
### 4.3.2 Approximation der Steuerfunktion

Die Art der Approximation der Steuerung ist für die weitere Berechnung von Bedeutung, da häufig Werte der Steuerung an Intervallinnenpunkten  $t \in ]t_i, t_{i+1}[$  benötigt werden.

Durch die Transformation des optimalen Steuerungsproblems auf ein diskretes Problem liegt die Lösung lediglich an den gegebenen Stützstellen vor. Für die Berechnung an Intervallinnenpunkten sollten entsprechend die Verfahren angewendet werden, die bereits zuvor bei der Diskretisierung zum Einsatz kamen.

Werden stetige Lösungen für die Steuerungen erwartet, ist die stückweise lineare Interpolation ein effizientes und schnelles Verfahren der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$  mit der





**Abbildung 4.1:** *Stückweise lineare Approximation der Steuerung*

maximalen Schrittweite  $h := \max_{i=1, \dots, N-1} (t_{i+1} - t_i)$ , vgl. Abbildung 4.1:

$$u_{\text{app}}(t) := u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Verfahren höherer Ordnung gehen von stetig differenzierbaren Steuerungen aus. Sie erreichen zwar eine hohe Genauigkeit, nehmen jedoch mehr Rechenzeit bei der Lösung des Optimalsteuerungsproblems in Anspruch und einen erhöhten Rechenaufwand bei der Bestimmung der Approximation an Intervallinnenpunkten.

Der Vorteil einer durch kubische Polynome approximierten Steuerung kann z. B. bei unbeschränkten Problemen mit regulärer HAMILTON-Funktion ausgenutzt werden, deren Steuerung einen hinreichend glatten Verlauf aufweisen soll. Hingegen ist bei beschränkten Problemen aufgrund der nichtdifferenzierbaren Steuerung mit Schwierigkeiten an den jeweiligen Auf- und Absprungpunkten zu rechnen.

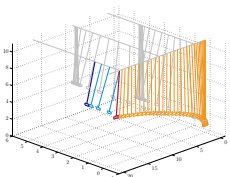
### 4.3.3 Approximation der Zustandsfunktion

Mit einer Approximation der Steuerung  $u_{\text{app}}(t)$  aus dem vorangegangenen Abschnitt lassen sich die Werte der Zustände an jedem der diskreten Punkte durch Lösen der Anfangswertaufgabe

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_{\text{app}}(t)), \quad x(0) = x_0$$

bestimmen.

Es ist dabei ratsam, die Fehlerordnung der Integration in etwa an die der beschriebenen Interpolationen der Steuerung anzugleichen. Für das Problem (4.16) wurde exemplarisch das EULER-Integrationsverfahren aus (4.15) verwendet.



Alternativ kann das Anfangswertproblem mit einem anderen Einschrittverfahren der Form

$$x_{k+1} = x_k + h_k \eta(x_k, u_{\text{app}}, t_k, h_k), \quad k = 1, \dots, N-1$$

mit dem Startwert  $x_1 := x_0$  gelöst werden. Die Schrittweiten  $h_i := t_{i+1} - t_i$  werden dabei der gewählten Diskretisierung der Steuerung angepasst.

In dieser Arbeit kommt das RUNGE-KUTTA-Verfahren der Ordnung 4 nach ENGLAND zum Einsatz mit

$$\eta(x_k, u_{\text{app}}, t_k, h_k) = h_k \frac{1}{6} (z_1 + 4z_3 + z_4)$$

mit

$$z_1 := f(x_k, u_{\text{app}}(t_k))$$

$$z_2 := f\left(x_k + \frac{h_k}{2} z_1, u_{\text{app}}\left(t_k + \frac{h_k}{2}\right)\right)$$

$$z_3 := f\left(x_k + \frac{h_k}{4} (z_1 + z_2), u_{\text{app}}\left(t_k + \frac{h_k}{2}\right)\right),$$

$$z_4 := f\left(x_k - h_k (z_2 + 2z_3), u_{\text{app}}(t_{k+1})\right).$$

Das vierstufige Verfahren liefert Werte für  $x_{k+1}$  mit der Fehlerordnung  $\mathcal{O}(h^4)$ . Durch die vier Funktionsaufrufe innerhalb eines Iterationsschritts stellt es einen akzeptablen Kompromiss zwischen der erreichbaren Genauigkeit und einer schnellen Auswertung dar.

Auf eine Approximation des Zielfunktional kann an dieser Stelle verzichtet werden. In der Praxis ist es häufig der Fall, dass ein optimaler Steuerprozess in MAYER-Form vorliegt, bzw. mittels einer Transformation in die MAYER-Form gebracht werden kann. Somit ist eine Approximation des Zielfunktional nicht mehr notwendig.

In den Anwendungen dieser Arbeit wurden bei der numerischen Auswertung die verwendeten optimalen Steuerprozesse entsprechend auf MAYER-Form transformiert, um eine zusätzliche Approximation zu umgehen.

### 4.3.4 Beschränkungen

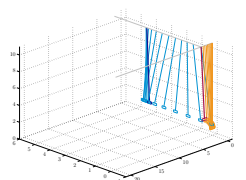
Für die allgemeinen Beschränkungen der Form

$$C(x(t), u(t)) \leq 0$$

wird eine vergleichbar einfache Variante verwendet. Die Beschränkungen werden zu jedem diskreten Zeitpunkt  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  direkt ausgewertet:

$$C_j(x(t_i), u(t_i)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, s. \quad (4.17)$$

Der Vorteil dieser Variante ist es, dass bei der Verwendung von direkten Verfahren die Auswertung der Beschränkungen direkt vorgenommen werden kann und für alle direkten Verfahren realisierbar ist.



Hingegen wird die Anzahl der Nebenbedingungen im resultierenden nichtlinearen Optimierungsproblem beträchtlich erhöht und es kann zudem nicht sichergestellt werden, dass die Beschränkungen im Inneren der Teilintervalle eingehalten werden. Letzteres kann z.B. bei der kubischen Interpolation der Steuerung auftreten und führt insbesondere zum Verlust der Approximationsgüte. Eine Abmilderung kann erreicht werden, indem die Intervallgrenzen gezielt an den Ein- und Austrittspunkten gesetzt werden. Eine geeignete Methode ist die automatische Gitterpunktanpassung, beschrieben in Büskens [Büs98].

Im Vergleich zur beschriebenen Methode wäre eine Alternative die, bei der die Beschränkungen durch die Einführung zusätzlicher dynamischer Variablen in Randwerte transformiert werden. Damit ist eine Überprüfung der Beschränkungen entlang der Trajektorie möglich. Allerdings birgt diese Methode andere Nachteile, unter anderem die Problematik der Nichtdifferenzierbarkeit an den Ein- und Austrittspunkten. Speziell in Verbindung mit der hier verfolgten Anwendung direkter Verfahren, würden die ergänzten Differentialgleichungen für ein Wachsen der Anzahl an Optimierungsvariablen sorgen, sowie für einen höheren Rechenaufwand.

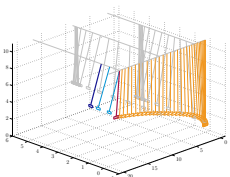
Weitere Ansätze zur Behandlung der Beschränkungen, die die Anzahl der Bedingungen nur unwesentlich erhöhen und die Einhaltung der Beschränkungen auf dem gesamten Intervall garantieren, werden kurz in Büskens [Büs98] vorgestellt.

Bei dem beschriebenen Verfahren (4.17) wiegen die Vorteile die Nachteile auf. Da durch die zusätzlichen aktiven Beschränkungen die Freiheitsgrade des Systems reduziert werden, kann in der Regel sogar eine optimale Lösung schneller gefunden werden.

## 4.4 Vergleich direkter mit indirekten Verfahren

Grundsätzlich ist davon auszugehen, dass weder durch direkte als auch indirekte Verfahren ein globales Minimum angegeben werden kann. Durch die Resultate der Theorie optimaler Steuerprozesse ist es bei der Anwendung indirekter Verfahren nur möglich Aussagen über lokale Minima zu treffen. Bei den direkten Verfahren stellt sich eine ähnliche Problematik, aufgrund der Reduzierung auf ein nichtlineares Optimierungsproblem, dar. Durch den Einfluss einer Startschätzung auf die Optimierungsvariablen kann eine Verbesserung mit einfachen Mitteln erzielt werden.

Die indirekten Verfahren verlangen vom Benutzer gute Kenntnisse der Theorie optimaler Steuerprozesse. Dieses zeigt sich hauptsächlich bei der Aufstellung der adjungierten Differentialgleichungen, die meist nichtlinear sind und für große Systemdynamiken schwer zu erhalten sind. Des Weiteren stellt sich das Problem einer geeigneten Startschätzung für den Zustand als auch deren adjungierten Variablen. In der Regel kann letzteren keine physikalische Bedeutung zugeordnet werden. Letztlich sind bei der Formulierung des Randwertproblems weitere Kenntnisse der Struktur der Lösung nötig, wie z. B. die genaue Anzahl der Auf- und Absprungpunkte.





Sollte das indirekte Verfahren konvergieren, kann eine sehr hohe Genauigkeit erzielt werden. Gleichzeitig werden durch die adjungierten Variablen weitere Einblicke gewährt und zusätzliche Informationen des Steuerprozesses bereitgestellt.

Die direkten Verfahren haben hingegen den Vorteil, dass für den Benutzer die gesamte theoretische Vorarbeit der indirekten Verfahren entfällt. Da die Differentialgleichungen der adjungierten Variablen nicht zur Anwendung kommen, kann ebenfalls auf dessen Startschätzungen verzichtet werden. Ebenfalls entfällt die nötige Kenntnis über die Art der Auf- und Absprungpunkte und deren Auftreten, sowie einer geeigneten Startschätzung. Zusätzlich ist der Konvergenzradius der direkten Verfahren deutlich größer als der der indirekten Verfahren, so dass sie weniger anfällig auf schlechte Startschätzungen der Steuervariablen reagieren.

Auf der anderen Seite kann der höhere Speicherplatzbedarf der direkten Verfahren nicht geleugnet werden. Trotz umfangreicheren Verbesserungsstrategien wie die Ausnutzung dünnbesetzter Matrixstrukturen, ist der Bedarf insbesondere bei voller Diskretisierung höher. Hingegen konnten die längeren Rechenzeiten der direkten Verfahren in den letzten Jahren erheblich gesenkt werden. Ebenfalls konnte der Vorsprung der indirekten Verfahren bei der Genauigkeit wettgemacht werden.

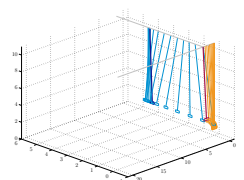
Der wesentliche Unterschied beider Verfahren zeigt sich in der Überprüfbarkeit der Optimalitätsbedingungen. Bei den indirekten Verfahren ist die Formulierung der notwendigen Bedingungen noch leicht durchzuführen. Für die hinreichenden Bedingungen werden allerdings weitere Differentialgleichungen benötigt, inklusive der Gleichungen der zugehörigen adjungierten Variablen. Der Nachweis kann daher nur schwer und oftmals auch gar nicht erbracht werden.

Der erhaltene Vorteil, weitere Informationen aus den adjungierten Variablen gewinnen zu können und die erhaltene Lösung zu bewerten, kann ebenfalls bei den direkten Verfahren genutzt werden. Es ist ohne großen Mehraufwand für den Benutzer möglich, nachträglich die adjungierten Variablen aus der Optimallösung berechnen zu lassen.

Die direkten Verfahren erlauben den Nachweis der notwendigen wie auch hinreichenden Optimalitätsbedingungen, allerdings zuerst einmal nur für das diskretisierte Problem. Damit ist eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung einer parametrischen Sensitivitätsanalyse erfüllt. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass die Ergebnisse nur dann auf den kontinuierlichen Fall übertragbar sind, wenn die Konvergenz der Lösung des diskreten Problems gegen die kontinuierliche gesichert ist.

## 4.5 Sensitivitätsanalyse optimaler Steuerprozesse

In Kapitel 3.5 wurden Begriffe der Sensitivitäten nichtlinearer Optimierungsprobleme entwickelt. Mit dem Rückführen eines optimalen Steuerungsproblems durch



Diskretisierung auf ein nichtlineares Optimierungsproblem (4.14) hat Büskens in [Büs98] eine Sensitivitätsberechnung für optimale Steuerprozesse (4.6) entwickelt.

Durch Anwendung direkter Verfahren ist es möglich, Sensitivitätsableitungen sowohl für die Funktionen als auch für Variablen des optimalen Steuerungsproblems (4.6) anzugeben, vgl. dazu auch Büskens und Maurer [Büs01c]. Es wird dabei vorausgesetzt, dass eine Optimallösung des kontinuierlichen Problems bzgl. der Störparameter differenzierbar ist.

Bereits Maurer und Pesch [Mau94a, Mau94b] zeigten im Zusammenhang mit ersten Stabilitätsuntersuchungen, dass die optimale Lösung bzgl. der Störparameter und der Zeit differenzierbar ist, wobei die Steuerung skalarwertig war und eine skalarwertige gemischte Nebenbedingungen vorausgesetzt wurde. Malanowski und Maurer [Mal96, Mal98] erweiterten die Resultate auf vektorwertige Steuerungen und gemischte Beschränkungen. Ein vollständiger Nachweis für alle Klassen von Steuerprozessen wurde noch nicht erbracht.

Nachfolgend sei von einer optimalen Lösung  $u^*$  des gestörten Problems zum Nominalwert  $p_0$  ausgegangen. Zusätzlich sei die Integrandenfunktion des Zielfunktional  $f_0 = 0$ , so dass von einem Steuerprozess in MEYER-Form ausgegangen wird. Das diskretisierte, gestörte, optimale Steuerungsproblem liegt somit in folgender Form vor:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(u, p) = g(x_N(u, p), p) \\ \text{unter} \quad & \psi(x_N(u, p), p) = 0, \\ & C(x_i(u, p), u_i(p), p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Durch  $u_i(p)$  wird die diskretisierte Steuerung in Abhängigkeit vom Störparameter  $p$  beschrieben und  $x_i(u, p)$  bezeichnet gerade den durch das entsprechend gewählte Integrationsverfahren aus  $u_j(p)$ ,  $j = 1, \dots, i - 1$  berechneten Zustand.

Die zugehörige LAGRANGE-Funktion zur nominellen Störung  $p = p_0$  ergibt sich dann zu

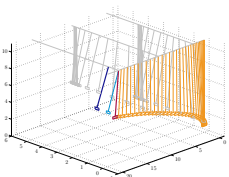
$$\begin{aligned} L(x(u, p_0), u, \nu, \mu, p_0) &= g(x_N(u, p_0), p_0) + \nu^T \psi(x_N(u, p_0), p_0) \\ &\quad + \mu^T C(x(u, p_0), u(p_0), p_0). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Abkürzungen

$$\begin{aligned} L &:= L(x(u^*, p_0), u^*, \nu^*, \mu^*, p_0), \\ \tilde{g} &:= (\psi(x_N(u^*, p_0), p_0), C(x(u^*, p_0), u^*(p_0), p_0)) \end{aligned}$$

und gemäß dem Satz 3.14 unter den Voraussetzungen von Satz 3.12 ergeben sich für die diskretisierten Steuerungen die Sensitivitäten

$$\frac{du}{dp}(p_0) = -\nabla_u^2 L^{-1} \nabla_{up} L - \nabla_u \tilde{g}^{-T} \nabla_p \tilde{g}. \quad (4.18)$$



Sollte der Fall eines freien Anfangszustandes  $x_1$  auftreten, so kann dieses durch einen erweiterten Optimierungsvektor  $\hat{u} := (u_1, \dots, u_N, x_1)$  realisiert werden.

Um die Sensitivitäten der Zielfunktion berechnen zu können, ist es notwendig, die Sensitivitätsableitungen der Zustände  $x(t)$  zu ermitteln. Die diskretisierten Zustände  $x_i = x_i(u, p)$  stellen zwar keine Optimierungsvariablen dar, können jedoch als Zugehörigkeitsfunktionen verstanden werden, die wiederum unabhängig von den LAGRANGE-Multiplikatoren sind. In Anlehnung an Satz 3.16 ergibt sich:

$$\frac{dx_i}{dp}(p_0) = \nabla_{u_i} \frac{du}{dp}(p_0) + \nabla_p x_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Durch die Verwendung der Folgerung 3.18 und der Sensitivitätsableitung des Zustandes für  $i = N$  kann die Sensitivität der Zielfunktion angegeben werden zu

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dp}(p_0) &= \frac{dg}{dp}(x_N(u(p_0)), p_0) = \nabla_{x_N} g \frac{dx_N}{dp}(p_0) + \nabla_p g \\ &= \nabla_{x_N} g \left[ \nabla_{u_N} \frac{du}{dp}(p_0) + \nabla_p x_N \right] + \nabla_p g \end{aligned}$$

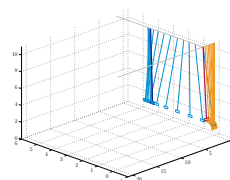
Letztere Gleichung kann noch weiter umgeschrieben werden, so dass sie unabhängig von den Sensitivitäten der Optimierungsvariable ist:

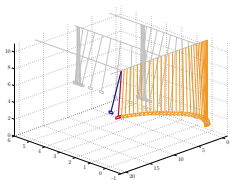
$$\frac{d\Phi}{dp}(p_0) = \nabla_p L = \nabla_p g + (\nu^{*T}, \mu^{*T}) \nabla_p \tilde{g}.$$

Mit Hilfe der berechneten Lösung des ungestörten Problems und der Ermittlung der Sensitivitätsableitungen können diese in der Echtzeitoptimierung zur Anwendung kommen. Entscheidend dabei ist, dass bei Störungen im System schnell eine alternative Bahn bzw. Steuerung bereitstehen muss um eine Instabilität zu umgehen. Um dieses zu gewährleisten, wäre eine komplette Neuberechnung des optimalen Steuerungsproblems unter Berücksichtigung der Störung keine gute und schnelle Lösung.

Für etwaige notwendige Steuerkorrekturen, hervorgerufen durch Störungen, z. B. in der Dynamik, kann um ein Vielfaches schneller und korrekter reagiert werden, wenn diese Berechnung entfällt. Die Sensitivitäten werden bereits *offline* zusammen mit der nominellen Lösung berechnet und stehen somit für den *online* Einsatz zur Verfügung.

In Büskens und Gerdts [Büs03] wird dieses Vorgehen am Beispiel eines Notlandemanövers eines Raumgleiters beschrieben. Büskens und Knauer [Büs04] verwenden diesen Vorteil bei der Bahnplanung eines Industrieroboters.





# Linear quadratische Regulatorprobleme

In Kapitel 4 wurden bereits notwendige Optimalitätsbedingungen für kontinuierliche optimale Steuerprozesse formuliert, wobei es sich um eine allgemeine Dynamik und ein allgemeines Zielfunktional handelte. In diesem Kapitel wird der Fall einer linearen Systemdynamik ohne Beschränkungen mit quadratischer Zielfunktion untersucht.

In Abschnitt 5.1 wird das Ziel verfolgt, ein optimales Regelgesetz herzuleiten, so dass der Zustand eines lineares System zum festen Endzeitpunkt  $t_f$  zu Null geregelt wird. In der Literatur sind diese Probleme bekannt als LQR-Probleme<sup>17</sup>. Um den Aufwand bei der Berechnung und der Speicherung der Daten möglichst gering zu halten wird in Abschnitt 5.3 der Fall einer suboptimalen Regelung untersucht. Zuvor wird in Abschnitt 5.2 ein kurzer Einblick in die Grundlagen der Systemtheorie gewährt, die für die Behandlung suboptimaler Regler notwendig sind.

Eine Übersicht über linear quadratische Methode wird unter anderem in Anderson und Moore [And89] und Athans und Falb [Ath66] gegeben. Weitere Einblicke in die Theorie geben Lewis und Syrmos [Lew95] sowie Bryson und Ho [Bry75].

Föllinger [Föl94a, Föl94b] und Wehrich [Wei73] geben eine Einführung in das Thema mit einem großen Bezug zur Verwendung in der Praxis.

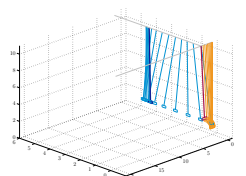
## 5.1 Das optimale Regelgesetz

Der zu steuernde Zustand ist gegeben durch die lineare Dynamik

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{5.1}$$

---

<sup>17</sup>engl.: linear quadratic regulator



mit  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  und geeignet dimensionierten Matrizen  $A$  und  $B$ . Als Zielfunktional wird die quadratische Funktion der Form

$$\Psi(x, u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (5.2)$$

betrachtet, wobei  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv semidefinit,  $Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv semidefinit und  $R(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  positiv definit,  $\forall t \in [t_0, t_f]$  symmetrische Matrizen sind. Des Weiteren ist es möglich, dass alle auftretenden Matrizen bis auf  $S$  sowohl zeitvariant als auch zeitinvariant sein können. Als Zeitintervall sei  $[t_0, t_f]$  mit einem Anfangszustand  $x(t_0) = x_0$  gegeben, der Endzustand sei frei. Ziel ist es eine Steuerung  $u(t)$  zu finden, die das Zielfunktional  $\Psi$  minimiert.

Zur Lösung des Problems wird zuerst die HAMILTON-Funktion gemäß Gleichung (4.7) gebildet. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei im Weiteren  $\lambda_0 := 1$ , vgl. Satz 4.11.

$$H(x, \lambda, u, t) = \frac{1}{2}(x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)) + \lambda^T(t)(A(t)x(t) + B(t)u(t))$$

Die Zustands- und die Kozustandsgleichung ergeben sich gemäß (4.8) zu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t). \end{aligned}$$

Die stationäre Bedingung (4.12) liefert

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R(t)u(t) + B^T(t)\lambda(t). \quad (5.3)$$

Durch Umformen von Gleichung (5.3) erhält man

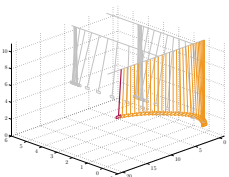
$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t), \quad (5.4)$$

wobei  $R(t)$  regulär und damit invertierbar ist, da  $R$  als positiv definit vorausgesetzt wurde. Die optimale Steuerung ist somit festgelegt, wenn es gelingt, eine Lösung für den Kozustand zu erhalten. Durch Einsetzen von (5.4) in die Zustandsdifferentialgleichung lässt sich  $u$  eliminieren. Man erhält

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t)$$

In kompakter Schreibweise ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$



dass auch als HAMILTON-System oder als HAMILTON-Gleichungen bezeichnet wird. Es handelt sich dabei um ein System aus  $2n$  homogenen linearen Differentialgleichungen. Da der Anfangszustand zum Zeitpunkt  $t_0$  durch  $x_0$  gegeben ist und der Endzustand als frei angenommen wird, ergibt sich gemäß der Transversalitätsbedingung (4.9) die zusätzliche Randbedingung

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial g}{\partial x(t_f)} = Sx(t_f). \quad (5.6)$$

Es wird davon ausgegangen, dass die Beziehung (5.6) nicht nur im Endzeitpunkt  $t_f$ , sondern auch zu allen anderen Zeitpunkten  $t \in [t_0, t_f]$  mit einer noch zu bestimmenden Matrixfunktion  $P(t)$  gilt mit

$$\lambda(t) = P(t)x(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (5.7)$$

Ist es möglich ein solches  $P(t)$  zu bestimmen, dann kann man (5.7) als richtig ansehen. Dieses Vorgehen ist in der Literatur auch als *sweep method* bekannt, vgl. Bryson und Ho [Bry75] und Gelfand und Fomin [Gel63].

Dazu wird die Gleichung (5.7) in die HAMILTON-Gleichungen (5.5) eingesetzt:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) \quad (5.8)$$

$$\dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) = -Q(t)x(t) - A^T(t)P(t)x(t) \quad (5.9)$$

Anschließend wird (5.8) in (5.9) eingesetzt und man erhält

$$\left( \dot{P}(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t) \right) x(t) = 0.$$

Diese Gleichung muss zu allen Zeitpunkten  $t \in [t_0, t_f]$  gelten. Da für beliebige Anfangszustände  $x_0$  die Zustandstrajektorie  $x(t)$  aus (5.8) der Gleichung genügen muss, muss notwendigerweise gelten:

$$\dot{P}(t) = P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t). \quad (5.10)$$

Es handelt sich dabei um ein Matrixdifferentialgleichung 1. Ordnung für die Matrix  $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sie wird als RICCATI-Differentialgleichung bezeichnet. Es sei darauf hingewiesen, dass es sich aufgrund des ersten Terms der rechten Seite in (5.10) um eine nichtlineare Differentialgleichung handelt.

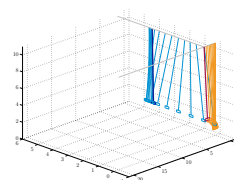
Um eine eindeutige Lösung der RICCATI-Differentialgleichung zu bekommen, muss eine Anfangsbedingung formuliert werden. Man erhält aus der Ausgangsgleichung (5.7) und der Transversalitätsbedingung (5.6)

$$P(t_f)x(t_f) = \lambda(t_f) = Sx(t_f),$$

so dass

$$P(t_f) = S \quad (5.11)$$

eine geeignete Anfangsbedingung ist. Zusätzlich gilt für  $P(t)$  folgendes Lemma:



**Lemma 5.1**

Sei  $P(t)$  die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung (5.10) mit dem Anfangswert (5.11), dann ist  $P(t)$  symmetrisch für alle  $t \in [t_0, t_f]$ .  $\diamond$

**Beweis:**

Die Matrizen  $Q(t)$  und  $R(t)$  sind als symmetrisch Matrizen gegeben, also auch  $B(t)R^{-1}(t)B^T(t)$ . Durch Transponieren beider Seiten in Gleichung (5.10) erhält man

$$\left(\dot{P}(t)\right)^T = P^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P^T(t) - P^T(t)A(t) - A^T(t)P^T(t) - Q(t). \quad (5.12)$$

Weiter gilt für jede Matrix  $P(t)$

$$\left(\frac{d}{dt}P(t)\right)^T = \frac{d}{dt}(P^T(t)). \quad (5.13)$$

Vergleicht man Gleichung (5.12) mit (5.10) unter Beachtung von (5.13), ist offensichtlich, dass sowohl  $P(t)$  als auch  $P^T(t)$  Lösungen der gleichen Differentialgleichung sind. Weiter ist  $S$  als symmetrische Matrix gegeben, also  $P^T(t_f) = S^T = S$ . Damit erhält man für die Anfangsbedingung

$$P(t_f) = P^T(t_f) = S.$$

Gemäß den Voraussetzungen einer eindeutigen Lösung einer Differentialgleichung ergibt sich  $P(t) = P^T(t)$ .  $\blacksquare$

Die Steuerung lässt sich schreiben als

$$u^*(t) = -K(t)x(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t),$$

mit  $K(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $K(t) := R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$ . Dabei handelt es sich um die eindeutig bestimmte optimale Steuerung, die das Zielfunktional (5.2) minimiert. Die Eindeutigkeit liefert die Gleichung (5.8) mit Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  zusammen mit der eindeutigen Lösung  $P(t)$  der RICCATI-Differentialgleichung.

Da  $R(t)$  als positiv definit für alle  $t \in [t_0, t_f]$  vorausgesetzt wurde, sind die strengen LEGENDRE-CLEBSCH-Bedingungen (4.11) erfüllt mit

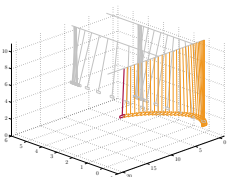
$$\nabla_u H(t) = 0 \text{ und } \nabla_u^2 H(t) = R(t) > 0 \quad (\text{positiv definit}).$$

Damit ist auch die Existenz dieser Steuerung  $u^*(t)$  gesichert.

**Lemma 5.2**

Gegeben sei das lineare System (5.1) und das Zielfunktional (5.2). Der minimale Wert des Zielfunktionals ist durch die Funktion

$$\Psi^*(t) = \frac{1}{2}x^T(t)P(t)x(t) \quad (5.14)$$





gegeben, wobei  $P(t)$  die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung (5.10) mit Anfangsbedingung (5.11) ist. Ist zudem die optimale Steuerung  $u^*(t) \neq 0$  für alle Zustände, so ist die Matrix  $P(t)$  positiv definit für alle  $t$  mit  $t_0 \leq t < t_f$ , und  $P(t_f) = S$  positiv semidefinit.  $\diamond$

**Beweis:**

Ausgangspunkt ist die quadratische Form  $x^T(t)P(t)x(t)$ . Differenzieren nach der Zeit  $t$  ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^T(t)P(t)x(t)) &= \dot{x}^T(t)P(t)x(t) + x^T(t)\dot{P}(t)x(t) + x^T(t)P(t)\dot{x}(t) \\ &= x^T(t) (A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t))^T P(t)x(t) \\ &\quad + x^T(t)(P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t))x(t) \\ &\quad + x^T(t)P(t) (A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)) x(t). \end{aligned}$$

Da  $R(t)$  und  $P(t)$  gemäß Lemma 5.1 symmetrisch sind, folgt

$$\frac{d}{dt} (x^T(t)P(t)x(t)) = - (x^T(t)Q(t)x(t) + x^T(t)P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)).$$

Der zweite Summand der rechten Seite lässt sich mit der Steuerung  $u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$  vereinfachen zu

$$-\frac{d}{dt} (x^T(t)P(t)x(t)) = x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t).$$

Mittels Integration über  $[t_0, t_f]$  erhält man

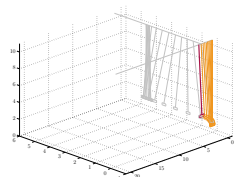
$$-x^T(t_f)P(t_f)x(t_f) + x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt.$$

Da  $P(t)$  die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung mit  $P(t_f) = S$  ist, ergibt sich:

$$x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) = x^T(t_f)Sx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt.$$

Bis auf den Faktor  $\frac{1}{2}$  steht auf der rechten Seite gerade das Zielfunktional (5.2). Da  $u$  als die optimale Steuerung  $u^*$  gewählt wurde ist der minimale Zielfunktionswert  $\Psi^*$  durch die Funktion

$$\Psi^*(t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0)x(t_0)$$



gegeben. Damit kann für jeden Anfangswert  $x(t_0)$  der Wert des Zielfunktional für die optimale Steuerung  $u^*$  berechnet werden. Es ist also möglich, einen beliebigen Anfangszeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$  zu wählen, so dass auf dem Teilintervall  $[t, t_f]$  der Wert des Zielfunktional beschrieben wird durch

$$\Psi^*(t) = \frac{1}{2}x^T(t)P(t)x(t).$$

Die positive Definitheit von  $P(t)$  folgt aus der Konstruktion des Zielfunktional. Da  $S$  und  $Q(t)$  positiv semidefinit  $\forall t \in [t_0, t_f]$ ,  $R(t)$  positiv definit  $\forall t \in [t_0, t_f]$  und es sich um quadratische Terme handelt, muss  $\Psi(x, u) > 0$  sein, also auch  $\Psi^*(t)$ , falls  $u^*(t) \neq 0$ . Damit ist  $P(t)$  für  $t_0 \leq t < t_f$  positiv definit. ■

Durch die Gleichung (5.14) ist es möglich, für jeden gegebenen Zustand den Wert des Zielfunktional für die optimale Steuerung zu berechnen. Es kann somit bereits vor der Anwendung der optimalen Regelung ein Wert für dessen Leistung und Verhalten<sup>18</sup> auf dem Intervall  $[t, t_f]$  berechnet werden.

Zusammenfassend lässt sich der folgende Satz formulieren:

### Satz 5.3 (Optimale zeitabhängige Regelung)

Gegeben sei das lineare System (5.1) und das Zielfunktional (5.2), wobei  $u(t)$  keiner Beschränkung unterliegt. Die Endzeit  $t_f$  sei fest und  $x(t_0) = x_0$  gegeben.  $S$  und  $Q(t)$  seien positiv semidefinite symmetrische Matrizen und  $R(t)$  positiv definite und symmetrisch, für alle Zeitpunkte  $t$ . Dann existiert eine eindeutige optimale Steuerung

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t),$$

mit der  $n \times n$  symmetrischen Matrix  $P(t)$ , die eindeutige Lösung der RICCATI-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t), \\ P(t_f) &= S. \end{aligned}$$

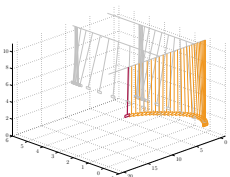
Der Minimalwert  $\Psi^*$  des Zielfunktional ist gegeben durch

$$\Psi^*(t) = \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0)$$

Der Zustand des geschlossenen optimalen Systems ist gegeben durch die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t))x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad \diamond$$

<sup>18</sup>In der englischsprachigen Literatur ist „Leistung“ und „Verhalten“ zusammenfassend als „performance“ bekannt.



**Bemerkung 5.4 (JOSEPH-Form)**

Bessere numerische Eigenschaften weist die sogenannte JOSEPH-Form<sup>19</sup> der RICCATI-Differentialgleichung auf. Aus der Gleichung (5.10) ergibt sich zusammen mit der Regelungsmatrix  $K(t) := R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$  der Zustandsrückführung:

$$-\dot{P}(t) = (A(t) - B(t)K(t))^T P(t) + P(t)(A(t) - B(t)K(t)) + K^T(t)R(t)K(t) + Q(t). \quad (5.15)$$

◇

## 5.2 Grundlagen der Systemtheorie

Für die Erarbeitung suboptimaler Regler ist es notwendig einige Kenntnisse aus der Systemtheorie bereitzustellen. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt einige Grundlagen der Systemtheorie präsentiert. Der Schwerpunkt liegt dabei in der Erklärung der Begriffe und nicht in der Herleitung von Gleichungen oder Beweisen. Eine ausführliche Behandlung kann in zahlreichen Büchern (vgl. [Lun08a, Lun08b, Föl94b]) nachgeschlagen werden.

### 5.2.1 Stabilität

Bei der Betrachtung von autonomen Differentialgleichungssystemen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.16)$$

ergibt sich unmittelbar die Definition der Ruhelage:

**Definition 5.5 (Ruhelage)**

Eine Lösung der Gleichung

$$0 = f(x_R)$$

des autonomen Systems (5.16) heißt Ruhelage bzw. Gleichgewicht<sup>20</sup>.

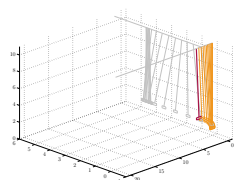
◇

Demnach ist eine Ruhelage ein Zustand, in dem das System verharrt. Es müssen alle zeitlichen Ableitungen Null sein. Die Definition der Ruhelage lässt sich auch auf Systeme erweitern, die zusätzlich von einer Steuerung abhängen, indem zusätzlich eine konstante Steuerung  $u_R$  vorausgesetzt wird.

In der Systemtheorie wird die Fragestellung untersucht, wie das Langzeitverhalten dynamischer Systeme ist, und ob ein System gegen eine bestimmte Ruhelage  $x_R$

<sup>19</sup>engl.: Joseph stabilized formulation

<sup>20</sup>In der Literatur auch als *Betriebszustand* bezeichnet.



konvergiert. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann diese Ruhelage zu  $x_R = 0$  angenommen werden, da dies durch eine Transformation stets erreicht werden kann. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Lösung nahe dem Ursprung für alle Anfangswerte und für endliche Zeit  $t > 0$  existiert. Man kann folgende Definition der Stabilität angeben.

**Definition 5.6 (Stabilität<sup>21</sup>)**

Sei  $x_R$  eine Ruhelage des Systems (5.16).

- i. Die Ruhelage  $x_R$  heißt stabil, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\|x(t) - x_R\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

für alle Anfangswerte  $x_0$  mit  $\|x_0 - x_R\| < \delta$  erfüllt ist.

- ii. Die Ruhelage  $x_R$  heißt asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und weiter für jedes  $\delta > 0$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $t_g \geq 0$  existiert, mit

$$\|x(t) - x_R\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_g$$

für alle Anfangswerte  $x_0$  mit  $\|x_0 - x_R\| < \delta$ . ◇

Die Stabilität in i. bedeutet prinzipiell, dass das homogene Differentialgleichungssystem für alle  $t \geq 0$  beschränkt ist, während durch die gleichmäßige Konvergenz in ii. zusätzlich noch  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$  gefordert wird.

Als Kriterium für Stabilität lässt sich der folgende Satz formulieren.

**Satz 5.7 (Asymptotische Stabilität)**

Eine Ruhelage  $x_R$  des Systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

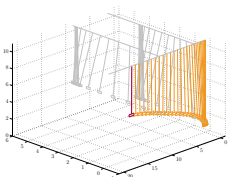
ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $A$  in der linken komplexen Halbebene liegen. ◇

**Beweis:**

Eine Herleitung des Kriteriums ist in Lunze [Lun08a] zu finden. ■

In der Literatur wird häufig anstelle von asymptotischer Stabilität einer beliebigen Ruhelage nur von der Stabilität des Systems gesprochen, wobei  $x_R$  immer zu Null vorausgesetzt wird. Dieses ist insofern zulässig, sollten lineare Systeme mit  $\det A \neq 0$

<sup>21</sup>Die Definition ist auch als *Stabilität im Sinne von LJAPUNOW* bekannt.



betrachtet werden, die nur die Ruhelage  $x_R = 0$  besitzen. Der gleiche Sprachgebrauch ist für Systeme mit singulären Systemmatrizen  $A$  ebenfalls anwendbar, da deren unendlich vielen Ruhelagen stets die selbe Stabilitätseigenschaft haben.

Kehrt man zurück zu einem linearen zeitinvarianten Steuerprozess mit

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.17)$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , deren Lösung durch

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \quad (5.18)$$

gegeben ist, so kann es sein, dass das System (5.17) mit  $u(t) = 0$ , für alle  $t \in [0, \infty[$  instabil ist. Es drängt sich die Frage auf, ob durch eine geeignet gewählte Steuerung  $u(t) \neq 0$  das ursprünglich instabile System gegen eine Ruhelage  $x_R = 0$  konvergiert oder diese sogar erreicht.

### Definition 5.8

Das System (5.17) heißt stabilisierbar, wenn eine Matrix  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existiert, so dass die Dynamik

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$$

asymptotisch stabil ist. ◇

Mit Satz 5.7 lässt sich direkt ein Kriterium formulieren.

### Satz 5.9 (Stabilisierbarkeit)

Das System (5.17) ist genau dann stabilisierbar, wenn die Eigenwerte der Matrix

$$A + BK$$

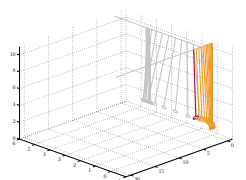
in der linken komplexen Halbebene liegen. ◇

### Beweis:

Anwendung von Satz 5.7 auf die Systemmatrix  $A + BK$ . ■

## 5.2.2 Steuerbarkeit

Es soll nun die Frage geklärt werden, ob es möglich ist, das System (5.17) in einen gewünschten Endzustand zu steuern. Im Folgenden geht es darum, ein Kriterium zu finden, um festzustellen, welche Zustände  $\tilde{x}$  durch eine geeignete Wahl der Steuerung in endlicher Zeit in eine gewünschte Ruhelage  $x_R$  überführt werden können. Auch hier sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $x_R = 0$  angenommen.



**Definition 5.10**

Gegeben sei das System (5.17)

- i. Ein Zustand  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  des Systems (5.17) heißt steuerbar, falls eine Steuerung  $u(t)$  existiert, die in endlicher Zeit  $t$  den Anfangszustand  $x(t_0) = \tilde{x}$  in den Endzustand  $x(t_f) = 0$  überführt.
- ii. Das System (5.17) heißt vollständig steuerbar, wenn jeder Zustand  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  steuerbar ist. ◇

Als verkürzende Schreibweise wird das Steuerungssystem (5.17) durch  $(A, B)$  beschrieben, wodurch die Abhängigkeit des Systems von den Matrizen  $A$  und  $B$  verdeutlicht wird. Es lässt sich zeigen:

**Satz 5.11 (Steuerbarkeitskriterium nach KALMAN)**

Das System  $(A, B)$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn für die Steuerbarkeitsmatrix

$$\text{Rang}([B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]) = n$$

gilt. ◇

**Beweis:**

Der Beweis des Steuerbarkeitskriteriums nach KALMAN ist in Lunze [Lun08b] erbracht. ■

Wird eine Steuerung so gewählt, dass das System in endlicher Zeit in die Ruhelage  $x_R = 0$  überführt wird und anschließend identisch zu Null gesetzt wird, ergibt sich die Folgerung:

**Folgerung 5.12**

Ist das System (5.17) vollständig steuerbar, so ist es auch stabilisierbar. ◇

Eine äquivalente Formulierung zu Satz 5.11 stellt das Kriterium von HAUTUS dar.

**Satz 5.13 (POPOV-BELEVITCH-HAUTUS-Kriterium für vollst. Steuerbarkeit)**

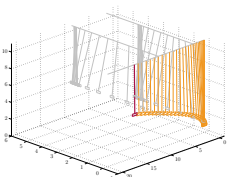
Das System  $(A, B)$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang}([\lambda I - A, B]) = n,$$

für alle Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $A$  erfüllt ist. ◇

**Beweis:**

In Lunze [Lun08b] kann eine entsprechende Herleitung gefunden werden. ■



### 5.2.3 Beobachtbarkeit

Sei zusätzlich zum linearen zeitinvarianten System (5.17) eine Ausgangsgröße  $y$  definiert. Zusammen erhält man

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{5.19}$$

wobei  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  und  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  gilt. Die Matrizen seien geeignet dimensioniert mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  und  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Wie zuvor in Abschnitt 5.2.2 wird ebenfalls eine verkürzende Schreibweise eingeführt, so dass das System (5.19) durch  $(A, B, C, D)$  beschrieben werden kann.

Bei der Entwicklung von Reglern taucht häufig das Problem auf, dass man bestimmte Zustände bei einem Anwendungsproblem nicht messen kann. Es muss also ein anderer Weg gefunden werden um an diese Werte zu gelangen. Man hat sich deshalb Gedanken darüber gemacht, ob es möglich ist, gerade diese Zustände mit Hilfe der Steuerung  $u(t)$  und dem messbaren oder beobachtbaren Ausgang  $y(t)$  zu ermitteln.

#### Definition 5.14

Gegeben sei das System (5.19).

- i. Ein Zustand  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  des Systems (5.19) heißt beobachtbar, falls eine Steuerung  $u(t)$  über eine endliche Zeitspanne existiert, so dass der Anfangszustand  $x(t_0) = \tilde{x}$  aus der Kenntnis von  $y(t)$  und  $u(t)$  mit  $t < \infty$  eindeutig ermittelt werden kann.
- ii. Das System (5.19) heißt vollständig beobachtbar, wenn jeder Zustand  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  beobachtbar ist. ◇

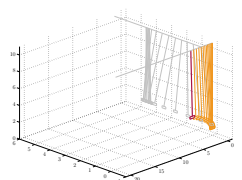
Es lassen sich auch für die vollständige Beobachtbarkeit ähnliche Kriterien wie von KALMAN und HAUTUS für die vollständige Steuerbarkeit beweisen.

#### Satz 5.15 (Beobachtbarkeitskriterium nach KALMAN)

Das System  $(A, B, C)$  ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn für die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

gilt. ◇



**Beweis:**

Der Beweis des Beobachtbarkeitskriteriums nach KALMAN ist in Lunze [Lun08b] zu finden. ■

**Satz 5.16 (POPOV-BELEVITCH-HAUTUS-Kriterium für vollst. Beobachtbarkeit)**  
*Das System  $(A, B)$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung*

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n,$$

für alle Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $A$  erfüllt ist. ◇

**Beweis:**

In Lunze [Lun08b] ist der Beweis auf Basis der Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit gegeben. ■

Mit diesen Ergebnissen wird im folgenden Abschnitt die Weiterentwicklung der optimalen Regelung im Hinblick auf ein suboptimales Regelgesetz fortgesetzt. Es wird sich zeigen, dass das aufgestellte suboptimale Regelgesetz auf der Basis anderer Voraussetzungen mitunter als optimal anzusehen ist.

## 5.3 Das suboptimale Regelgesetz

Im Abschnitt 5.1 wurde eine Steuerung gemäß der Vorschrift

$$u(t) = -K(t)x(t) \tag{5.20}$$

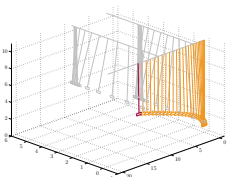
entworfen. Die Matrix  $K(t)$  der Zustandsrückführung ist dabei stets zeitvariant, selbst wenn eine autonome Systemdynamik (5.1) vorliegt. Dies ist nicht unbedingt als Vorteil zu sehen, da die nötigen Berechnungen, spezielle die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung, sehr rechenintensiv sein können. Zusätzlich muss die Matrix  $K(t)$  zu allen Zeitpunkten  $t \in [t_0, t_f]$  bekannt sein, bzw. an hinreichend vielen Zeitpunkten, so dass bei der Berechnung des geschlossenen Systems die Einträge von  $K(t)$  gegebenenfalls durch Interpolation ermittelt werden können.

Es soll hier das Ziel verfolgt werden, eine Steuerung zu finden, so dass für eine zeitinvariante Dynamik

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{5.21}$$

mit  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , dem Anfangszustand  $x(t_0) = x_0$  und geeignet dimensionierten Matrizen, das optimale Regelgesetz durch ein suboptimales Regelgesetz mit einer konstanten Matrix  $K_\infty$  beschrieben werden kann:

$$u(t) = -K_\infty x(t). \tag{5.22}$$





Durch die weiterführenden Betrachtungen in Abschnitt 5.3.3 wird sich zeigen, dass das suboptimale Regelgesetz (5.22) für ein verändertes Zielfunktional sogar die optimale Lösung sein wird.

Um eine solche konstante Matrix  $K_\infty$  zu erhalten, wäre eine Idee, die Grenzlösung von  $K(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  zu nehmen. Das wiederum würde bedeuten, dass eine konstante Grenzlösung  $P_\infty$  der RICCATI-Differentialgleichung für  $(t_f - t) \rightarrow \infty$ <sup>22</sup> existiert. Es wird sich zeigen, dass im Falle der Existenz einer solchen Grenzlösung, das resultierende suboptimale Regelgesetz bereits zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

Zunächst wird der Einfluss einer beliebigen Zustandsrückführung auf das zu steuernde System diskutiert.

### 5.3.1 Auswirkung suboptimaler Regelung

Der zu steuernde Zustand sei gegeben durch die lineare Dynamik

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (5.23)$$

mit  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , dem Anfangszustand  $x(t_0) = x_0$  und geeignet dimensionierten Matrizen. Weiter sei das Steuergesetz (5.20) gegeben, wobei von einer beliebig fest vorgegebenen Matrixfunktion  $K(t)$  ausgegangen wird. Das Interesse sei zunächst auf die Auswirkungen einer solchen Steuerung auf das Zielfunktional

$$\Psi(x, u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt$$

gerichtet und nicht auf die Herkunft der Matrixfunktion  $K(t)$ .

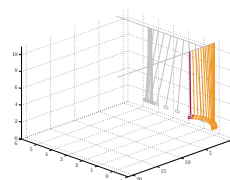
Um den Wert des Zielfunktionals für ein beliebiges  $K(t)$  zu ermitteln wird ähnlich wie im Beweis von Lemma 5.2 vorgegangen. Addiert man Null in der Form

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [x^T(t)P(t)x(t)] - \frac{1}{2}x^T(t_f)P(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) = 0$$

zum Zielfunktional unter Berücksichtigung von (5.20) und (5.23) so ergibt sich für den Wert:

$$\begin{aligned} \Psi(t) = & \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) [Q(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \\ & + K(t)R(t)K(t) - K^T(t)B^T(t)P(t) - P(t)B(t)K(t) + \dot{P}(t)] x(t) dt \end{aligned}$$

<sup>22</sup>Da die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung durch eine Endbedingung gegeben ist, wird sie rückwärts in der Zeit beschrieben und ein unendlicher Zeithorizont ist durch  $(t_f - t) \rightarrow \infty$  gegeben.



Geht man davon aus, dass  $P(t)$  die Lösung von

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= K^T(t)B^T(t)P(t) + P(t)B(t)K(t) - A^T(t)P(t) - P(t)A(t) \\ &\quad - K^T(t)R(t)K(t) - Q(t) \\ &= -(A(t) - B(t)K(t))^T P(t) - P(t)(A(t) - B(t)K(t)) \\ &\quad - K^T(t)R(t)K(t) - Q(t)\end{aligned}\quad (5.24)$$

ist, dann wird der Integrand Null und man erhält  $\Psi(t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0)$ .

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Wert des Zielfunktional auf  $[t, t_f]$  bei der Anwendung einer Steuerung (5.20) mit einer beliebigen Matrixfunktion  $K(t)$  auf die Dynamik des Systems zu jeder Zeit  $t$  durch

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}x^T(t)\hat{P}(t)x(t)\quad (5.25)$$

gegeben ist.  $\hat{P}(t)$  ist dabei die Lösung von (5.24) mit bekannter Endbedingung  $P(t_f) = S$  und der beliebig fest gegebenen Matrixfunktion  $K(t)$ .

Verwendet man das optimale  $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$ , so handelt es sich bei (5.24) um die JOSEPH-Form der RICCATI-Differentialgleichung (5.15). Insbesondere kann es sich bei der Matrixfunktion  $K(t)$  um eine konstante Matrix  $K(t) = K$  handeln, wie es in (5.22) der Fall ist.

Ist  $K(t)$  nicht optimal gewählt, kann i.A. angenommen werden, dass der Wert des Zielfunktional in (5.25) mit der Lösung  $\hat{P}(t)$  aus (5.24) größer sein wird, als der optimale Zielfunktionswert  $\Psi^*(t)$ .

### 5.3.2 Herleitung des suboptimalen Regelgesetzes

Nachfolgend wird von einer autonomen linearen Systemdynamik (5.21) ausgegangen. Das Zielfunktional sei

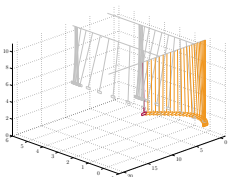
$$\Psi(x, u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt,\quad (5.26)$$

wobei  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv semidefinite symmetrische Matrizen sind und  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  positiv definit und symmetrische ist. Für die optimale Steuerung  $u^*(t) = -K(t)x(t)$  ist

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t),\quad (5.27)$$

wobei  $P(t)$  die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung

$$\dot{P}(t) = P(t)BR^{-1}B^T P(t) - P(t)A - A^T P(t) - Q, \quad P(t_f) = S\quad (5.28)$$



ist.

Bisher basierten die Überlegungen zur suboptimalen Regelung darauf, dass eine Grenzmatrix  $K_\infty$  und damit eine Grenzmatrix  $P_\infty$  der RICCATI-Differentialgleichung gegeben ist. Die Lösung  $P(t)$  sollte sich gerade für  $(t_f - t) \rightarrow \infty$  beliebig nahe dem  $P_\infty$  annähern. Es stellt sich somit die Frage nach der Existenz einer solchen Grenzmatrix.

Da die RICCATI-Differentialgleichung (5.28) durch die Endbedingung rückwärts in der Zeit gelöst wird, betrachtet man  $(t_f - t) \rightarrow \infty$  und es stellt sich heraus, dass die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung unterschiedliches Verhalten aufweisen kann. Sie kann unter Umständen unbegrenzt sein oder gegen eine konstante Matrix  $P_\infty$  konvergieren, die positiv semidefinit, positiv definit oder Null ist.

Falls  $P(t)$  konvergent ist, so kann man  $\dot{P} = 0$  für  $t \ll t_f$  erwarten. Damit ergibt sich im Grenzfall aus der RICCATI-Differentialgleichung (5.28)

$$PBR^{-1}B^TP - PA - A^TP - Q = 0. \quad (5.29)$$

Diese Gleichung bezeichnet man als *algebraische RICCATI-Gleichung*.

Gemäß den Lemmata 5.1 und 5.2 gilt insbesondere für alle  $t \leq t_f$ , dass die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung  $P(t)$  symmetrisch und positiv semidefinit ist, sofern  $P(t_f) = S$  als symmetrisch vorausgesetzt ist. Eine Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung (5.29) muss diese Eigenschaften nicht zwangsläufig auch besitzen. Mit anderen Worten ist eine Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung nicht unbedingt auch die Grenzlösung der RICCATI-Differentialgleichung (5.28) für gegebene  $S$ .

Existiert die Grenzlösung  $P_\infty$  zu (5.28), dann ergibt sich die Matrix  $K_\infty$  zu

$$K_\infty = R^{-1}B^TP_\infty$$

und die konstante Zustandsrückführung

$$u(t) = -K_\infty x(t).$$

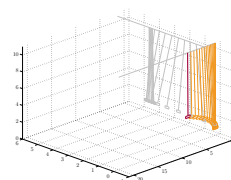
Der Wert des Zielfunktional für diese Steuerstrategie ist durch (5.25) gegeben, wobei  $\hat{P}(t)$  die Beziehung (5.24) erfüllt mit  $K(t) = K_\infty$ .

Der folgende Satz fasst die Zusammenhänge zwischen der Grenzlösung der RICCATI-Differentialgleichung und der Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung zusammen.

### Satz 5.17

Das System (5.21) sei stabilisierbar<sup>23</sup>. Dann existiert für jedes  $P(t_f) = S$  eine beschränkte Grenzlösung  $P_\infty$  der RICCATI-Differentialgleichung (5.28). Weiter ist  $P_\infty$  eine positiv semidefinite Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung (5.29).  $\diamond$

<sup>23</sup>Definition siehe Kapitel 5.2.1



**Beweis:**

Ist das System (5.21) stabilisierbar, dann existiert nach Definition 5.8 eine Steuerung

$$u(t) = -Lx(t) \quad (5.30)$$

so dass das geschlossene System

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t)$$

asymptotisch stabil ist. Damit sind die Zustände  $x(t)$  beschränkt und nähern sich für  $t \rightarrow \infty$  Null an. Der zugehörige Wert des quadratischen Zielfunktional

$$\Psi(t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

ist in Verbindung mit der Lösung der linearen Differentialgleichung aus (5.18) endlich für  $(t_f - t_0) \rightarrow \infty$ . Gemäß (5.25) mit  $t = t_0$  und  $\hat{P}(t_0)$  als Lösung der Differentialgleichung (5.24) mit  $K(t) = L$  und  $\hat{P}(t_f) = S$  ist der Wert des Zielfunktional für die Steuerung (5.30) gegeben durch

$$\Psi(t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_0)\hat{P}(t_0)x(t_0).$$

Für die optimale Steuerung ergibt sich der Wert des Zielfunktional nach Lemma 5.2 zu

$$\Psi^*(t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0),$$

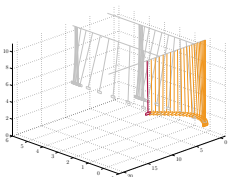
wobei  $P(t_0)$  Lösung der RICCATI-Differentialgleichung mit  $P(t_f) = S$  ist. Da

$$\Psi^*(t_0) \leq \Psi(t_0),$$

ist  $\hat{P}(t_0)$  eine obere Grenze für  $P(t_0)$ , für alle Anfangszeitpunkte  $t_0$ . Die Lösung der RICCATI-Differentialgleichung ist demnach durch eine endliche Matrixfunktion beschränkt.

Nach Casti [Cas77] oder Kwakernak und Sivan [Kwa79] kann gezeigt werden, dass die Lösung  $P(t)$  glatt ist, so dass sie gegen eine konstante Grenzlösung  $P_\infty$  konvergiert, wenn sie durch ein endliches  $\hat{P}(t)$  beschränkt ist. Aus Lemma 5.1 folgt, dass  $P(t)$  für alle  $t$  symmetrisch ist. Die Struktur von (5.28) mit den Voraussetzungen an  $Q$  und  $R$  liefert die positive Semidefinitheit.

Offensichtlich ist, dass  $P_\infty$  eine Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung (5.29) ist. ■



Es hat sich gezeigt, dass unter der Voraussetzung der Stabilisierbarkeit des Systems (5.21), eine endliche Grenzlösung der RICCATI-Differentialgleichung existiert. Das bedeutet, sofern das Intervall  $[t_0, t_f]$  gegen  $\infty$  geht, dass der Wert des Zielfunktional  $\Psi^*$  bei optimaler Steuerung begrenzt bleibt. Da außerdem  $R$  als positiv definit vorausgesetzt wird, ist sichergestellt, dass die optimale Steuerung  $u^*$  ebenfalls nicht gegen  $\infty$  strebt.

### Bemerkung 5.18

*Die Grenzlösung*

$$P_\infty = \lim_{(t_f-t) \rightarrow \infty} P(t)$$

*kann als eine stationäre Lösung der RICCATI-Differentialgleichung interpretiert werden, wenn diese rückwärts in der Zeit gelöst wird.*  $\diamond$

Der Zustand des geschlossenen Systems mit suboptimaler Regelung ist durch die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^TP_\infty)x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.31)$$

gegeben.

### Bemerkung 5.19

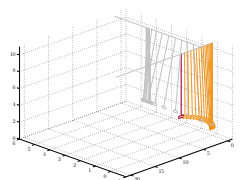
*Bei der Entwicklung einer suboptimalen Regelung kann die vollständige Steuerbarkeit des Systems mit Hilfe des KALMAN-Kriteriums 5.11 auf einfache Weise untersucht werden, so dass nach Folgerung 5.12 aus der vollständigen Steuerbarkeit die Stabilisierbarkeit des Systems folgt.*  $\diamond$

## 5.3.3 Eindeutigkeit der algebraischen RICCATI-Lösung

Da bisher nur die Steuerung zur Minimierung des Zielfunktional ermittelt wurde, stellt sich die Frage, ob das geschlossene System (5.31) auch stabil ist. Des Weiteren ist es von Interesse, unter welchen Bedingungen eine Lösung  $P_\infty$  der algebraischen RICCATI-Gleichung eindeutig ist.

Unter gewissen Umständen kann es sein, dass das offene lineare zeitinvariante System instabil ist. Werden zusätzlich die instabilen Zustände in der Zielfunktion nicht berücksichtigt, ist auch das geschlossene System instabil. Dieses motiviert die Voraussetzung, dass das System  $(A, C)$  *vollständig beobachtbar*<sup>24</sup> sein muss, wobei  $C$  so zu wählen ist, dass  $Q = C^TC$  gilt.

<sup>24</sup>Definition siehe Kapitel 5.2.3



Für die weiteren Betrachtungen wird die künstliche Ausgabe

$$y(t) := \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} u(t)$$

definiert. Die Matrizen  $C$  und  $D$  sind so zu wählen, dass sie mit

$$Q = C^T C, \quad R = D^T D$$

die Quadratwurzeln der Gewichtungsmatrizen beschreiben.

Der folgende Satz liefert die nötigen Voraussetzungen für die Eindeutigkeit der Lösungen der RICCATI-Gleichungen und zur asymptotischen Stabilität des geschlossenen Systems.

### Satz 5.20

Sei  $Q = C^T C$  positiv semidefinit und  $R$  positiv definit. Weiter sei das System  $(A, C)$  beobachtbar. Dann ist das System (5.21) stabilisierbar, genau dann wenn gilt:

- i. Es existiert eine eindeutig bestimmte Grenzlösung  $P_\infty$  der RICCATI-Gleichung (5.28). Weiter ist  $P_\infty$  die eindeutig bestimmte positiv definite Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung (5.29).
- ii. Das geschlossene System

$$\dot{x}(t) = (A - BK_\infty) x(t) \tag{5.32}$$

ist asymptotisch stabil, mit  $K_\infty = R^{-1} B^T P_\infty$ . ◇

Für den Beweis wird das folgende Resultat aus der LYAPUNOV-Theorie verwendet:

### Satz 5.21

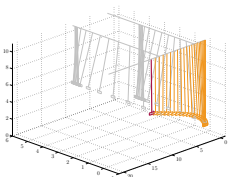
Es sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Systemmatrix  $A$  gegeben mit asymptotisch stabilem Verhalten. Dann hat die LYAPUNOV-Gleichung

$$PA + A^T P = -Q$$

eine positiv semidefinite Lösung  $P$ . Ist zusätzlich  $Q$  gegeben durch  $Q = C^T C$ , so ist die Lösung  $P$  der LYAPUNOV-Gleichung eindeutig und positiv definit, wenn das zugehörige System asymptotisch stabil und  $(A, C)$  vollständig beobachtbar ist. ◇

### Beweis:

In Khalil [Kha02] ist ein Beweis der Aussage zu finden, wobei es sich um autonome Systeme aber nicht zwangsweise um lineare Systeme handelt. Ein Beweis für lineare Systeme ist in Müller [Mül77] beschrieben. ■



**Beweis (von Satz 5.20):**“ $\Leftarrow$ “:

Klar, da aus asymptotischer Stabilität Stabilisierbarkeit folgt.

“ $\Rightarrow$ “:

Die Stabilisierbarkeit sichert die Existenz einer Steuerung  $u(t) = -Lx(t)$ , so dass das geschlossene System  $\dot{x}(t) = (A - BL)x(t)$  asymptotisch stabil ist. Der Wert des Zielfunktional für eine solche Steuerung  $u$  ergibt sich auf dem Intervall  $[t_0, \infty)$  zu

$$\Psi(t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_0)\hat{P}_\infty x(t_0),$$

wobei  $\hat{P}_\infty$  die Grenzlösung von (5.24) ist mit  $K(t) = L$ . Der Wert des Zielfunktional für das optimale, geschlossene System  $\dot{x}(t) = (A - BK(t))x(t)$  mit (5.27) und (5.28) ist auf dem Intervall  $[t_0, \infty)$  gegeben durch

$$\Psi^*(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^{*T}(t)Ru^*(t)] dt = \frac{1}{2}x^T(t_0)P_\infty x(t_0) \leq \Psi(t_0),$$

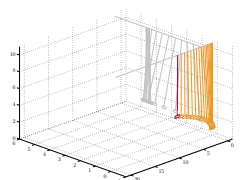
mit der Grenzlösung  $P_\infty$  der RICCATI-Differentialgleichung. Es folgt  $Cx(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  und sogar  $u(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , da  $\det(R) \neq 0$ . Sei nun ein  $t_g$  groß genug gewählt, so dass  $Cx(t)$  und  $u(t)$  vernachlässigbar klein sind für  $t > t_g$ . Zusammen mit der Lösung  $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$  der homogenen Zustandsdifferentialgleichung folgt für  $t > t_g$

$$0 = \begin{pmatrix} Cx(t) \\ C\dot{x}(t) \\ \vdots \\ Cx^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) \\ CAe^{A(t-t_0)}x(t_0) \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{A(t-t_0)}x(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(t).$$

Durch die Beobachtbarkeit von  $(A, C)$  muss zwingend  $x(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  gelten. Damit ist das optimale geschlossene System (5.32) asymptotisch stabil.

Sei nun  $D$  so gewählt, dass  $R = D^TD$  gilt. Dann ist  $\det(D) \neq 0$  und es existiert eine Matrix  $F$  mit  $B = FD$ , so dass man

$$\begin{aligned} \text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \\ DK \end{pmatrix} &= \text{Rang} \begin{pmatrix} I & 0 & F \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \\ DK \end{pmatrix} \\ &= \text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda I - (A - BK) \\ C \\ DK \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.33)$$



erhält. Nach dem HAUTUS-Kriterium (Satz 5.16) folgt aus der Beobachtbarkeit von  $(A, C)$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n,$$

so dass nach (5.33) und erneuter Anwendung des HAUTUS-Kriteriums die Beobachtbarkeit des Systems

$$\left( (A - BK), \begin{pmatrix} C \\ DK \end{pmatrix} \right) \quad (5.34)$$

für alle  $K$  folgt. Insbesondere gilt es auch für  $K_\infty$ .

Weiter lässt sich die algebraische RICCATI-Gleichung (5.29) zusammen mit  $K_\infty$  umformen zu

$$P(A - BK_\infty) + (A - BK_\infty)^T P = - \begin{pmatrix} C \\ DK_\infty \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C \\ DK_\infty \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

was leicht durch Ausmultiplizieren ersichtlich wird. Hierbei handelt es sich um eine LYAPUNOV-Gleichung mit der Systemmatrix aus (5.34).

Da das System (5.34) mit  $K = K_\infty$  vollständig beobachtbar und stabil ist, sind alle Voraussetzungen aus Satz 5.21 gegeben und es existiert eine eindeutige positiv definite Lösung  $P_\infty$  der LYAPUNOV-Gleichung (5.35). ■

Aus dem Beweis lassen sich noch die folgenden Resultate zusammenfassen.

### Bemerkung 5.22

Bei einem groß gewählten Intervall  $[t_0, t_f]$  ist der Wert des Zielfunktional

$$\Psi^*(t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_0) P_\infty x(t_0)$$

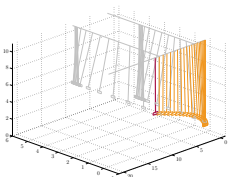
beschränkt und unabhängig von der Wahl der der Gewichtung  $S$  des Endzustandes. ◊

### Bemerkung 5.23

Um den obigen Voraussetzungen in Satz 5.20 gerecht zu werden, reicht es aus, Stabilität vorauszusetzen und die Matrix  $Q$  geeignet zu wählen. Dieses kann schon erreicht werden, indem für  $Q = C^T C$  ein  $C$  gewählt wird, so dass  $(A, C)$  beobachtbar ist. Insbesondere ist dieses mit einer positiv definiten Matrix  $Q$  gegeben. ◊

Des Weiteren hat sich gezeigt, dass die gesuchte suboptimale Lösung gerade eine optimale Lösung auf dem Intervall  $[t_0, \infty)$  bzgl. des Zielfunktional

$$\Psi(x, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (5.36)$$





ist, mit der positiv semidefiniten symmetrischen Matrix  $Q$  und der positiv definiten symmetrischen Matrix  $R$ .

Abschließend seien die Ergebnisse dieses Kapitels in einem zentralen Satz zusammengefasst:

**Satz 5.24 (Optimale zeitinvariante Regelung)**

Gegeben sei das lineare System (5.21) und das Zielfunktional (5.36), wobei  $u(t)$  keiner Beschränkung unterliegt. Der Anfangswert ist durch  $x(t_0) = x_0$  gegeben.  $Q$  sei eine positiv semidefinite symmetrische Matrix und  $R$  positiv definit und symmetrisch. Ist weiter das System  $(A, B)$  in (5.21) stabilisierbar und  $(A, C)$  mit  $Q = C^TC$  beobachtbar, so existiert eine eindeutige, optimale Steuerung

$$u(t) = -R^{-1}B^TP_\infty x(t), \quad (5.37)$$

wobei die symmetrische Matrix  $P_\infty$  die eindeutige positiv definite Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung (5.29) ist. Der Zustand des geschlossenen Systems ist gegeben durch die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^TP_\infty)x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

welches asymptotisch stabil ist. ◇

## 5.4 Numerische Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung

Für die Berechnung des optimalen zeitinvarianten Regelgesetzes in (5.37) ist die Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung (5.29) notwendig. In Föllinger [Föll94b] wird eine iterative Methode zur Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung nach Kleinmann [Kle68] aufgezeigt.

Ein alternatives Lösungsverfahren basiert auf orthogonalen Ähnlichkeitstransformationen, welches im Folgenden vorgestellt wird.

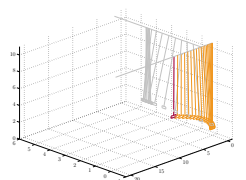
Es sei von der folgenden algebraischen RICCATI-Gleichung ausgegangen:

$$PBR^{-1}B^TP - PA - A^TP - C^TC = 0. \quad (5.38)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  seine gegebene reelle Matrizen. Unter den Voraussetzungen in Satz 5.24 ist die eindeutige, positiv definite und symmetrische Lösung  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  der algebraischen RICCATI-Gleichung gesucht.

Die zur Gleichung (5.38) gegebene HAMILTON-Matrix  $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  ist gegeben durch

$$H := \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & -H_{11}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -C^TC & -A^T \end{pmatrix}.$$



Weiter sei eine Ähnlichkeitstransformation  $T$  gegeben durch

$$T := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

mit der Eigenschaft  $T^{-1} = T^T = -T$ .

Nachfolgenden seien zwei Ergebnisse mit Bezug auf die HAMILTON-Matrix  $H$  genannt, die einen wichtigen Bestandteil des ausgewählten Algorithmus bilden.

### Lemma 5.25

Die Eigenwerte der HAMILTON-Matrix  $H$  liegen symmetrisch zur imaginären Achse.  $\diamond$

#### Beweis:

Durch Ausmultiplizieren erhält man  $T^T H T = -H^T$  bzw.  $T H T = H^T$ .

Sei  $\lambda$  Eigenwert von  $H$  mit Eigenvektor  $v$ :  $Hv = \lambda v$ ,  $v \neq 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} v^T T H &= v^T H^T T^T \\ &= \lambda v^T T^T \\ &= -\lambda v^T T. \end{aligned}$$

Damit ist  $T^T v \neq 0$  linksseitiger Eigenvektor von  $H$  zum Eigenwert  $-\lambda$ .  $\blacksquare$

### Lemma 5.26

Sei  $X := (X_1^T, X_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2n \times n}$  mit  $X_1$  nicht singulär, so dass  $HX = X\Lambda$ ,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  erfüllt ist und alle Eigenwerte von  $\Lambda$  in der linken komplexen Halbebene liegen. Dann gilt:

i. Mit  $T$  aus (5.39) gilt die Gleichung:

$$X^T T X = 0,$$

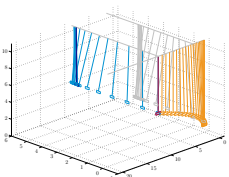
ii.  $P = X_2 X_1^{-1}$  ist symmetrisch und genügt den Gleichungen:

$$\begin{aligned} P H_{11} + H_{11}^T P + P H_{12} P - H_{21} &= 0 \\ H_{11} + H_{12} P &= X_1 \Lambda X_1^{-1}. \end{aligned} \quad \diamond$$

#### Beweis:

(i): Entsprechend den Eigenschaften der HAMILTON-Matrix  $H$  und der Transformationsmatrix  $T$  gilt:

$$\begin{aligned} (X^T T X) \Lambda + \Lambda^T (X^T T X) &= X^T T H X + X^T H^T T X \\ &= X^T (T H - (T H)^T) X \\ &= 0 \end{aligned}$$



Da die Matrix  $\Lambda$  asymptotisch stabil ist (alle Eigenwerte liegen in der linken komplexen Halbebene, vgl. Satz 5.7), ist die Lösung der linearen Matrixgleichung  $Y\Lambda + \Lambda^T Y = 0$  gegeben durch  $Y = 0$ .

(ii): Mit der Aussage in (i) folgt  $X_1^T X_2 = X_2^T X_1$ . Damit gilt  $X_2 X_1^{-1} = (X_1^T)^{-1} X_2^T$ , so dass  $P$  symmetrisch ist.

Weiter folgt aus (i)  $0 = X^T T X \Lambda = X^T T H X$ , so dass gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (X_1^T)^{-1} X^T T H X X_1^{-1} \\ &= (P \quad -I) \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & -H_{11}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \\ &= P H_{11} + H_{11}^T P + P H_{12} P - H_{21}. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} H_{11} + H_{12} P &= (I \quad 0) H X X_1^{-1} \\ &= (I \quad 0) X \Lambda X_1^{-1} \\ &= X_1 \Lambda X_1^{-1}. \end{aligned}$$

■

Sofern es möglich ist unter den gegebenen Voraussetzungen in Satz 5.24 eine orthogonale Matrix  $X$  zu bestimmen, so dass gilt

$$X^{-1} H X = \begin{pmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ 0 & \bar{H}_{22} \end{pmatrix},$$

so stimmen die Eigenwerte von  $\bar{H}_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit den  $n$  Eigenwerten der linken komplexen Halbebene von  $H$  überein. Gemäß Lemma 5.25 sind die zur imaginären Achse symmetrischen Eigenwerte der rechten komplexen Halbebene von  $H$  gerade die Eigenwerte der Matrix  $\bar{H}_{22}$ .

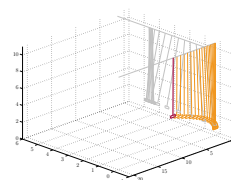
Die Berechnung einer solchen orthogonalen Matrix  $X$  unter den gegebenen Voraussetzungen erfolgt über die geordnete SCHUR-Zerlegung, vgl. Potter [Pot66] und Kucera [Kuc72]. Man kann also schreiben

$$H \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix} \bar{H}_{11}.$$

Zusätzlich kann gezeigt werden, dass unter den gegebenen Voraussetzungen  $X_{11}$  nicht singulär ist. Die Spalten von  $X_1 := (X_{11}^T, X_{21}^T)^T$  spannen dabei den selben  $n$ -dimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^{2n}$  auf, wie die verallgemeinerten Eigenvektoren zu den Eigenwerten von  $H$  mit negativem Realteil.

Nach Lemma 5.26 ist mit  $X_1$  die Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung (5.38) gegeben durch

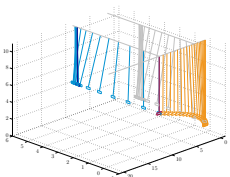
$$P = X_{21} X_{11}^{-1}.$$



Innerhalb des Algorithmus zur Berechnung der RICCATI-Lösung  $P$  bzw. bei der Bereitstellung der gesuchten Matrix  $K$  der Zustandsrückführung kommen die folgenden ergänzenden Verfahren zum Einsatz:

- Für die Aufstellung der HAMILTON-Matrix gemäß der algebraischen RICCATI-Gleichung (5.38) wurde das CHOLESKY-Verfahren auf  $R^{-1}B^T$  angewendet, da die Matrix  $R$  immer als positiv definit und symmetrisch vorausgesetzt wird.
- Für die Berechnung der RICCATI-Lösung  $P$  mit  $X_1$  aus der SCHUR-Zerlegung wird das lineare Gleichungssystem  $P \cdot X_{11} = X_{21}$  bzw.  $X_{11}^T \cdot P = X_{21}^T$  mittels QR-Zerlegung gelöst.

In Kapitel 8 werden sämtliche zu verwendenden optimalen Regelgesetze mittels diesem Verfahren während der laufenden Berechnung ermittelt.



# Kapitel 6

## Optimale Steuerprozesse unter erweiterten Nebenbedingungen

In Kapitel 4 wurden bereits optimale Steuerungsprobleme in einer allgemeinen Form behandelt. Eine spezielle Kategorie optimaler Steuerprozesse bilden die in Kapitel 5 erläuterten linear quadratischen Regulatorprobleme. Ziel dieses Kapitels ist es, den Bereich der optimalen Steuerung mit dem der optimalen Regelung zu verknüpfen.

Die bereits berechenbaren, bezüglich eines Zielfunktional optimalen Trajektorien der Zustandsgrößen und der Steuerfunktionen mit Zustands- und Steuerbeschränkungen sollen zusätzlich durch das Verhalten einer unterlagerten, optimalen Regelstrecke zu jedem Zeitpunkt des optimalen Steuerprozess beeinflussbar sein.

Die Charakteristika des dynamischen Systems der unterlagerten Regelung werden bereits im Vorfeld bereitgestellt. Die letztendliche Auswertung des parameterabhängigen geschlossenen Systems

$$\dot{z}(\varsigma) = (A(p) - B(p)K_{\infty}(p))z(\varsigma), \quad z(0) = z_0(p)$$

erfolgt über eine erweiterte Nebenbedingung.

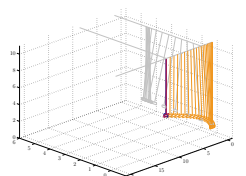
Dazu wird der Zustand  $x$  des optimalen Steuerungsproblem über den Parameter  $p := x(t)$  einen Einfluss auf das lineare dynamische System in  $z$  haben. Zusätzlich werden die Zustände  $z$  mittels der erweiterten Nebenbedingung

$$C_E(x(t), z(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f]$$

im optimalen Steuerprozess ihre Berücksichtigung finden.

Im ersten Abschnitt werden Grundlagen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen bereitgestellt.

Abschnitt 6.2 präsentiert eine detaillierte Analyse weiterer Eigenschaften des linear quadratischen Regulatorproblems. Im Hinblick auf die Formulierung der erweiterten



Nebenbedingung im darauf folgenden Abschnitt ist die stetige Differenzierbarkeit der Reglermatrix die zentrale Aussage.

Die mathematische Formulierung des optimalen Steuerprozess mit integrierten Optimalreglern ist in Abschnitt 6.3 beschrieben. Darüber hinaus wird der Beweis der stetigen Differenzierbarkeit dieser erweiterten Nebenbedingung bezüglich des Zustands  $x$  aus dem überlagerten optimalen Steuerungsproblem gebracht.

## 6.1 Grundlagen gewöhnlicher Differentialgleichungen

In den kommenden Abschnitten werden einige Aussagen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Anwendung kommen. Zusammenfassend seien hier die wesentlichen Sätze und Definitionen genannt.

Für die weiteren Untersuchungen ist die Existenz und Differenzierbarkeit der Lösung eines Anfangswertproblems und deren Eindeutigkeit von wesentlicher Bedeutung. In dem Zusammenhang ist die LIPSCHITZ-Stetigkeit eine nahezu unverzichtbare Voraussetzung.

### Definition 6.1 (LIPSCHITZ-stetig)

Gegeben sei eine Funktion  $g : D \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Die Funktion  $g(s, x)$  genüge auf  $D$  einer (globalen) LIPSCHITZ-Bedingung bzgl.  $x$ , wenn es eine Konstante  $L \geq 0$  gibt mit

$$\|g(s, x) - g(s, y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall (s, x), (s, y) \in D.$$

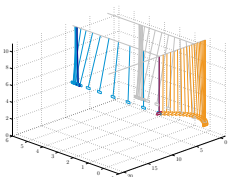
Wenn es zu jedem Punkt in  $D$  eine Umgebung  $U$  gibt, so dass  $g$  auf  $U \cap D$  einer LIPSCHITZ-Bedingung bzgl.  $x$  genügt, so heißt  $g(s, x)$  LIPSCHITZ-stetig bzgl.  $x$ .  $\diamond$

Als Erweiterung des Satzes von PICARD-LINDELÖF<sup>25</sup> sei hier der Satz für die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems gegeben:

### Satz 6.2 (Globale Existenz und Eindeutigkeit)

Die Menge  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  sei offen und die für alle  $(t, x) \in D$  erklärte Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig und bezüglich  $x$  LIPSCHITZ-stetig. Zu jedem Anfangswert  $(t_0, x_0) \in D$  gibt es dann ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall  $I_{max}(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}$ , das  $t_0$  enthält, mit folgenden Eigenschaften:

<sup>25</sup>Der Satz beschreibt die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auf einem Intervall  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$  mit  $\beta = \beta(t_0, x_0)$ .



i. Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.1)$$

besitzt genau eine Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  mit dem Existenzintervall  $I_{max}(t_0, x_0)$ .

ii. Ist  $\nu : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine weitere Lösung des Anfangswertproblems (6.1), so gilt  $J \subset I_{max}(t_0, x_0)$ , und  $\nu(t)$  ist die Einschränkung der in (i) beschriebenen Lösung auf das Intervall  $J$ .  $\diamond$

### Beweis:

Ein Beweis ist z. B. bei Aulbach [Aul97] zu finden.  $\blacksquare$

Für den Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Anfangswertaufgabe in Abschnitt 6.3.2 sei zusätzlich das folgende Resultat bereitgestellt.

### Satz 6.3

Gegeben sei eine offene Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  und eine Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ , die an jeder Stelle  $(s, x) \in D$  bzgl.  $x = (x_1, \dots, x_n)$  stetig partiell differenzierbar ist. Dann ist  $g(s, x)$  auf  $D$  LIPSCHITZ-stetig bzgl.  $x$ .  $\diamond$

### Beweis:

Einen Beweis ist bei Forster [For08] aufgeführt.  $\blacksquare$

Neben der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung werden sowohl deren Stetigkeit als auch deren Differenzierbarkeit gefordert sein. Hierzu sei die Definition der allgemeinen Lösung eingeführt.

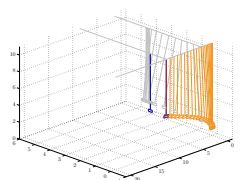
Zusätzlich zu der Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung von den Anfangswerten treten in vielen Anwendungen zusätzliche Abhängigkeiten, beschrieben durch einen Parameter  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ , auf. In den meisten Fällen sind diese durch Massen oder physikalische Koeffizienten gegeben. Zur detaillierteren Berücksichtigung solcher Größen wird die rechte Seite der Differentialgleichung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p}$  erweitert zu

$$\dot{x} = f(t, x, p), \quad x(t_0) = x_0.$$

### Definition 6.4 (Allgemeine Lösung)

Gegeben sei eine offenen Teilmenge  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p}$ , eine stetige und bezüglich  $x$  LIPSCHITZ-stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sowie die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x, p).$$



Dann nennt man die für alle  $(t, t_0, x_0, p)$  auf der Menge

$$\Omega := \{(t, t_0, x_0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p} \mid (t_0, x_0, p) \in D, t \in I_{\max}(t_0, x_0, p)\}$$

definierte Funktion

$$x(t; t_0, x_0, p) := x_{\max}(t; t_0, x_0, p)$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. ◇

Es kann gezeigt werden, vgl. Aulbach [Aul97], dass ein parameterabhängiges Differentialgleichungssystem auf ein parameterunabhängiges Differentialgleichungssystem zurückgeführt werden kann. Die bereits bekannte Aussage der globalen Existenz und Eindeutigkeit aus Satz 6.2 über parameterunabhängige Differentialgleichungen ist hingegen nur auf den parameterabhängigen Fall für einen festen Parameterwert übertragbar.

Im Hinblick auf die Variation der Anfangszeit, des Anfangswerts oder der Parameter sind zusätzliche Aussagen über die Glattheit der allgemeinen Lösung erst unter weiteren Voraussetzungen möglich.

### Satz 6.5 (Stetigkeit der allgemeine Lösung)

Sei  $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p}$  offen und die rechte Seite  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x, p)$$

stetig und bzgl.  $x$  LIPSCHITZ-stetig. So ist der Definitionsbereich  $\Omega$  der allgemeinen Lösung  $x(t; t_0, x_0, p)$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p}$  und  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig. ◇

#### Beweis:

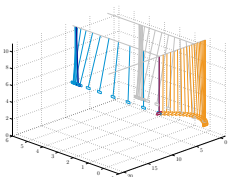
Ein Beweis der Stetigkeit der allgemeinen Lösung auf dem offenen Definitionsbereich ist in Aulbach [Aul97] zu finden. ■

Durch die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit der rechten Seite der Differentialgleichung ist eine Verschärfung der Standardvoraussetzung gegeben, so dass weitere Aussagen über die allgemeine Lösung formuliert werden können.

### Satz 6.6 (Differenzierbarkeit der allgemeine Lösung)

Sei  $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p}$  offen und die rechte Seite  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x, p)$$





eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion. So ist die allgemeine Lösung  $x(t; t_0, x_0, p)$  auf dem offenen Definitionsbereich  $\Omega$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion. Darüber hinaus existieren die folgenden stetigen partiellen Ableitungen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial t_0} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial x_{0,i}} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial p_i} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n_p. \end{aligned} \quad \diamond$$

**Beweis:**

Ein Beweis der Differenzierbarkeit wird in Aulbach [Aul97] gegeben. ■

**Folgerung 6.7**

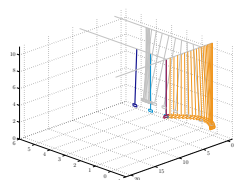
Insbesondere liefert der Satz 6.6 die Existenz der stetigen, nach  $t$  differenzierbaren Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t_0} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial x}{\partial x_{0,i}} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial x}{\partial p_i} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n_p. \end{aligned} \quad \diamond$$

## 6.2 Analyse der LQR-Problemstellung

Vorbereitend für die Einbettung des linear quadratischen Regulatorproblems in den optimalen Steuerprozess und den Nachweis von notwendigen Differenzierbarkeitseigenschaften in Abschnitt 6.3, soll gezeigt werden, dass die Reglermatrix  $K_\infty(p)$  stetig differenzierbar bzgl. eines sogenannten Störparameters  $p$  ist. Es wird dafür ein Ansatz über gestörte LQR-Probleme verfolgt, der seinen Ursprung in der Online-Optimierung hat. Diesbezüglich ist eine Darstellung mit ergänzender Anwendung auf ein inverses Pendel in Büskens [Büs09] beschrieben.

Motiviert wird dieser Ansatzes durch die Beobachtung, dass eine Zustandsrückführung, wie sie in (5.37) beschrieben ist, zwar Störungen in den Anfangswerten kompensieren kann, jedoch keine Möglichkeit besteht, Störungen in den Systemmatrizen oder additive Störungen im linearen System auszugleichen. Ziel ist somit die



Bereitstellung einer zuverlässigen Echtzeitapproximation der Zustandsrückführung, damit auf beobachtbare Störungen<sup>26</sup> gezielt reagiert werden kann.

### 6.2.1 Umformung in ein NLP-Problem

Die Beschreibung des gestörten linear quadratischen Regulatorproblems basiert auf der entsprechenden ungestörten Fassung, die um lineare und nichtlineare Störungen  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$  in den Systemmatrizen erweitert wird.

#### Definition 6.8 (Gestörtes LQR-Problem)

Das Problem

$$\begin{aligned} \min_{x,u} \quad & \Psi(x, u, p) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T(t)Q(p)x(t) + u^T(t)R(p)u(t) dt \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = A(p)x(t) + B(p)u(t), \\ & x(0) = x_0(p), \end{aligned} \tag{6.2}$$

mit den Abbildungen  $A : P \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B : P \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $Q : P \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R : P \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $x_0 : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $p \in P \subset \mathbb{R}^{n_p}$ , wird als gestörtes LQR-Problem (**LQR(p)**) bezeichnet.  $\diamond$

Lineare Störungen der Form  $\Delta A$  mit  $A(p) := A + \Delta A$  als Systemmatrix, sind ebenfalls mit in (6.2) enthalten.

Für die weiteren Betrachtungen seien die Abbildungen in Definition 6.8 als hinreichend oft stetig differenzierbar nach  $p$  angenommen.

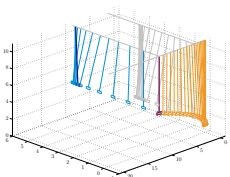
Entgegen dem vorgestellten Verfahren aus Kapitel 5.3, welches die Berechnung der gesuchten Reglermatrix  $K_{\infty}(p)$  mit Hilfe der Lösung der algebraischen RICCATI-Gleichung auf der Basis von notwendigen Optimalitätsbedingungen optimaler Steuerprozesse durchführt, wird in diesem Abschnitt ein Ansatz über nichtlineare Optimierungsprobleme verfolgt, vgl. Kapitel 3.

#### Satz 6.9 (Umformung vom LQR- in ein NLP-Problem)

Es sei ein gestörtes LQR-Problem gemäß (6.2) gegeben. Weiter sei eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^{n_p}$  des nominellen Störparameters  $p_0$  gegeben, so dass für alle Störparameter  $p \in U$  gilt:

- i.  $Q(p)$  ist symmetrisch und positiv semidefinit,

<sup>26</sup>Entgegen der Robustheitsanalyse über strukturierte und unstrukturierte Unsicherheiten, handelt es sich hier um bekannte Störungen deren Werte in Echtzeit zur Verfügung steht.



- ii.  $R(p)$  ist symmetrisch positiv definit,
- iii. Das System  $(A(p), B(p))$  ist stabilisierbar,
- iv. Das System  $(A(p), C(p))$ , mit  $Q(p) = C^T(p)C(p)$  ist beobachtbar.

Dann existiert für alle  $p \in U$  ein äquivalentes nichtlineares Optimierungsproblem ohne Beschränkungen der Form

$$\min_r \Upsilon(r, p), \quad (6.3)$$

mit  $\Upsilon : \mathbb{R}^{n \cdot m} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Dimension  $n \cdot m$  des Optimierungsvektors  $r$  resultiert aus der Dimension der gesuchten Matrix  $K_\infty \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und beschreibt gerade deren Einträge.  $\diamond$

### Beweis:

Es sei von einer Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^{n_p}$  der Nominalstörung  $p_0$  ausgegangen, auf der die Voraussetzungen (i) bis (iv) erfüllt sind. Durch die Stabilisierbarkeit und Beobachtbarkeit ist die Existenz eines asymptotisch stabilen Regelgesetzes des LQR( $p$ ) Problems in (6.2) gesichert:

$$u(t) = -K_\infty(p)x(t). \quad (6.4)$$

Weiter ist  $u(t)$  aus (6.4) optimal bzgl. des Zielfunktionals  $\Phi(x, u, p)$  aus (6.2).

Für alle  $p \in U$  sind die Voraussetzungen aus Satz 5.24 somit als erfüllt vorausgesetzt. Neben der Existenz einer Zustandsrückführung ist ebenfalls die asymptotische Stabilität des geschlossenen Systems gegeben. Es ist also möglich, die Steuerung  $u(t)$  in (6.2) durch die stabilisierende Zustandsrückführung (6.4) zu ersetzen.

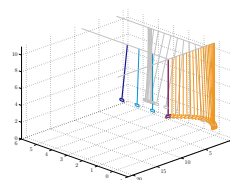
Das LQR( $p$ ) kann somit in ein nichtlineares Optimierungsproblem NLP( $p$ ) umformuliert werden. Das zu (6.2) zugehörige gestörte Problem der nichtlineare Optimierung NLP( $p$ ) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \min_{x, K_\infty} \bar{\Psi}(x, K_\infty, p) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T(t)Q(p)x(t) + x^T(t)K_\infty^T R(p)K_\infty x(t)) dt \\ \text{unter} \quad \dot{x}(t) &= (A(p) - B(p)K_\infty)x(t) + d(p), \\ x(0) &= x_0(p), \end{aligned} \quad (6.5)$$

mit  $\bar{\Psi}(x, K_\infty, p) := \Psi(x, -K_\infty x, p)$ .

Da das Feedback-Gesetz (6.4) optimal ist und das Zielfunktional minimiert, folgt, dass die optimale Lösung von (6.5) ebenfalls das Zielfunktional minimiert<sup>27</sup>.

<sup>27</sup>Es ist zu beachten, dass es sich bei (6.5) nicht länger um ein gestörtes LQR-Problem bzw. ein optimales Steuerungsproblem handelt. Vielmehr wird ein gestörtes, endlichdimensionales, nichtlineares Optimierungsproblem mit Beschränkungen beschrieben.



Weiter ist die rechte Seite der Differentialgleichung aus (6.5) stetig und nach  $x$  stetig partiell differenzierbar. Nach Satz 6.2 folgt die Existenz der eindeutigen Lösung.

Somit kann eine eindeutig bestimmte Lösung  $x(t) := x(t; K_\infty, p)$  vorausgesetzt werden, die von den Einträgen der Matrix  $K_\infty$  abhängig ist. Das gestörte Problem (6.5) kann auf ein unbeschränktes, gestörtes, nichtlineares Optimierungsproblem transformiert werden:

$$\min_{K_\infty} \hat{\Psi}(K_\infty, p) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T(t; K_\infty, p)Q(p)x(t; K_\infty, p) + x^T(t; K_\infty, p)K_\infty^T R(p)K_\infty x(t; K_\infty, p)) dt, \quad (6.6)$$

wobei  $\hat{\Psi}(K_\infty, p) := \Psi(x(t; K_\infty, p), -K_\infty x(t; K_\infty, p), p)$  ist.

Folglich ist unter den Voraussetzung von Satz 5.24 die optimale Lösung von (6.6) ebenso eine Lösung der gesuchten Zustandsrückführung (6.4).

Vereinfachend sei das NLP-Problem in (6.6) in die geforderte Form gebracht:

$$\min_r \Upsilon(r, p),$$

mit  $\Upsilon : \mathbb{R}^{n \cdot m} \times P \rightarrow \mathbb{R}$  und  $r := ((K_{\infty_{1,1}}, \dots, K_{\infty_{1,n}}), \dots, (K_{\infty_{m,1}}, \dots, K_{\infty_{m,n}}))^T$ . ■

Mit Hilfe der umformulierten Problemstellung eines gestörten Optimalreglers in ein gestörtes nichtlineares Optimierungsproblem können im folgenden Abschnitt Voraussetzungen für die Differenzierbarkeit der Zustandsrückführung formuliert werden.

## 6.2.2 Differenzierbarkeit der Reglermatrix

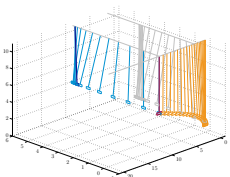
Der zu erbringende Beweis der Differenzierbarkeit der Reglermatrix beruht auf den bereits bekannten Ergebnissen gestörter nichtlinearer Optimierungsprobleme. Dabei liefert gerade der Sensitivitätssatz 3.12 nichtlinearer Optimierungsprobleme in einer vereinfachten Form die hinreichenden Bedingungen der zu zeigenden Differenzierbarkeit.

### Satz 6.10 (Sensitivitätssatz unbeschränkter NLP-Probleme)

Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$  und  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar bzgl.  $x$  und  $\nabla_x f$  bzgl.  $p$  einmal stetig differenzierbar. Weiter sei  $x_0$  eine strenge reguläre lokale Lösung von

$$\min_x f(x, p), \quad (6.7)$$

für einen fest gewählten Parameter  $p = p_0$ . D.h. es gelten die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung



- i.  $\nabla_x f(x_0, p_0) = 0$ ,
- ii.  $v^T \nabla_x^2 f(x_0, p_0) v > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ .

Dann existiert eine Umgebung  $P \subset \mathbb{R}^{n_p}$  von  $p_0$ , so dass das gestörte Problem (6.7) für alle  $p \in P$  eine eindeutig bestimmte streng reguläre lokale Minimalstelle  $x(p)$  besitzt. Weiterhin ist  $x(p)$  auf  $P$  eine stetig differenzierbare Funktion bzgl.  $p$  und es gilt

$$\nabla_x^2 f(x_0, p_0) \frac{dx}{dp}(p_0) = -\nabla_{xp} f(x_0, p_0). \quad (6.8)$$

◇

### Beweis:

Der Satz ist eine Vereinfachung des Sensitivitätssatzes 3.12 in Kombination mit der Sensitivitätsableitung in Satz 3.14, indem ausschließlich unrestringierte nichtlineare Optimierungsprobleme betrachtet werden und sowohl Bedingungen wie auch Folgerungen bzgl. der Beschränkungen entfallen. ■

Der folgende Satz fasst alle Bedingungen an das gestörte linear quadratische Regulatorproblem zusammen, so dass die stetige Differenzierbarkeit nach  $p$  der Reglermatrix  $K_\infty(p)$  gegeben ist.

### Satz 6.11 (Reglerdifferenzierbarkeit)

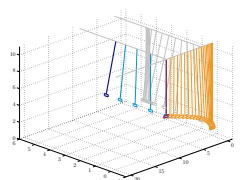
Es sei ein gestörtes LQR-Problem gemäß (6.2) gegeben mit den zweimal nach  $p$  stetig differenzierbaren Abbildungen  $A, B, Q, R$  und  $x_0$ . Weiter seien die Voraussetzungen in Satz 6.9 für einen festen Parameter  $p_0 \in \mathbb{R}^{n_p}$  erfüllt.

Unter der Bedingung, dass die Lösung  $r_0$  des NLP-Problems (6.3) zu  $p = p_0$  streng regulär ist, existiert eine Umgebung  $P \in \mathbb{R}^{n_p}$  von  $p_0$  und es gelten die Aussagen:

- i. Für  $p_0$  ist durch  $u(t) = -K_\infty(p_0)x(t)$  die eindeutige Zustandsrückführung gegeben,
- ii. Für alle  $p \in P$  hat das zugehörige, gestörte linear quadratische Regulatorproblem (6.2) ein eindeutiges Regelgesetz

$$u(t) = -K_\infty(p)x(t),$$

- iii. Die Einträge der Reglermatrix  $K_\infty(p)$  sind stetig differenzierbar bzgl.  $p$  auf  $P$ . ◇



**Beweis:**

Es sei von einer Nominalstörung  $p_0$  ausgegangen. Unter den Voraussetzungen in Satz 6.9 für  $p = p_0$  ist die Existenz der eindeutigen Zustandsrückführung nach Satz 5.24 gesichert, womit (i) bewiesen ist.

Für den Nachweis von (ii) und (iii) sei von dem Zielfunktional in (6.6) ausgegangen. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die optimale Lösung dieses unbeschränkten, nichtlinearen Optimierungsproblems durch Satz 6.9 für  $p = p_0$  die gesuchte optimale Zustandsrückführung von (6.2).

Aus der Differentialgleichung des gestörten geschlossenen Systems

$$\dot{x}(t) = (A(p) - B(p)K_\infty)x(t); \quad x(0) = x_0(p)$$

ergibt sich die allgemeine Lösung nach Gleichung (5.18) zu:

$$x(t; K_\infty, p) = e^{(A(p) - B(p)K_\infty)t} x_0(p).$$

Offensichtlich ist  $x(t; K_\infty, p)$  nach  $K_\infty$  zweimal stetig differenzierbar. Zusammen mit der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von  $A$  und  $B$  nach  $p$  folgt, dass  $x(t; K_\infty, p)$  ebenfalls zweimal stetig differenzierbar nach  $p$  ist.

Weiter sei von der vereinfachten NLP-Problemformulierung in (6.3) ausgegangen mit  $\Upsilon : \mathbb{R}^{n \cdot m} \times P \rightarrow \mathbb{R}$  und dem Zusammenhang zwischen den Optimierungsvariablen  $r$  und  $K_\infty$ :

$$r := ((K_{\infty,1,1}, \dots, K_{\infty,1,n}), \dots, (K_{\infty,m,1}, \dots, K_{\infty,m,n}))^T. \quad (6.9)$$

Die Ableitung von  $\hat{\Psi}(K_\infty, p)$  aus (6.6) nach  $K_\infty$  bzw. von  $\Upsilon(r, p)$  nach  $r$  ergibt sich zu:

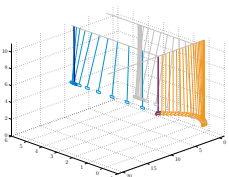
$$\begin{aligned} \nabla_r \Upsilon(r, p) = & \int_0^\infty [x^T(t; r, p) Q(p) \nabla_r x(t; r, p) + x^T(t; r, p) K_\infty^T R(p) \\ & \cdot (K_\infty \nabla_r x(t; r, p) + \hat{\nabla}_r(x^T(t; r, p), K_\infty^T))] dt. \end{aligned}$$

Um auf die Einführung von Tensoren zu verzichten sowie auf lange Summationen, wurde für den letzten Term die abkürzende Schreibweise für  $x(z) \in \mathbb{R}^n$  und  $A(z) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  gewählt:

$$\hat{\nabla}_z(x(z), A(z)) := \left[ \sum_{i=1}^n x_i(z) (\nabla_z a_{i,1}(z))^T, \dots, \sum_{i=1}^n x_i(z) (\nabla_z a_{i,m}(z))^T \right].$$

Ausgewertet steht  $\hat{\nabla}_r(x(t; r, p), K_\infty)$  für die  $(m \times (n \cdot m))$ -Matrix:

$$\hat{\nabla}_r(x^T(t; r, p), K_\infty^T) = \begin{pmatrix} x^T(t; r, p) I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x^T(t; r, p) I_n \end{pmatrix}.$$



Aus der stetigen Differenzierbarkeit von  $Q$ ,  $R$  und der Lösung des geschlossenen Systems nach  $p$  ergibt sich die stetige Differenzierbarkeit von  $\nabla_r \Upsilon$  nach  $p$ . Ebenfalls ist  $\nabla_r \Upsilon$  ein weiteres mal nach  $r$  stetig differenzierbar.

Weiter ist die strenge Regularität der optimalen Lösung  $r_0$  in  $p = p_0$  vorausgesetzt.

Aus dem Sensitivitätssatz 6.10 kann somit gefolgert werden, dass eine Umgebung  $P$  von  $p_0$  existiert, in der für alle  $p \in P$  eine optimale Lösung  $r(p)$  existiert, die stetig differenzierbar nach  $p$  ist. Weiter ist die beschriebene HESSE-Matrix  $\nabla_r^2 \Upsilon$  regulär, so dass die Sensitivitätsableitungen  $\frac{dr}{dp}$  in  $p_0$  explizit berechnet werden können durch das lineare Gleichungssystem

$$\frac{dr}{dp}(p_0) = -(\nabla_r^2 \Upsilon(r_0, p_0))^{-1} \nabla_{rp} \Upsilon(r_0, p_0). \quad (6.10)$$

Übertragen auf die gesuchte Reglermatrix  $K_\infty(p)$  der Zustandsrückführung

$$u(t) = -K_\infty(p)x(t)$$

bedeutet das, dass der Rang der Steuerbarkeitsmatrix und der Beobachtbarkeitsmatrix unverändert bleiben für alle  $p \in P$  in (6.2) und somit die optimale Lösung von (6.6) für alle  $p \in P$  gerade die gesuchte Zustandsrückführung liefert. Darüber hinaus ist  $K_\infty$  stetig differenzierbar bzgl.  $p$ . ■

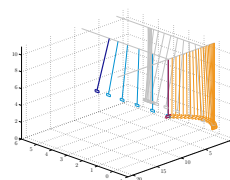
Bei der Verwendung des adaptiven Rückkopplungsgesetzes muss allerdings sichergestellt sein, dass die auftretenden Störungen  $p$  nicht etwa die Struktur des Ausgangsproblems verändern. Der Satz 6.11 beschreibt lediglich die Existenz einer Umgebung  $P$  von  $p_0$ , dennoch muss überprüft werden, ob die auftretenden Störungen  $p$  einen Einfluss auf den Rang der Steuerbarkeitsmatrix und Beobachtbarkeitsmatrix haben.

Der Nachweis der strengen Regularität mit den hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung kann bei entsprechender Anwendung auf numerischen Wege erbracht werden. Eine Möglichkeit wird unter anderem in Büskens [Büs98] beschrieben.

Für das in dieser Arbeit behandelte Anwendungsproblem werden die Untersuchungen der Voraussetzungen optimaler Regler unter Berücksichtigung eines Störparameters in Kapitel 7.4.3 vorgenommen.

Eingangs wurde erwähnt, dass der Ansatz über gestörten LQR-Probleme durch eine mögliche Echtzeitanpassung der Zustandsrückführung motiviert ist. Die in Kapitel 3.5.4 beschriebene parametrische Sensitivitätsanalyse mit entsprechenden Approximationen der Zustände für NLP-Problemen kann mit dem obigen Ergebnis auch auf die gestörte Regelung übertragen werden.

Es sei die abkürzende Schreibweise aus dem Beweis des Satzes 6.11 gemäß (6.3) gewählt. Mit dem Satz 6.10 ist es möglich, durch die Sensitivitätsdifferenziale in (6.10) eine TAYLORapproximation 1. Ordnung der gestörten optimalen Lösung  $r(p)$



durchzuführen. Hierzu seien Störungen der Form  $p = p_0 + \Delta p$  erwartet, wobei  $\Delta p$  die Abweichung vom Nominalwert  $p_0$  beschreibt.

Für die Optimierungsvariable  $r(p)$  ergibt sich die Approximation zu

$$r(p) = r(p_0 + \Delta p) \approx r(p_0) + \frac{dr}{dp}(p_0)\Delta p.$$

Durch die zusätzliche Untersuchung der Systemeigenschaften bei einer Abweichung  $\Delta p$  vom Nominalwert  $p_0$ , kann das Ergebnis entsprechend auf die Reglermatrix  $K_\infty$  übertragen werden. Man erhält die adaptive Zustandsrückführung




$$u(t) = - \left( K_\infty(p_0) + \frac{dK_\infty}{dp}(p_0)\Delta p \right) x(t).$$

Für eine Anwendung des approximierten Regelgesetzes werden die Größen  $K_\infty(p_0)$  und  $\frac{dK_\infty}{dp}(p_0)$  im Vorfeld offline berechnet und bereitgestellt.

## 6.3 Optimales Steuerungsproblem mit integrierten Optimalreglern

Die Ergebnissen des vorherigen Abschnitts ermöglichen es, dass zum einen optimale Regelgesetze in den optimalen Steuerprozess integriert werden können, und zum anderen die notwendige stetige Differenzierbarkeit dieser zusätzlichen erweiterten Nebenbedingungen gewährleistet ist.

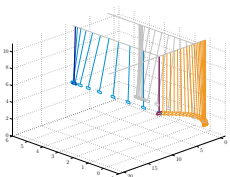
Für eine bessere Unterscheidung zwischen den verwendeten Bezeichnern der Systeme wird die Notation und Farbgebung aus Tabelle 6.1 in den folgenden Abschnitten verwendet.

Name	Zeit	Zustand	dim.	Steuerung	dim.	Farbe
OCP	$t$	$x$	$n$	$u$	$m$	
SIM	$\tau$	$z$	$n_c$	$w$	$m_c$	
LQR	$\varsigma$	$z$	$n_c$	$w$	$m_c$	

**Tabelle 6.1:** Notation des optimalen Steuerungsproblem unter erweiterten Nebenbedingungen

### 6.3.1 Mathematische Formulierung

Die Formulierung der erweiterten Klasse von Nebenbedingung für optimale Steuerungsprobleme basiert auf der Kombination der folgenden drei Problemstellungen, die schrittweise vorgestellt werden:





**OCP**

Es sei ein optimaler autonomer Steuerprozess der Form (4.6) mit einem beliebigen Zielfunktional  $\Phi$  gegeben:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \Phi(x, u) \\
 & \text{unter} \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall t \in [0, t_f] \\
 & \quad \quad x(0) = x_0, \\
 & \quad \quad \psi(x(t_f)) = 0, \\
 & \quad \quad C(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f].
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Die Zustandsgröße  $x$  und die Steuerung  $u$  unterliegen den bekannten Beschränkungen, die in Kapitel 4 vorgestellt wurden.

**LQR**

Das Regelgesetz, welches in den optimalen Steuerprozess eingebunden werden soll, basiert auf dem parameterabhängigen linear quadratischen Regulatorproblem:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \Psi(z, w) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (z^T(\varsigma)Qz(\varsigma) + w^T(\varsigma)Rw(\varsigma)) d\varsigma \\
 & \text{unter} \quad \dot{z}(\varsigma) = A(p)z(\varsigma) + B(p)w(\varsigma), \\
 & \quad \quad z(0) = z_0(p).
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.24 zu einem festen Parameter  $p$  kann das optimale Regelgesetz explizit angegeben werden mit

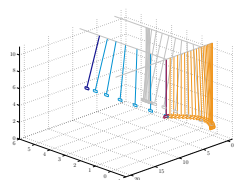
$$w(\varsigma) = -K_{\infty}(p)z(\varsigma). \tag{6.13}$$

Dieses Regelgesetz mit zeitinvarianter Reglermatrix ist optimal bzgl. des Zielfunctionals und der zugehörigen linearen Systemdynamik in (6.12).

Weiter ergibt sich mit (6.13) und der linearen Systemdynamik aus (6.12) das geschlossene dynamische System

$$\dot{z}(\varsigma) = (A(p) - B(p)K_{\infty}(p))z(\varsigma), \quad z(0) = z_0(p).$$

Der Satz 5.24 liefert gerade die asymptotische Stabilitätseigenschaft des geschlossenen Regelkreises.



**SIM**

Die Verknüpfung des Optimalsteuerungsproblem mit den zusätzlichen Zustandsrückführungen wird durch die erweiterte Nebenbedingung  $C_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow \mathbb{R}^l$  mit

$$C_E(x(t), z(t)) \leq 0$$

im optimalen Steuerprozess (6.11) realisiert. Weiter ist das unterlagerte lineare dynamische System durch den Störparameter  $p := x(t)$  beeinflussbar. Folglich ist die Zustandsrückführung und die Lösung des geschlossenen dynamischen Systems von der Optimierungsvariable  $x$  zu allen Zeitpunkten  $t \in [0, t_f]$  des optimalen Steuerprozess abhängig.

Die Abhängigkeit des Zustandes  $z$  von  $x$  wird mit der Zustandsbeschreibung der allgemeinen Lösung  $z(\varsigma; 0, z(0), p)$  aus Definition 6.4 deutlich hervorgehoben:

$$\hat{C}_E(z(\varsigma; 0, x(t), x(t))) = \hat{C}_E(z(\varsigma; x(t))) \leq 0,$$

mit  $\hat{C}_E(\cdot) := C_E(x(t), \cdot)$  und  $z(\varsigma; x(t)) := z(\varsigma; 0, x(t), x(t))$ .

Zusammenfassend erhält man die folgende Definition eines optimalen Steuerprozess unter erweiterten Nebenbedingungen.

**Definition 6.12 (Steuerprozess unter erweiterten Nebenbedingungen)**

*Das Problem*

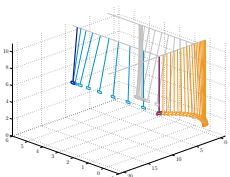
$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(x, u) \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall t \in [0, t_f], \\ & x(0) = x_0, \\ & \psi(x(t_f)) = 0, \\ & C(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f], \end{aligned}$$

$$C_E(x(t), z(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f], \tag{6.14}$$

wobei  $z, \forall t \in [0, t_f]$  das geschlossene System ist aus:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Psi(z, w) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z^T(\varsigma)Qz(\varsigma) + w^T(\varsigma)Rw(\varsigma)) d\varsigma \\ \text{unter} \quad & \dot{z}(\varsigma) = A(x(t))z(\varsigma) + B(x(t))w(\varsigma), \\ & z(0) = x(t). \end{aligned}$$

heißt optimaler Steuerprozess unter erweiterten Nebenbedingungen.  $\diamond$



Gemäß dem Satz 4.21 ist es notwendig, dass jede Nebenbedingung des optimalen Steuerproblems entsprechend ihrer Ordnung der Beschränkung hinreichend oft stetig differenzierbar ist, so dass die notwendigen Bedingungen restringierter optimaler Steuerprozesse erfüllt sind. Die stetige Differenzierbarkeit nach  $x$  von  $C_E$  wird im folgenden Abschnitt behandelt.

Die explizite Angaben einer Auswertungsvorschrift für  $C_E(x, z)$  erfolgt in Kapitel 7, mit einem direkten Bezug zum Anwendungsproblem und dem Hintergrund der physikalischen Bedeutung der Systemgrößen.

### 6.3.2 Differenzierbarkeit der erweiterten Nebenbedingung

Für die Berechnung der Lösung des optimalen Steuerprozess unter erweiterten Nebenbedingungen in (6.14) ist die stetige Differenzierbarkeit nach  $x$  der Nebenbedingung  $C_E(x, z)$  eine notwendige Voraussetzung.

Alle notwendigen Vorüberlegungen für den Beweis sind in Abschnitt 6.2 präsentiert worden.

#### Satz 6.13 (Differenzierbarkeit der erweiterten Nebenbedingung)

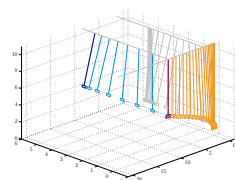
Es sei ein optimales Steuerungsproblem unter erweiterten Nebenbedingungen gemäß (6.14) gegeben, wobei die Nebenbedingung  $\hat{C}_E(z) = C_E(x, z)$  mit indirekter Abhängigkeit von  $x$  stetig differenzierbar nach  $z$  sei. Weiter sei durch

$$\Lambda_x := \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid C(x(t), u(t)) \leq 0, x(0) = x_0, \psi(x(t_f)) = 0, \forall t \in [0, t_f], \\ x \in \mathcal{W}^{1,\infty}(0, t_f; \mathbb{R}^m), u \in \mathcal{L}^\infty(0, t_f; \mathbb{R}^n)\}$$

die zulässige Menge aller Zustände des optimalen Steuerprozess definiert, so dass auf  $\Lambda_x$  gilt:

- i.  $A : \Lambda_x \rightarrow \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  und  $B : \Lambda_x \rightarrow \mathbb{R}^{n_c \times m_c}$  sind zweimal stetig differenzierbar,
- ii.  $Q \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  ist symmetrisch und positiv semidefinit,
- iii.  $R \in \mathbb{R}^{m_c \times m_c}$  ist symmetrisch positiv definit,
- iv. Das System  $(A(p), B(p))$  ist stabilisierbar  $\forall p \in \Lambda_x$ ,
- v. Das System  $(A(p), C(p))$ , mit  $Q(p) = C^T(p)C(p)$  ist beobachtbar  $\forall p \in \Lambda_x$ ,
- vi. Die Lösung  $K_\infty$  des LQR-Problems ist streng regulär im Sinne des zugehörigen NLP-Problems.

Dann ist die erweiterte Nebenbedingung  $C_E(x, z)$  stetig differenzierbar nach  $x$ .  $\diamond$



**Beweis:**

Die Nebenbedingung  $\hat{C}_E(z) = C_E(x, z)$  ist bereits als stetig differenzierbar nach  $z$  vorausgesetzt. Es bleibt die Differenzierbarkeit von  $z$  nach  $x$  zu beweisen.

Es sei die Menge  $\Lambda_x$  aller zulässigen Zustandsvektoren des optimalen Steuerungsproblems ohne erweiterte Nebenbedingung gegeben.

Unter den gegebenen Voraussetzungen (ii) bis (v) ist der Satz 6.9 über die Umformung eines LQR-Problems in ein NLP-Problem auf  $\Lambda_x$  anwendbar. Damit existiert zu allen  $x(t) \in \Lambda_x$  eine entsprechende NLP-Beschreibung des gestörten linear quadratischen Regulatorproblems

Ebenfalls kann gefolgert werden, dass das zugehörige, gestörte, linear quadratische Regulatorproblem mit  $p := x(t)$  für alle  $x(t) \in \Lambda_x$  eine optimale Zustandsrückführung besitzt:

$$w(\varsigma) = -K_\infty(x(t))z(\varsigma).$$

Da die Existenz der Umformung in ein NLP-Problem gesichert ist, sind in Verbindung mit den Aussagen (i) und (vi) die Voraussetzungen aus Satz 6.11 erfüllt. Es folgt die stetige Differenzierbarkeit der Reglermatrix  $K_\infty(x(t))$  nach  $x(t)$  in einer Umgebung  $P(x(t)) \subset \Lambda_x$ .

Sofern die Bedingung der strengen Regularität der Lösung  $K_\infty$  für alle  $x(t) \in \Lambda_x$  erfüllt ist, existiert zu jedem  $x(t) \in \Lambda_x$  eine Umgebung  $P_{x(t)}(x(t)) \subset \Lambda_x$  auf der  $K_\infty(x(t))$  stetig differenzierbar nach  $x(t)$  ist.

Insbesondere gilt dann die stetige Differenzierbarkeit nach  $x(t)$  auf  $\bigcup_{\forall x(t)} P_{x(t)}(x(t))$ .

Folglich ist die Matrix der Zustandsrückführung  $w$  stetig differenzierbar nach  $x(t)$  auf  $\Lambda_x$ .

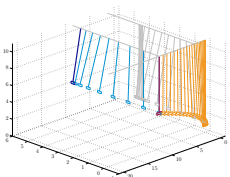
Offensichtlich ist  $w$  stetig differenzierbar nach  $K_\infty$  und da das linear System stetig differenzierbar nach  $w$  ist, folgt zusammen mit den Voraussetzungen in (i) die stetige Differenzierbarkeit nach  $p := x(t)$  der rechten Seite der Differentialgleichung des geschlossenen Systems :

$$\dot{z}(\varsigma) = (A(x(t)) - B(x(t))K_\infty(x(t)))z(\varsigma), \quad z(0) = x(t).$$

Nach Satz 6.6 und Folgerung 6.7 ist die allgemeine Lösung des geschlossenen Systems  $z(\varsigma; 0, x(t), x(t))$  sowohl differenzierbar nach ihrem Anfangswert  $z(0) := x(t)$  als auch nach ihrem Parameter  $p := x(t)$ . ■

**Bemerkung 6.14**

*Sollte die erweiterten Nebenbedingung  $C_E$  die zu optimierende Zustandsgröße  $x$ , zusätzlich zur indirekten Abhängigkeit, explizit enthalten, so ist es offensichtlich, dass  $C_E(x, \cdot)$  ebenso als stetig differenzierbar in der ersten Komponente vorausgesetzt werden muss.* ◇

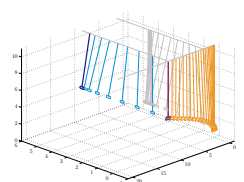


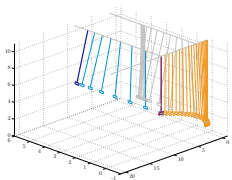
**Bemerkung 6.15**

Die strenge Regularitätseigenschaft der Matrix  $K_\infty$  als Lösung eines NLP-Problems kann mitunter während der numerischen Berechnungen einer Lösung des optimalen Steuerprozess unter erweiterten Nebenbedingungen mit ausgewertet werden.  $\diamond$

In dieser Arbeit kommen direkte Verfahren für die Berechnung der Lösung optimaler Steuerungsprobleme zum Einsatz, vgl. Abschnitt 4.3. Um sicherzustellen, dass das diskretisierte Problem, beschrieben durch ein nichtlineares Optimierungsproblem, mittels einem SQP-Verfahren gelöst werden kann, müssen mindestens die notwendigen Bedingungen erster Ordnung überprüfbar sein, vgl. Abschnitt 3.4.

Gemäß den Voraussetzungen aus Satz 3.6 ist der Nachweis der einmal stetigen Differenzierbarkeit nach  $x$  der Nebenbedingung dafür ausreichend. Eine Überprüfbarkeit der notwendigen und hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung aus Satz 3.9 ist hingegen erstmal nicht sichergestellt, da der Beweis der zweimal stetig differenzierbaren Nebenbedingung innerhalb einer Umgebung der lokalen Minimalstelle nicht erbracht wurde.





## Anwendungsproblem: Laufkatze

Die Beurteilung des formulierten optimalen Steuerungsproblem mit erweiterten Nebenbedingungen soll an dem konkreten Anwendungsbeispiel einer Laufkatze in der Hochregallagertechnik geschehen.

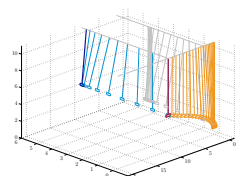
Der Laufkatze selbst stehen interne Steuerungen der Motoren zur Verfügung, die die Bewegungen innerhalb einer Regalgasse kontrollieren. Sowohl die Position des Wagens auf der Fahrschiene, als auch die Länge des Seiles kann dadurch beeinflusst werden. Die Position des frei schwingenden Lastaufnahmemittels lässt sich hingegen nur indirekt beeinflussen.

Die Bestimmung eines geeigneten Bahnverlaufs, so dass ein gewünschter Zielpunkt erreicht wird und das gesamte System in Ruhe ist, ist keinesfalls trivial. Durch den Einsatz optimaler Steuerungsprobleme wird die Möglichkeit geschaffen, aus allen zulässigen Bahnen, die den gewünschten Endzustand erreichen, die geeignetste zu wählen. In diesem Fall handelt es sich um eine Bahn, die das vorher festgelegte Zielfunktional minimiert.

In Abschnitt 7.1 wird die mathematische Herleitung des Modells beschrieben, das in dieser Arbeit zur Anwendung kommt. Zusätzlich werden ergänzend noch einige Anmerkungen zur physikalischen Verträglichkeit gemacht.

Weitere Untersuchungen bzgl. des gewählten Modells wurden bereits in anderen Arbeiten durchgeführt. Kransysteme mit zwei zulässigen Bewegungsrichtungen des Aufhängungspunktes oder einer Führung entlang einer gebogenen Schiene stellt Blume [Blu06] vor. Von Vogelsang [Vog08] wird das hier verwendete Modell der Laufkatze dahingehend erweitert, dass Effekte bei sehr großen Seillängen über 20m untersucht werden können.

Abschnitt 7.2 behandelt das optimale Steuerungsproblem der Laufkatze. Die Diskretisierung des Bahnoptimierungsproblems und die Lösung mittels direkten Verfahren werden in Abschnitt 7.3 beschrieben.



Für die spätere Berechnung einer Regelung als Strategie für den „geregelten Halt“ werden in Abschnitt 7.4 weitere Untersuchungen bereitgestellt. Somit wird sichergestellt, dass die entwickelten Verfahren auf das Problem der Laufkatze angewendet werden können.

Die Verknüpfung der Bahnoptimierung mit der Regelung unter den entsprechenden Sicherheitsanforderungen erfolgt in Abschnitt 7.5. Speziell wird hier der Gedanke verfolgt, dass die Energie im gesamten System verringert werden soll und unterhalb einer gegebenen Schranke gehalten wird.

## 7.1 Mathematisches Modell

Für die schwingungsfreie Positionierung der Laufkatze im Hochregallager müssen zuerst Bahnen bereitgestellt werden, die anschließend über die Regeleinheit auf der Laufkatze mittels der Motoren nachgefahren werden kann. Entsprechend dazu wird die Position der Laufkatze, die Länge des Seils und die relative Verschiebung des Lastaufnahmemittles überwacht und bei Bedarf korrigiert. Eine Untersuchung von sogenannten Tracking-Reglern für die Bahnverfolgung ist in Stach [Sta05] am Beispiel eines Industrieroboters zu finden.

Für die Berechnung der Referenzbahnen muss zu Beginn das dynamische Verhalten des Mehrkörpersystems modelliert werden. Das gezeigte physikalische Verhalten des Lastaufnahmemittels bei ruhender Laufkatze ist hierbei vergleichbar mit einem Pendel.

Es sei für die folgende Betrachtung angenommen, dass das Lastaufnahmemittel über ein Seil mit der Laufkatze verbunden ist.

### Definition 7.1 (Physikalisches Pendel)

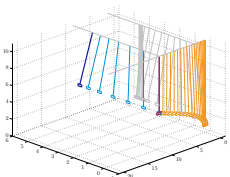
*Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der in einem Punkt, nicht seinem Massemittelpunkt, drehbar gelagert ist und nach einer Auslenkung aus seiner Gleichgewichtslage Schwingungen ausführt.*  $\diamond$

Eine Idealisierung zu obiger Definition stellt, das mathematische Pendel dar, vgl. [Lüd08].

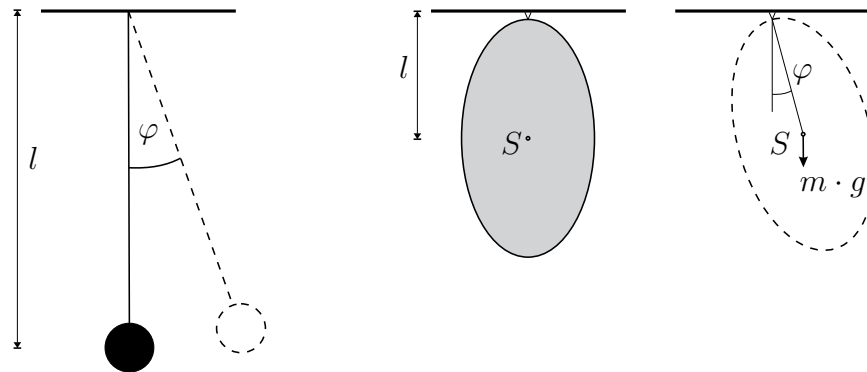
### Definition 7.2 (Mathematisches Pendel)

*Die Masse eines mathematischen Pendels ist in einem Punkt konzentriert und besitzt die feste Entfernung  $l$  zum Aufhängepunkt. Die ausgeführten Bewegungen sind frei unter dem Einfluss der Schwerkraft.*  $\diamond$

Bei einem mathematischen Pendel wird zusätzlich zu der in einem Punkt konzentrierten Masse, das Verbindungsseil als masselos angenommen. Weiter seien Reibungskräfte in den Aufhängungen und Strömungswiderstände der schwingenden







**Abbildung 7.1:** links: mathematisches Pendel; rechts: physikalisches Pendel <sup>28</sup>

Masse vernachlässigt. In Abbildung 7.1 wird noch einmal der Unterschied beider Pendelmodelle verdeutlicht.

Die Herleitung der Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels basiert auf den NEWTONschen-Gesetzen. Auf eine frei schwingende Masse  $m$  wird dabei die Fallbeschleunigung  $g$  ausgeübt, so dass die Schwerkraft

$$F_g = m \cdot g$$

auf den Massepunkt wirkt. Der Kraftanteil von  $F_g$  entlang des Seiles spannt das in der Länge konstante Seil. Bei einer Auslenkung der Pendelmasse aus der Ruhelage um den Winkel  $\varphi$  wirkt der übrige Anteil der Kraft als Rückstellkraft. Dieser, zum Seil senkrecht stehende Anteil der Schwerkraft, ist

$$F_{\text{rück}} = m \cdot g \cdot \sin \varphi,$$

so dass der Massepunkt eine Beschleunigung erfährt. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Kraft nicht entlang einer Kreisbahn, sondern waagrecht wirkt. Bei großen Seillängen und kleinen Auslenkungen ist dieses bereits eine ausreichend gute Approximation.

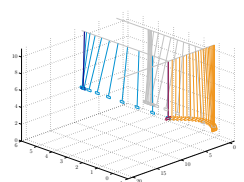
Weiter sei mit  $r$  die waagerechte Absolutposition der Pendelmasse bezeichnet. Dann gilt allgemein für eine an die Masse  $m$  angreifende Kraft

$$F = m \cdot \ddot{r}.$$

Da weitere Kräfte wie Reibung und Strömungswiderstand keine Berücksichtigung finden, gilt für das mathematische Pendel

$$m \cdot \ddot{r} = m \cdot g \cdot \sin \varphi. \tag{7.1}$$

<sup>28</sup>Bildnachweis: Hauger, Schnell und Gross [Hau02]



Mit Hilfe der relativen waagerechten Verschiebung  $d$  der Pendelmasse zum Aufhängungspunkt und der Beziehung  $\sin \varphi = \frac{d}{l}$  kann die Gleichung (7.1) vereinfacht werden zu

$$\ddot{r} = g \cdot \frac{d}{l}. \quad (7.2)$$

Konstruktionsbedingt kann der Fall  $l \leq 0$  ausgeschlossen werden. Das komplette Hochfahren des Lastaufnahmemittels auf die gleiche Höhe der Laufkatze ist als Sonderfall anzusehen und birgt gewisse Risiken, die separat betrachtet werden müssen. Beispielsweise wäre eine Kollision zwischen dem schwingenden Lastaufnahmemittel und der Laufkatze denkbar. Mit den definierten Beschränkungen in Abschnitt 7.2.2 kann gewährleistet werden, dass eine Grenze für den Abstand beider Bauteile zu allen Zeitpunkten nicht unterschritten wird.

Im Falle der Laufkatze wird der Aufhängungspunkt entsprechend den Bewegungen der Laufkatze mit bewegt, vgl. Abbildung 7.2. Ebenso muss die Absolutposition des Wagens mit berücksichtigt werden. Es gilt mit (7.2)

$$\begin{aligned} s &= r + d \\ \ddot{r} &= \ddot{s} - \ddot{d} = g \cdot \frac{d}{l} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Neben der Bewegung der Laufkatze ist noch die mögliche Seillängenänderung beim Laufkatzenmodell zu berücksichtigen. Anstelle der zuvor konstanten Seillänge  $l$  ist jetzt eine zeitabhängige Seillänge  $l(t)$  anzunehmen. Ausgangspunkt der Überlegungen ist der, dass bei einer positiven Seilbeschleunigung das Seil verlängert wird, sofern die Seillänge vorher unverändert war<sup>29</sup>. Die Masse wird sozusagen fallengelassen. Dadurch wird die Fallbeschleunigung  $g$  auf den Wert  $g - \ddot{l} \cdot \cos \varphi$  reduziert. Das hat zur Folge, dass gleichzeitig auch die an die Masse angreifende Rückstellkraft verringert wird.

Umgekehrt wird bei einer negativen Seilbeschleunigung  $\ddot{l}$  die Verlängerung des Seil langsamer bzw. das Seil wird eingezogen. Die auf die Masse wirkende Beschleunigung wird daher betragsmäßig größer als  $g$  sein. Zu diesem Zeitpunkt würde das Seil also am ehesten reißen.

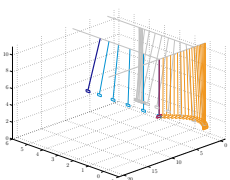
Ersetzt man  $g$  in (7.3) durch  $g - \ddot{l} \cdot \cos \varphi$  und verwendet zusätzlich die Näherung  $\cos \varphi \approx 0$  für kleine Winkel  $\varphi$  erhält man eine Differentialgleichung für das relative Verhalten der Laufkatze zum Lastaufnahmemittel:

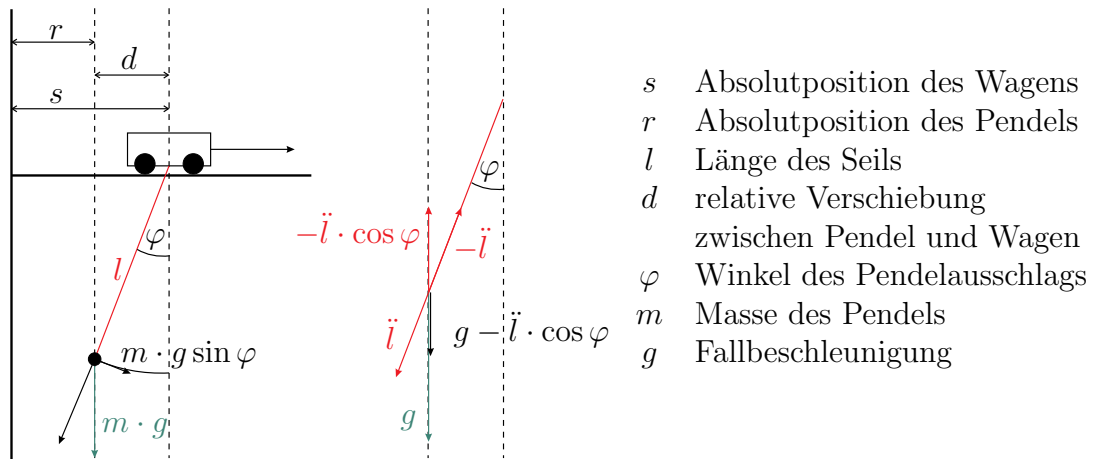
$$\ddot{d} = \ddot{s} - (g - \ddot{l}) \cdot \frac{d}{l}.$$

Für die Steuerung der Laufkatze stehen zwei Motoren bereit. Dabei wird durch die Motoren direkt die Beschleunigung des Wagen  $u_1$  und die Beschleunigung der Pendelmasse in Richtung des Seils  $u_2$  (Seilbeschleunigung) kontrolliert.

<sup>29</sup>Andernfalls verringert sich erst der Seileinzug mit anschließender Seilverlängerung

<sup>30</sup>Bildnachweis: Knauer [Kna09]





**Abbildung 7.2:** Mathematisches Modell einer Laufkatze; links: feste Seillänge; rechts: variable Seillänge <sup>30</sup>

Mit der Beschleunigung als Steuergröße ist das dynamische Verhalten durch drei Differentialgleichungen 2. Ordnung gegeben:

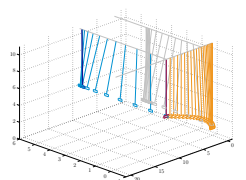
$$\begin{aligned}\ddot{s} &= u_1 \\ \ddot{l} &= u_2 \\ \ddot{d} &= u_1 - (g - u_2) \cdot \frac{d}{l},\end{aligned}\tag{7.4}$$

wobei konstruktionsbedingt  $l > 0$  gilt.

Folgend noch ein paar Bemerkungen zum aufgestellten Modell. Aufgrund des Ansatzes eines mathematischen Pendels wird die Masse der pendelnden Last nicht in den Differentialgleichungen berücksichtigt. Das dynamische Verhalten einer unbeladenen Laufkatze ist somit dasselbe, wie das einer beladenen Laufkatze. Es trifft jedoch keinesfalls zu, dass die Masse der Last überhaupt keine Rolle spielt. Gerade bei der Auslegung der Motorleistung ist die Masse nicht unerheblich. Es muss gesichert sein, dass die gewünschten Beschleunigungen unabhängig von der Nutzlast realisiert werden können.

In industriellen Anlagen werden meist geschwindigkeitsgeregelter Motoren eingesetzt. Aus der Bahnplanung werden die, sich aus den Modellgleichungen ergebenden Geschwindigkeitsbahnen, als Sollwerte für die Geschwindigkeiten des Wagens und die der Pendelmasse in Richtung des Seils (Seilgeschwindigkeit) verwendet. Gleichzeitig werden auch die aktuelle Ist-Position des Wagens und die gemessene Seillänge berücksichtigt, so dass indirekt eine Kontrolle der Schwingungen der Last möglich ist.

Bei der Herleitung des dynamischen Systems (7.4) wurde ein mathematisches Pendel angenommen mit nur einem Seil als Verbindung zwischen Wagen und Lastaufnah-



memittel. Tatsächlich sieht die Konstruktion der Laufkatze vor, dass die Last über vier Seile, die jeweils an den Ecken befestigt sind, mit dem Wagen verbunden ist. Dabei verlaufen die Seile immer parallel und besitzen die selbe Länge und die gleiche Spannung.

Bei den Pendelbewegungen hat das den Effekt, dass lediglich die Position des Lastaufnahmemittels waagrecht verschoben wird. Es findet keine zusätzliche Verlagerung des Schwerpunktes, bzw. eine Drehung der Last statt. Etwaige zusätzliche Effekte, die nur bei einem physikalischen Pendel über die sogenannte reduzierte Pendellänge<sup>31</sup> berücksichtigt werden, treten bei dieser Anwendung nicht auf, vgl. z. B. [Hau02]. Der Ansatz des mathematischen Pendels ist damit gerechtfertigt und die vier Seile können durch eines im Modell ersetzt werden.

Auch die Veränderung des Schwerpunkt nach oben, durch das Beladen des Lastaufnahmemittel hat durch die gewählte Aufhängung an vier Seilen keinen Einfluss mehr auf die Periodendauer des Systems.

Es sei aber darauf hingewiesen, dass die verwendeten Approximationen in der beschriebenen Herleitung, sowie auftretende Dämpfungseffekte zu Diskrepanzen zwischen Realität und Modell führen können. Dem entgegen wird die ohnehin eingesetzte Regelung wirken, sodass auch weitere Störungen wie mögliche Schwankungen und Verzögerungen der Motorleistung ausgeglichen werden.

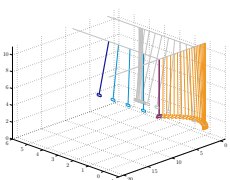
## 7.2 Optimale Bahnplanung

Das in Abschnitt 7.1 hergeleitete dynamische System (7.4) ist ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, was auf die Dynamik der Laufkatze schließen lässt und somit in einem Optimalsteuerungsproblem zur Anwendung kommen kann. Für die optimale Bahnplanung der Laufkatze müssen weiter Randbedingungen formuliert werden, entsprechend der Anfangs- und Endposition. Die gegebenen Abmessung des Hochregallagers, die technischen Beschränkungen der Motoren und die zulässigen Höchstgeschwindigkeiten werden in den Zustands- und Steuerrestriktionen berücksichtigt. Mit Hilfe des Zielfunktional wird letztlich das Optimalitätskriterium festgelegt, welchem die Bahn genügen soll.

### 7.2.1 Randbedingungen

Bei jeder Fahrt der Laufkatze muss am Ende eine schwingungsfreie Position eingenommen werden, so dass ein unproblematisches Ent- und Beladen gesichert ist.

<sup>31</sup>Quotient aus dem Trägheitsmoment, der Masse und dem Abstand zwischen Aufhängung und Schwerpunkt der Pendelmasse.



Um dieses zu gewährleisten müssen am Zielpunkt sämtliche Geschwindigkeiten und Beschleunigungen Null sein. Mittels den Randbedingungen, speziell den Endbedingungen, können bestimmte Komponenten des Zustandsvektors des Systems zum Zeitpunkt  $t_f$  zu Null bestimmt werden. In den aufgestellten Systemgleichungen (7.4) gehen die Beschleunigungen der Laufkatze sowie die des Seil nicht als Zustandsgrößen, sondern als Steuergrößen  $u_1$  und  $u_2$  ein. Damit ist es nicht möglich entsprechende Randbedingungen zu formulieren. Ebenso kann die relative Beschleunigung des Pendels  $\ddot{d}$  nicht in den Randbedingungen berücksichtigt werden.

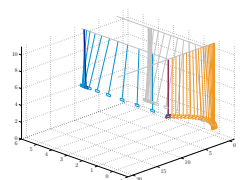
Erste Testläufe haben bereits gezeigt, dass es unter Umständen auftreten kann, dass die interne Regelung der Motoren nicht ausreichend ist. Das notwendige abrupte Abschalten der Steuerung nach dem Zeitpunkt  $t_f$  führte nicht immer zum gewünschten Stillstand des Systems. Stattdessen konnte durch eine erlaubte Nachregelung über den berechneten Endzeitpunkt hinaus, eine immer wiederkehrende Korrektur der aktuellen Position durch die interne Motorenregelung beobachtet werden, um das System zur Ruhe zu bringen.

Eine mögliche Erweiterung, die u. a. in Knauer [Kna09] verfolgt wird, ist die Einführung einer weiteren Ableitung nach der Zeit. So werden beide Beschleunigungen durch Zustandsgrößen repräsentiert, für die eine Endbedingung angegeben werden kann. Als Steuergröße wird der jeweilige Ruck verwendet. Durch diese Erweiterung des Differentialgleichungssystems ist es möglich, die Beschleunigung gegen Ende des Zeitintervalls langsam zu Null zu steuern. Damit kann sichergestellt werden, dass die Endposition tatsächlich erreicht wird und der zugehörige Bahnverlauf durch die Motoren realisierbar ist, so dass es im Endzeitpunkt nicht zu einem Überschwingen kommt.

Für die Überlegungen in dieser Arbeit, bzgl. der Erweiterung mit einer weiteren Regelung für den sogenannten „geregelten Halt“ und der entsprechenden Präsentation der Resultate, ist dieser Ansatz vorerst nicht notwendig und es wird auf die Erweiterung des Differentialgleichungssystem verzichtet. Für eine praktische Realisierung wäre es hingegen sinnvoll.

Abgesehen von dem möglichen Mangel in der technischen Realisierbarkeit durch die eingesetzten Elektromotoren, ist theoretisch, durch die Verwendung einer Ruhelage des System als Endpunkt, der schwingungsfreie Endzustand möglich.

Mit einer geeigneten Substitution lässt sich das aufgestellte System (7.4) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung transformieren, das im Folgenden zur An-



wendung kommt

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) && : \text{Position Katze} && x_1 = s, \\
 \dot{x}_2(t) &= u_1(t) && : \text{Geschwindigkeit Katze} && x_2 = \dot{s}, \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) && : \text{rel. Verschiebung Last} && x_3 = d, \\
 \dot{x}_4(t) &= u_1(t) - (g - u_2(t)) \cdot \frac{x_3(t)}{x_5(t)} && : \text{rel. Geschwindigkeit Last} && x_4 = \dot{d}, \\
 \dot{x}_5(t) &= x_6(t) && : \text{Position Seil} && x_5 = l, \\
 \dot{x}_6(t) &= u_2(t) && : \text{Geschwindigkeit Seil} && x_6 = \dot{l}.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Für die Berechnung der optimalen Bahn der Laufkatze können jeweils die entsprechenden Anfangs- und Endbedingungen explizit angegeben werden. Die verwendeten Randwerte ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 x_1(0) &= s_0, & x_1(t_f) &= s_f, & \text{Start- und Endposition der Katze} \\
 x_2(0) &= 0, & x_2(t_f) &= 0, \\
 x_3(0) &= 0, & x_3(t_f) &= 0, \\
 x_4(0) &= 0, & x_4(t_f) &= 0, \\
 x_5(0) &= l_0, & x_5(t_f) &= l_f, & \text{Seillängen zu Beginn und Ende} \\
 x_6(0) &= 0, & x_6(t_f) &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Durch diese Setzung der Randwerte sind alle auftretenden Geschwindigkeiten zu Beginn und am Ende der Trajektorie Null. Insbesondere soll auch keine weitere Beschleunigung der relativen Verschiebung des Lastaufnahmemittels auftreten. Durch die Verwendung einer Ruhelage als Anfangs- und Endpunkt der Trajektorie, so dass für  $t = 0$  und  $t = t_f$  die relative Verschiebung  $x_3(t) = 0$  ist und die entsprechenden Steuerungen zu  $u_1(t) = 0$  und  $u_2(t) = 0$  gefordert werden, siehe Abschnitt 7.4.1, gilt:

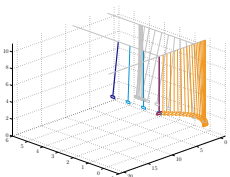
$$\ddot{d}(t) = \dot{x}_4(t) = u_1(t) - (g - u_2(t)) \cdot \frac{x_3(t)}{x_5(t)} = 0, \quad \text{mit } t = 0 \text{ und } t = t_f.$$

In Kapitel 8 wird das Modell (7.5) mit den gegebenen Randbedingungen (7.6) für die numerischen Auswertungen zur Anwendung kommen.

## 7.2.2 Beschränkungen

Zusätzlich zu den Randbedingungen unterliegt die Laufkatze in einer Regalgasse weiteren baulichen und technischen Beschränkungen, die für eine optimale Bahnplanung unerlässlich sind.

Der zulässige Bereich für die Positionierung der Laufkatze ist durch die Länge der jeweiligen Regalgasse gegeben. Entsprechend gibt die Höhe der Fahrschiene der Laufkatze, unter Berücksichtigung der Abmessungen des Lastaufnahmemittels und der



Anbringung am Wagen, die Restriktionen für die Seillänge vor. Mit den Bezeichnungen aus (7.5) gilt

$$\begin{aligned} s_{\min} \leq x_1(t) \leq s_{\max} & \quad \text{Fahrbereich der Katze,} \\ l_{\min} \leq x_5(t) \leq l_{\max} & \quad \text{zulässige Seillängen.} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Die zulässigen Geschwindigkeiten sind hauptsächlich durch die Leistungen der verwendeten Motoren gegeben. Um entsprechend fragile Güter zu Transportieren oder die Stabilität der Konstruktion aus Laufkatze, Fahrschiene und Regalen sicherzustellen, können entsprechend kleinere Werte als Beschränkung verwendet werden. Die Geschwindigkeitsbeschränkungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\min} \leq x_2(t) \leq \dot{s}_{\max} & \quad \text{erlaubte Geschwindigkeiten der Katze,} \\ \dot{l}_{\min} \leq x_6(t) \leq \dot{l}_{\max} & \quad \text{erlaubte Hub-/ Senkgeschwindigkeiten.} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Analog zur Geschwindigkeit können zusätzlich die Beschleunigungswerte Beschränkungen unterliegen, die unabhängig von den Grenzwerten der Geschwindigkeit gewählt werden können. Hierbei handelt es sich um reine Steuerbeschränkungen der Form

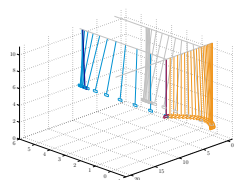
$$\begin{aligned} u_{1,\min} \leq u_1(t) \leq u_{1,\max} & \quad \text{erlaubte Beschleunigung der Katze,} \\ u_{2,\min} \leq u_2(t) \leq u_{2,\max} & \quad \text{erlaubte Hub-/ Senkbeschleunigung.} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Für weitere Sicherheitsanforderungen an den laufenden Betrieb der Anlage können darüber hinaus noch weitere Beschränkungen formuliert werden. Für die ausschließliche Bahnoptimierung der Laufkatze werden in dieser Arbeit die Beschränkungen (7.7), (7.8) und (7.9) verwendet. Des Weiteren wird in Abschnitt 7.5 gesondert die Kopplung des „geregelten Halts“ mit dem optimalen Steuerungsproblem behandelt. Die zusätzliche Regelung inklusive der damit verbundenen notwendigen Simulation wird durch eine zusätzliche Nebenbedingung im optimalen Steuerprozess integriert.

### Verhalten in kritischen Bereichen

Gerade in den Bereichen der Wände, bzw. der Enden einer Regalgasse, kann es schnell zu kritischen Situationen kommen. Um möglichen Kollisionen durch Abweichung in der Tracking-Regelung der Laufkatze vorzubeugen, kann es wünschenswert sein, die Geschwindigkeiten und auch die Beschleunigungswerte zu reduzieren. Diese Beschränkungen könnten z.B. in Abhängigkeit von der Position der Katze formuliert werden:

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\min}(x_1(t)) \leq x_2(t) \leq \dot{s}_{\max}(x_1(t)), \\ u_{1,\min}(x_1(t)) \leq u_1(t) \leq u_{1,\max}(x_1(t)). \end{aligned}$$



Gesondert müssen die Fälle untersucht werden, in denen zusätzliche Hindernisse in der Regalgasse vorkommen. Diese können z. B. Durchgänge am Boden für das Lagerpersonal sein. Entsprechend reduziert sich der zuvor zulässige Bereich

$$(x_1, x_5) \in [s_{\min}, s_{\max}] \times [l_{\min}, l_{\max}]$$

für die Positionierung der Laufkatze und der Seillänge um die nicht mehr befahrbaren Bereiche. Das Wertepaar  $(x_1, x_5)$  kann dadurch nicht mehr unabhängig voneinander gewählt werden.

### Winkel

Darüber hinaus kann eine Beschränkung der Auslenkung angegeben werden durch

$$\varphi_{\min} \leq \arcsin \frac{x_3(t)}{x_5(t)} \leq \dot{\varphi}_{\max}.$$

Dies macht gerade dann Sinn, wenn bei großen Auslenkungen konstruktionsbedingt die Seile gegen Teile des Wagens oder des Lastaufnahmemittels schlagen können.

### 7.2.3 Zielfunktionale

Durch die explizite Angabe eines Zielfunktional wird das eigentliche Ziel beschrieben, nach dem die Trajektorie optimiert werden soll.

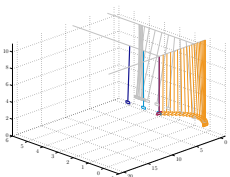
Sofern eine Trajektorie existiert, gemäß der Systemdynamik (7.5), den Randbedingungen (7.6) und den Beschränkungen (7.7)-(7.9), kann durch die geeignete Formulierung eines Entwurfziels eine optimale Bahn ermittelt werden. Nachfolgend wird eine Auswahl möglicher Zielfunktional vorgestellt.

Für sinnvolle Problemstellungen sollte die Verfahrzeit  $t_f$  stets fest vorgegeben sein. Die einzige Ausnahme stellt das Zielfunktional für die minimale Verfahrzeit bzw. in Kombinationen mit anderen Zielfunktionalen dar. Hierbei ist die Endzeit frei wählbar.

#### Minimale Verfahrzeit

Bei der zeitoptimale Steuerung wird die maximale Leistung aus den Motoren geholt. Das führt unter anderem zu Bahnen, die nur sehr schwer nachgefahren werden können. Außerdem kann es dabei zu sehr starken Auslenkungen kommen. Das Zielfunktional besteht hier nur aus der frei wählbaren Endzeit  $t_f$ :

$$\Phi(x, u) = \int_0^{t_f} 1 dt = t_f.$$





Zusätzlich ist zu beachten, dass dieses Zielfunktional erst in Kombination mit einer Steuerbeschränkung auf den Bereich  $U$  Sinn macht, da andernfalls die Verfahrzeit  $t_f$  gegen Null laufen würde. In technischen Anwendungen ist man meistens an hinreichend glatten Bahnen als Lösung interessiert, so dass diese Zielfunktional nur in Kombination mit weiteren Zielfunktionalen zur Anwendung kommt.

### Minimierung des Verlaufs der Beschleunigung

Für Trajektorien die später durch einen Geschwindigkeitsregler nachgefahren werden sollen, dürfen keine großen Schwankungen in den Beschleunigungen auftreten. Dadurch ist gewährleistet, dass die berechneten Bahnen ausreichend glatt sind.

$$\Phi(x, u) = \int_0^{t_f} (\beta_1 \cdot u_1^2(t) + \beta_2 \cdot u_2^2(t)) dt$$

Mit den zusätzlichen Gewichtungsfaktoren  $\beta_1 \in \mathbb{R}$  und  $\beta_2 \in \mathbb{R}$  lassen sich unterschiedliche Motorleistungen ausgleichen.

### Reduzierung von Schwingungen des Pendels

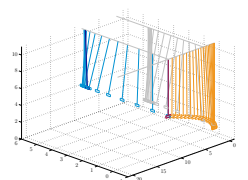
Bei einer neuen horizontalen Positionierung ist es unvermeidlich, dass das Lastaufnahmemittel in Schwingung gerät. Durch das Zielfunktional

$$\Phi(x, u) = \int_0^{t_f} \left( \frac{x_3(t)}{x_5(t)} \right)^2 dt$$

wird der durchschnittliche Winkel  $\varphi = \arcsin \frac{x_3}{x_5}$  reduziert, der die Auslenkung des Seils aus der Vertikalen beschreibt.

Würde man statt über den Winkel  $\varphi$  nur über die Auslenkung  $x_3(t)$  minimieren, kommt es zu einer zu starken Änderung der Seillänge während des Bahnverlaufs. Das Lastaufnahmemittel würde zu weit angehoben werden, um möglichst geringe relative Verschiebungen gegenüber der Laufkatze zu erhalten. Dieses würde ein Verhalten begünstigen, das bei sehr kurzen Seillängen auftritt. Die Periodendauer wird dadurch verkürzt und die Zahl der Schwingungen würde steigen. Um dem entgegenzuwirken oder allgemein das Problem mit kurzen Seillängen und kurzer Periodendauer zu beseitigen, kann die mittlere Geschwindigkeit der relativen Auslenkung  $x_4(t)$  im Verhältnis zur Seillänge  $x_5(t)$  minimiert werden:

$$\Phi(x, u) = \int_0^{t_f} \left( \frac{x_4(t)}{x_5(t)} \right)^2 dt.$$



## Kombinationen

Um mehrere Zielfunktionale zu berücksichtigen, damit eine optimale Bahn generiert werden kann, die durch einen Kompromiss aus mehreren Entwurfszielen optimiert wurde, können beliebige Zielfunktionale  $\Phi_i(x, u)$ ,  $i = 1, \dots, n_\Phi$  mit geeignet gewählten Gewichtungsfaktoren  $\gamma_i \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $i = 1, \dots, n_\Phi$  addiert werden zu

$$\Phi(x, u) = \sum_{i=1}^{n_\Phi} \gamma_i \cdot \Phi_i(x, u).$$

In dieser Arbeit kommt eine Kombination der genannten Zielfunktionale zum Einsatz, wobei die Reduzierung des Schwingungsverhaltens durch die Minimierung des durchschnittlichen Winkels der Auslenkung berücksichtigt wird.

## 7.3 Anwendung direkter Verfahren

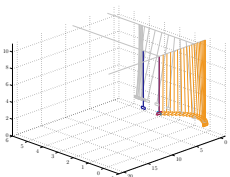
Für die Berechnung optimaler Bahnen der Laufkatze wird nachfolgend ein optimales Steuerungsproblem entsprechend dem OCP in (4.6) angegeben:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(x, u) = \sum_{i=1}^{n_\Phi} \gamma_i \cdot \Phi_i(x, u) \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = f_L(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f], \\ & x_i(0) = x_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n, \\ & x_i(t_f) = x_{i,f}, \quad i = 1, \dots, n, \\ & u_i(t) \in [u_{i,\min}, u_{i,\max}], \quad i = 1, \dots, m, \quad t \in [0, t_f], \\ & x_i(t) \in [x_{i,\min}, x_{i,\max}], \quad i \in \mathcal{I}_c, \quad t \in [0, t_f]. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Dabei sei  $u \in \mathcal{L}^\infty(0, t_f; \mathbb{R}^m)$  ein Vektor mit  $m = 2$  stückweise stetigen Funktionen und  $x \in \mathcal{W}^{1,\infty}(0, t_f; \mathbb{R}^n)$  ein  $n = 6$  dimensionaler Vektor aus stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen. Die Fahrzeit sei je nach Aufgabenstellung frei oder fest vorgegeben. Weiter gilt:

- i. die Zielfunktionale  $\Phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n_\Phi$  sind stetig differenzierbar,
- ii. die Gewichtungsfaktoren<sup>32</sup> seien gegeben durch  $\gamma_i \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $i = 1, \dots, n_\Phi$ ,
- iii. die rechte Seite der Differentialgleichung aus (7.5), beschrieben durch  $f_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ist stetig differenzierbar,

<sup>32</sup>Auf die zusätzliche Forderung  $\sum_{i=1}^{n_\Phi} \gamma_i = 1$  sei hier verzichtet, um eine Anpassung für große  $n_\Phi$  zu erleichtern.



- iv. die Anfangszustände  $x_{i,0} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  sind gemäß (7.6) gegeben,
- v. die Endzustände  $x_{i,f} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  sind gemäß (7.6) gegeben,
- vi. die Steuerbeschränkung für die Beschleunigungswerte  $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^m$  sind gemäß (7.9) bekannt,
- vii. die Zustandsbeschränkungen ausgewählter Zustände  $x_i$ ,  $i \in \mathcal{I}_c \subset \{1, \dots, n\}$ , sind durch  $x_{i,\min}, x_{i,\max} \in \mathbb{R}$  gegeben, siehe (7.7) und (7.8).

Die Beschreibung (7.10) des Bahnoptimierungsproblems kann für die weiteren numerischen Berechnungen mit Hilfe der in Abschnitt 4.3 beschriebenen direkten Verfahren gelöst werden, so dass die optimale Trajektorie für die Bewegungen der Laufkatze bereitgestellt werden kann.

Darüber hinaus ist in Knauer [Kna09] die Lösung des unbeschränkten Bahnoptimierungsproblems mittels indirekter Verfahren beschrieben. Die entsprechende Formulierung eines Randwertproblems aus dem optimalen Steuerungsproblem (7.10) ohne Beschränkungen ist sowohl für eine feste als auch für eine freie Endzeit möglich.

## 7.4 Optimale Regelung

Zusätzlich zum Bahnoptimierungsproblem soll für das Laufkatzenmodell eine modellbasierte Regelung entworfen werden. Dazu sind einige Vorarbeiten nötig, die hier für die numerischen Auswertungen in Kapitel 8 bereitgestellt werden.

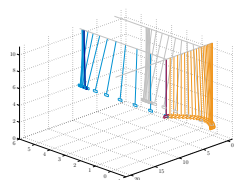
In Abschnitt 7.4.1 wird das nichtlineare Modell (7.5) auf mögliche Ruhelagen hin untersucht. Die notwendige Linearisierung des nichtlinearen dynamischen Systems wird in Abschnitt 7.4.2 durchgeführt. Abschließend werden die Voraussetzungen für die Existenz einer optimalen Zustandsrückführung gemäß den Ergebnissen aus Kapitel 5 überprüft.

### 7.4.1 Ruhelagen

Für die Berechnung der Lösung des linear quadratischen Regulatorproblems (LQR) ist es notwendig nichtlineare Differentialgleichungssysteme in einer gegebene Ruhelage zu linearisieren. Nachfolgend wird das dynamische Modell der Laufkatze (7.5) auf deren Ruhelagen untersucht.

Nach Definition 5.5 muss in einer Ruhelage  $(x_R, u_R) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  des nichtlinearen dynamischen Systems der Laufkatze gelten

$$0 = f_L(x_R, u_R).$$



Für das dynamische System der Laufkatze in (7.5) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 &= x_{R,2}, \\
 0 &= u_{R,1}, \\
 0 &= x_{R,4}, \\
 0 &= u_{R,1} - (g - u_{R,2}) \cdot \frac{x_{R,3}}{x_{R,5}}, \\
 0 &= x_{R,6}, \\
 0 &= u_{R,2},
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

wobei aus Sicht der Anwendung  $x_{R,5} \leq 0$  ausgeschlossen werden kann. Man kann sofort sehen, dass für eine Ruhelage  $(x_R, u_R)$  gilt:

$$x_R = (\text{frei } 0 \ 0 \ 0 \ \text{frei } 0)^T, \quad u_R = (0 \ 0)^T. \tag{7.12}$$

Es werden gerade die Komponenten  $x_{R,i}$ ,  $i = 2, 4, 6$ , des Zustandsvektors zu Null gesetzt, die die Geschwindigkeiten im Modell beschreiben. Gleiches gilt ebenfalls für die Ruhesteuerung  $u_R$ , wodurch die Beschleunigungen gegeben ist. Vom technischen Hintergrund her, muss ebenfalls die relative Verschiebung des Lastaufnahmemittels zur Laufkatze in einer Ruhelage gleich Null sein. Aus der vierten Gleichung in (7.11) erhält man

$$u_{R,1} - (g - u_{R,2}) \cdot \frac{x_{R,3}}{x_{R,5}} = 0 - (g - 0) \cdot \frac{x_{R,3}}{x_{R,5}} = -g \frac{x_{R,3}}{x_{R,5}} \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Länge des Seils  $x_{R,5} > 0$  und die Position  $x_{R,1}$  der Laufkatze auf der Fahrschiene können dabei beliebig und unabhängig voneinander gesetzt werden. Das Modell der Laufkatze hat somit unendlich viele Ruhelagen.

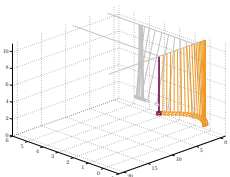
Bei der Berechnung der zusätzlichen Regelung inklusive der Simulation der Regelstrecke kommt diese entscheidende Eigenschaft zum Tragen. Es ist somit möglich, die im nächsten Abschnitt beschriebene Linearisierung entsprechend einer veränderten Ausgangssituation anzupassen.

## 7.4.2 Linearisierung

Für die Theorie der linear quadratischen Regulatorprobleme ist es notwendig, dass ein lineares dynamisches System der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

vorliegt. Ist dieses nicht der Fall, so kann durch eine Linearisierung um eine Ruhelage aus der nichtlinearen Systemdynamik ein lineares dynamisches System aufgestellt werden. Dabei handelt es sich um eine lineare Approximation des nichtlinearen



Modells, mit einer hohen Genauigkeit innerhalb einer Umgebung der verwendeten Ruhelage.

In den folgenden Überlegungen sei von einer nichtlinearen Systemdynamik  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  und einer zugehörigen Ruhelage  $(x_R, u_R)$  ausgegangen. Um die beliebige Wahl der Ruhelage, vgl. Abschnitt 7.4.1, zu erhalten, wird das System um die Ruhelage  $(x_R, u_R)$  verschoben:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= x(t) - x_R \\ \bar{u}(t) &= u(t) - u_R.\end{aligned}\tag{7.13}$$

Die Systemdynamik ergibt sich zu

$$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{x}(t) = f(\bar{x}(t) + x_R, \bar{u}(t) + u_R) =: \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)),\tag{7.14}$$

mit der zugehörigen Ruhelage  $(\bar{x}_R, \bar{u}_R) = (0, 0)$ . Weiter sei

$$\begin{aligned}\Delta\bar{x}(t) &:= \bar{x}(t) - \bar{x}_R = \bar{x}(t), \\ \Delta\bar{u}(t) &:= \bar{u}(t) - \bar{u}_R = \bar{u}(t).\end{aligned}\tag{7.15}$$

Mittels Taylorapproximation 1. Ordnung der rechte Seite erhält man

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \underbrace{\bar{f}(\bar{x}_R, \bar{u}_R)}_{=0} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_R, \bar{u}_R) \cdot \Delta\bar{x}(t) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}(\bar{x}_R, \bar{u}_R) \cdot \Delta\bar{u}(t) \\ &\stackrel{(7.15)}{=} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_R, \bar{u}_R) \cdot \bar{x}(t) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}(\bar{x}_R, \bar{u}_R) \cdot \bar{u}(t) \\ &\stackrel{(7.14)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_R, u_R) \cdot \bar{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_R, u_R) \cdot \bar{u}(t).\end{aligned}$$

Zusammen mit der Setzung

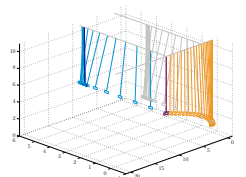
$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_R, u_R) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(x_R, u_R) \in \mathbb{R}^{n \times m}\tag{7.16}$$

resultiert das lineare System

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t).$$

Es ist offensichtlich, dass der zu entwerfende Regler, hier durch  $\bar{u}$  beschrieben, bzgl. des Zustandes  $\bar{x}$  berechnet wird. Damit wird zwar  $\bar{x}$  zu Null<sup>33</sup> geregelt, jedoch trifft dieses nicht zwangsläufig auf das nichtlineare System in  $x$  zu, sollte  $\bar{u}$  als Regelung eingesetzt werden.

<sup>33</sup>Gemäß den Ausführungen über Optimalregler in Kapitel 5, ist der Endzustand immer durch  $x_f = 0$  gegeben.



Für eine weitere Anwendung der Regelung aus dem LQR-Problem auf Basis der gegebenen linearen Dynamik, muss die Regelung  $\bar{u}(t) = -K_\infty \bar{x}(t)$  entsprechen zurück transformiert werden. Mit (7.13) erhält man die Regelung

$$u(t) = -K_\infty x(t) + K_\infty x_R + u_R.$$

Man könnte vermuten, dass auf die eingangs verwendete Transformation (7.13) verzichtet werden kann. Die Taylorapproximation 1. Ordnung würde entsprechend direkt auf das gegebene nichtlineare dynamische System angewendet werden zusammen mit der Ruhelage  $(x_R, u_R)$  als Entwicklungspunkt. Damit wäre allerdings nur eine Regelung in den Endzustand Null möglich, anstelle der gewünschten freien Wahl der Endzustände. Ein Verzicht auf die Transformation ist daher nicht möglich.

Zusätzlich ist bei der geeigneten Wahl einer Ruhelage auf die eingeschränkte Genauigkeit der linearen Approximation außerhalb der Umgebung der Ruhelage zu achten. Sollte durch den Regler ein Punkt angesteuert werden, der außerhalb dieser Umgebung liegt, ist mit einem Verlust an Genauigkeit zu rechnen und könnte in einem Fehlverhalten des geschlossenen nichtlinearen Systems resultieren. Das motiviert, die Berechnung der linearen Approximation des nichtlinearen Modells im zu erreichenden Endzustand durchzuführen.

### Lineares Modell der Laufkatze

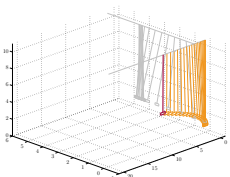
Bei der Berechnung der Ruhelagen des mathematischen Modells der Laufkatze in Abschnitt 7.4.1 hat sich gezeigt, dass die Ruhelagensteuerung  $u_R$  stets Null ist. Gleiches gilt für den Zustandsvektor  $x_R$  der Ruhelage mit Ausnahme der Komponenten  $x_{R,1}$  und  $x_{R,5}$ . Nachfolgend sei die beliebige Position der Katze durch  $s \in \mathbb{R}$  und die beliebige Länge des Seil durch  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l > 0$  bezeichnet, so dass für den Zustandsvektor der Ruhelage gilt:

$$x_R := (s \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad l \quad 0)^T \quad (7.17)$$

Die Systemmatrizen des linearen Systems der Laufkatze ergeben sich mit (7.16) und dem nichtlinearen dynamischen System aus (7.5) zu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g - u_{R,2}}{x_{R,5}} & 0 & \frac{(g - u_{R,2})x_{R,3}}{x_{R,5}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \frac{x_{R,3}}{x_{R,5}} \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Für eine bessere Unterscheidung der beteiligten dynamischen Systeme der kompletten Problemformulierung in Abschnitt 7.6 seien die Bezeichnungen  $z$  des Zustands



und  $w$  der Steuerung des linearen Systems berücksichtigt, vgl. Kapitel 6.3, die im Weiteren zur Anwendung kommen werden.

Durch Einsetzen der Ruhelage (7.17) ergibt sich das lineare Modell der Laufkatze:

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} w(t). \quad (7.18)$$

Zusammenfassend ist das lineare System gemäß (7.18) bereits durch die Angabe einer speziellen Seillänge  $l$  bestimmt. Die Position  $s$  der Laufkatze nimmt keinen Einfluss auf das lineare Modell.

Sollte auf die Regelung der Seillänge verzichtet werden, so reduziert sich das nicht-lineare Modell bereits auf ein lineares System, so dass auf eine Linearisierung verzichtet werden kann. Aus (7.5) ergibt sich direkt das lineare System

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}} & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} w(t). \quad (7.19)$$

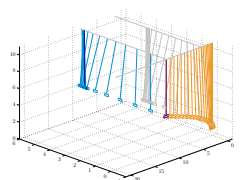
Damit eine geeignete Regelung gefunden werden kann, die neben den Endpunkt  $(z, w) = (0, 0)$  auch andere Endzustände ansteuern kann, ist die bereits angesprochene Transformation der Regelung dennoch notwendig.

Im nächsten Abschnitt wird das lineare Modell (7.18) genauer untersucht werden.

### 7.4.3 Systemtheoretische Betrachtung des dynamischen Systems

Für die Existenz eines optimalen Regelgesetzes aus Satz 5.24 bzw. Satz 6.13 muss das gegebene lineare System  $(A, B)$  stabilisierbar sein und in Verbindung mit dem Zielfunktional (5.36) mit  $Q = C^T C$ , muss das System  $(A, C)$  beobachtbar sein.

Generell ist bei der Wahl der Gewichtungsmatrix  $Q$  auf die positive Semidefinitheit zu achten. Aus Sicht des Anwenders und der möglichen Interpretation der Einträge hat sich hingegen die Diagonalgestalt von  $Q$  mit  $c_i \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $i = 1, \dots, 6$  durchgesetzt



und als geeignet erwiesen:

$$Q = C^T C := \begin{pmatrix} c_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6^2 \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Die einzelnen Zustände des zugehörigen linearen Systems können direkt im Zielfunktional gewichtet werden. Der Anwender ist in der Lage zusätzlichen Einfluss auf die resultierende Regelung auszuüben, indem beispielsweise Zustände bestraft werden, deren Werte generell sehr klein gehalten werden müssen. Andere weniger wichtigere Zustände können entsprechend vernachlässigt werden bzw. finden keine Berücksichtigung im Zielfunktional.

Bei dem Modell der Laufkatze wären mitunter die relative Auslenkung und die relative Geschwindigkeit der Last Größen, die mehr zu bestrafen sind als zum Beispiel die Position der Laufkatze. Weitere Untersuchungen bzgl. verschiedener Gewichtungen sind im Kapitel 8.4.2 zu finden.

Für die Gewichtungsmatrix  $R$  der Steuerung im Zielfunktional gelten die obigen Aussagen analog mit der Einschränkung, dass die Matrix positiv definit sein muss. Nulleinträge auf der Diagonalen bei einer reinen Diagonalmatrix sind nicht möglich.

Nachfolgend werden die Voraussetzungen an die beiden Systeme geprüft und weitere resultierende Aussagen bereitgestellt.

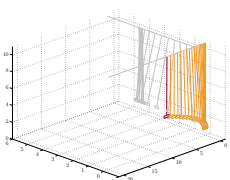
### Stabilisierbarkeit

Die Überprüfung der Stabalisierbarkeit des Systems erfolgt über den Nachweis der Steuerbarkeit, vgl. Folgerung 5.12. Dafür muss nach Satz 5.11 der Nachweis erbracht werden, dass die Steuerbarkeitsmatrix von  $(A, B)$  den vollen Rang besitzt.

Für das System (7.18) gilt:

$$[B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{g}{l} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es ist offensichtlich, dass die Steuerbarkeitsmatrix vollen Rang hat. Damit ist das System vollständig steuerbar.





## Beobachtbarkeit

Für die Überprüfung der Beobachtbarkeit von  $(A, C)$  sei von einem  $Q = C^T C$  mit Diagonalgestalt (7.20) ausgegangen. Nach Satz 5.15 ist zu zeigen, dass die Beobachtbarkeitsmatrix von  $(A, C)$  den vollen Rang hat. Es ergeben sich die Teilmatrizen von  $[C^T, (CA)^T, (CA^2)^T, (CA^3)^T]^T$  zu:

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{c}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_6 \end{bmatrix}, \quad CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_3 g}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_4 g}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{c}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_4 g}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad CA^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_3 g}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_4 g^2}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bei differenzierter Betrachtung der Matrixeinträge  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  ergeben sich die folgenden Bedingungen für den vollen Rang der Beobachtbarkeitsmatrix:

- i.  $c_1 \neq 0$ : Damit ist  $c_2 = 0$  zulässig und es muss gelten:  $c_1 > 0$ ,  $c_2 \geq 0$ .
- ii.  $c_5 \neq 0$ : Damit ist  $c_6 = 0$  zulässig und es muss gelten:  $c_5 > 0$ ,  $c_6 \geq 0$ .
- iii.  $c_3 = 0$ : Die Teilmatrizen  $C_{(3:4,3:4)}$  und  $(CA)_{(3:4,3:4)}$  ergeben sich zu:

$$C_{(3:4,3:4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} \quad (CA)_{(3:4,3:4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{c_4 g}{l} & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich muss gelten:  $c_4 \neq 0$ .

- iv.  $c_4 = 0$ : Die Teilmatrizen  $C_{(3:4,3:4)}$  und  $(CA)_{(3:4,3:4)}$  ergeben sich zu:

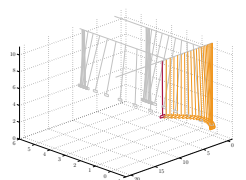
$$C_{(3:4,3:4)} = \begin{pmatrix} c_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (CA)_{(3:4,3:4)} = \begin{pmatrix} 0 & c_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich muss gelten:  $c_3 \neq 0$ .

Zusammenfassend muss  $C$  den Eigenschaften genügen:

$$\begin{cases} c_1 > 0 \text{ und } c_2 \geq 0 \\ c_5 > 0 \text{ und } c_6 \geq 0 \\ c_3 > 0 \text{ und } c_4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} c_1 > 0 \text{ und } c_2 \geq 0 \\ c_5 > 0 \text{ und } c_6 \geq 0 \\ c_3 \geq 0 \text{ und } c_4 > 0 \end{cases} . \quad (7.21)$$

Damit ist die Matrix  $Q$  positiv semidefinit und die Beobachtbarkeitsmatrix hat vollen Rang, so dass das System  $(A, C)$  vollständig beobachtbar ist.



### 7.4.4 Linear quadratisches Regulatorproblem der Laufkatze

Für die Berechnung einer optimalen zeitinvarianten Regelung nach Satz 5.24 ergibt sich das linear quadratische Regulatorproblem der Laufkatze zu:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Psi(z, w) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\alpha_Q z^T(\varsigma) Q z(\varsigma) + \alpha_R w^T(\varsigma) R w(\varsigma)] d\varsigma \\ \text{unter} \quad & \dot{z}(\varsigma) = A(l)z(\varsigma) + B(l)w(\varsigma), \\ & z(0) = z_0. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Dabei ist  $w$  der Vektor der  $m_c$  Steuerfunktionen und  $z$  der  $n_c$  dimensionale Zustandsvektor. Weiter sind die folgenden Bedingungen erfüllt:

- i. die Gewichtungsmatrix  $Q \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  mit  $Q = C^T C$  ist positiv semidefinit und symmetrisch,
- ii. die Gewichtungsmatrix  $R \in \mathbb{R}^{m_c \times m_c}$  ist positiv definit und symmetrisch,
- iii. die Gewichtungsfaktoren<sup>34</sup> seien gegeben durch  $\alpha_Q, \alpha_R \in \mathbb{R}^+$ ,
- iv. die Systemmatrizen  $A(l) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  und  $B(l) \in \mathbb{R}^{m_c \times m_c}$  sind gemäß (7.18) gegeben,
- v. die Anfangszustände sind gegeben durch  $z_{i,0} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n_c$ ,
- vi. das lineare System  $(A(l), B(l))$  ist für alle Seillängen  $l > 0$  vollständig stabilisierbar,
- vii. das lineare System  $(A(l), C)$  ist für alle Seillängen  $l > 0$  unter den Bedingungen in (7.21) vollständig beobachtbar.

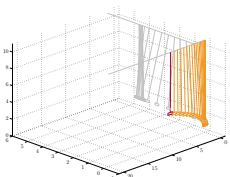
Da die Systemmatrizen der Linearisierung von der Seillänge  $l$  abhängen, wird sich eine Regelungsvorschrift

$$w(\varsigma) = -K_{\infty}(l)z(\varsigma).$$

ergeben, die ebenfalls von der Seillänge abhängig sein wird.

In Kapitel 8 werden unterschiedliche Regler entworfen, die auf verschiedenen Systemen basieren. Die Dimension  $n$  der Zustandsgröße  $x$  und  $m$  der Steuerung  $u$  des dynamischen Systems der optimalen Bahnplanung muss nicht notwendigerweise für das geregelte System übernommen werden. Es werden mitunter einzelne Steuerungen zu Null gesetzt, so dass gilt:  $n_c \leq n, m_c \leq m$ .

<sup>34</sup>Auf die zusätzliche Forderung  $\alpha_Q + \alpha_R = 1$  sei hier verzichtet, um eine Anpassung der Einträge der Gewichtungsmatrizen zu erleichtern.






## 7.5 Erweiterte Nebenbedingungen

Im Folgenden wird detailliert auf die Beschreibung der erweiterten Nebenbedingungen eingegangen, durch die erst eine Verknüpfung des optimalen Steuerprozess mit dem linearen quadratischen Regulatorproblem hergestellt wird.

Der Abschnitt 7.5.1 stellt die gewählte Simulationsrechnung der geschlossenen Regelkreises vor. Mögliche Terme der Kopplung von optimalen Steuerprozess und linear quadratischem Regulatorproblem werden in Abschnitt 7.5.2 vorgestellt. Das resultierende Ergebnis des in dieser Arbeit gewählten Terms für die Kopplung ist in Abschnitt 7.5.3 präsentiert.

Motiviert durch das konkrete Anwendungsproblem der Laufkatze, werden abschließend in Abschnitt 7.5.4 zusätzliche Anpassungen der Regelstrecke vorgestellt.

Für eine bessere Unterscheidung der drei verwendeten dynamischen Systeme wird die Notation aus Tabelle 6.1 um weitere Größen ergänzt. In der Tabelle 7.1 sind die verwendeten Bezeichner zusammenfassen dargestellt.

Name	Zeit	Zustand	dim.	Steuerung	dim.	Farbe
OCP	$t$	$x$	$n$	$u$	$m$	
SIM	$\tau$	$y$	$n_c$	$v$	$m_c$	
LQR	$\varsigma$	$z$	$n_c$	$w$	$m_c$	

**Tabelle 7.1:** Notation des optimalen Steuerungsproblem der Laufkatze unter erweiterten Nebenbedingungen

### 7.5.1 Simulation des geschlossenen Kreises

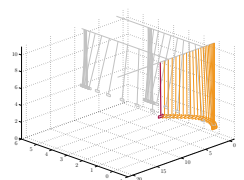
Für eine Verknüpfung der beiden Problemstellung der optimalen Bahnplanung (7.10) und einer optimalen Regelung aus (7.22) wird ein weiteres dynamisches System eingeführt:

$$\dot{y}(\tau) = g(y(\tau), v(\tau)), \quad \forall \tau \in [0, \tau_f].$$

Entgegen dem geforderten linearen System aus Satz 6.13 wird für die Simulation des geschlossenen Regelkreises auf die lineare Formulierung (7.18) des Systems der Laufkatze verzichtet. Da gerade das zu erwartenden Verhalten des geregelten Systems der Laufkatze bewertet werden soll, wird auf die exakte Beschreibung (7.5) zurückgegriffen. Störende Approximationsfehler durch die Linearisierung können so vermieden werden.

Die Steuergröße  $v(\tau)$  wird durch die optimale Zustandsrückführung des linear quadratischen Regulatorproblems (7.22) beschrieben

$$v(\tau) = -K_\infty(l) y(\tau), \quad \forall \tau \in [0, \tau_f],$$



wobei die Matrix der Zustandsrückführung  $K_\infty(l)$  abhängig ist von der gewählten Seillänge.

Unter den Bedingungen der Stabilisierbarkeit und Beobachtbarkeit des linear quadratischen Regulatorproblems für  $p_0 := l$ , sowie der strengen Regularität der optimalen Lösung  $K_\infty$  von (6.3) in  $p_0 = l$ , so dass die HESSE-Matrix der Zielfunktion  $\nabla_{K_\infty}^2 \Upsilon(K_\infty, l)$  positiv definit ist, ist die Matrix  $K_\infty(l)$  nach Satz 6.11 stetig differenzierbar nach  $l$ .

Die positive Definitheit der HESSE-Matrix kann numerisch für alle Seillängen  $l > 0$  überprüft werden.

Die noch zu wählende Seillänge  $l$  ergibt sich aus dem jeweiligen Zustand  $x(t)$  des optimalen Steuerprozess. Somit wird in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand zum Zeitpunkt  $t$  des Bahnoptimierungsproblems die bestmögliche Approximation in einer Umgebung von  $x(t)$  bestimmt, sowie die entsprechende Regelungsmatrix  $K_\infty(x(t))$ .

Für alle Zeitpunkte  $t \in [0, t_f]$  der Bahnoptimierung ergibt sich die Simulation des geschlossenen Regelkreises zu:

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau) &= g(y(\tau), v(\tau)) \\ y(0) &= x(t), \\ v(\tau) &= -K_\infty(x(t)) y(\tau) \end{aligned}, \quad \forall \tau \in [0, \tau_f]. \quad (7.23)$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist für alle  $t \in [0, t_f]$  gegeben durch  $y(\tau; x(t))$ .

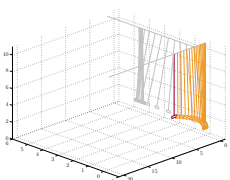
Da die rechte Seite des nichtlinearen Systems der Laufkatze aus (7.5) bereits eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion für positive Seillängen, die Zustandsrückführung  $v(\tau)$  offensichtlich nach  $K_\infty$  stetig differenzierbar und  $K_\infty(x(t))$  stetig differenzierbar nach  $x(t)$  ist, handelt es sich bei der rechten Seite  $g$  um eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion. Nach Satz 6.6 ist  $y(\tau; x(t))$  stetig differenzierbar nach  $x(t)$ .

## 7.5.2 Kopplung durch Energieterme

Durch einen explizit gegebenen Kopplungsterm kann die geschlossene Zustandsrückführung Einfluss auf die ursprüngliche Bahnoptimierung nehmen.

Zusammen mit der Regelung und dem geschlossenen Regelkreis aus (7.23), wird durch die Systemgröße  $y(\tau; x(t))$  eine geeignete erweiterte Nebenbedingung aufgestellt. Nachfolgend werden einige Beispiele vorgestellt.

Für die folgenden Beispiele sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass das geschlossene System jede Zustandsgröße zu Null regeln wird.



## Zeitverhalten

Durch die Integration der Zustandsgrößen  $y(\tau)$  kann das komplette Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises berücksichtigt werden:

$$\int y^T(\tau) S y(\tau) d\tau \leq \rho, \quad \text{auf } [0, \tau_f].$$

Mit einer konstanten oberen Schranke  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , einem festgelegten Integrationsintervall, sowie einer Gewichtung  $S \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  der Zustände, können gedämpfte Verläufe mit geringen Überschwingern und kleiner maximaler Überschwingweite erreicht werden.

Hierbei sollte stets die ursprüngliche Auslegung der Regelung in (7.22) mitberücksichtigt werden. Mitunter kann durch die Auswahl der Matrizen  $Q$  und  $R$  ein Widerspruch entstehen.

Um auf Ereignisse nicht nur schnell reagieren zu können, sondern zusätzlich innerhalb einer kurzen Zeitspanne eine geringe Regelabweichung zu erreichen, ist der obige Ansatz nur bedingt geeignet. Die in das System eingebrachte Energie zu Beginn der Regelung ist in diesem Fall eher unwichtig und sollte entsprechend nicht im Integral bestraft werden.

Für eine gezielte Berücksichtigung des Zeitverhaltens der Regelstrecke ab einem Zeitpunkt  $\tau_1 \in ]0, \tau_f[$  ist folgende Aufteilung zu empfehlen:

$$\begin{cases} \int y^T(\tau) S y(\tau) d\tau = \text{beliebig}, & \text{auf } [0, \tau_1], \\ \int y^T(\tau) S y(\tau) d\tau \leq \rho, & \text{auf } [\tau_1, \tau_f], \end{cases}$$

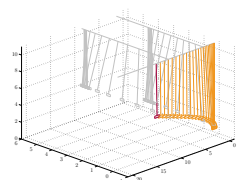
In Bezug auf das System der Laufkatze in (7.5), würden entsprechend die Geschwindigkeiten, sowie die relative Verschiebung des Lastaufnahmemittels bzgl. der Laufkatze zu Null geregelt werden. Die Position der Katze und die Seillänge würden auf einen konstanten Wert geregelt werden, der nicht notwendigerweise gleich Null ist. Bei der Integration muss entsprechend die Regelabweichung unter Berücksichtigung des Sollwerts verwendet werden.

## Zustandsverhalten

Als eine Alternative für die Betrachtung der Regelabweichung gegen Ende des Zeitintervalls ist die Auswertung einzelnen Zustände denkbar:

$$|y_i(\tau)| \leq \rho_i, \quad \forall \tau \geq \tau_1, \quad i \in \{1, \dots, n_c\}.$$

Dieses setzt voraus, dass das geschlossene System bereits eingeschwungen ist. Zusätzlich bedarf es einer genauen Kenntnis der verwendeten Matrizen und dessen Wirkung im linear quadratischen Regulatorproblem.



Die Problematik einer solchen erweiterten Nebenbedingung ist auf den ersten Blick die nicht Differenzierbarkeit der Betragsfunktion in 0. Dieses steht im Widerspruch zu den Bedingungen in Satz 6.13. Eine Alternative kann durch zwei separate Beschränkungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \rho_{i,\min} - y_i(\tau) &\leq 0 \\ y_i(\tau) - \rho_{i,\max} &\leq 0, \quad \forall \tau \geq \tau_1, \quad i \in \{1, \dots, n_c\}, \end{aligned}$$

wobei  $\rho_{\min}, \rho_{\max} \in \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $\rho_{i,\min} \leq \rho_{i,\max}$ ,  $i \in \{1, \dots, n_c\}$ .

## Energieverhalten

Eine andere Aufstellung der erweiterten Nebenbedingung für die Bahnoptimierung der Laufkatze verzichtet gänzlich auf zusätzliche Integrale. Sie basiert auf den beiden physikalischen Größen der

$$\begin{aligned} \text{kinetischen Energie: } E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}mv^2, \\ \text{potentiellen Energie: } E_{\text{pot}} &= mgh. \end{aligned}$$

Die kinetische Energie gibt Auskunft über die tatsächlich noch vorhandenen Geschwindigkeiten im dynamischen System, hingegen die potentielle Energie mit zunehmender Höhe steigt.

Die Basis für die Messung der Höhen  $h$  der potentiellen Energie ist definiert durch die Position des Lastaufnahmemittels im stabilen Ruhezustand des Pendels, vgl. Abbildung 7.3. Folglich ist die potentielle Energie ein Indikator für das Pendelverhalten des Lastaufnahmemittels.

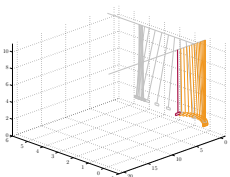
Aufgrund des Pendelverhaltens des Lastaufnahmemittels ergeben sich zwei Spezialfälle in den Beschreibungen der Energie:

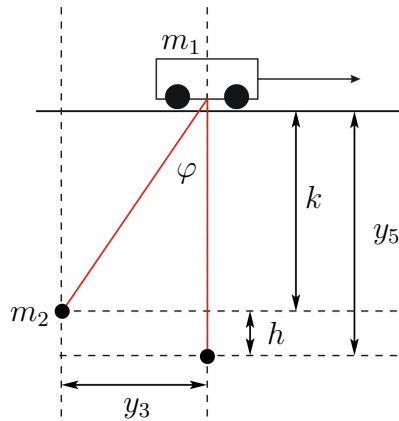
- Wendepunkt bei maximaler Auslenkung,
- Scheitelpunkt in  $\varphi = 0$ .

Im Scheitelpunkt ist die potentielle Energie gleich Null hingegen die relative Geschwindigkeit maximal ist, sofern die stabile Ruhelage des Pendels noch nicht erreicht wurde. Im Falle der maximal erreichbaren Auslenkung ist die kinetische Energie unter Berücksichtigung der relativen Geschwindigkeit Null, da letztere Null ist.

Es ist ratsam beide, sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie zu berücksichtigen. Zusätzlich wird anstatt der relativen Geschwindigkeit des Lastaufnahmemittels deren absolute Geschwindigkeit verwendet.

Mit den Größen in Abbildung 7.3 lassen sich für das System der Laufkatze drei Energierterme identifizieren:





$m_1$	Masse der Laufkatze
$m_2$	Masse der Last
$y_3$	Relativposition der Last
$y_5$	Länge des Seils
$h$	Höhendifferenz des Pendelausschlags
$\varphi$	Winkel des Pendelausschlags
$k$	Hilfsgröße

**Abbildung 7.3:** Modell einer Laufkatze für die Energieberechnung

- kinetische Energie der Laufkatze über die Geschwindigkeit  $y_2$ ,
- kinetische Energie des Lastaufnahmemittels über die absolute Geschwindigkeit  $y_{4,\text{abs}} = y_2 + y_4$ ,
- potentielle Energie über die Höhendifferenz  $h = y_5 - k$  des Lastaufnahmemittels beim Pendeln.

Zusammen erhält man für die im System befindliche Energie die Gleichungen:

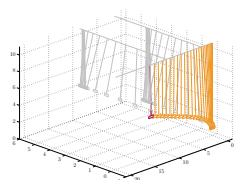
$$E(y) = E_{\text{kin}}(y) + E_{\text{pot}}(y),$$

$$\text{mit } \begin{aligned} E_{\text{kin}}(y) &= \frac{1}{2} m_1 y_2^2 + \frac{1}{2} m_2 y_{4,\text{abs}}^2, \\ E_{\text{pot}}(y) &= m_2 g y_5 - m_2 g \sqrt{y_5^2 - y_3^2}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Durch die Kombination beider Energierterme ist neben der Behandlung der beiden genannten Spezialfälle ebenfalls eine bessere Beschreibung und Klassifizierung des Systemverhaltens möglich. In Kapitel 8.4 werden detailliertere Verläufe der Energierterme für unterschiedliche Parametersätze der Reglerauslegung gezeigt.

### 7.5.3 Erweiterte Nebenbedingung der Laufkatze

Unter der Voraussetzung dass das geschlossene, geregelte dynamische System aus (7.23) bekannt ist und zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, t_f]$  der Bahnoptimierung existiert, wird für die Kopplung zwischen dem optimalen Steuerprozess (7.10) und dem linear quadratischen Regulatorproblem (7.22) der Energierterm in (7.24) zu einem festen Endzeitpunkt  $\tau_f$  ausgewertet.



$$\begin{aligned}
E(y(\tau_f; x(t))) - E_{\text{lim}} &\leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f] \\
\text{mit } \dot{y}(\tau) &= g_L(y(\tau), v(\tau)), \quad \forall \tau \in [0, \tau_f], \\
y_i(0) &= x_j(t), \quad i = 1 \dots, n_c, \quad j \in \mathcal{I}_L \\
v(\tau) &= -K_\infty(x(t)) y(\tau), \quad \forall \tau \in [0, \tau_f].
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Dabei ist  $v$  der Vektor der  $m_c$  Steuerfunktionen und  $y$  der  $n_c$  dimensionale Zustandsvektor. Des Weiteren gelten die Bedingungen:

- i. die konstante obere Grenze der erweiterten Nebenbedingung ist gegeben durch  $E_{\text{lim}} \in \mathbb{R}^+$ ,
- ii. die nichtlineare Funktion der Energie  $E(y(\tau_f; x(t)))$  aus (7.24) ist gegeben durch  $E : \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow \mathbb{R}$  und stetig differenzierbar nach  $y$ ,
- iii. die rechte Seite der Differentialgleichung aus (7.5), ggf. ein reduziertes System, beschrieben durch  $g_L : \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{m_c} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$ , ist stetig differenzierbar für positive Seillängen,
- iv. die Anfangszustände  $y_i(0) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n_c$  sind gegeben durch ausgewählte Zustände  $x_j(t)$ ,  $j \in \mathcal{I}_L \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $n_c \leq n$ , des optimalen Steuerprozess (7.10) zum Zeitpunkt  $t \in [0, t_f]$  der optimalen Bahnplanung,
- v. die Matrix der Zustandsrückführung  $K_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_c \times n_c}$  ist durch das linear quadratische Regulatorproblem der Laufkatze (7.22) gegeben und ist stetig differenzierbar.

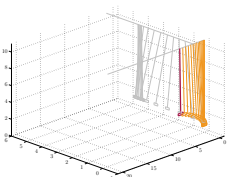
Die erweiterte Nebenbedingung im optimalen Steuerprozess der Laufkatze ist gegeben durch

$$C_E(x(t), y(t)) := E(y(\tau_f; x(t))) - E_{\text{lim}},$$

wobei die nichtlineare Funktion  $E(y(\tau_f; x(t)))$  gemäß (ii) und den Ausführungen in Abschnitt 7.5.1 ebenfalls stetig differenzierbar nach  $x(t)$  ist.

## 7.5.4 Anpassung der Reglermatrix

In Abschnitt 7.4.2 wurde beschrieben, wie die optimale Zustandsrückführung durch eine Transformation angepasst werden muss, sofern ein Ruhezustand von Null verschieden angesteuert werden soll. Ebenso wurde die Abhängigkeit der Linearisierung von der zu wählenden Ruhelage vorgestellt.





Im Folgenden wird die genaue Auswahl des Sollwerts der Regelung diskutiert. Es sei eine Ruhelage  $(x_R, u_R)$  gegeben durch

$$x_R := (s \ 0 \ 0 \ 0 \ l \ 0)^T, \quad u_R := (0 \ 0)^T,$$

mit  $s \in \mathbb{R}$  und  $l \in \mathbb{R}^+$ . Die Zustandsrückführung sei entsprechend transformiert, sodass das geschlossene System (7.23) den Endzustand  $y(\tau_f) = x_R$  anstrebt. Eine asymptotisch stabile Annäherung an  $x_R$  kann nicht garantiert werden, da dieses nur für das unterlagerte lineare System im linear quadratischen Regulatorproblem gilt und nicht auf das ursprüngliche nichtlineare System übertragbar ist, vgl. Satz 5.24 und Satz 6.13.

In Anbetracht dessen, dass die Seillänge die Approximation mittels Linearisierung beeinflusst und eine Umgebung von  $l$  festlegt mit der entsprechenden Genauigkeit, ist die Seillänge  $l$  als Sollwert für  $y_5$  geeignet.

Hingegen nimmt die gewählte Position der Katze  $s$  keinen Einfluss auf die Linearisierung. Sie kann sogar frei gewählt werden. Damit die Regelung das Pendelverhalten des Lastaufnahmemittels nicht unnötig anregt, mit dem Ziel die Endposition  $y_1(\tau_f) = s$  der Laufkatze zu erreichen, wird die ermittelte Regelabweichung in  $y_1$  künstlich zu Null gesetzt. Die Matrix der Zustandsrückführung ergibt sich zu

$$\hat{K}_\infty = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}, K_{\infty(1:2, 2:6)} \right].$$

Der Unterschied zwischen beiden Regelungen wird in dem folgenden Beispiel genauer betrachtet.

### Beispiel

Es sei das nichtlineare System der Laufkatze aus (7.5) gegeben. Die Parameter der optimalen Regelung sind gegeben durch

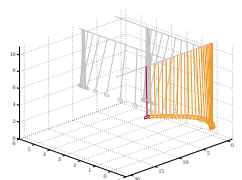
$$\begin{aligned} x_R &= (5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0)^T, \\ Q &= \text{diag}(0.1, 0.1, 1, 1, 1, 1), \\ R &= \text{diag}(1, 1), \end{aligned}$$

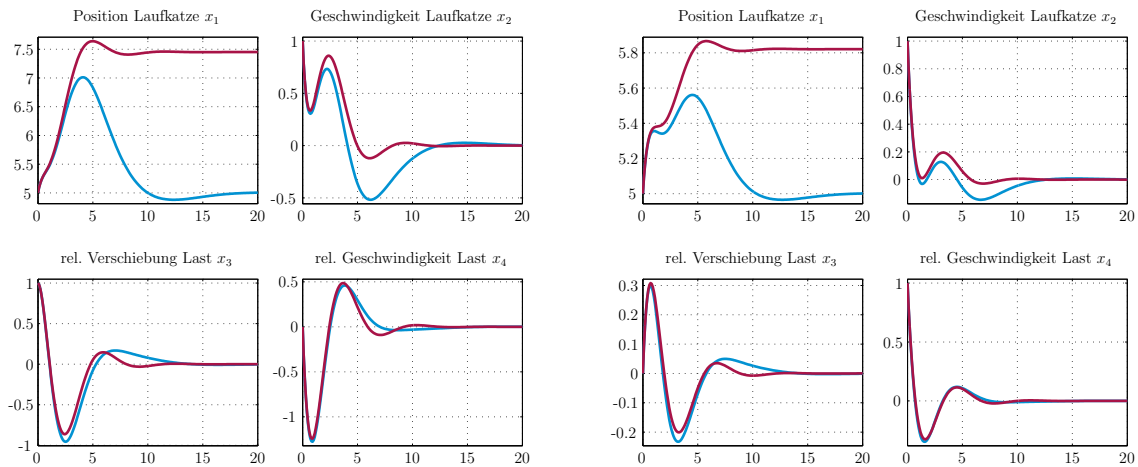
sowie der Sollwert  $y(\tau_f) = x_R$ . Die Anfangswerte für  $y(0)$  sind jeweils gewählt zu

$$y_{0,1} = (5 \ 1 \ 1 \ 0 \ 10 \ 0)^T \quad \text{und} \quad y_{0,2} = (5 \ 1 \ 0 \ 1 \ 10 \ 0)^T.$$

Somit wird die Ausgangssituation im Wendepunkt bei einer fest gegebenen maximalen Pendelauslenkung untersucht und der Durchgang in der stabilen Ruhelage bei einer Geschwindigkeit ungleich Null.

Die Einflüsse durch eine etwaige Seillängenänderung sind durch die Anfangsbedingung  $y_6(0) = 0$  außer Kraft gesetzt.





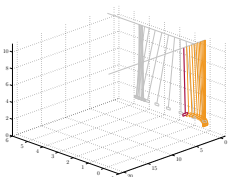
**Abbildung 7.4:** Vergleichsrechnung zwischen der angepassten Zustandsrückführung (rot) und dem Original (blau): links zum Anfangswert  $y_{0,1}$ ; rechts zum Anfangswert  $y_{0,2}$

In Abbildung 7.4 sind beide Simulationsergebnisse für die Zustände  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  und  $y_4$  dargestellt. Es ist offensichtlich, dass bei den gewählten Parametern eine Beruhigung des kompletten Systems mit der angepassten Matrix  $\hat{K}_\infty$  bereits früher einsetzt als bei der ursprünglich berechneten Regelungsmatrix  $K_\infty$ . Speziell die Anhaltezeit der Laufkatze kann mit der Anpassung verringert werden.  $\diamond$

Je nach Auslegung der Regelung ist der Unterschied deutlicher oder kaum zu erkennen. In diesem Beispiel wurde bereits durch  $q_{1,1} = q_{2,2} = 0.1$  eine Vernachlässigung der Zustandsverläufe der Laufkatze gegenüber dem Pendelverhalten des Lastaufnahmemittels eingestellt. Die Abweichung ist entsprechend deutlich sichtbar.

Entgegen den Parametern im Beispiel ist bei einer Vernachlässigung des Pendelverhaltens des Lastaufnahmemittels gegenüber den Zuständen der Laufkatze keine Verbesserung auszumachen. Es kann sich gegebenenfalls sogar zu einem Nachteil entwickeln. Der Grund liegt in der fehlenden Ausnutzung der Positionierung der Laufkatze um zusätzlich die relative Verschiebung wett zumachen.

Da für einen „geregelten Halt“ eine zügige Reduzierung des Pendelausschlages erstrebenswert ist, ist generell von einer Parametersetzung abzuraten, die das Pendelverhalten im Zielfunktional der optimalen Regelung zu stark vernachlässigt.



## 7.6 Optimale Bahnplanung unter erweiterten Nebenbedingungen

Für die Berechnung der optimalen Bahn unter Berücksichtigung einer Regelung für den geregelten Halt wird nachfolgend der komplette optimale Steuerprozess der Laufkatze unter erweiterten Nebenbedingungen vorgestellt.

Die Zusammensetzung erfolgt mittels der formulierten Teilsysteme in (7.10) für das OCP, der Simulation aus (7.25) und dem LQR-Problem in (7.22). Die zugehörigen Bedingungen sind in den jeweiligen Abschnitten der Teilprobleme präsentiert worden, vgl. die Abschnitte 7.3, 7.5.3 bzw. 7.4.4.

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(x, u) = \sum_{i=1}^{n_\Phi} \gamma_i \cdot \Phi_i(x, u) \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = f_L(x(t), u(t)), \quad \forall t \in [0, t_f], \\ & x_i(0) = x_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n, \\ & x_i(t_f) = x_{i,f}, \quad i = 1, \dots, n, \\ & u_i(t) \in [u_{i,\min}, u_{i,\max}], \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall t \in [0, t_f], \\ & x_i(t) \in [x_{i,\min}, x_{i,\max}], \quad i \in \mathcal{I}_c, \quad \forall t \in [0, t_f], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E(y(\tau_f)) - E_{\text{lim}} \leq 0, \quad \forall \tau \in [0, t_f] \\ \text{mit} \quad & \dot{y}(\tau) = g_L(y(\tau), v(\tau)), \quad \forall \tau \in [0, \tau_f] \\ & y_i(0) = x_j(t), \quad i = 1 \dots, n_c, \quad j \in \mathcal{I}_L \\ & v(\tau) = -K_\infty(x(t))y(\tau), \quad \forall \tau \in [0, \tau_f]. \end{aligned}$$

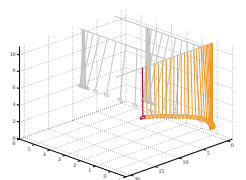
wobei  $K_\infty(x(t))$ ,  $\forall t \in [0, t_f]$  Lösung ist von:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Psi(z, w) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\alpha_Q z^T(\varsigma) Q z(\varsigma) + \alpha_R w^T(\varsigma) R w(\varsigma)] d\varsigma \\ \text{unter} \quad & \dot{z}(\varsigma) = A(x(t))z(\varsigma) + B(x(t))w(\varsigma), \\ & z(0) = x(t). \end{aligned}$$

Die zugehörigen Designparameter der optimalen Bahnplanung der Laufkatze unter erweiterten Nebenbedingungen sind zusammenfassend in Tabelle 7.2 gelistet.

Im nächsten Kapitel wird dieses System bei der numerischen Auswertungen unter der Berücksichtigung unterschiedlicher Setzungen der Designparameter zur Anwendung kommen.

Motiviert durch das Systemverhalten und dessen Funktionalität unter realen Bedingungen wurden drei zusätzliche optionale Parameter eingeführt. Über diese zusätzlichen Optionen sind einige Fälle untersucht worden, die nicht der exakten Realität



Variable:	Beschreibung:
$\gamma_i$	Gewichtung der Zielfunktionale im OCP
$x_0, x_f$	Randwerte des OCP-Systems der Laufkatze
$u_{\min}, u_{\max}$	Steuerbeschränkungen des OCP-Systems der Laufkatze
$x_{\min}, x_{\max}$	Zustandsbeschränkungen des OCP-Systems der Laufkatze
$E_{\text{lim}}$	obere Grenze der im geschlossenen System enthaltenen Energie
$\tau_f$	Zeitspanne der Simulation des geschlossenen, geregelten Systems
$\alpha_Q, \alpha_R$	Gewichtung beider Terme im LQR-Zielfunktional
$Q$	Gewichtungsmatrix der Zustände der Laufkatze bei einer Regelung
$R$	Gewichtungsmatrix der Steuerung der Laufkatze bei einer Regelung

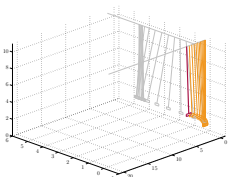
**Tabelle 7.2:** Designparameter der optimalen Bahnplanung der Laufkatze unter Berücksichtigung des geregelten Halts

entsprechen, aber Eingriffe in das System zulassen, die ein unstetiges oder nicht differenzierbares Verhalten aufweisen. Die optionalen Funktionalitäten aus Tabelle 7.3 sind daher nicht theoretisch bewiesen, sondern rein technischer Natur. Sie zeigen mitunter die Grenzen dieser Formulierung auf bzw. deren Robustheit gegenüber unvorhersehbarer Störungen.

Option:	Beschreibung:
lift	Aktivierung/ Deaktivierung der Seillängenänderung in der Simulation
regcut	Verwendung der Steuerbeschränkung aus dem OCP in der Simulation
regcon	Verwendung einer einzigen Regelung über die komplette Bahnoptimierung
regcon	Deaktivierung der Abhängigkeit von der aktuellen Seillänge des OCPs bei der Berechnung der Reglermatrix

**Tabelle 7.3:** Optionale Designelemente in der optimalen Bahnplanung der Laufkatze unter Berücksichtigung des geregelten Halts

Das jeweilige Anfahrverhalten der eingebauten Antriebsmotoren ist nicht im mathematischen Modell berücksichtigt. Ebenso bezieht sich die Thematik dieser Arbeit nicht auf Messfehler bzw. auf mögliche Messverfahren der Systemzustände.



## Numerische Ergebnisse

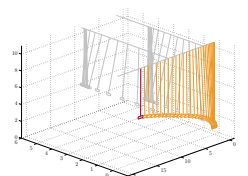
Mit dem vorgestellten System einer Laufkatze in Kapitel 7, sowohl als ein reines Bahnoptimierungsproblem mit Beschränkungen, als auch mit integrierten optimalen Regelungsstrategien, werden in diesem Kapitel die numerischen Ergebnisse diskutiert und untereinander verglichen. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Bereitstellung, Realisierung und Gewährleistung des „geregeltten Halts“ als eine der notwendigen Sicherheitsanforderung in der automatisierten Hochregallagertechnik.

Die typischen Bewegungsmuster einer Laufkatze werden in Abschnitt 8.1 anhand des optimalen Steuerungsproblem der Bahnoptimierung (7.10) verdeutlicht. Diese Verhaltensmuster werden in den weiteren Abschnitten mitunter zugrunde gelegt und als eine Vergleichsmöglichkeit zwischen dem ursprünglichen Bahnoptimierungsproblem und der neuen Problembeschreibung aus Abschnitt 7.6 dienen.

Erste Ergebnisse der Bahnoptimierung unter erweiterten Nebenbedingungen werden in Abschnitt 8.2 vorgestellt. Es werden die Fälle mit konstanter Seillänge und regelbarer Seillänge vorgestellt. Für den Fall der konstanten Seillänge wird entsprechend das reduzierte dynamische System der Laufkatze (7.19) zum Einsatz kommen.

Abschnitt 8.3 präsentiert eine stark vereinfachte Version des optimalen Steuerprozess unter erweiterten Nebenbedingungen. Dazu wird auf Basis der Start- und Endbedingung das linear quadratische Regulatorproblem vollständig bestimmt sein. Die verbleibende Kopplung zwischen den Zuständen  $x$  und  $y$  (bzw.  $z$ ) beschränkt sich daher auf die Vorgabe der Anfangsbedingungen  $y(0) = x(t)$  (bzw.  $z(0) = x(t)$ ) zu allen Zeitpunkten  $t$  des optimalen Steuerprozess.

Einen Eindruck über die Vielzahl an Möglichkeiten, ein linear quadratische Regulatorproblem zu charakterisieren und eine geeignete Parametrisierung zu wählen, vermittelt der Abschnitt 8.4. Als Ergänzung werden einige Verläufe der beteiligten Energieterme aus (7.24) in der erweiterten Nebenbedingung präsentiert. Gleichzeitig werden durch die vorgestellten Kombinationen der Parameter aus Tabelle 7.2, die Grenzen dieser Problembeschreibung aufgezeigt.



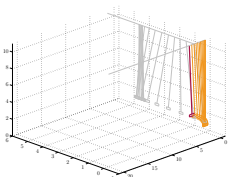
Motiviert durch den engen Bezug zum realen Modell und dem Prototypen des Hochregallagers, sind in Abschnitt 8.5 die Ergebnisse der Simulationen präsentiert, bei denen innerhalb der simulierten Regelstrecke zusätzliche Begrenzungen implementiert wurden. Folglich ist die Regelstrecke auf dem kompletten Simulationsintervall nicht mehr stetig differenzierbar. Die Hintergründe dieser Auswertung sind rein technischer Natur und geben darüber hinaus einen Eindruck über die Robustheit des Systems.

Die gezeigten Abbildungen mit den Verläufen der Simulationsergebnisse des optimalen Steuerungsproblem unter erweiterten Nebenbedingungen befolgen die in Tabelle 7.1 eingeführte Farbgebung. So werden die Verläufe der Zustände und die der Steuerungen des überlagerten OCP in Orange, die Zustände und die Regelgrößen des eingebetteten LQR-Problems in Blau dargestellt. Die Auswertung der erweiterten Nebenbedingung ist in Grün gegeben. Für einen besseren Vergleich ist das Resultat aus der optimalen Bahnplanung unter den gleichen Voraussetzungen, aber ohne erweiterte Nebenbedingung, in Grau eingezeichnet.

## 8.1 Bahnoptimierung

Für die Berechnung einer optimalen Trajektorie, an der die Laufkatze von ihrer Startposition zur gewünschten Zielposition entlang bewegt werden soll, ist ein entsprechendes Zielfunktional vorzugeben. Die Wahl ist rein subjektiv und hängt schlussendlich von den Ansprüchen des Benutzers ab. Einige mögliche Aspekte seien hier aufgezählt:

- Für eine hohe Lagerleistung sind Trajektorien mit einer möglichst geringen Verfahrzeit notwendig. Diese Bahnen sind mitunter aber sehr störungsanfällig, so dass von einer reinen Optimierung der Verfahrzeit abzuraten ist.
- Die Reduzierung der Amplitude des pendelnden Lastaufnahmemittels bringt gleich zwei positive Effekte mit sich. Bei großen Amplituden können sich Störungen auf das Lastaufnahmemittel deutlicher auswirken, so dass die Gefahr einer Ablenkung vom idealen zweidimensionalen Pendelverhalten größer ist. Eine Kollision mit den begrenzenden Regalwänden kann somit reduziert werden. Ebenfalls werden bei schweren Lasten die Zugkräfte reduziert, die für Störungen in der Positionierung der Laufkatze sorgen.
- Mit einer reduzierten Gesamtbeschleunigung des Lastaufnahmemittels sind die wirkenden Kräfte auf die Last begrenzt, so dass ein Verrutschen von Stückgut verringert wird und Flüssigkeiten weniger ins Wanken kommen.
- Einen sehr gleichmäßigen Verlauf der optimalen Bahn erreicht man durch die Minimierung des Rucks. Das wirkt sich besonders schonend auf die Motoren und die Getriebe aus, so dass es zu einem geringeren Verschleiß kommt.



	Set 1: geringes Pendelverhalten	Set 2: steuerungsarme Bahn	Set 3: schnelle Bahn
Steuerenergie $\gamma_1$	0.1	1	0.1
Pendelverhalten $\gamma_2$	1	0	0
Verfahrzeit $\gamma_3$	0.5	0.1	1

**Tabelle 8.1:** Gewichtungsfaktoren der Zielfunktionale

Position Laufkatze	$-0.2 \leq x_1 \leq 50$
Geschwindigkeit Laufkatze	$-3 \leq x_2 \leq 3$
Seillänge	$0.01 \leq x_5 \leq 17$
Geschwindigkeit Seillängenänderung	$-0.75 \leq x_6 \leq 1$
Beschleunigung Katze	$-0.8 \leq u_1 \leq 0.8$
Beschleunigung Seillängenänderung	$-1 \leq u_2 \leq 1$

**Tabelle 8.2:** Box-Beschränkungen der Steuerung und des Zustands der Laufkatze

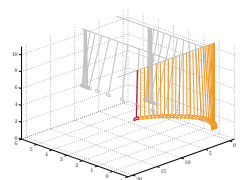
- Bei einer großen Lagerauslastung wirken sich bereits kleine Einsparungen in der Energie auf die Lagerhaltungskosten aus. Durch die Minimierung der aufzuwendenden Steuerenergie können so energieoptimale Bahnen ermittelt werden.
- Nur für Testzwecke und zum Nachweis der Robustheit der Ansteuerung der Motoren, sind auch entartete Bahnen denkbar, die durch geeignete Kombinationen von Zielfunktionalen realisiert werden können. So wären mögliche Forderungen zum Beispiel: ein vergrößertes Schwingungsverhalten oder eine sehr unruhige Bahn mit vielen Anfahr- und Bremsmanövern.

Für einen ersten Überblick über das zu erwartenden Systemverhalten einer Laufkatze, werden in dieser Arbeit Zielfunktionale betrachtet, die die Steuerenergie, das Pendelverhalten und die Verfahrzeit bevorzugt minimieren. Die exakte Formulierung ist in Abschnitt 7.2.3 gegeben. Die jeweiligen Gewichtungsfaktoren  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  des zusammengesetzten Zielfunktional  $\sum_{i=1}^3 \gamma_i \cdot \Phi_i(x, u)$  für drei zu untersuchende Fälle sind in Tabelle 8.1 gelistet.

Für die Beschränkungen der Zustände und der Steuerungen des Bahnoptimierungsproblems (7.10) sind die Werte entsprechend der Tabelle 8.2 verwendet worden.

Der zu vergleichende Testlauf ist so aufgesetzt, dass die Laufkatze einen Weg von 20m zurücklegen soll und die Seillänge von 10m um 5m verkürzt wird. Die Tabelle 8.3 gibt Auskunft über die vollständigen Anfangs- und Endbedingungen.

Die drei Bahnoptimierungsprobleme wurden jeweils mit 71 äquidistant verteilten Punkten diskretisiert und anschließend durch einen NLP-Solver gelöst. Die Dimensionen des optimalen Steuerprozess und die, des daraus resultierenden nichtlinearen



Position Laufkatze	$x_{1,0} = 0$	$x_{1,f} = 20$
Geschwindigkeit Laufkatze	$x_{2,0} = 0$	$x_{2,f} = 0$
rel. Verschiebung der Last	$x_{3,0} = 0$	$x_{3,f} = 0$
rel. Geschwindigkeit der Last	$x_{4,0} = 0$	$x_{4,f} = 0$
Seillänge	$x_{5,0} = 10$	$x_{5,f} = 5$
Seilgeschwindigkeit	$x_{6,0} = 0$	$x_{6,f} = 0$

**Tabelle 8.3:** Anfangs- und Endbedingung der Laufkatze

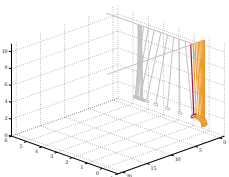
Optimierungsproblems, sind in Tabelle 8.3 aufgelistet. Zusätzlich sind die Endwerte der Zielfunktion und deren Komponenten gegeben. Es ist darauf zu achten, dass der Wert des kompletten Zielfunktional  $\Phi(x, u)$  die Gewichtungsfaktoren aus Tabelle 8.1 beinhaltet.

Die Auswirkungen der unterschiedlichen Zielfunktionale sind deutlich in den Abbildungen 8.1 und 8.2 zu erkennen. Es sind sowohl die Zustände  $x_1$  bis  $x_6$  als auch sie zugehörigen Steuergrößen  $u_1$  und  $u_2$  abgebildet.

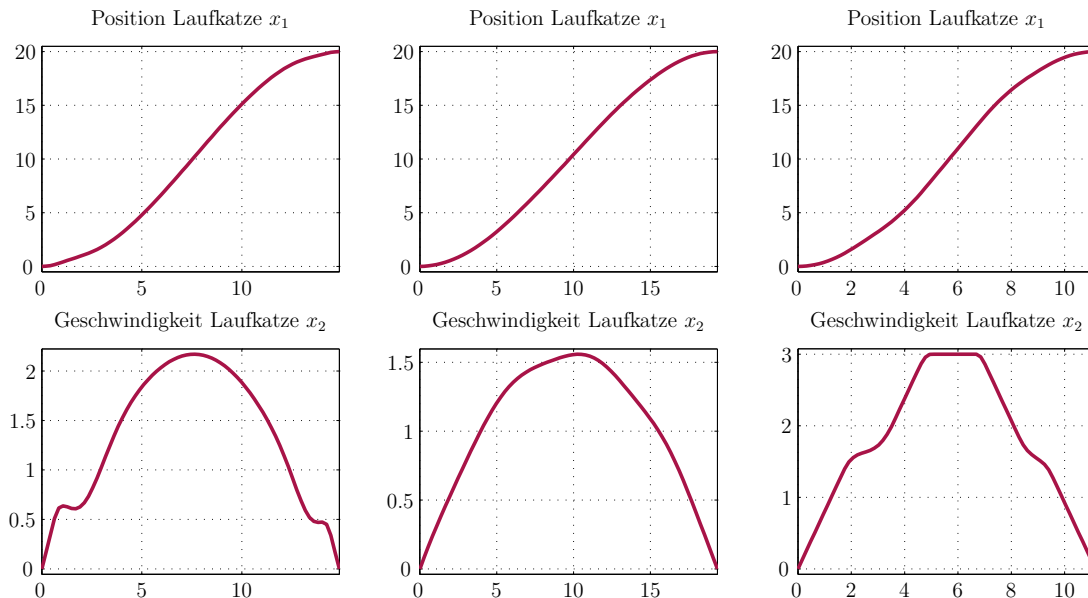
Die Verläufe der beiden Zielfunktionale für die Energieminimierung und das Pendelverhalten sind in der Abbildung 8.3 gezeigt.

Optimale Steuerung	diskrete Punkte	71		
	Steuerfunktionen	2		
	Differentialgleichungen	9		
	Randwerte	6		
	Nebenbedingungen	5		
	erw. Nebenbedingung	0		
nichtlineare Optimierung	Variablen	147		
	Beschränkungen	361		
Resultate		Set 1: geringes Pendelverhalten	Set 2: steuerungs- arme Bahn	Set 3: schnelle Bahn
	Rechenzeit	1.87s	4.54s	4.15s
	Iterationen	66	119	113
	$\Phi(x, u)$	9.5991	2.6447	11.6611
	$\Phi_1(x, u)$	2.3175	0.7094	5.0756
	$\Phi_2(x, u)$	1.9326	1.6219	7.3740
	$\Phi_3(x, u)$	14.8694	19.3532	11.154

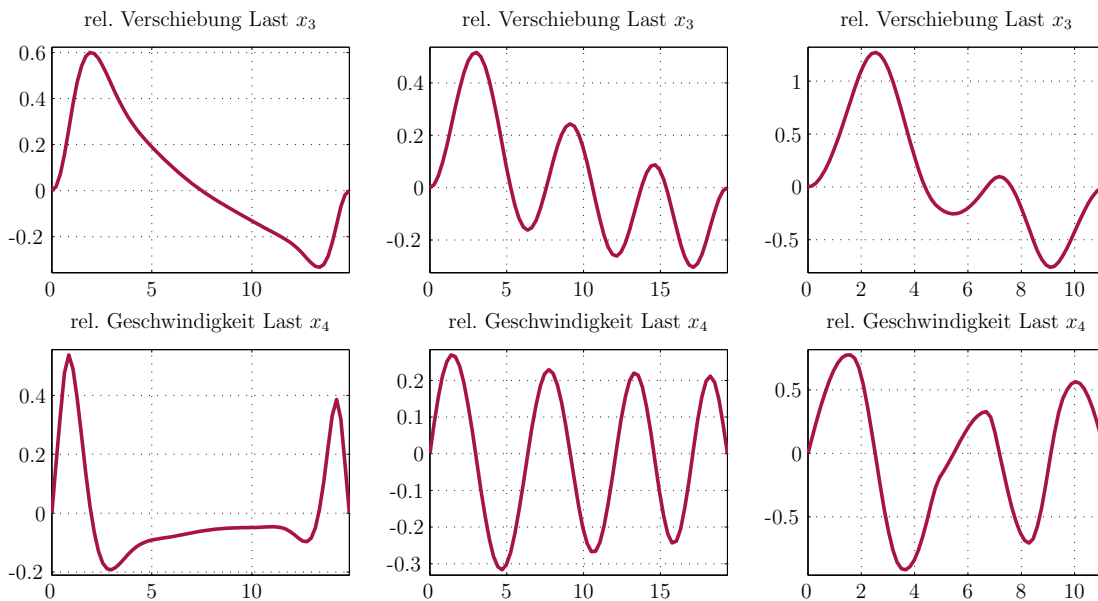
**Tabelle 8.4:** Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess und dem resultierenden nichtlinearen Optimierungsproblem





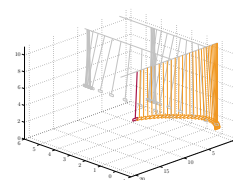


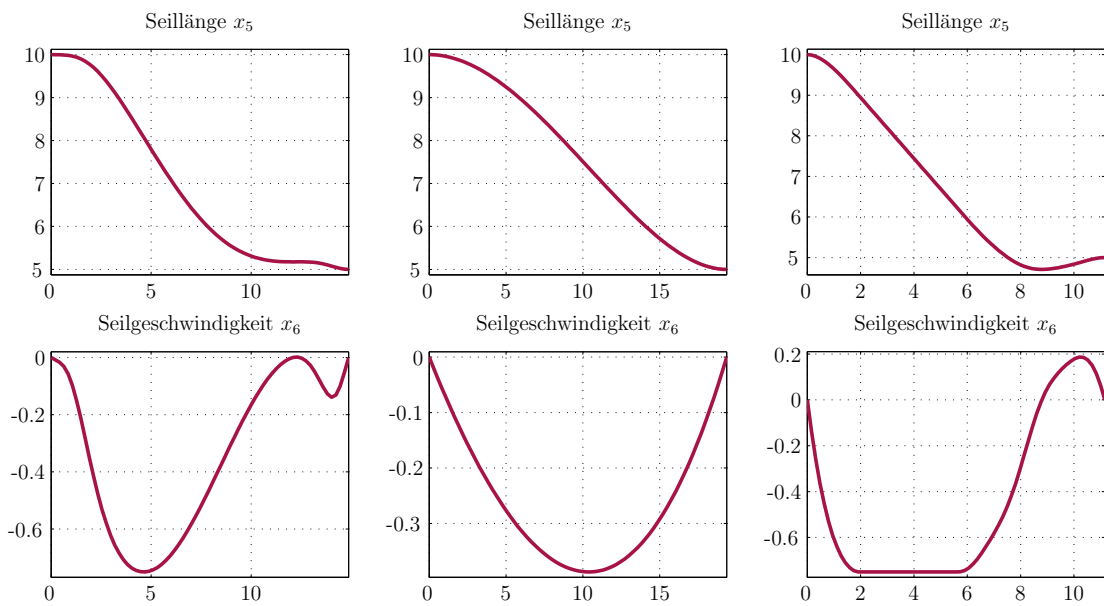
8.1.a: Position und Geschwindigkeit der Laufkatze



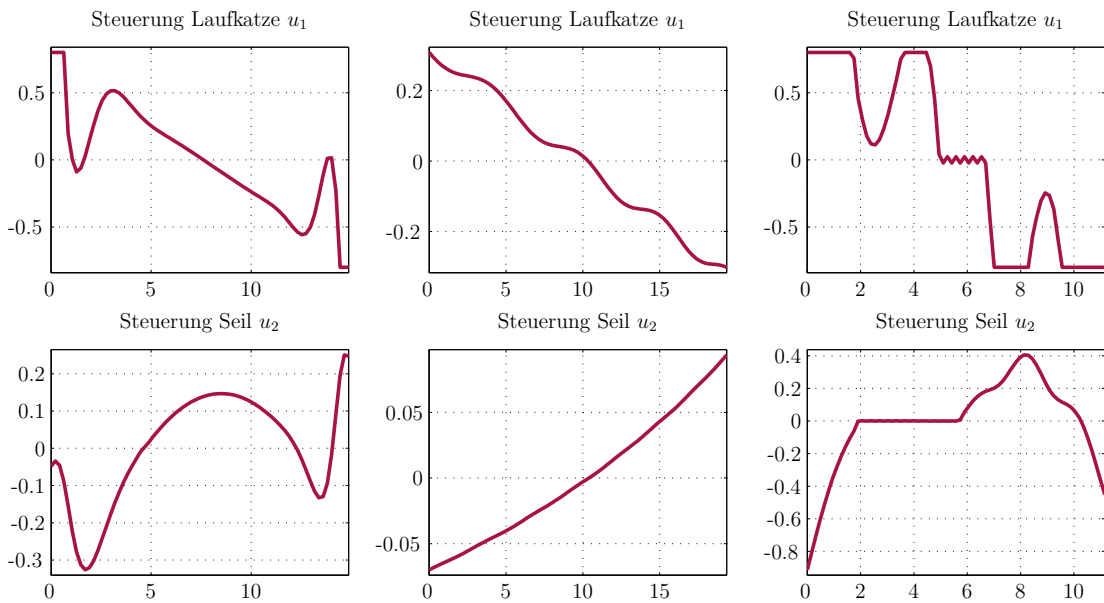
8.1.b: relative Position und Geschwindigkeit des Lastaufnahmemittels

Abbildung 8.1: Optimale Bahnen bei erhöhter Bestrafung von Pendelverhalten, Steuerenergie und Verfahrzeit (von links nach rechts)



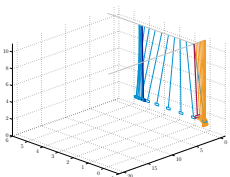


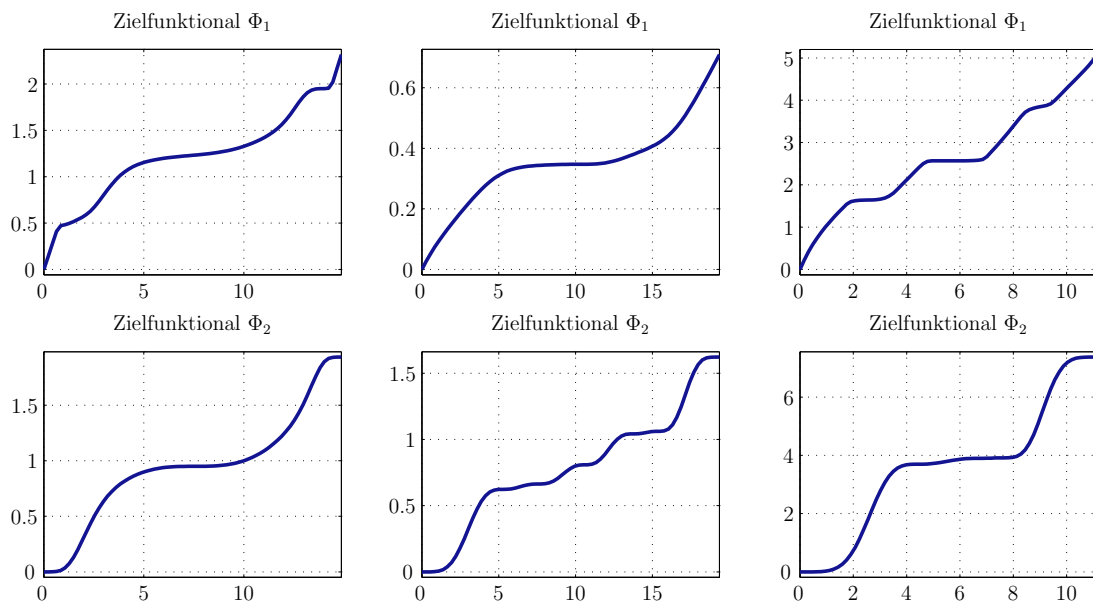
8.2.a: Seillänge und Geschwindigkeit der Seillängenänderung



8.2.b: Steuerung von Laufkatze und Seil

Abbildung 8.2: Optimale Bahnen bei erhöhter Bestrafung von Pendelverhalten, Steuerenergie und Verfahrzeit (von links nach rechts)



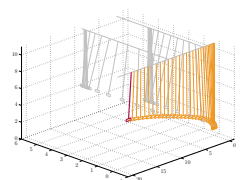


**Abbildung 8.3:** *Optimale Bahnen bei erhöhter Bestrafung von Pendelverhalten, Steuerenergie und Verfahrzeit (von links nach rechts) - Zielfunktionale*

**Geringes Pendelverhalten (Links)** Durch die Minimierung der relativen Verschiebung des Lastaufnahmemittels wird die Laufkatze nur noch so bewegt, dass es zu einer einzigen Schwingung in  $x_3$  kommt, die sich über die komplette Länge von  $20m$  erstreckt. Im Vergleich zum 2. Fall fällt der Pendelausschlag geringfügig höher aus, denn um die Laufkatze noch zügig bewegen zu können, muss sie zu Beginn ausreichend beschleunigt werden. Zusätzlich ist sichtbar, dass die Seillänge  $x_5$  zwar nicht über die  $5m$  hinaus verkürzt wird, dennoch aber am Ende eine Reduzierung der Geschwindigkeit  $x_6$  erfolgt mit einer anschließenden erneuten Beschleunigungsphase. Dieses Verhalten wird durch den Verlauf der Zielfunktionalen  $\Phi_1$  ebenfalls bestätigt.

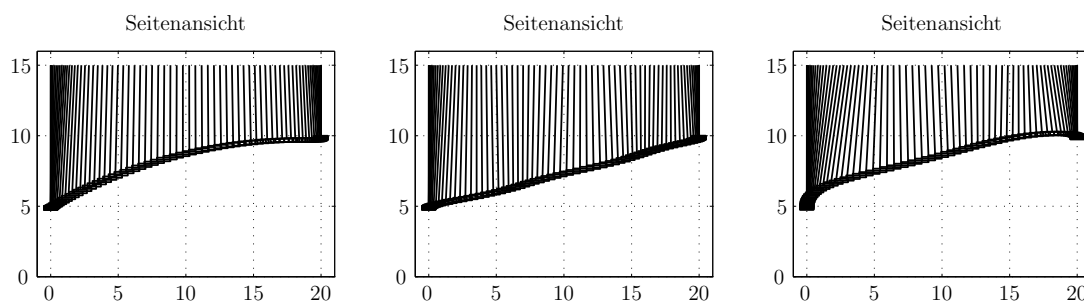
**Steuerenergieminimale Bahn (Mitte)** Die Reduzierung der aufgewendeten Energie in den Steuergrößen sorgt mitunter dafür, dass das System zu keinem einzigen Zeitpunkt in die Begrenzung läuft. Die Seillänge  $x_5$  erfährt keine unnötigen Änderungen, so dass ein fast geradlinigen Anstieg der Beschleunigung  $u_2$  möglich ist. Durch die geringe Beschleunigung der Laufkatze und deren seitliche Bewegung sind 3 Schwingungen des Lastaufnahmemittels  $x_3$  zu beobachten, die auch entsprechend immer einen Nulldurchgang haben. Bestätigt wird diese kontinuierlichen Schwingungen ebenfalls durch den streng monotonen Anstieg im Zielfunktional  $\Phi_2$ .

**Schnelle Bahn (Rechts)** Im 3. Fall wird die notwendige Verfahrzeit in erster Linie bestraft. Die Folgen sind vor allem große Werte in den beiden Steuergrößen



$u_1$  und  $u_2$ . Bei der Steuerung der Laufkatze zeigt sich sogar eine Aktivierung der Steuerbeschränkung. Ebenso wird die maximale Geschwindigkeit der Laufkatze  $x_2$  und in der Seillängenänderung  $u_6$  erreicht. Damit gegen Ende die Endbedingung erreicht werden kann und um die große Amplitude in der relativen Verschiebung zu reduzieren, ist gegen Ende des Zeitintervall eine zusätzliche Anhebung des Lastaufnahmemittels über die zu erreichenden  $5m$  hinaus mit anschließender Senkung erkennbar. Das erreichte Pendelverhalten in  $x_3$  beschreibt hingegen einen sehr natürlichen Verlauf.

Für die drei untersuchten Fälle ist in Abbildung 8.4 zusätzlich eine Seitenansicht des Bahnverlaufs der Laufkatze inklusive Lastaufnahmemittel gezeigt. Es handelt sich um eine reduzierte Darstellung, in der das hängende Seil auf  $15m$  an einem Aufhängepunkt befestigt ist, der einer waagerechten Bewegung folgt. Entsprechend der vorgenommenen Diskretisierung ist zu jedem Zeitpunkt das Seil mit der zugehörigen Position des Lastaufnahmemittels eingezeichnet.



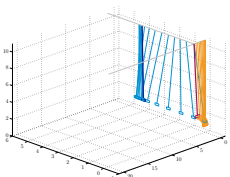
**Abbildung 8.4:** Optimale Bahnen bei erhöhter Bestrafung von Pendelverhalten, Steuerenergie und Verfahrzeit (von links nach rechts) - Seitenansicht

## 8.2 Bahnoptimierung mit variabler Regelung

In der Problembeschreibung der Bahnoptimierung unter Berücksichtigung der erweiterten Nebenbedingung aus Abschnitt 7.6 wurde bereits deutlich, dass der Zustand  $x$  des optimalen Steuerprozess durch die aktuelle Seillänge  $l := x_5(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, t_f]$  das unterlagerte linear quadratische Regulatorproblem beeinflusst.

Um die Abhängigkeit der Zustandsrückführung  $K_\infty$  von der aktuellen Seillänge zu verdeutlichen, ist exemplarisch der genaue Verlauf, der von Null verschiedenen Einträge für die Gewichtungsmatrizen  $Q = I_6$  und  $R = I_2$  in Abbildung 8.5 gezeigt.

Je nach gewählten Gewichtungsmatrizen stellen sich diese Abhängigkeiten von  $l$  in einer anderen Form dar. Speziell für diese Auswahl zeigt sich in der Bewertung  $k_{1,4}$  der Regelabweichung der relativen Geschwindigkeit zwischen der Laufkatze und



dem Lastaufnahmemittel eine deutlich Veränderung für  $l \in ]0m, 20m]$  durch den offensichtlichen Wechsel im Vorzeichen.

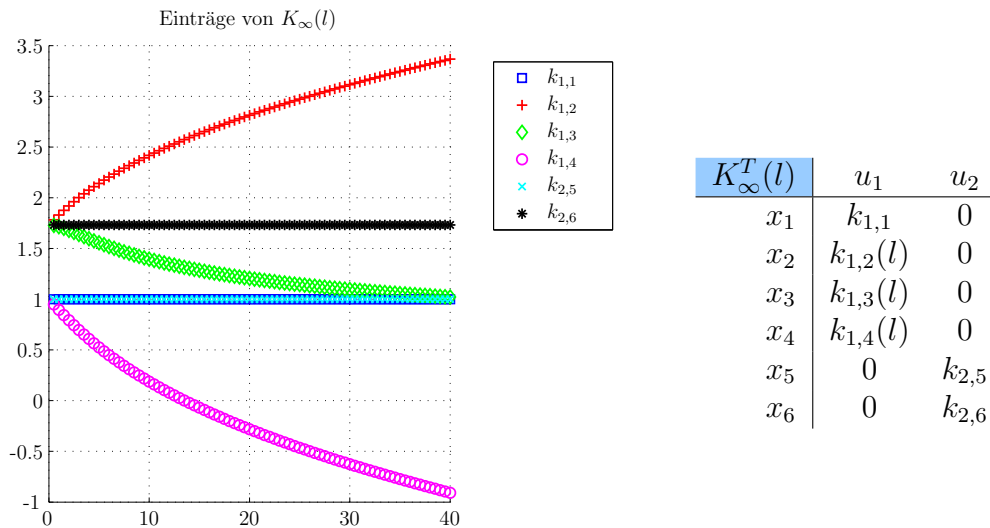


Abbildung 8.5: Regelungsmatrix  $K_\infty$  in Abhängigkeit von der Seillänge  $l$

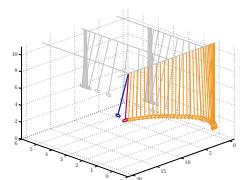
### 8.2.1 Regelung der Laufkatze bei konstanter Seillänge

Eine erste Analyse der optimalen Bahnplanung mit integrierten Optimalreglern erfolgt für das reduzierte System der Laufkatze (7.19) ohne Änderung der Seillänge in der Simulationsrechnung der erweiterten Nebenbedingung.

Das zu definierende Zielfunktional der Bahnplanung basiert auf der gleichen Zusammensetzung, wie in Abschnitt 8.1 beschrieben. Für die Auswertung wurden 4 verschiedene Zusammenstellungen der Gewichtungsfaktoren untersucht, siehe Tabelle 8.6: Zwei Parametersätze sind mit einer hohen Bewertung der Fahrzeit und der zu leistenden Steuerenergie, jeweils mit und ohne zusätzlicher Bestrafung des Pendelverhaltens ausgestattet, hingegen die anderen zwei Fälle die Minimierung der Steuerenergie vernachlässigen.

Die Zustands- und Steuerbeschränkungen sind unverändert durch die Werte in Tabelle 8.2 gegeben. Die Randbedingungen entsprechen den Werten aus Tabelle 8.3. Die Parameter der erweiterten Nebenbedingungen sind in Tabelle 8.5 in kompakter Form dargestellt.

Für die Berechnung einer Lösung wurde der optimale Steuerprozess mit 41 äquidistanten Punkten diskretisiert. Für die Simulationsrechnung der erweiterten Nebenbedingung wurden 51 diskrete Punkte mit äquidistantem Abstand gewählt. Auf die angegebene Anzahl an Nebenbedingungen hat die zusätzliche Diskretisierung erstmal keinen Einfluss.



Masse Laufkatze	$m_1 =$	1.7t
Masse Last	$m_2 =$	1.3t
Energielimit	$E_{\text{lim}} =$	20Nm
Regelungszeit	$\tau_f =$	10s
Skalierung ( $\alpha_Q, \alpha_R$ )	$\alpha =$	(1, 1)
Gewichtungsmatrix in $z$	$Q =$	diag(1, 1, 1, 1, 1, 1)
Gewichtungsmatrix in $w$	$R =$	diag(1, 1)

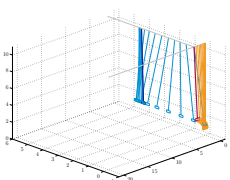
**Tabelle 8.5:** Charakteristische Werte der erweiterten Nebenbedingungen des optimalen Steuerprozess

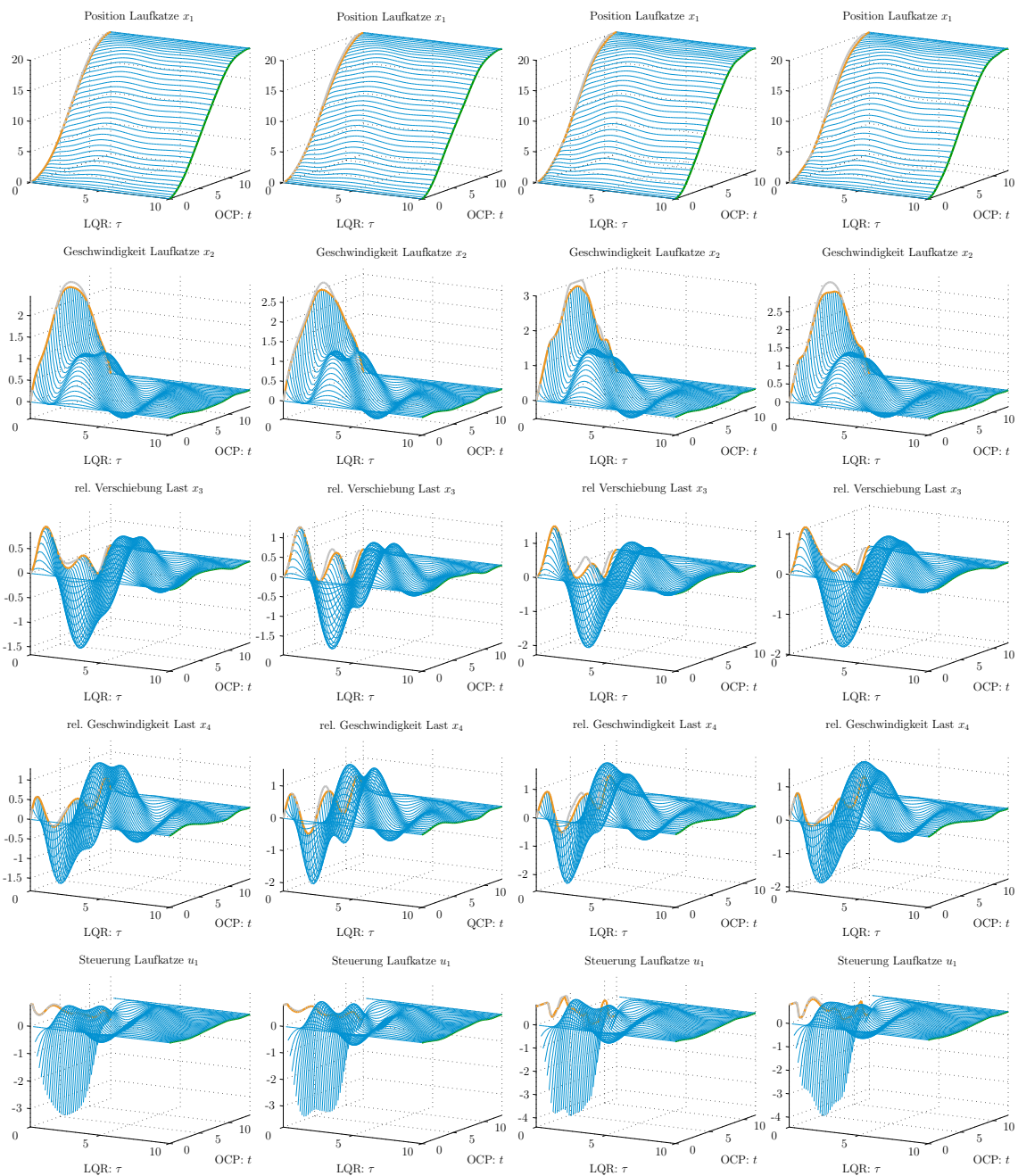
Die Auswertung der Zielfunktionale, sowie die benötigte Rechenzeit und die dafür notwendigen Iterationsschritte, sind der Tabelle 8.6 zu entnehmen.

Die Verläufe der Zustände  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , die Steuerung  $u_1$  der Laufkatze und die zugehörigen Haltebahnen  $y$ , inklusive der Regelung  $v$ , sind in Abbildung 8.6 visualisiert. Die nicht geregelte Seillänge  $x_5$ , die Geschwindigkeit der Seillängenänderung  $x_6$  und die Steuerung  $u_2$  sind in der Abbildung 8.7 gezeigt. Zu der vereinfachten Darstellung der Seitenansicht, des sich bewegenden Seils und des Lastaufnahmemittels in 8.9, gibt die Abbildung 8.8 Auskunft über das Energieverhalten der Haltebahnen zu jedem Zeitpunkt  $t$  des optimalen Steuerprozess. Zusätzlich wird der erreichte Endwerte zum Zeitpunkt  $\tau_f$  über die Zeit  $t$  separat dargestellt. Letzteres ist gerade die Größe, die in der erweiterten Nebenbedingung nach oben beschränkt ist.

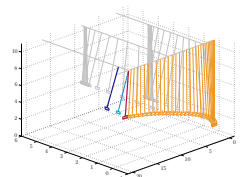
Optimale Steuerung	diskrete Punkte	41			
	Steuerfunktionen	2			
	Differentialgleichungen	9			
	Randwerte	6			
	Nebenbedingungen	5			
	Erweiterte Nebenbedingung:				
	diskrete Punkte	51			
	Steuerfunktionen	1			
	Differentialgleichungen	6			
Nichtlineare Optimierung	Variablen	87			
	Beschränkungen	252			
Resultate		Set 1:	Set 2:	Set 3:	Set 4:
	$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$	(1, 0.5, 1)	(1, 0, 1)	(0.1, 0, 1)	(0.1, 0.5, 1)
	Rechenzeit	61.52s	39.54s	127.85s	101.78s
	Iterationen	14	10	22	26
	$\Phi(x, u)$	17.4005	15.4126	12.2454	14.8176
	$\Phi_1(x, u)$	2.2371	2.6439	4.8476	4.0167
	$\Phi_2(x, u)$	3.2222	4.9637	5.8196	4.1774
$\Phi_3(x, u)$	13.5522	12.7687	11.7606	12.3272	

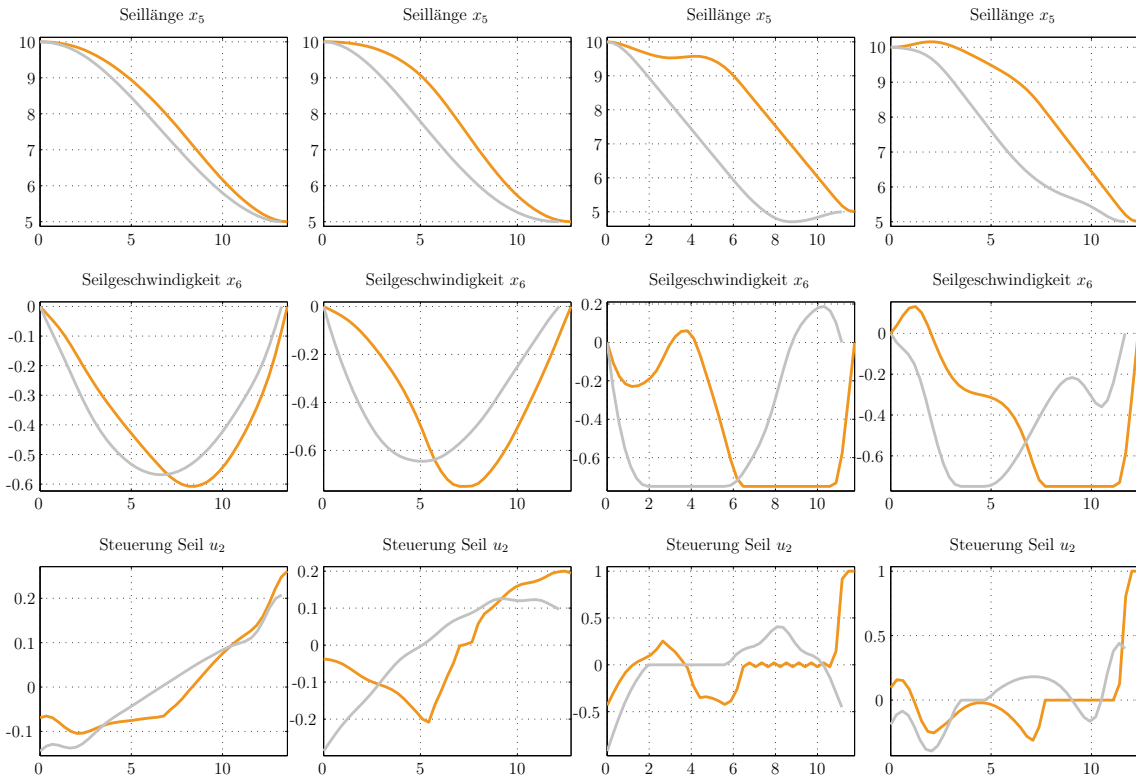
**Tabelle 8.6:** Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - Variation des Zielfunctionals  $\Phi$  im OCP



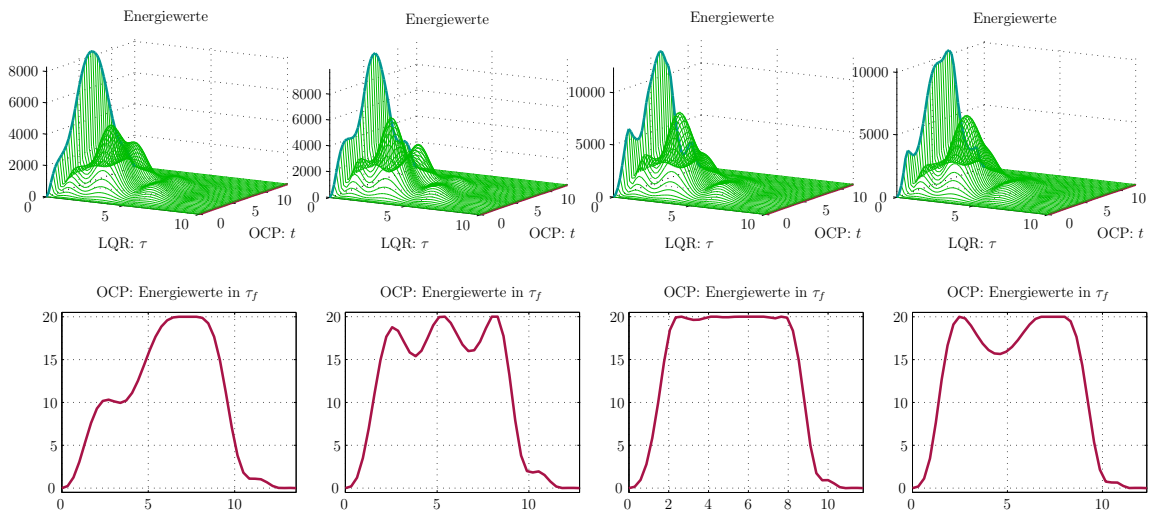


**Abbildung 8.6:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen zu verschiedenen Zielfunktionalen  $\Phi$  im OCP (Set 1 bis 4 von links nach rechts) - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau); LQR Regelung (blau)

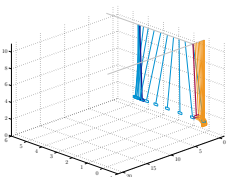




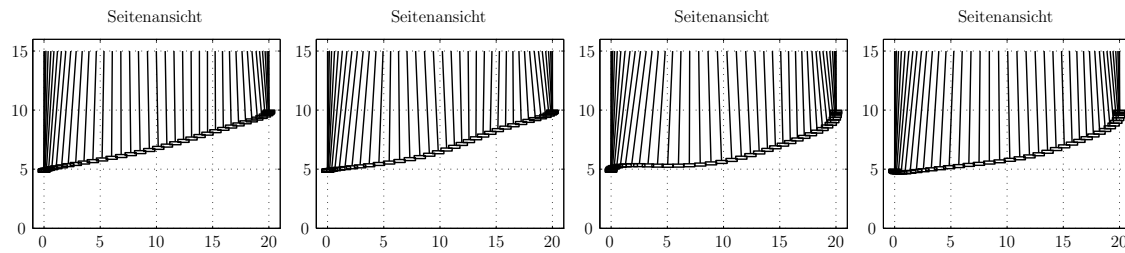
**Abbildung 8.7:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen zu verschiedenen Zielfunktionalen  $\Phi$  im OCP (Set 1 bis 4 von links nach rechts) - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau)



**Abbildung 8.8:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen zu verschiedenen Zielfunktionalen  $\Phi$  im OCP (Set 1 bis 4 von links nach rechts) - Auswertung der Energie in der erweiterten Nebenbedingung







**Abbildung 8.9:** *Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen zu verschiedenen Zielfunktionalen  $\Phi$  im OCP (Set 1 bis 4 von links nach rechts) - Seitenansicht*

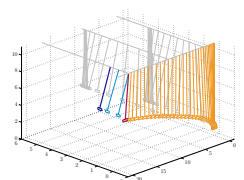
Aus der Analyse der Simulationsergebnisse ergeben sich die folgenden Resultate:

**Rechenzeit:** Die Anzahl der notwendigen Iterationen spiegelt direkt die nötige Rechenzeit wieder. Da die Berechnung von Set 3 am meisten Zeit in Anspruch genommen hat, deutet vieles auf eine häufige Auswertung der Beschränkungen hin. Die Betrachtung der Energiefunktion bestätigt diese Annahme. Das Gleiche lässt sich auch für den letzten Fall beobachten.

**Zielfunktional:** Durch die geschickte Setzung der Gewichtungsfaktoren  $\gamma_i$  im Zielfunktional  $\Phi$  kann bereits eine nahezu identische optimale Bahn berechnet werden, so dass die erweiterte Nebenbedingung kaum einen Einfluss auf die optimale Lösung hat. Die Trajektorien aus Set 1 stellen gerade einen solchen Fall dar. Die Zustände der Laufkatze und die der relativen Auslenkung weisen kaum einen Unterschied auf. Am offensichtlichsten ist die Abweichung in den Zuständen der Seillänge. Die Auswertung der verbleibenden Energie nach der Simulationszeit  $\tau_f$  der Regelung unterstreicht diese Beobachtung. In der Phase, in der die Geschwindigkeit der Laufkatze  $x_2$  am größten ist, tritt ebenfalls eine erhöhte relative Geschwindigkeit der Last auf. Eine Beruhigung durch den Optimalregler ist bei diesen Startbedingung natürlich mit einem mehr an Aufwand verbunden. Durch die Anpassung der Seillänge ist entsprechend auch ein anderes Pendel- und Beruhigungsverhalten in der Regelung zu erwarten.

**Minimierung des Pendelverhaltens:** Die zusätzliche Berücksichtigung des Pendelverhaltens im Zielfunktional kann in manchen Fällen bereits zum Ziel führen und den Einfluss der unterlagerten Regelung zusätzlich reduzieren. Auf der anderen Seite können Systemzustände geschaffen werden, die im Hinblick auf den zu erreichenden Endpunkt kaum Schwingung aufweisen dafür aber eine hohe Geschwindigkeit (vgl. Set 1 aus Abschnitt 8.1). Mitunter ist gerade diese Kombination eine ungünstigere Startbedingung für den geregelten Halt.

**Bestrafung der Steuerenergie:** Durch die weniger gewichtete Zielfunktion  $\Phi_1$  in Set 3 und 4 wird eine höhere Beschleunigung der Laufkatze  $u_1$  und der



Seillängenänderung  $u_2$  zugelassen. Dieses hat den Nachteil, dass generell höhere Geschwindigkeiten auftreten, siehe zum Beispiel die Begrenzung in  $z_2$  für Set 3. Die gewählte Strategie des geregelten Halts steht dem gegenüber und muss massiv in die Berechnung der optimalen Trajektorie eingreifen. Hauptsächlich wird dieses über einen komplett anderen Verlauf der Seillänge  $x_5$  realisiert.

**Verfahrzeit:** Die Verfahrzeit  $\Phi_3$  aller vier Zielfunktionale bewegt sich in einem ähnlichen Rahmen. Eine Erhöhung der möglichen Steuerenergie hat kaum einen Einfluss und beläuft sich auf circa 1s.

## 8.2.2 Regelung der Laufkatze und des Seils

Da die Zustände des linearen Systems  $z_1$  bis  $z_4$  von den Zuständen  $z_5$  und  $z_6$  entkoppelt sind, wird durch die Auswertung des linear quadratischen Regulatorproblems immer eine Matrix  $K_\infty(l)$  berechnet, die nur in den dargestellten Einträgen aus Abbildung 8.5 Unterschiede aufweist.

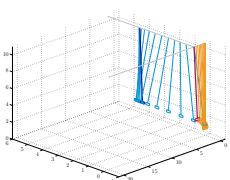
Insbesondere ist diese Tatsache unabhängig von den gewählten Einträgen der Diagonalmatrizen  $Q$  und  $R$ . Diese entkoppelte Struktur findet sich bereits in der Lösung  $P$  der algebraischen RICCATI-Gleichung wieder und kann auf die Systemmatrizen  $A$  und  $B$  zurückgeführt werden.

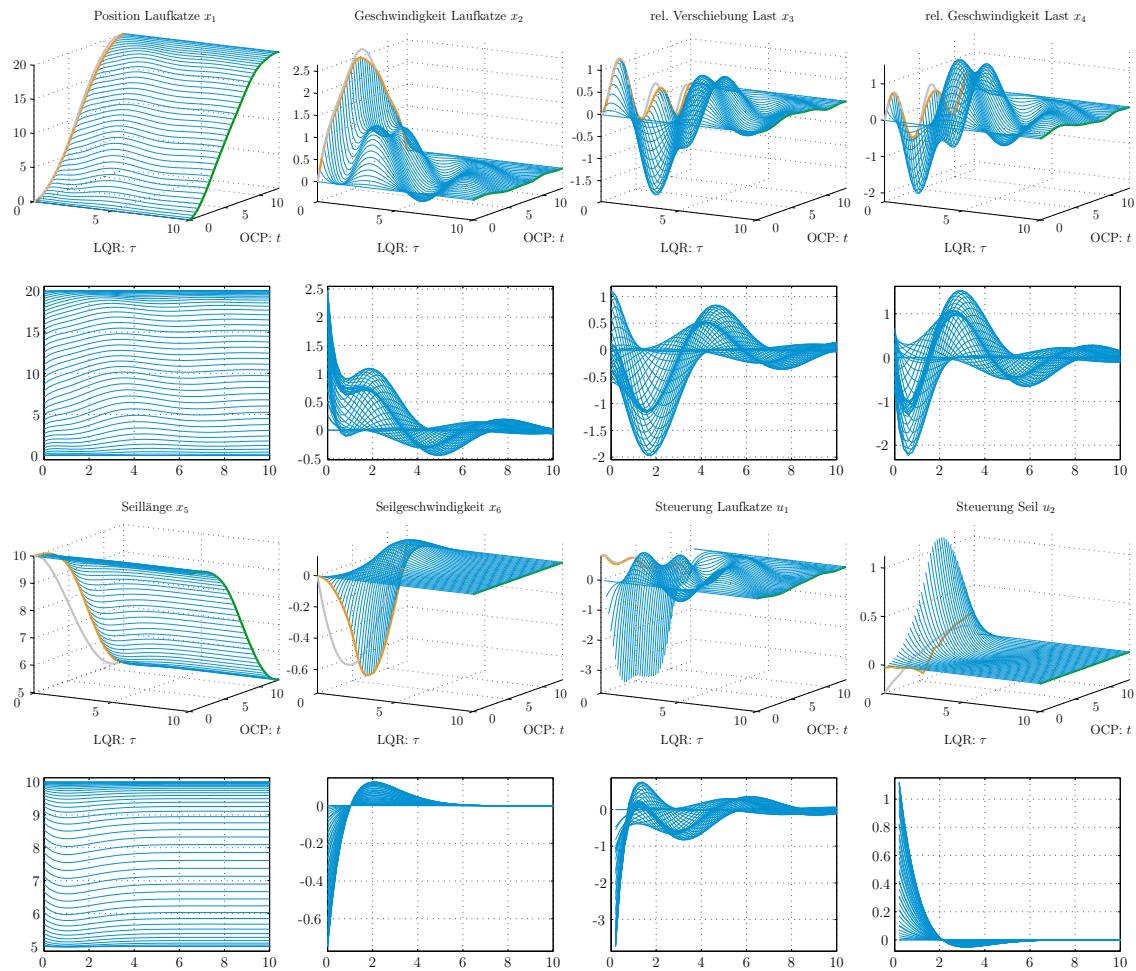
Bei der Berechnung der optimalen Trajektorien unter den erweiterten Nebenbedingungen mit vollständiger linearer Systemdynamik  $z$  aus (7.19) im LQR-Problem und vollständiger nichtlinearer Systemdynamik  $y$  aus (7.5) ist kaum ein Unterschied zu den Simulationen im vorangegangenen Abschnitt zu erwarten.

Die Randbedingungen sowie alle Zustands- und Steuerbeschränkungen sind unverändert zu Tabelle 8.3 und 8.2. Die Parameter des LQR-Problems sind entsprechend den Werte aus Tabelle 8.5 gesetzt.

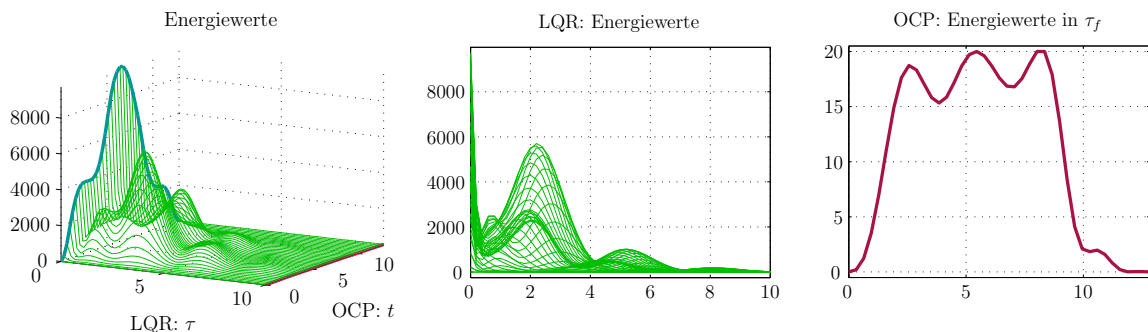
Optimale Steuerung	diskrete Punkte	41	Resultate	SIM inkl. Regelung des Seils	
	Steuerfunktionen	2			
	Differentialgleichungen	9		Rechenzeit	48.12s
	Randwerte	6		Iterationen	12
	Nebenbedingungen	5		$\Phi(x, u)$	15.4634
Nichtlineare Optimierung	Erweiterte Nebenbedingung:		$\Phi_1(x, u)$	2.6193	
	diskrete Punkte	51	$\Phi_2(x, u)$	4.8034	
	Steuerfunktionen	2	$\Phi_3(x, u)$	12.8441	
	Differentialgleichungen	6			
	Variablen	87			
	Beschränkungen	252			

**Tabelle 8.7:** Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - LQR inklusive Regelung der Seillänge

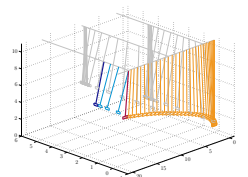




**Abbildung 8.10:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen bei zusätzlicher Regelung des Seils im LQR - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau); LQR Regelung (blau)



**Abbildung 8.11:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen bei zusätzlicher Regelung des Seils im LQR - Auswertung der Energie in der erweiterten Nebenbedingung



Die Ergebnisse der Berechnungen bei einer Gewichtung  $\gamma = (1, 0, 1)$  im Zielfunktional, gemäß Abschnitt 8.1, sind in Tabelle 8.7 zusammengefasst.

Die Abbildungen 8.10 und 8.11 zeigen die berechneten Trajektorien für das komplette System der Laufkatze. Zusätzlich ist eine Seitenansicht gegeben, in der nur die Bahnen des geregelten Halts abgebildet sind.

Im Vergleich zu Set 2 aus Tabelle 8.6 lässt sich kaum ein Unterschied feststellen. Die Werte der beiden Zielfunktionale  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  und die optimierte Fahrzeit liegen beieinander.

Betrachtet man das Verhalten der Zustände, die nur das Seil betreffen ( $x_5, x_6$ ) und das der Steuerung  $u_2$  separiert, so ist deutlich zu erkennen, dass die Regelung die Geschwindigkeit zu Null regelt und die Seillänge auf den Wert bringt, der zu Beginn der Regelung gegeben war.

Es hat sich bestätigt, dass die zusätzliche Regelung der Seillänge keinen erkennbaren Einfluss auf den Rest der Problemstellung ausübt. Da das Verhalten unabhängig von den anderen Systemzuständen ist, liegt es nahe, auf diese Berechnung im optimalen Steuerprozess unter erweiterten Nebenbedingungen weiterhin zu verzichten.

Eine praktische Lösung wäre die, wenn bei einem angeforderten „geregelten Halt“, das Anhalten der Seillängenänderung den internen Reglern der eingebauten Motoren überlassen würde.

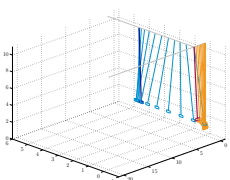
### 8.3 Bahnoptimierung mit konstanter Regelung

Eine starke Vereinfachung der kompletten Problemstellung aus Abschnitt 7.6 und den notwendigen Voraussetzungen ist durch die Annahme einer konstanten Reglermatrix  $K_\infty$  gegeben, die nicht mehr abhängig ist vom aktuellen Zustand  $x$  des optimalen Steuerprozess.

Die Berechnung der Regelungsmatrix basiert in diesem Fall auf einer zu Beginn festzulegenden Seillänge, die das dafür notwendige lineare System der Laufkatze aus (7.18) bzw. (7.19) festlegt. Für den hier vorgestellten Vergleich wird die verwendete Seillänge durch den Mittelwert aus Anfangsbedingung  $x_5(0)$  und Endbedingung  $x_5(t_f)$  bestimmt.

Position Laufkatze	$x_{1,0} = 0$	$x_{1,f} = 20$
Geschwindigkeit Laufkatze	$x_{2,0} = 0$	$x_{2,f} = 0$
rel. Verschiebung der Last	$x_{3,0} = 0$	$x_{3,f} = 0$
rel. Geschwindigkeit der Last	$x_{4,0} = 0$	$x_{4,f} = 0$
Seillänge	$x_{5,0} = 15$	$x_{5,f} = 5$
Seilgeschwindigkeit	$x_{6,0} = 0$	$x_{6,f} = 0$

**Tabelle 8.8:** Anfangs- und Endbedingung der Laufkatze für den Vergleich von adaptiver und konstanter Regelung



Die verwendeten Randbedingungen wurden zugunsten einer erwartungsgemäß größeren Variation der Matrixeinträge, bei der parameterabhängigen Zustandsrückführung  $K_\infty(l)$  entlang der optimalen Trajektorie, gewählt, siehe Tabelle 8.8.

Die weiteren Parameter des linear quadratischen Regulatorproblems sind denen aus Tabelle 8.5 gleich. Ebenso sind die Zustands- und Steuerbeschränkungen aus Tabelle 8.2 verwendet worden. Die verwendeten Gewichtungsfaktoren im übergeordneten Zielfunktional sind gegeben durch  $\gamma = (1, 0.5, 1)$ .

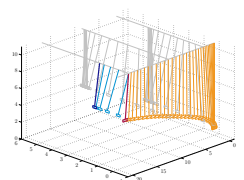
Der in Abbildung 8.5 gezeigte Verlauf der Einträge von  $K_\infty(l)$  für  $l \in [5, 15]$  deutet darauf hin, dass die Einträge  $k_{1,2}$ ,  $k_{1,3}$  und  $k_{1,4}$  durchaus ein unterschiedliches Verhalten in der Anwendung zufolge haben.

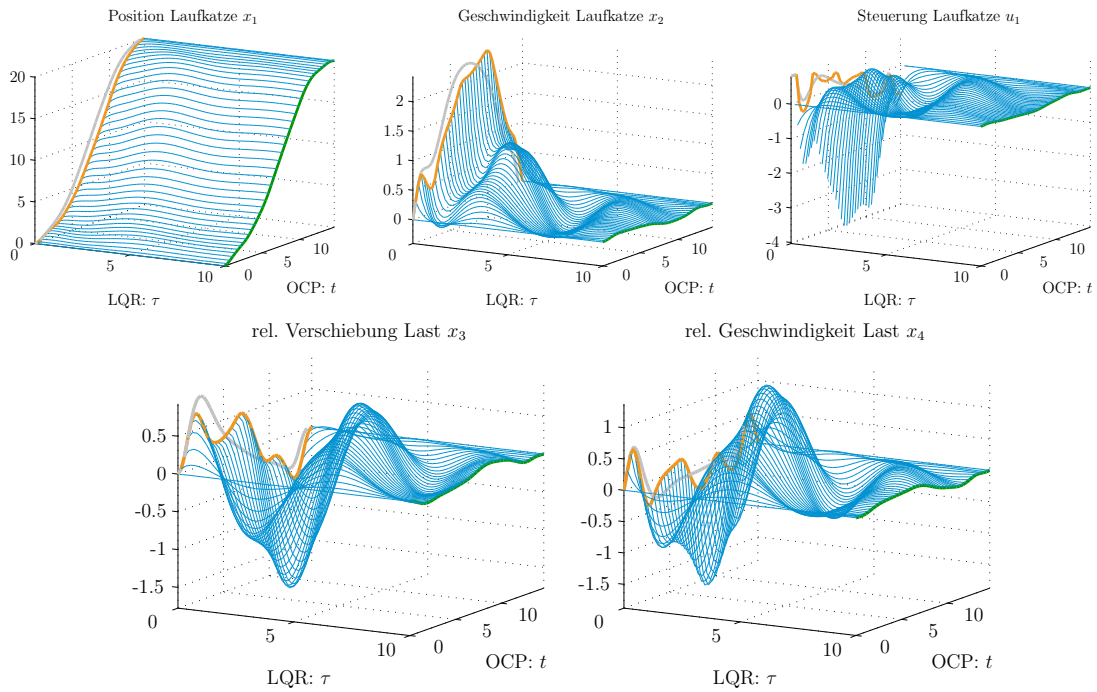
Die Tabelle 8.9 stellt die Ergebnisse beider Berechnungen der optimalen Lösung gegenüber. Die Verläufe der Zustände sind in den Abbildungen 8.12 und 8.13 präsentiert. Die Gegenüberstellung der Energieverläufe während des Zeitintervalls  $[0, \tau_f]$  für das geschlossene System, sowie die Auswertung der erweiterten Nebenbedingung auf  $[0, t_f]$  zeigt die Abbildung 8.14.

Beide Berechnungen weisen erstmal keine groben Unterschiede auf, weder in den dargestellten Trajektorien noch in den Werten der einzelnen Zielfunktionale.

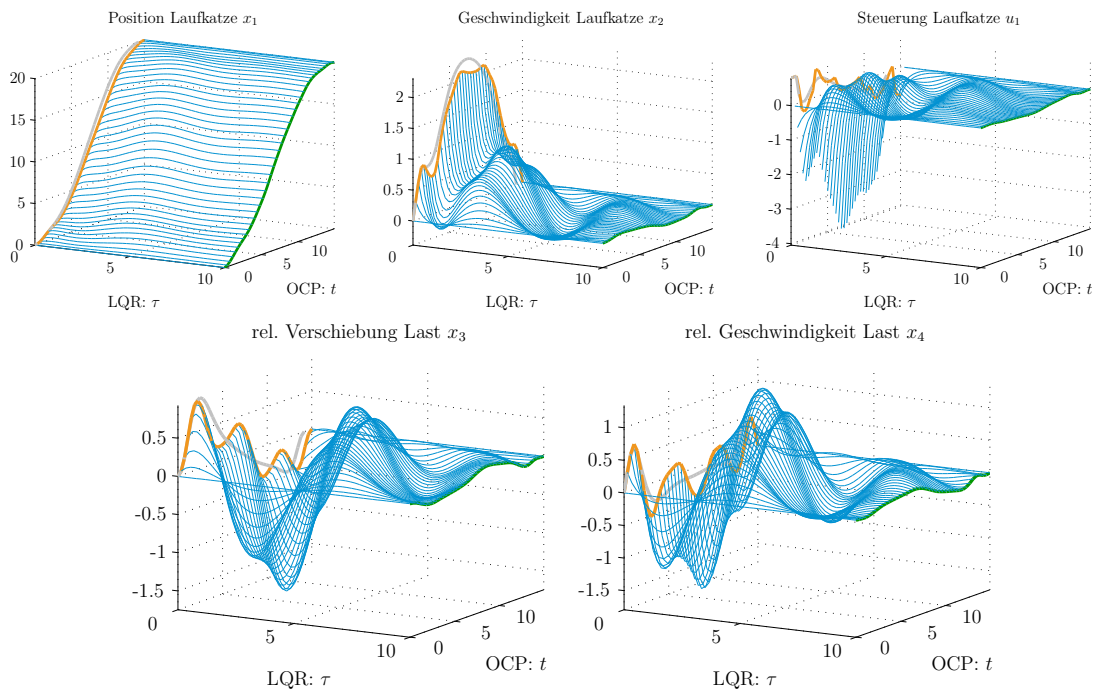
Optimale Steuerung	diskrete Punkte	41	
	Steuerfunktionen	2	
	Differentialgleichungen	9	
	Randwerte	6	
	Nebenbedingungen	5	
Erweiterte Nebenbedingung:	diskrete Punkte	51	
	Steuerfunktionen	1	
	Differentialgleichungen	6	
Nichtlineare Optimierung	Variablen	87	
	Beschränkungen	252	
Resultate		Set 1:	Set 2:
		$K_\infty(l)$ variable	$K_\infty$ konstant
	Rechenzeit	62.01s	50.28s
	Iterationen	16	13
	$\Phi(x, u)$	16.4572	16.5430
	$\Phi_1(x, u)$	4.1289	3.9429
	$\Phi_2(x, u)$	2.7730	2.3276
$\Phi_3(x, u)$	14.6578	14.9849	

**Tabelle 8.9:** Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - Vergleich zwischen variabler  $K_\infty(l)$  und konstanter  $K_\infty$  Reglermatrix



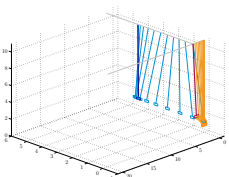


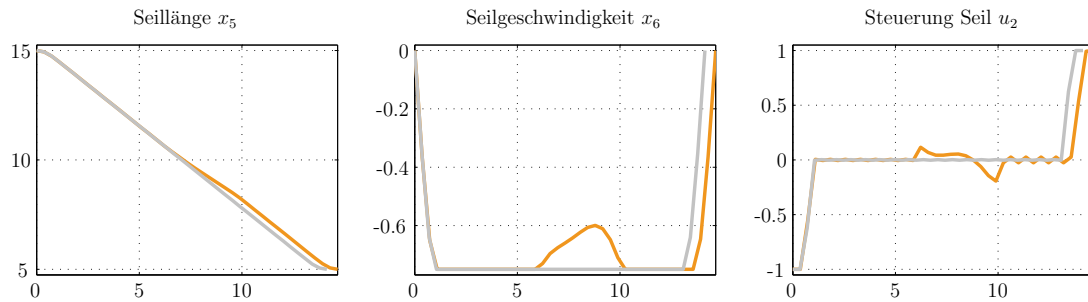
8.12.a: Variable Reglermatrix  $K_\infty(l)$  - Laufkatze und Last



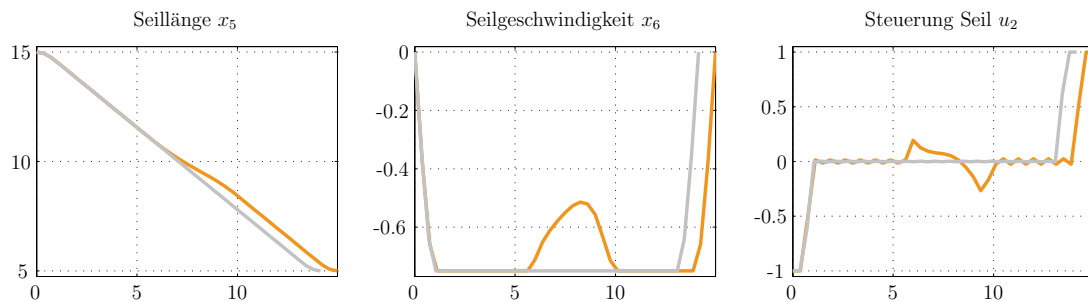
8.12.b: Konstante Reglermatrix  $K_\infty$  - Laufkatze und Last

Abbildung 8.12: Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen mit variabler und konstanter Regelung - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau); LQR Regelung (blau)



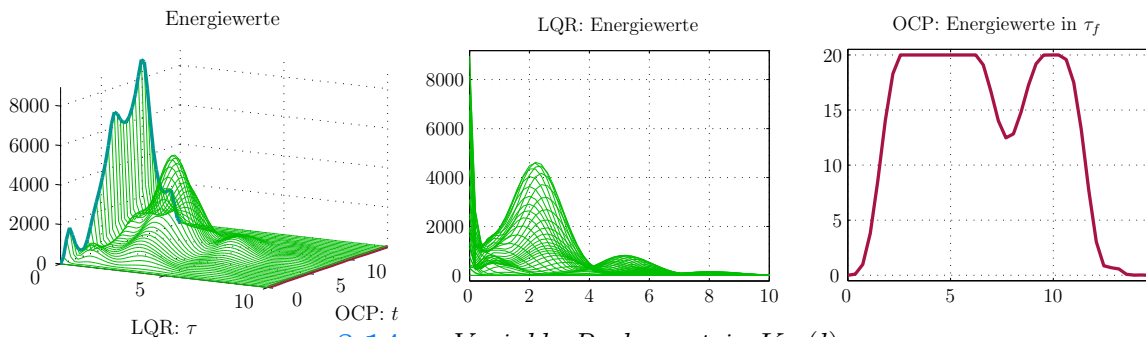


8.13.a: Variable Reglermatrix  $K_\infty(l)$  - Seil

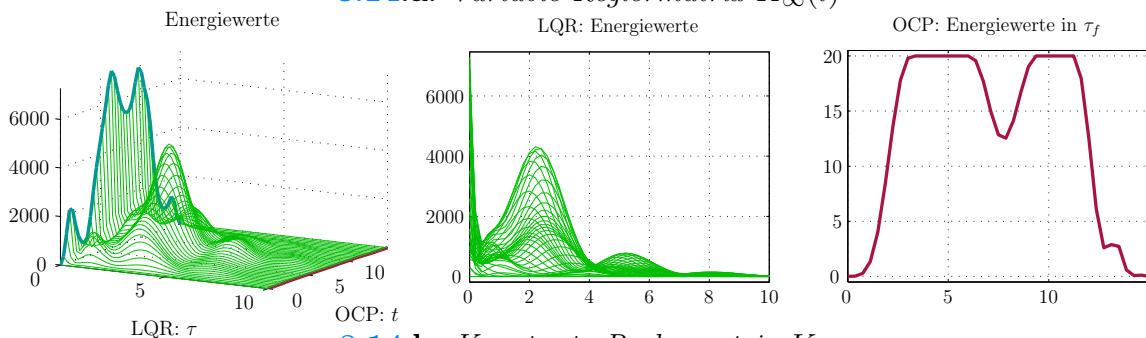


8.13.b: Konstante Reglermatrix  $K_\infty$  - Seil

Abbildung 8.13: Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen mit variabler und konstanter Regelung - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau)

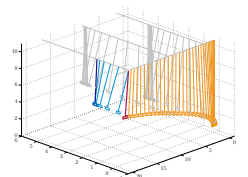


8.14.a: Variable Reglermatrix  $K_\infty(l)$



8.14.b: Konstante Reglermatrix  $K_\infty$

Abbildung 8.14: Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen mit variabler und konstanter Regelung - Auswertung der Energie in der erweiterten Nebenbedingung



Eine genauere Betrachtung der Bereiche zu Beginn und am Ende der Trajektorien des optimalen Steuerprozess lassen erste Rückschlüsse auf die eingangs angesprochene Approximation von  $K_\infty$  und dessen Schwächen zu. Besonders in diesen Bereichen ist aufgrund der Mittelwertbildung bei einer Seillängen Anpassung von  $10m$  mit Fehlern zu rechnen.

Aus dem Verlauf der Matrixeinträge in Abhängigkeit von der Seillänge sind besonders die kürzeren Seillängen unter  $10m$  anfälliger in der Genauigkeit der konstanten Approximation. Aus physikalischen Sicht lässt sich diese Anfälligkeit mit der stark zunehmenden Pendelfrequenz erklären, sobald die Länge des Pendels verkürzt wird.

Eine weitere Auffälligkeit sind die zulässigen Energiewerte zu Beginn einer jeden Haltebahn. Die adaptive Zustandsrückführung lässt zum Zeitpunkt  $t = 10s$  in dieser Testrechnung einen höheren Wert zu als die invariante Reglermatrix. Demzufolge sind die Seillängen  $x_5$  auch unterschiedlich angepasst worden. Das deutet ebenfalls auf die Unterschiede bei kurzen Seillängen hin, die durch  $K_\infty(l)$  besser berücksichtigt und abgefangen werden können

Die beschriebene Ungenauigkeit der, bzgl. der Seillänge, invarianten Zustandsrückführung kann gegebenenfalls sogar noch verstärkt werden durch alternative Gewichtungsmatrizen  $Q$  und  $R$  in der Auslegung des LQR-Problems, wie sie im folgenden Abschnitt untersucht werden.

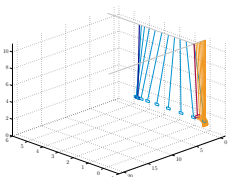
## 8.4 Variationen im LQR-Problem

Die Simulationsrechnungen aus diesem Abschnitt präsentieren den Einfluss der unterschiedlichen Charakteristika einer, in den optimalen Steuerprozess zu integrierenden Regelung.

Für einen späteren Einsatz muss der Regler entsprechend ausgelegt werden, so dass die geforderten Sicherheitsspezifikationen für den „geregelten Halt“ eingehalten werden. Durch unterschiedliche Setzungen der Designparameter und den daraus resultierenden Verhältnissen zwischen den Parametern untereinander, kann entsprechend viel oder weniger Einfluss auf die optimale Trajektorie der Laufkatze genommen werden.

### 8.4.1 Veränderung der Gewichtung zwischen $Q$ und $R$

Motiviert durch eine eher mäßige Reglerperformance in den vorangegangenen Abschnitten, analysiert dieser Abschnitt das Verhalten bei einer Veränderung des globalen Verhältnisses zwischen  $Q$  und  $R$ . Dazu sei eingangs eine genauere Analyse der verwendeten linear quadratischen Regulatorprobleme gegeben, in der das Verhalten der Regelung in Anwendung auf das System der Laufkatze (7.5) separierte präsentiert wird.





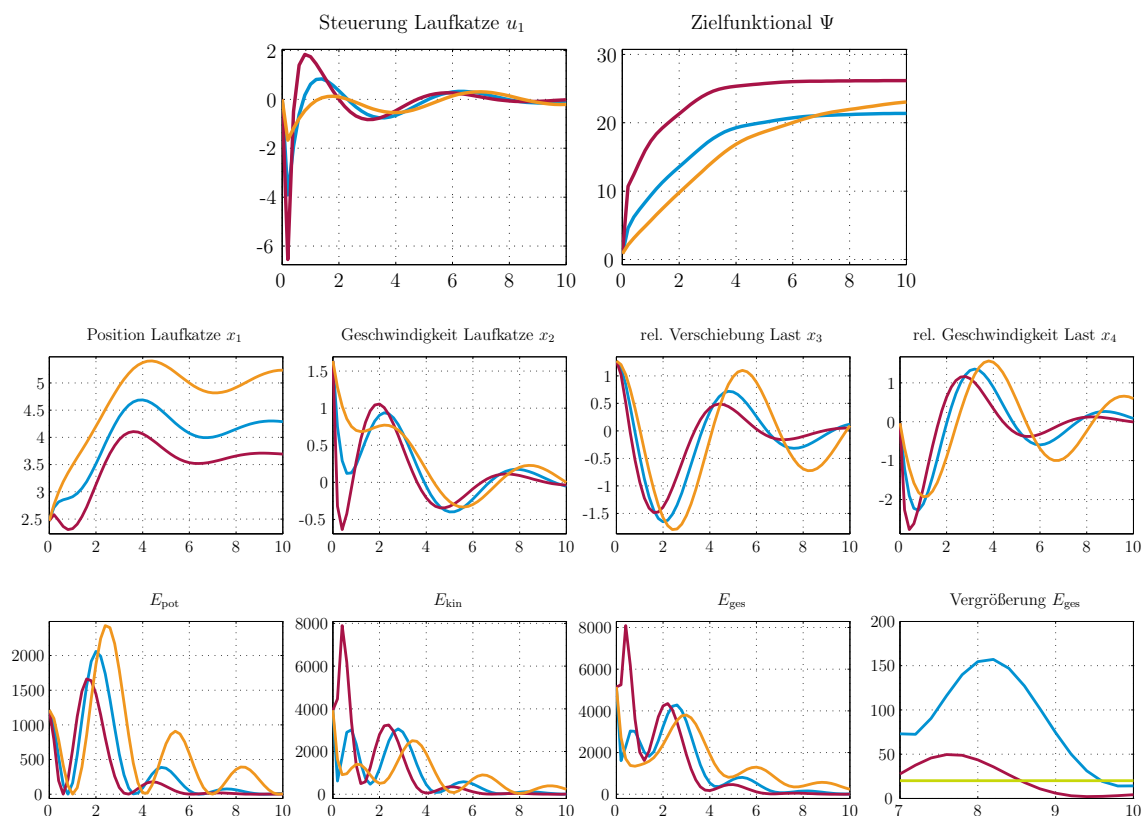
Die verwendeten Parameter für das Design der Zustandsrückführung entsprechen den Werten aus Tabelle 8.5 mit Ausnahme der Anpassungen aus Tabelle 8.10.

	Set 1:	Set 2:	Set 3:
Skalierung von $Q$ : $\alpha_Q$	1	0.1	0.1
Skalierung von $R$ : $\alpha_R$	0.1	1	1
Regelungszeit $\tau_f$	10s	10s	15s

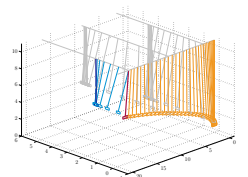
**Tabelle 8.10:** Charakteristische Werte der erweiterten Nebenbedingungen des optimalen Steuerprozess bei Variation der Gewichtung im LQR-Zielfunktional  $\Psi$

Da es sich bei der optimalen Bahn aus Abschnitt 8.1, bzgl. der minimalen Verfahrzeit, um eine sehr energiereiche Bahn handelt, wurden gezielt zwei Startwerte aus diesen Trajektorien entnommen:

- Maximale Auslenkung des Pendels in  $x_3$  zum Zeitpunkt  $t = 2.549s$ ,
- Maximale Geschwindigkeit des Pendels in  $x_4$  zum Zeitpunkt  $t = 3.665s$ .



**Abbildung 8.15:** Energiewerte für den Fall der maximalen Pendelauslenkung bei drei verschiedenen Gewichtungen zwischen  $Q$  und  $R$ :  $\alpha = (1, 1)$  (blau);  $\alpha = (1, 0.1)$  (rot);  $\alpha = (0.1, 1)$  (orange)

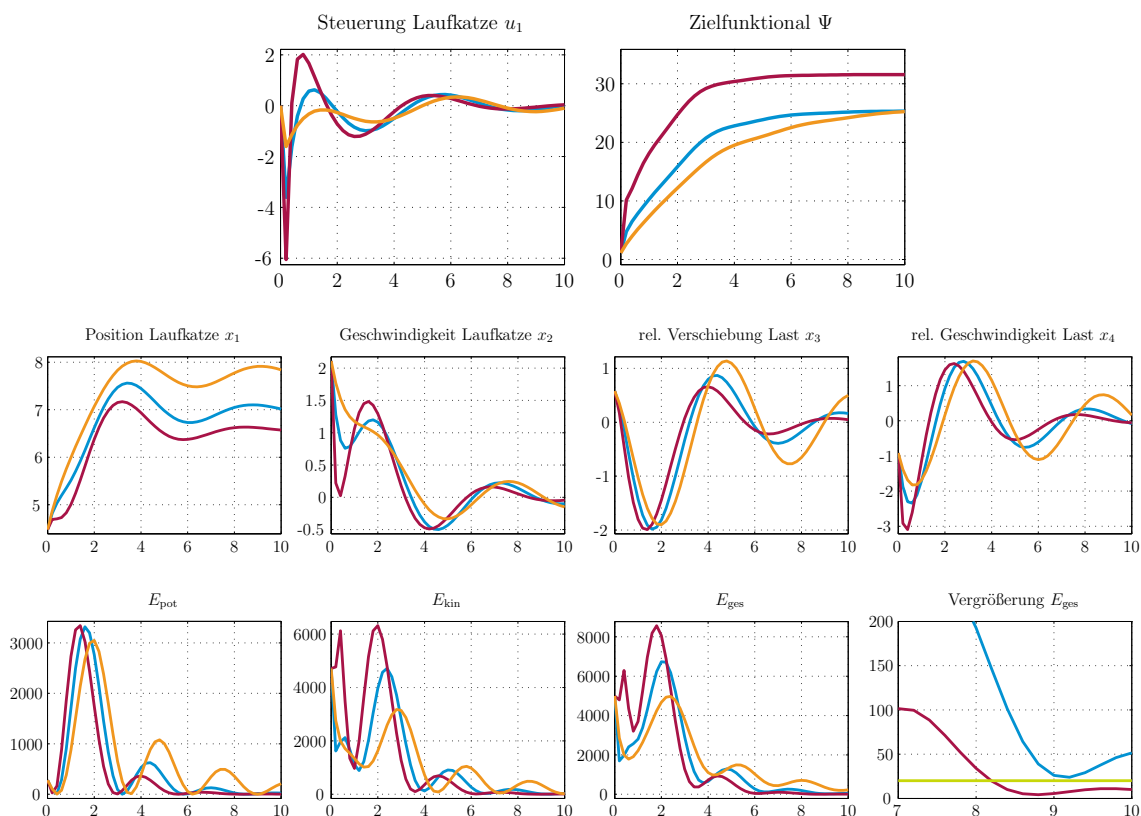


Da die Seillänge bei der, in das optimale Steuerungsproblem, eingebetteten Regelung nicht mit berücksichtigt wird, sei an dieser Stelle auf deren Zustandsverläufe verzichtet. Für das simulierte nichtlineare geschlossene System ist der entsprechende Wert der Seillänge im Anfangszustand notwendig für die Reglerberechnung.

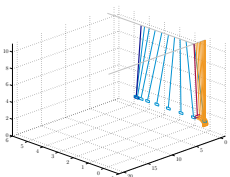
Die Resultate der Simulation, sowie die Terme der Energieberechnung aus (7.24), bei einem maximalen Pendelausschlag zu Beginn, präsentiert die Abbildung 8.15. Die Abbildung 8.16 zeigt die Ergebnisse bei einer maximalen Geschwindigkeit in der Pendelauslenkung.

Es zeigt sich, dass durch die Reduzierung der erlaubten Steuerenergie durch die Setzung  $\alpha = (0.1, 1)$  das System enorme Schwierigkeiten hat, die relative Verschiebung der Last gegenüber der Laufkatze zu reduzieren. Die vergrößerte Darstellung gegen Ende der Simulationszeit der aufsummierten Energiewerte zeigt, dass das System bei weitem nicht den fest vorgegebenen Schwellenwert (gelb) unterschritten hat.

Selbst die eingangs angenommene Setzung von  $\alpha = (1, 1)$  bereitet Probleme. Erst durch das Verhältniss  $\alpha = (1, 0.1)$  wird die einsetzbare Steuerenergie erhöht, was eine Verbesserung im Verlauf der Energie zur Folge hat.



**Abbildung 8.16:** Energiewerte für den Fall der maximalen Pendelgeschwindigkeit bei drei verschiedenen Gewichtungen zwischen  $Q$  und  $R$ :  $\alpha = (1, 1)$  (blau);  $\alpha = (1, 0.1)$  (rot);  $\alpha = (0.1, 1)$  (orange)



Bereits nach  $7s$  könnte davon ausgegangen werden, dass der Schwellenwert in den folgenden Zeitschritten unterschritten wird und dort verweilen wird.

Für die Darstellung der Auswirkungen der drei, in Tabelle 8.10 parametrisierten Reglern auf die optimale Bahnplanung, seien die Randwerte und Beschränkungen gemäß den Tabellen 8.3 und 8.2 gegeben. Weiter ist das Zielfunktional durch die Gewichtung  $\gamma = (1, 0.5, 1)$  definiert (vergleichbar zu Set 1 aus Tabelle 8.6).

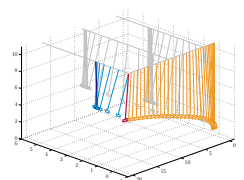
Da sich bereits in der Voranalyse einige Schwächen bei der zweiten Setzung zeigten, sei darüber hinaus ein dritter Fall (Set 3) präsentiert, bei dem eine verlängerte Regelzeit  $\tau_f$  genommen wurde. Die Tabelle 8.11 stellt alle drei Ergebnisse gegenüber.

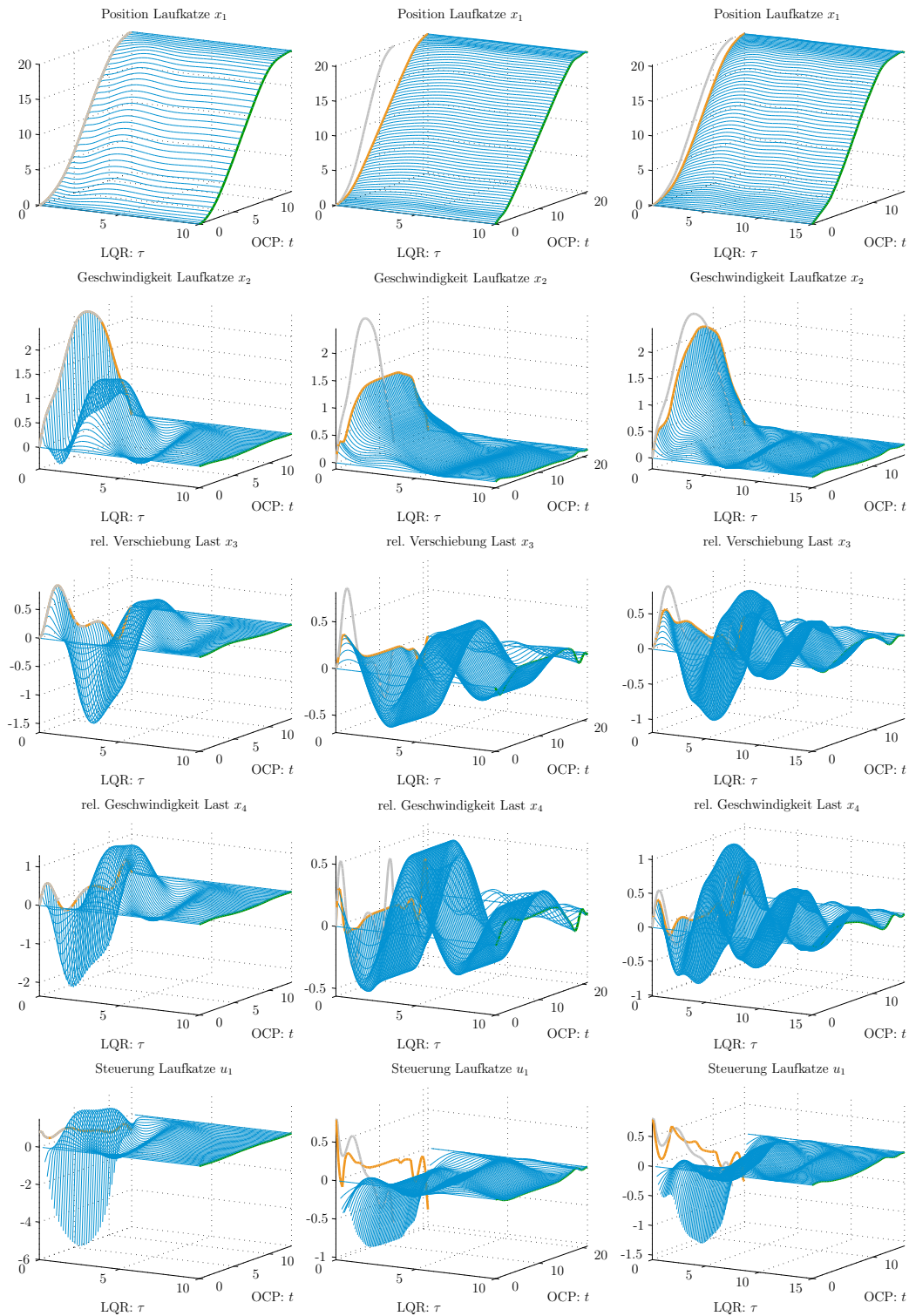
Die Bilder in 8.17 zeigen bereits die begrenzte Nutzbarkeit von Set 2. Der Regler ist durch die Setzung komplett in seiner Wirkung eingeschränkt, so dass sich die Startbedingungen zu jedem Zeitpunkt  $t$  des optimalen Steuerprozess nur schwer kompensieren lassen. Das grenzt natürlich die optimale Trajektorie entsprechend stark ein, so dass die Verfahrzeit fast verdoppelt wird.

Durch die Verlängerung der Regelzeit kann dem ein wenig entgegen gewirkt werden, was ebenfalls die höheren zulässigen Energiewerte in Abbildung 8.19 bestätigen. Dennoch entspricht diese Reglerauslegung nicht den Sicherheitsanforderungen eines „geregeltten Halts“.

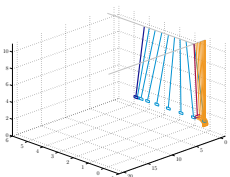
Optimale Steuerung	diskrete Punkte	41	71	
	Steuerfunktionen	2	2	
	Differentialgleichungen	9	9	
	Randwerte	6	6	
	Nebenbedingungen	5	5	
	Erweiterte Nebenbedingung:			
	diskrete Punkte	51	51	
	Steuerfunktionen	1	1	
	Differentialgleichungen	6	6	
Nichtlineare Optimierung	Variablen	87	147	
	Beschränkungen	252	432	
Resultate		Set 1:	Set 2:	Set 3:
	Rechenzeit	48.64s	367.73s	212.10s
	Iterationen	10	23	17
	$\Phi(x, u)$	17.3200	22.7872	18.2516
	$\Phi_1(x, u)$	2.4389	1.3091	2.1040
	$\Phi_2(x, u)$	3.2883	0.7779	2.0071
	$\Phi_3(x, u)$	13.2369	21.0892	15.1440

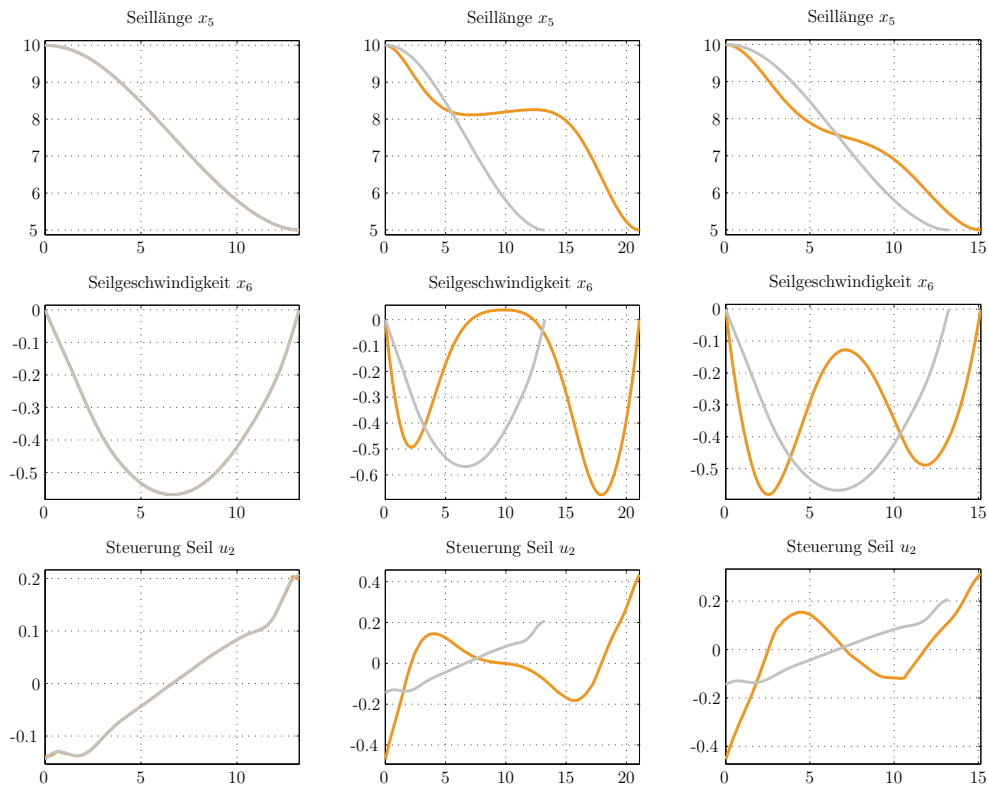
**Tabelle 8.11:** Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - Variation der Gewichtung im LQR-Zielfunktional  $\Psi$



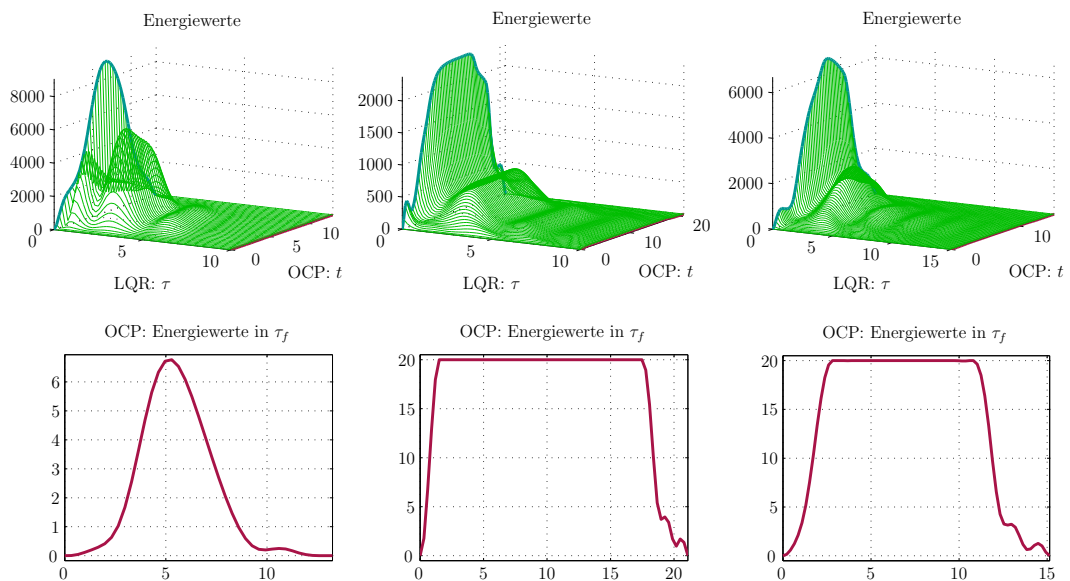


**Abbildung 8.17:** Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlicher Gewichtung im LQR-Zielfunktional  $\Psi$  (Set 1 bis 3 von links nach rechts) - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau); LQR Regelung (blau)

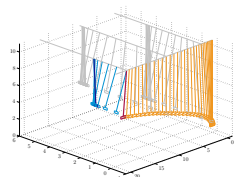


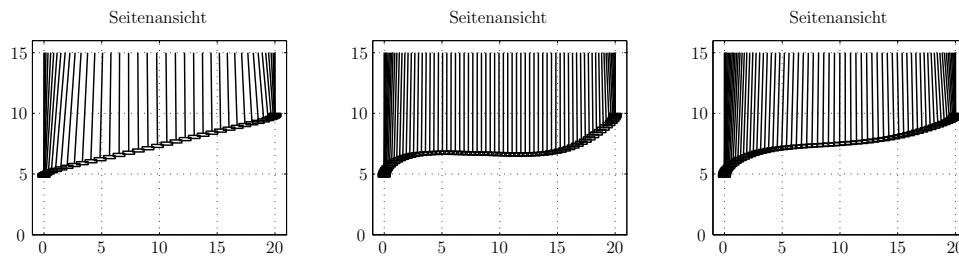


**Abbildung 8.18:** Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlicher Gewichtung im LQR-Zielfunktional  $\Psi$  (Set 1 bis 3 von links nach rechts) - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau)



**Abbildung 8.19:** Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlicher Gewichtung im LQR-Zielfunktional  $\Psi$  (Set 1 bis 3 von links nach rechts) - Auswertung der Energie in der erweiterten Nebenbedingung





**Abbildung 8.20:** Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlicher Gewichtung im LQR-Zielfunktional  $\Psi$  (Set 1 bis 3 von links nach rechts) - Seitenansicht

Bemerkenswerterweise wird durch Set 1 die optimale Bahn aus dem optimalen Steuerungsproblem ohne erweiterte Nebenbedingung vollständig rekonstruiert, da die erweiterte Nebenbedingung zu keinem Zeitpunkt aktiv wird.

Es besteht also weiterhin die Vermutung, dass bestimmte Zielfunktionale in der optimalen Bahnplanung ebenfalls für Trajektorien sorgen, die zusätzlichen Sicherheitsanforderungen genügen.

#### 8.4.2 Veränderung der Einträge von $Q$

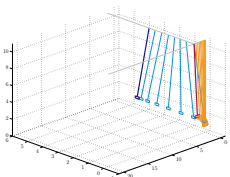
Eine andere Alternative bietet die gezielte Anpassung der Diagonalelemente der Matrix  $Q$ . Für den Fall, dass einige Zustände komplett vernachlässigt werden sollen, in dem der zutreffende Eintrag zu Null gesetzt wird, sollte stets die vollständige Beobachtbarkeit von  $(A, \sqrt{Q})$  erfüllt bleiben.

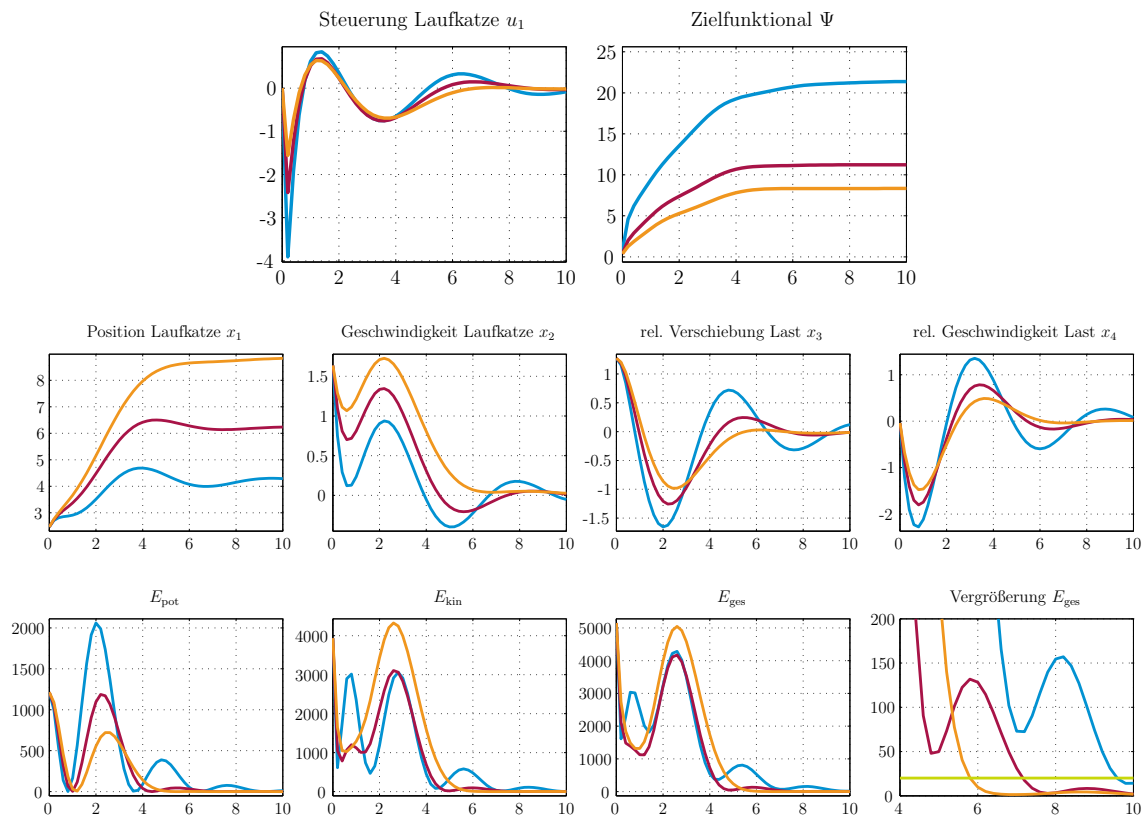
In Analogie zum Abschnitt zuvor, wird vorbereitend eine Analyse des Systemverhaltens der Laufkatze in Verbindung mit den aufgestellten Regler präsentiert. Die von den Daten aus der Tabelle 8.5 abweichenden Werte, sind in Tabelle 8.12 vorgestellt.

	Set 1:	Set 2:
Gewichtungsmatrix $(q_{1,1}, q_{2,2})$	(0.1, 0.1)	(0.01, 0.1)
Gewichtungsmatrix $(q_{3,3}, q_{4,4})$	(1, 1)	(1, 1)
Regelungszeit $\tau_f$	7s	5s

**Tabelle 8.12:** Charakteristische Werte der erweiterten Nebenbedingungen des optimalen Steuerprozess bei Variation der Einträge der Zustandsgewichtungsmatrix  $Q$  im LQR

Die Startbedingungen sind die selben wie zuvor und der optimalen Bahn bei einer verstärkten Minimierung der Fahrzeit aus Abschnitt 8.1 entnommen. Ebenso wird keine Seillängen Anpassung durch die Regelung vorgenommen, so dass auf die Darstellung der Verläufe verzichtet wurde.





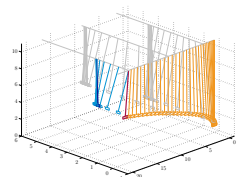
**Abbildung 8.21:** Energiewerte für den Fall der maximalen Pendelausslenkung bei drei unterschiedlichen Diagonalen von  $Q$ :  $Q = I$  (blau); Set 1 (rot); Set 2 (orange)

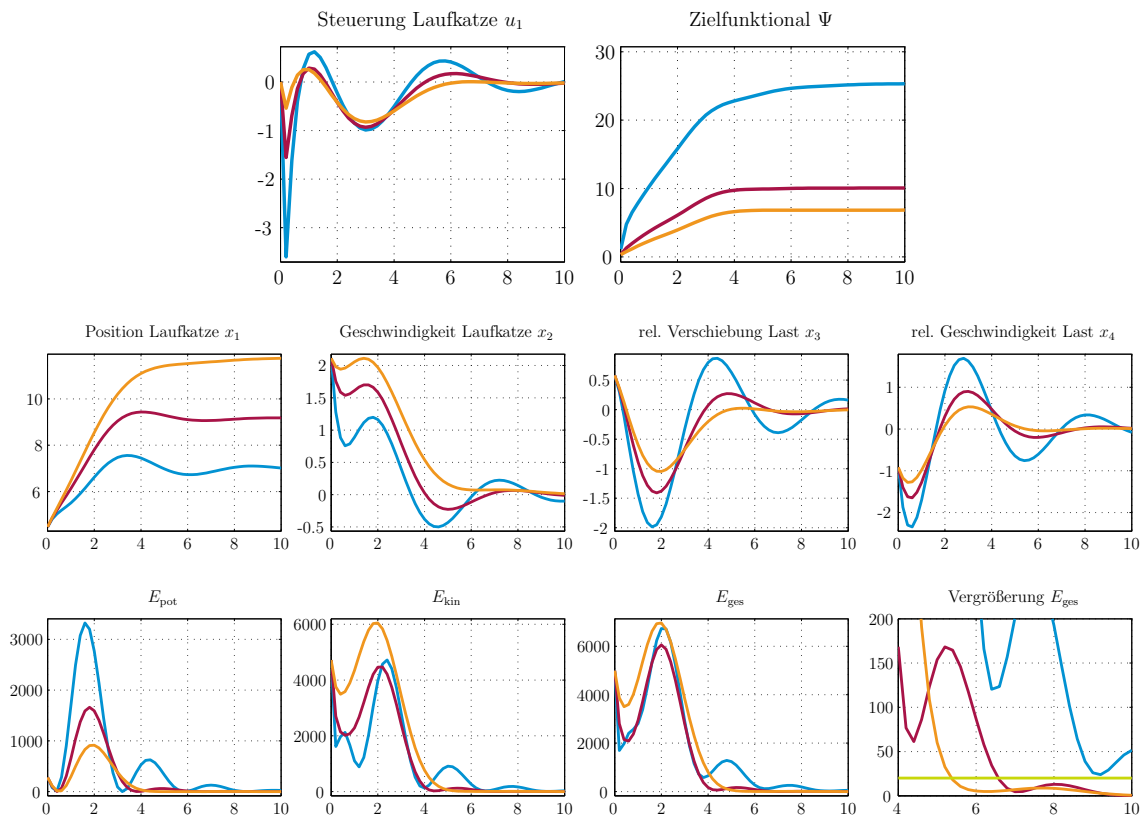
Die Resultate der Simulationsrechnung, sowie die Werte der Energie aus (7.24) zeigt die Abbildung 8.21 bei einem maximalen Pendelausschlag zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Die Abbildung 8.22 visualisiert die Ergebnisse bei einer maximalen Geschwindigkeit in der Pendelausslenkung.

Ein großer Unterschied zu der bereits untersuchten Anpassung der Reglerparameter über eine Gewichtung ist der, dass die aufgewendete Steuerenergie durch die neuen Setzungen aus Set 1 und 2 abgenommen hat. Im vorherigen Abschnitt 8.4.1 war es zwingend notwendig gleich zu Beginn der Simulation mehr Energie in das System zugeben. Die Abbildungen dieser Analyse zeigen den umgekehrten Fall. Die Energie ist gemäßiger. Daher sind die Maximalwerte der potentiellen und kinetischen Energien eher gesunken.

Der gegebene Schwellenwert (gelb) wird daher viel schneller unterschritten und das sogar in einer Form mit wenigen und ausschließlich kleinen Schwingungen. Das motiviert die Senkung der Regelungszeit von  $\tau_f = 10s$  auf  $7s$  bzw.  $5s$  für den Einsatz im optimalen Steuerprozess.

Ein Nachteil dieser Parameterauswahl kann die große Abweichung in der Positionierung der Laufkatze sein. Das spricht zum Teil gegen die zweite analysierte Variante.





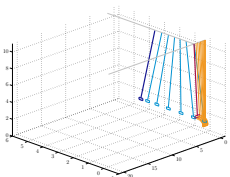
**Abbildung 8.22:** Energiewerte für den Fall der maximalen Pendelgeschwindigkeit bei drei unterschiedlichen Diagonalen von  $Q$ :  $Q = I$  (blau); Set 1 (rot); Set 2 (orange)

Für die Darstellung der Auswirkungen auf die optimale Bahnplanung beider in Tabelle 8.10 präsentierten Reglerauslegungen seien die Randwerte und Beschränkungen gemäß den Tabellen 8.3 und 8.2 gegeben. Weiter ist das Zielfunktional durch die Gewichtung  $\gamma = (1, 0, 1)$  definiert (vergleichbar zu Set 2 aus Tabelle 8.6).

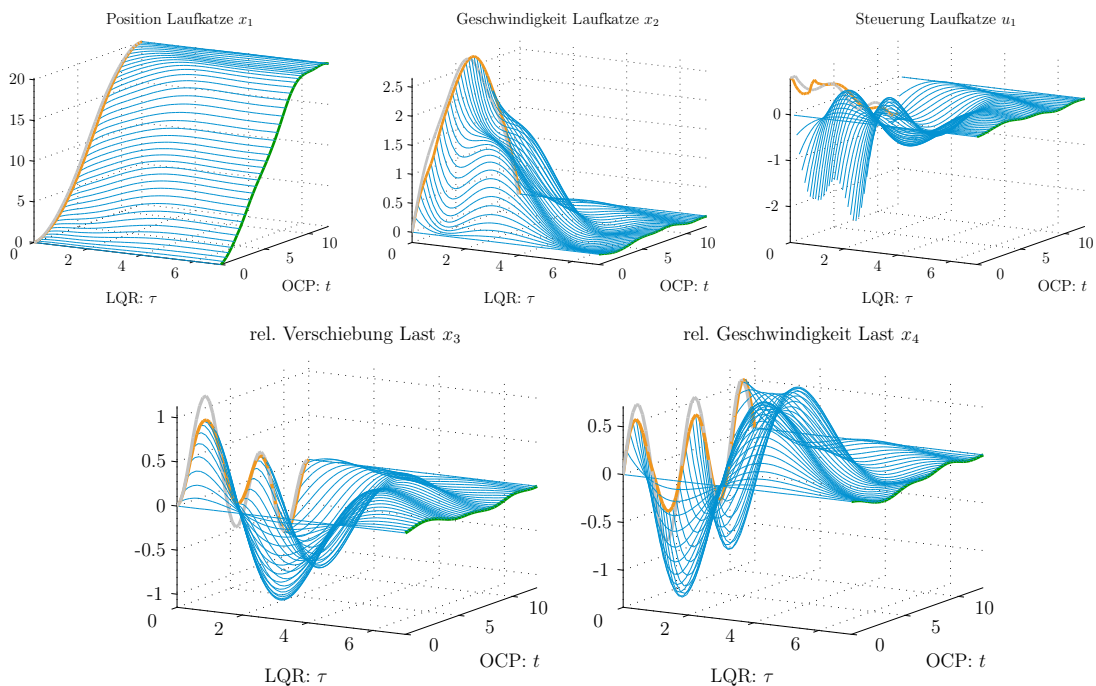
Trotz des scheinbar kleinen Unterschieds in den Designparametern, zeigen die Abbildungen 8.23, 8.24 und 8.25 sehr unterschiedliche Ergebnisse.

Die künstliche Vernachlässigung der Positionierung der Laufkatze in der Reglermatrix (vgl. Abschnitt 7.5.4) ließe vermuten, dass die geringere Bestrafung im Zielfunktional  $\Psi$  des linear quadratischen Regulatorproblems nur eine kleine Veränderung zur Folge hat.

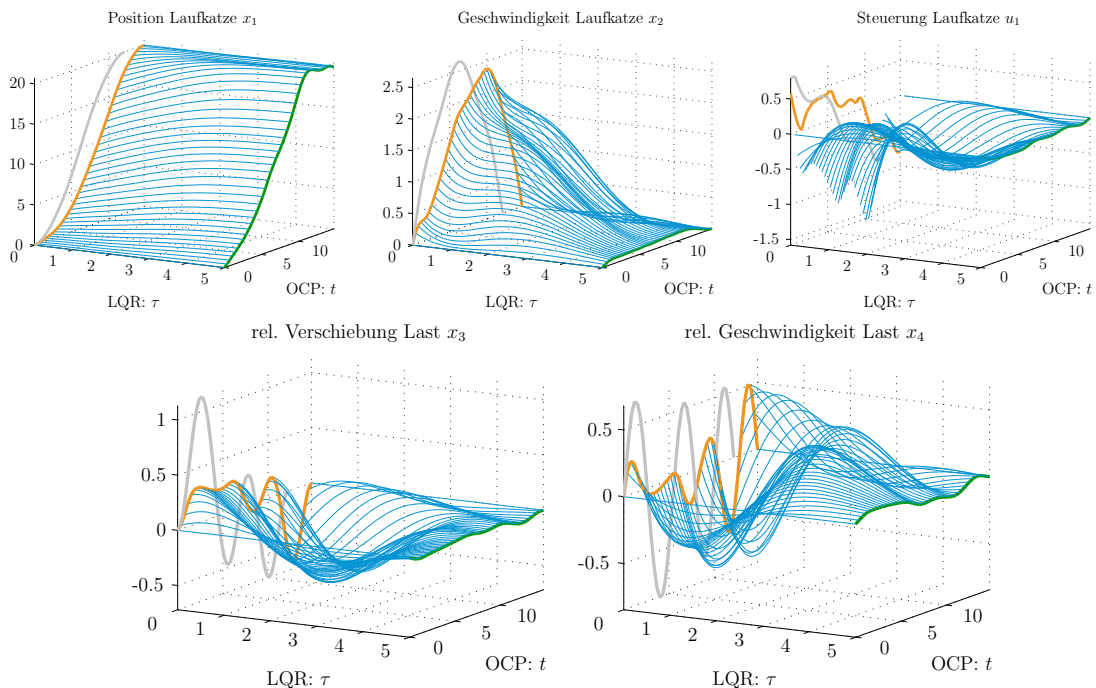
Der Vergleich beider Steuerungen  $u_1$  und der Energiewerte zu Beginn eines jeden Regelungsintervalls  $[0, \tau_f]$  zeigt, dass die Anpassung von  $q_{1,1} = 0.1$  auf  $q_{1,1} = 0.01$  eine Reduzierung der möglichen Steuerenergie bedeutet. In den Abbildungen 8.21 und 8.22 war bereits eine eher langsame Reduzierung der Geschwindigkeit der Laufkatze  $x_2$  für  $q_{1,1} = 0.01$  sichtbar, das für die betragsmäßig kleine Steuerung  $u_1$  spricht.





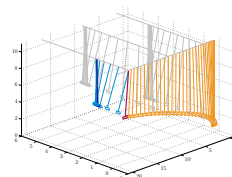


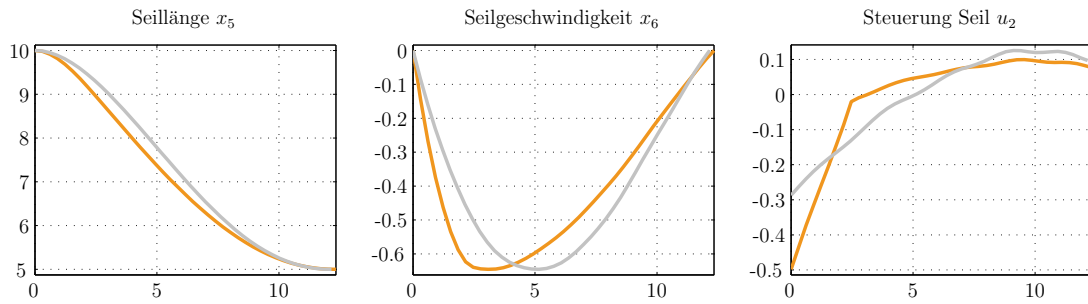
**8.23.a:** Geringe Bestrafung der Werte von  $z_1$  und  $z_2$  - Laufkatze und Last



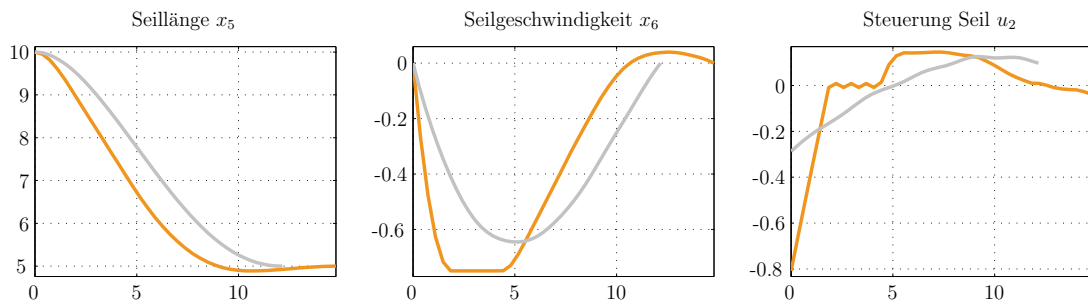
**8.23.b:** Geringere Bestrafung der Werte von  $z_1$  - Laufkatze und Last

**Abbildung 8.23:** Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlichen Zustandsgewichtungsmatrizen  $Q$  - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau); LQR Regelung (blau)



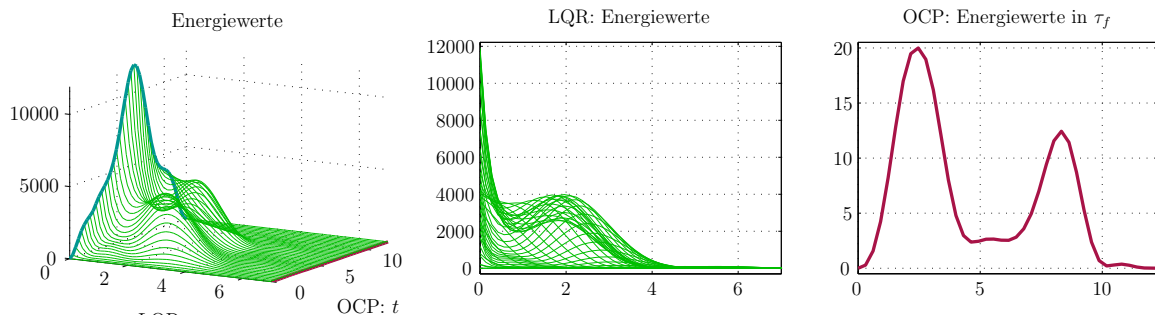


8.24.a: Geringe Bestrafung der Werte von  $z_1$  und  $z_2$  - Seil

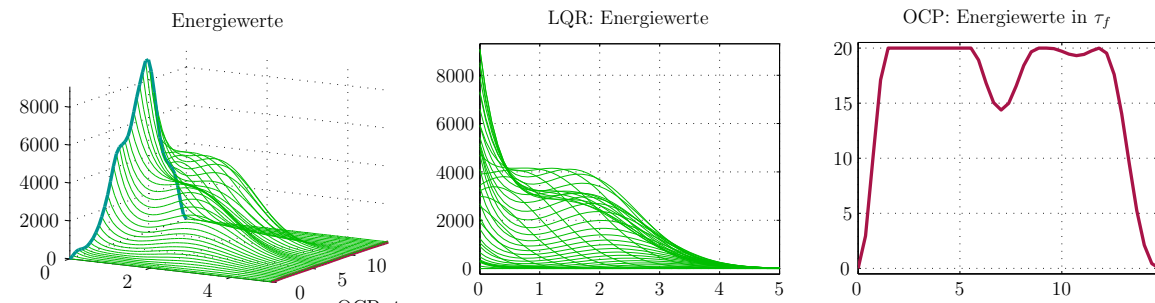


8.24.b: Geringere Bestrafung der Werte von  $z_1$  - Seil

Abbildung 8.24: Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlichen Zustandsgewichtungsmatrizen  $Q$  - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau)

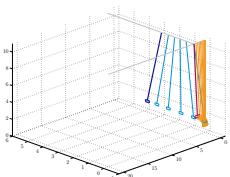


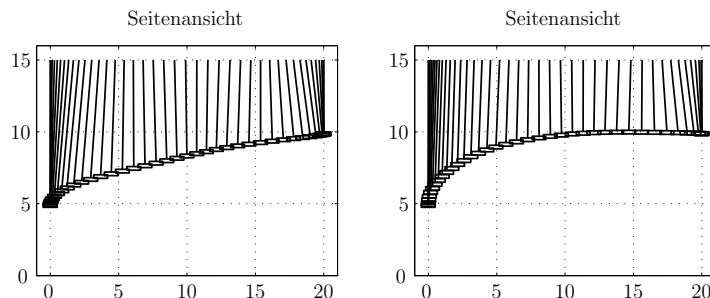
8.25.a: Geringe Bestrafung der Werte von  $z_1$  und  $z_2$



8.25.b: Geringere Bestrafung der Werte von  $z_1$

Abbildung 8.25: Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlichen Zustandsgewichtungsmatrizen  $Q$  - Auswertung der Energie in der erweiterten Nebenbedingung





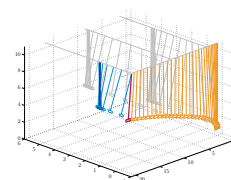
**Abbildung 8.26:** Vergleich optimale Bahnen unter erweiterten Nebenbedingungen bei unterschiedlichen Zustandsgewichtungsmatrizen  $Q$  - Seitenansicht, Set 1 (links), Set 2 (rechts)

Optimale Steuerung	diskrete Punkte	41	
	Steuerfunktionen	2	
	Differentialgleichungen	9	
	Randwerte	6	
	Nebenbedingungen	5	
Erweiterte Nebenbedingung:	diskrete Punkte	51	
	Steuerfunktionen	1	
	Differentialgleichungen	6	
Nichtlineare Optimierung	Variablen	87	
	Beschränkungen	252	
Resultate		Set 1:	Set 2:
	Rechenzeit	42.98s	52.66s
	Iterationen	11	14
	$\Phi(x, u)$	15.3480	17.3683
	$\Phi_1(x, u)$	3.0140	2.5877
	$\Phi_2(x, u)$	5.3791	3.5803
	$\Phi_3(x, u)$	12.3340	14.7806

**Tabelle 8.13:** Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - Variation der Einträge der Zustandsgewichtungsmatrix  $Q$  im LQR

Mit der reduzierten Steuerenergie in der Regelung können die ursprünglich auftretenden Schwingungen des Lastaufnahmemittels, die für eine zügige Verfahrgzeit im optimalen Steuerprozess ausgenutzt wurden, nicht innerhalb der Vorgabe von  $\tau_f = 5s$ , bei der Setzung  $q_{1,1} = 0.01$ , reduziert werden. Die optimale Trajektorie der Laufkatze wird zeitlich in die Länge gezogen.

Vorab wurde bereits die Vermutung geäußert, dass die fehlende Positionierung der Laufkatze innerhalb der Regelung zu Problemen führen kann. Für  $q_{1,1} = 0.01$



bestätigt sich dieser Verdacht. Bei genauer Betrachtung in  $x_1$  zeigt sich eine Überschreitung der geforderten  $20m$  in der Reglersimulation. Eine Ursache dafür könnte die, im Vergleich zum restlichen Zeitintervall, betragsmäßig größere relative Geschwindigkeit der Last  $x_4$  sein.

## 8.5 Bahnoptimierung mit beschränkter Regelung

Die drei vorangegangene Abschnitte lieferten bereits wichtige Ergebnisse in Bezug auf das System der Laufkatze und die damit verbundenen Sicherheitsbestimmungen.

Für ein verbessertes Abbild der Realität in der Simulation der Trajektorien aus der optimalen Regelung wurde bereits in allen vorgestellten Simulationen das lineare Modell (7.18) durch die ursprüngliche nichtlineare (7.5) Fassung ersetzt.

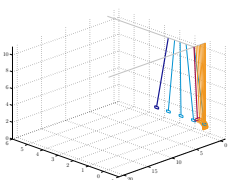
Zusätzliche technische Details und Kennlinien der Steuergeräte der Motoren, sind nicht erfasst worden. Allerdings wurden für die optimale Bahnplanung Steuerbeschränkungen (vgl. Tabell 8.2) formuliert, die ggf. auf den Ausgang der Regelung übertragbar sind.

Es sei davon ausgegangen, dass die Steuerbeschränkungen aufgrund der Leistung der eingebauten Motoren definiert sind. Das rechtfertigt einen Testlauf der Bahnoptimierung mit einer künstlich restringierten Steuergröße in der erweiterten Nebenbedingung.

Die Randbedingungen und Beschränkungen sind den Tabellen 8.3 und 8.2 zu entnehmen. Alle weiteren Designelemente des linear quadratischen Regulatorproblems, sowie die verwendeten Gewichtungsfaktoren  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  des zusammengesetzten Zielfunktionals  $\Phi = \sum_{i=1}^3 \gamma_i \cdot \Phi_i(x, u)$  sind in Tabelle 8.14 beschrieben. Dabei sorgt  $\Phi_1$  für die Minimierung der Steuerenergie,  $\Phi_2$  minimiert den Pendelausschlag der Last und  $\Phi_3$  die Fahrzeit.

Masse Laufkatze	$m_1$	1.7t			
Masse Last	$m_2$	1.3t			
Energielimit	$E_{\text{lim}}$	20Nm			
LQR Skalierung $\alpha$	$(\alpha_Q, \alpha_R)$	(1, 1)			
Gewichtungsmatrix in $w$	$r_{1,1}$	1			
			Set 1:	Set 2:	Set 3:
OCP Skalierung $\gamma$	$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$	(1, 0, 1)	(1, 0, 1)	(0.1, 0, 1)	(0.1, 0, 1)
Gewichtungsmatrix in $z$	$(q_{1,1}, q_{2,2})$	(0.1, 0.1)	(0.01, 0.1)	(0.1, 0.1)	(0.01, 0.1)
	$(q_{3,3}, q_{4,4})$	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)
Regelungszeit	$\tau_f$	7s	5s	7s	5s

**Tabelle 8.14:** Charakteristische Werte der erweiterten Nebenbedingungen des optimalen Steuerprozess mit beschränkter Regelung



Optimale Steuerung	diskrete Punkte	41			
	Steuerfunktionen	2			
	Differentialgleichungen	9			
	Randwerte	6			
	Nebenbedingungen	5			
	Erweiterte Nebenbedingung:				
	diskrete Punkte	51			
	Steuerfunktionen	1			
	Differentialgleichungen	6			
Nichtlineare Optimierung	Variablen	87			
	Beschränkungen	252			
Resultate		Set 1:	Set 2:	Set 3:	Set 4:
	Rechenzeit	43.96s	49.95s	90.49s	89.36s
	Iterationen	11	12	24	21
	$\Phi(x, u)$	15.5283	17.5658	11.9206	15.03804
	$\Phi_1(x, u)$	3.0476	2.3944	4.9866	3.7625
	$\Phi_2(x, u)$	4.8693	3.3316	6.1866	4.9831
	$\Phi_3(x, u)$	12.4807	15.1714	11.4219	14.6618

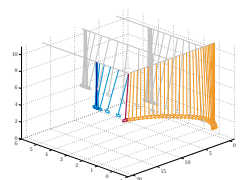
**Tabelle 8.15:** Auswertung der Ergebnisse des optimalen Steuerprozess mit erweiterter Nebenbedingung - Vergleich restringierter Regler zu verschiedenen Setzungen im LQR

Die Auswertung der Ergebnisse stellt die Tabelle 8.15 zusammenfassend gegenüber. Die Ergebnisse aus Abschnitt 8.4.2 befürworteten bereits die Regelung aus Set 1 bzw. Set 3. Ebenso zeigen die Verläufe der Zustände in den Abbildungen 8.27, 8.28 und 8.30, dass die verwendete Parametrisierung des Reglers selbst mit einer zusätzlichen Beschränkung auskommt.

Die Analyse der Gegenüberstellung der vier Bahnoptimierungen unter erweiterten Nebenbedingungen liefert die folgenden Resultate:

**Set 1 (erste Spalte von links):** Die verwendete Setzung ist dem Set 1 aus Abschnitt 8.4.2 gleich. Trotz des nicht berücksichtigten Pendelverhaltens im Zielfunktional  $\Phi$  werden sehr gute Ergebnisse erzielt. Die erweiterten Nebenbedingungen sind nur auf einem Randstück aktiv, was eine geringe Rechenzeit zur Folge hat und die Berechnung mit wenigen Iterationsschritten auskommt. Die vereinfachte Darstellung in der Seitenansicht (vgl. Abbildung 8.29) zeigt ebenfalls einen Verlauf, der nicht unnatürlich erscheint.

**Set 2 (zweite Spalte von links):** Das gezeigte Verhalten ist dem aus Set 2 in Abschnitt 8.4.2 sehr ähnlich. Da diese Einstellung nur kleine Werte in der Regelung zulässt, wirkt sich die zusätzliche Beschränkung nur zu einigen wenigen Zeitpunkten  $t \in [0, t_f]$  auf die Haltebahnen aus. Die Problematik der schlechten Positionierung der Laufkatze hat weiterhin Bestand.



**Set 3 (zweite Spalte von rechts):** Durch die reduzierte Bestrafung der notwendigen Steuergrößen in  $\Phi$  werden recht häufig die Zustands- und Steuerbeschränkungen erreicht. Die erweiterte Nebenbedingung hingegen ist, wie bereits in Set 1, nur auf einem kleinen Teilstück aktiv. Die Rechenzeit ist dennoch sehr groß aufgrund der Verdopplung der Iterationsschritte. Dieses ist zum Teil den aktiven Beschränkungen geschuldet. Mit Ausnahme der Geschwindigkeit der Seillängenänderung  $x_6$  sind die Verläufe sehr ähnlich zu denen aus Set 1.

**Set 4 (erste Spalte von rechts):** Die Berechnung mit der vierten Parameterauswahl liefert ein eher schlechtes Ergebnis. Neben der fast durchgängigen aktiven Beschränkung in der erweiterten Nebenbedingung und der zusätzlichen aktiven Beschränkung der Seilgeschwindigkeit  $x_5$  zeigt sich ein eher irritierender Verlauf in der Seitenansicht. Im Vergleich zu den Ergebnissen der Bahnoptimierung ohne erweiterte Nebenbedingung ist eine Verstärkung im Verhalten erkennbar, das eine Verkürzung der Seillänge über das Ziel hinaus mit anschließender Senkung zur Folge hat.

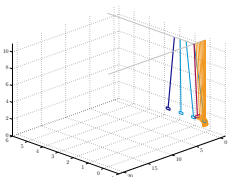
Aus den bisher gezeigten Simulationsrechnungen hat sich eindeutig die erste Parametersetzung aus Tabelle 8.14 als „gut geeignet“ herauskristallisiert. Da die Auswertung für eine spezielle Bahnplanung noch keinen Beweis der Robustheit zulässt, sei an dieser Stelle nur eine Empfehlung gegeben.

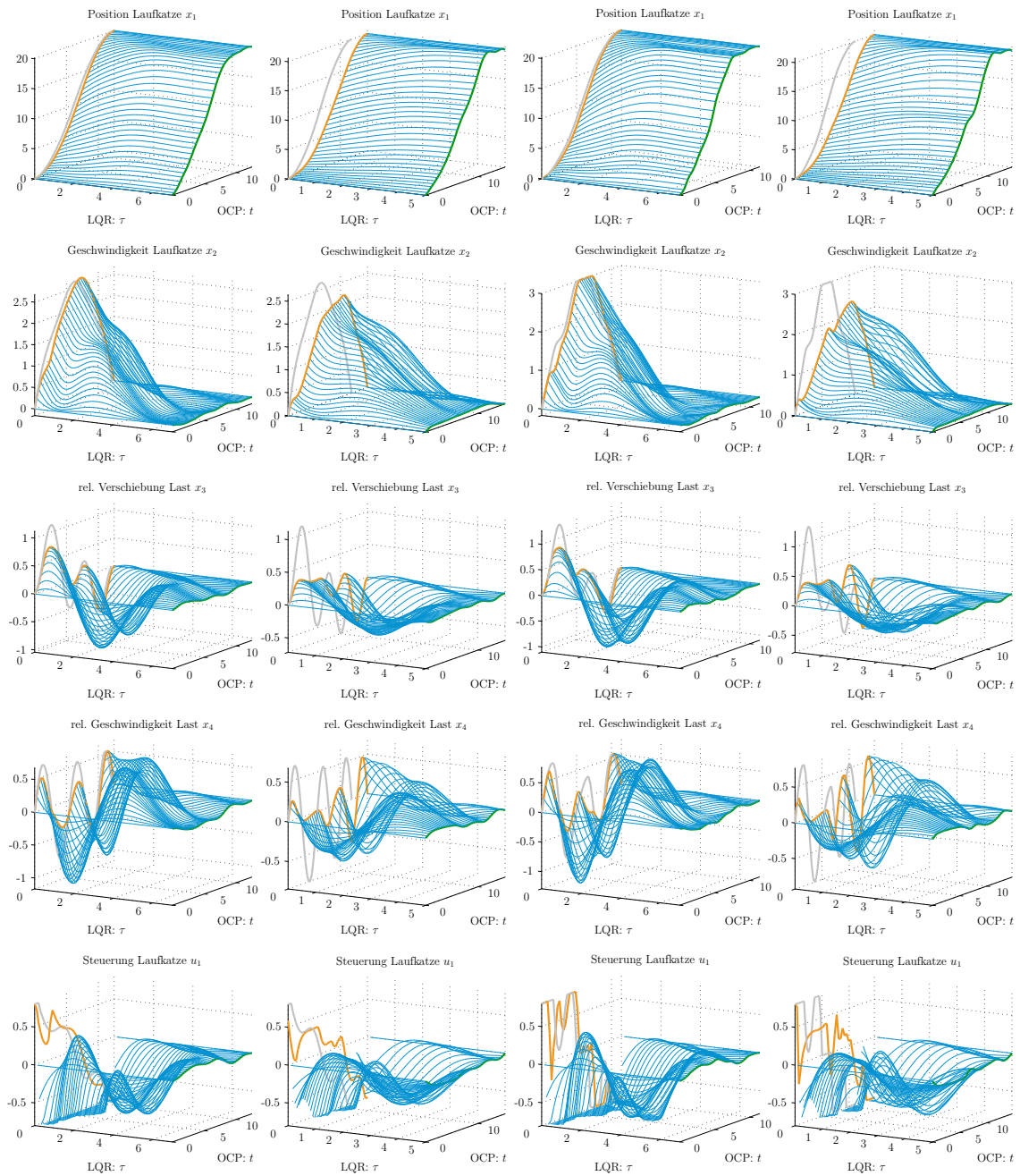
Durch die gezielt eingesetzten unterschiedlichen Gewichtungen in den Diagonalelementen von  $Q$  hat sich gezeigt, dass ein zusätzlicher Eingriff in die optimale Bahnplanung in Maßen notwendig ist, aber nicht als störend empfunden wird. Ebenso wird durch die Energieauswertung ein sehr gleichmäßiger Verlauf generiert, der zum Ende des Simulationsintervalls  $[0, \tau_f]$  kaum zusätzlichen Schwingungen unterliegt. Eine fehlerhafte Interpretation des Verhaltens (vgl. Abschnitt 8.4.1) kann somit ausgeschlossen werden. Die Kombination aus Gewichtung  $q_{1,1} = 0.1$  und Simulationszeit  $\tau_f = 7s$  erweist sich als eine gute Wahl.

Es hat sich ebenfalls gezeigt, dass bereits durch die Aufstellung des Zielfunktional  $\Phi$  Bahnen generiert werden können, die zu jedem Zeitpunkt die erweiterte Nebenbedingung erfüllen. In den zuletzt gezeigten Ergebnissen wäre das der Fall gewesen, wenn die erlaubte Simulationszeit  $\tau_f$  bei den ursprünglichen 10s geblieben wäre.

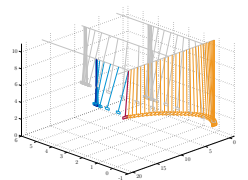
Man kann sich jetzt fragen, ob es aus Sicht eines Anwenders sinnvoll erscheint, auf die zusätzliche Auswertung der erweiterten Nebenbedingung gänzlich zu verzichten. Beschränkt man sich nur auf die Bahnplanung (wie in Abschnitt 8.1) so wäre die Überlegung berechtigt. Allerdings muss separat eine Analyse der Sicherheitsanforderung zum „geregelten Halt“ erfolgen. Ebenso steht noch keine geeignete Regelungsstrategie zur Verfügung.

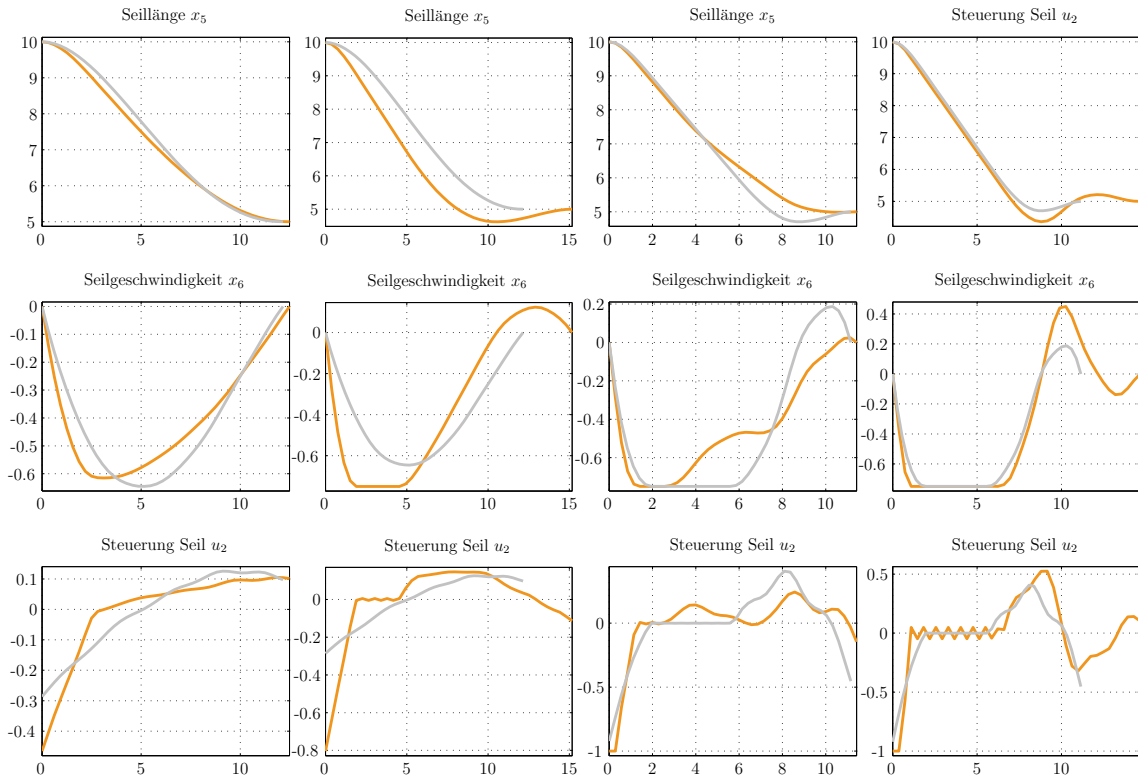
Durch die integrierte Auswertung werden sowohl die optimalen Haupttrajektorie, als auch die dazugehörigen Reglermatrizen bereitgestellt. Bei Bedarf wären diese sofort verfügbar und optimal auf die dann vorliegenden Anfangsbedingungen ausgelegt.



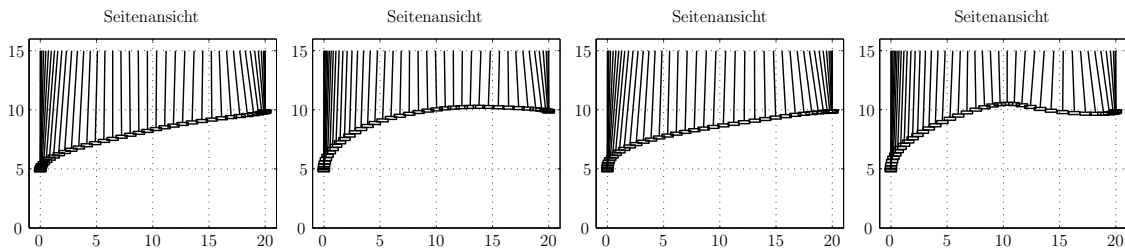


**Abbildung 8.27:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen mit beschränkter Regelung im LQR, Variation von  $\Phi$  und  $\Psi$  (Set 1 bis 4 von links nach rechts) - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau); LQR Regelung (blau)

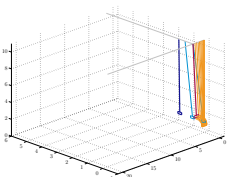




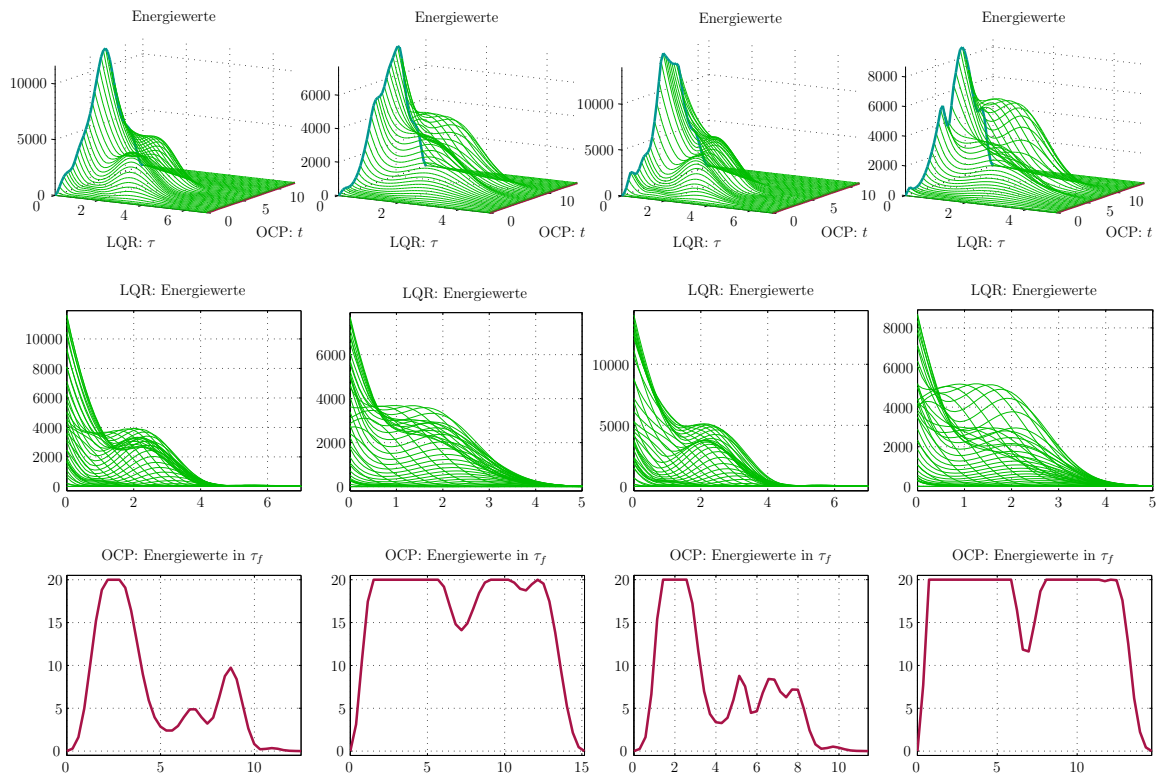
**Abbildung 8.28:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen mit beschränkter Regelung im LQR, Variation von  $\Phi$  und  $\Psi$  (Set 1 bis 4 von links nach rechts) - OCP-Bahnen mit LQR (orange); OCP Referenz ohne LQR (grau)



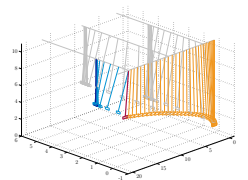
**Abbildung 8.29:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen mit beschränkter Regelung im LQR, Variation von  $\Phi$  und  $\Psi$  (Set 1 bis 4 von links nach rechts) - Seitenansicht

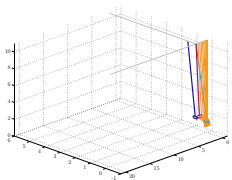






**Abbildung 8.30:** Optimale Bahnen bei erweiterten Nebenbedingungen mit beschränkter Regelung im LQR, Variation von  $\Phi$  und  $\Psi$  (Set 1 bis 4 von links nach rechts) - Auswertung der Energie in der erweiterten Nebenbedingung





## Zusammenfassung und Ausblick

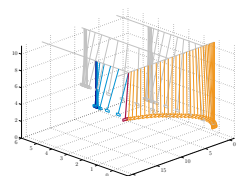
Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für einen praxisnahen Anwendungsfall aus der Hochregallagertechnik eine Lösungsmethode zu entwickeln, mit der sich zusätzliche Sicherheitsanforderungen in ein Optimalsteuerungsproblem integrieren lassen.

Im Vergleich zu anderen Arbeiten wurde eine effiziente Lösungsmethode entwickelt, die den Anforderungen, unter anderem nach einer akzeptablen Berechnungszeit bei der Verwendung in der Praxis, gerecht wird. Ebenso ist genauer auf den Aspekt der Regelung des Systems und deren Berechenbarkeit eingegangen worden. Bisweilen wurde dieses, in Bezug auf die Bahnplanung, vollständig außer Acht gelassen. In dieser Arbeit tritt die Regelung der bereitzustellenden Haltebahnen in den Vordergrund und motivierte die Kombination optimaler Steuerprozesse mit der Berechnung von Optimalreglern.

Die wesentlichen Schritte dieser Arbeit werden noch einmal zusammenfassen vorgestellt und wichtige Erkenntnisse aus der numerischen Auswertung rekapituliert. Zusätzlich wird ein Ausblick auf weitere Arbeiten und möglichen Ergänzungen gegeben.

Kapitel 2 stellte zum einen das Anwendungsproblem vor und motivierte zugleich, weitere Sicherheitsaspekte bei der optimalen Bahnplanung zu berücksichtigen. Während der Bewegung einer Laufkatze entlang der Haupttrajektorien ist sowohl die Existenz einer geeigneten Haltebahn sicherzustellen, sowie für deren Umsetzung zu garantieren. Die Haltebahn ist jeweils so zu bestimmen, dass das System innerhalb einer vorgegeben Zeitspanne in Ruhe gebracht werden kann.

In Kapitel 3 wurden nichtlineare Optimierungsprobleme vorgestellt. Über eine definierte Zielvorgabe werden Parameter bestimmt, die die Vorgabe, unter Beachtung zusätzlicher Beschränkungen, möglichst gut erfüllen. Eine Erweiterung der Parameterbestimmung auf die Bestimmung einer optimalen Steuerung wurde in Kapitel 4 vorgestellt. Die zu ermittelnde Funktion der Steuergröße ist ebenfalls so zu bestimmen, dass Zielvorgaben möglichst gut erfüllt und zusätzliche Beschränkungen



eingehalten werden.

Ein Spezialfall der optimalen Steuerprozesse, die Bestimmung von Optimalreglern, wurde in Kapitel 5 vorgestellt. Basierend auf einem quadratischen Zielfunktional ist eine direkte Berechnung der optimalen Lösung unter der Beachtung zusätzlicher Systemeigenschaften möglich.

Kapitel 6 beschrieb die eigentliche Motivation dieser Arbeit, die Integration von optimalen Regelalgorithmen in das optimale Steuerungsproblem. Dazu wurden die Ergebnisse der drei vorangegangenen Kapitel herangezogen.

Durch Kapitel 7 schließt sich der Kreis zum ursprünglichen Anwendungsproblem. Es wurden die Bewegungsgleichungen für das dynamische System der Laufkatze aufgestellt und alle notwendigen Überprüfungen hinsichtlich der Existenz der optimalen Zustandsrückführung präsentiert. Mit diesen Erkenntnissen wurde in Kapitel 8 die optimale Bahnplanung für das deckengeführte Regalbediensystem präsentiert, sowie die Untersuchung von fünf weiteren optimalen Steuerprozessen unter der neuen erweiterten Klasse von Nebenbedingungen.

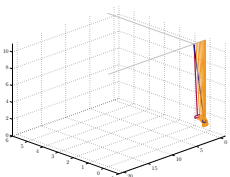
Während zu den drei Themen, nichtlineare Optimierung, optimaler Steuerprozess und linear quadratische Regulatorproblem, in der Literatur jeweils viele Arbeiten zu finden sind, ist über die Kombination aller drei Bereiche so gut wie kaum etwas veröffentlicht. Es sind einige Arbeiten bekannt, die bereits einige Teilaspekte beleuchtet haben, aber durch andere Fragestellungen motiviert wurden.

Aus der numerischen Auswertung des optimalen Steuerprozess einer Laufkatze unter den erweiterten Nebenbedingungen ergaben sich die folgenden, mitunter unerwarteten Resultate:

Eine Regelung der Seillänge muss nicht notwendigerweise für die Berechnung und Auswertung der Haltebahnen berücksichtigt werden. Es zeigte sich ein entkoppeltes Verhalten durch die Regelung, so dass diese zusätzliche Rechenzeit eingespart werden kann. Eine mögliche Alternative, für die dadurch fehlende Regelungsstrategie bei der realen Umsetzung, ist durch die Verwendung der integrierten Steuerungen der Motoren gegeben. Die Unterbindung einer weiteren Seillängenänderung ist so durch die geschwindigkeitsregulierenden Motoren möglich.

Die Approximation der adaptiven Regelung auf ein konstantes Regelgesetz für den kompletten Zeitraum der optimalen Referenztrajektorien kann nur bedingt empfohlen werden. Größere Seillängenadjustierungen zwischen dem Start und dem Ziel der optimalen Bahn weisen besonders im Bereich der kürzeren Seillängen höhere Ungenauigkeiten auf. Die Auswirkungen sind häufig auf das veränderte Pendelverhalten des Lastaufnahmemittels zurückzuführen, welches schlechter durch ein approximiertes konstantes Regelgesetz bewältigt werden kann.

Die Variationen in der linear quadratischen Formulierung der Zustandsrückführung haben gezeigt, dass ein gutes Verhältnis zwischen der Genauigkeit der Zustandsnachführung und der aufzuwendenden Steuerenergie in der Regelung bestehen muss.

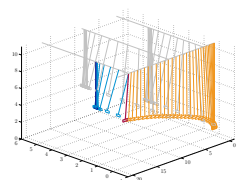


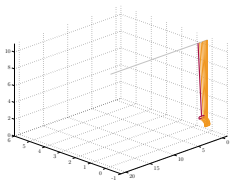
Die separaten Analysen der geschlossenen Zustandsrückführung lieferten wichtige Erkenntnisse über den später zu erwartenden Einfluss auf die optimale Trajektorie, so dass die erweiterte Nebenbedingung sowohl die Existenz der Haltebahn unter den geforderten Spezifikationen sichert, als auch deren Ausführbarkeit garantiert.

In einer abschließenden Analyse wurde eine diskontinuierliche Erweiterung in der Auswertung der Trajektorien der Haltebahnen implementiert. Die bekannten Systemgrenzen, die bereits als Beschränkungen im optimalen Steuerprozess berücksichtigt wurden, wurden auf die Steuergrößen der Regelung übertragen. Das Signal der Regelung wurde künstlich begrenzt, so dass es zu Beginn der Haltebahnen zu einem Sättigungseffekt kommt. Gerade durch diesen Einschnitt zeigte sich die Robustheit des geregelten Systems auf Basis der gewählten Designparameter.

Weitere Erweiterungen, in einer ähnlichen Art, wären für die Simulationsrechnung der Regelstrecke denkbar. Speziell bei dem Einsatz von Motoren, die statt der Beschleunigung die Geschwindigkeit regulieren, sollte eine entsprechende Anpassung in der Simulation zusätzlich analysiert werden.

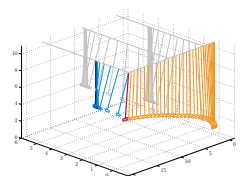
Die vorliegende Arbeit präsentierte eine neue Klasse von erweiterten Nebenbedingung auf dem Gebiet der optimalen Steuerungsprobleme und zeigte dessen Einsatzmöglichkeiten, sowie eine spezielle Konfiguration anhand des deckengeführten, kranähnlichen Systems Aviator<sup>TM</sup>, einer neu entwickelten Technologie in der Hochregallagertechnik.



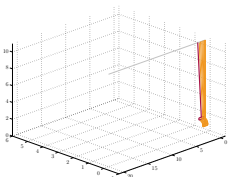


# Literaturverzeichnis

- [Alt02] ALT, W.: *Nichtlineare Optimierung*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2002.
- [And89] ANDERSON, B.D.O. und MOORE, J.B.: *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [Ath66] ATHANS, M. und FALB, P.L.: *Optimal Control*. McGraw-Hill, New York et al., 1966.
- [Aul97] AULBACH, B.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1997.
- [Blu06] BLUME, B.: *Schienegeführte Deckenkransysteme*. Diplomarbeit, Universität Bremen, Bremen, 2006.
- [Bry75] BRYSON, A.E. und HO, Y.C.: *Applied Optimal Control - Optimization, Estimation and Control*. Halsted Press, New York, 1975.
- [Bry02] BRYSON, A.E.: *Applied Linear Optimal Control: Examples and Algorithms*. Cambridge University Press, 2002.
- [Büs96] BÜSKENS, C.: *Anleitung zur Benutzung der Fortran-Bibliothek NUDOC-CCS*. Universität Münster, Münster, 1996.
- [Büs98] BÜSKENS, C.: *Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen*. Dissertation, Universität Münster, Münster, 1998.
- [Büs00] BÜSKENS, C. und MAURER, H.: *SQP-Methods for Solving Optimal Control Problems with Control and State Constraints: Adjoint Variables, Sensitivity Analysis and Real-Time Control*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Band 120, S. 85–108, 2000.

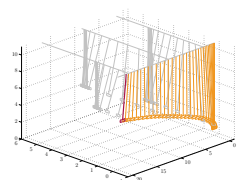


- [Büs01a] BÜSKENS, C.: *Real-Time Solutions for Perturbed Optimal Control Problems by a Mixed Open- and Closed-Loop Strategy*. In Grötschel et al. [Grö01], Kapitel 7, S. 105–116.
- [Büs01b] BÜSKENS, C. und MAURER, H.: *Real-Time Control of an Industrial Robot under Control and State Constraints*. In Grötschel et al. [Grö01].
- [Büs01c] BÜSKENS, C. und MAURER, H.: *Sensitivity Analysis and Real-Time Control of Parametric Nonlinear Programming Problems*. In Grötschel et al. [Grö01].
- [Büs01d] BÜSKENS, C. und MAURER, H.: *Sensitivity Analysis and Real-Time Optimization of Parametric Nonlinear Programming Problems*. In Grötschel et al. [Grö01], Kapitel 1, S. 3–16.
- [Büs03] BÜSKENS, C. und GERDTS, M.: *Emergency Landing of a Hypersonic Flight System: A Corrector Iteration Method for Admissible Real-Time Optimal Control Approximations*. In *Optimal Control*, S. 51–60, Workshop in Greifswald, Sonderforschungsbereich 255: Transatmosphärische Flugsysteme, Hieronymus München, 2003.
- [Büs04] BÜSKENS, C. und KNAUER, M.: *Higher order real-time approximations in optimal control of multibody-systems for industrial robot*. Berichte aus der Technomathematik Report 04-07, Zentrum für Technomathematik, Universität Bremen, Bremen, 2004.
- [Büs06] BÜSKENS, C.: *Optimierung dynamischer Systeme*. Skript zur Vorlesung, Universität Bremen, Bremen, 2006.
- [Büs08a] BÜSKENS, C., KALMBACH, P., NIKOLAYZIK, T. und WASSEL, D.: *Solver Development Strategy*. Berichte aus der Technomathematik 08-02, Zentrum für Technomathematik, Universität Bremen, 2008.
- [Büs08b] BÜSKENS, C., NIKOLAYZIK, T. und WASSEL, D.: *Interface Control Co-Document*. Berichte aus der Technomathematik 08-01, Zentrum für Technomathematik, Universität Bremen, 2008.
- [Büs09] BÜSKENS, C.: *Echtzeitanpassung des klassischen Riccati-Reglers. at - Automatisierungstechnik; Methoden und Anwendungen der Steuerungs-, Regelungs- und Informationstechnik*, Band 57 (6), S. 269–278, 2009.
- [Cas77] CASTI, J.: *Dynamical Systems and their Applications: Linear Theory*. Academic Press, Orlando, Florida, 1977.
- [Din69] DINKELBACH, W.: *Sensitivitätsanalyse und parametrische Programmierung*. Springer, 1969.

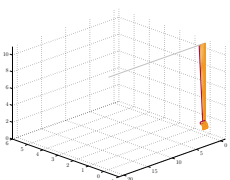




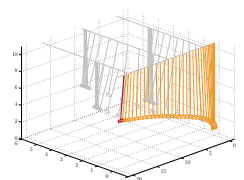
- [Fei86] FEICHTINGER, G. und HARTL, R.F.: *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*. de Gruyter, Berlin et al., 1986.
- [Fia83] FIACCO, A.V.: *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*. In *Mathematics in Science and Engineering*, Band 165, Academic Press, New York, 1983.
- [Föl94a] FÖLLINGER, O.: *Optimale Regelung und Steuerung*. Oldenbourg, München et al., 3. Auflage, 1994.
- [Föl94b] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig, Heidelberg, 1994.
- [Fle87] FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*. Wiley, Braunschweig, 1987.
- [For08] FORSTER, O.: *Analysis 2*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [Gei02] GEIGER, C. und KANZOW, C.: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, Berlin et al., 2002.
- [Gel63] GELFAND, I.M. und FOMIN, S.V.: *Calculus of Variations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1963.
- [Gil81] GILL, P.E., MURRAY, W. und WRIGHT, M.H.: *Practical Optimization*. Academic Press, London et al., 1981.
- [Gil85] GILL, P.E., MURRAY, W., SAUNDERS, M.A. und WRIGHT, M.H.: *Model Building and Practical Aspects of Nonlinear Programming*. In Schittkowski [Sch85], S. 209–247.
- [Grö01] GRÖTSCHEL, M., KRUMKE, S.O. und RAMBAU, J. (Hg.): *Online Optimization of Large Scale Systems*. Springer, Berlin et al., 2001.
- [Gro98] GROSS, D., HAUGER, W. und SCHNELL, W.: *Technische Mechanik 1*. Springer, Berlin et al., 1998.
- [Har95] HARTL, R.F., SETHI, S.P. und VICKSON, R.G.: *A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems*. *SIAM Review*, Band 37 (2), S. 181–218, 1995.
- [Hau02] HAUGER, W., SCHNELL, W. und GROSS, D.: *Technische Mechanik 3*. Springer, Berlin et al., 2002.
- [Iof79] IOFFE, A.D. und TICHOMIROV, V.M.: *Theorie der Extremalaufgaben*. Deutscher Verlag des Wissens, Berlin, 1979.
- [Kha02] KHALIL, H.K.: *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3. Auflage, 2002.



- [Kle68] KLEINMAN, D.L.: *On an iterative technique for Riccati Equation Computations. IEEE Transactions on Automatic Control*, Band 13 (1), S. 114–115, 1968.
- [Kna09] KNAUER, M.: *Bilevel-Optimalsteuerung mittels hybrider Lösungsmethoden am Beispiel eines deckengeführten Regalbediengerätes in einem Hochregallager*. Dissertation, Universität Bremen, Bremen, 2009.
- [Kuc72] KUCERA, V.: *A contribution to matrix quadratic equations. IEEE Transactions on Automatic Control*, Band 17 (3), S. 344–347, 1972.
- [Kwa79] KWAKERNAAK, H. und SIVAN, R.: *Linear Optimal Control System*. Wiley-Interscience, New York, 1979.
- [Lüd08] LÜDERS, K. und VON OPPEN, G.: *Lehrbuch der Experimentalphysik / Bergmann; Schaefer; Band 1*. de Gruyter, Berlin et al., 12 Auflage, 2008.
- [Lew95] LEWIS, F.L. und SYRMOS, V.L.: *Optimal Control*. John Wiley, New York at al., 2. Auflage, 1995.
- [Loc01] LOCATELLI, A.: *Optimal Control: An Intodruction*. Birkhäuser, 2001.
- [Lun08a] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1*. Springer, Berlin, Heidelberg, 7. Auflage, 2008.
- [Lun08b] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Springer, Berlin, Heidelberg, 5. Auflage, 2008.
- [Mal96] MALANOWSKI, K. und MAURER, H.: *Sensitivity Analysis for Parametric Control Problems with Control-State Constraints. Computational Optimization and Applications*, Band 5 (3), S. 253–283, 1996.
- [Mal97] MALANOWSKI, K., BÜSKENS, C. und MAURER, H.: *Convergence of Approximations to Nonlinear Optimal Control Problems*, Band 195 von *Mathematical Programming with Data Perturbations*, lecture notes in pure and applied mathematics 12, S. 253–284. Marcel Dekker Inc., New York, 1997.
- [Mal98] MALANOWSKI, K. und MAURER, H.: *Sensitivity Analysis for State Constrained Optimal Control Problems. Discrete and Continuous Dynamical Syste*, Band 4 (2), S. 241 – 272, 1998.
- [Man67] MANGASARIAN, O. und FROMOVITZ, S.: *The Fritz John necessary optimality condition in the presence of equality an inequality constraints. Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Band 17, S. 37–47, 1967.



- [Mau76a] MAURER, H.: *On Optimal Control Problem with Bounded State Variables and Control Appearing Linearly*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Band 15 (3), S. 345–362, 1976.
- [Mau76b] MAURER, H.: *Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen*. Habilitationsschrift, Mathematisches Institut der Universität Würzburg, Würzburg, 1976.
- [Mau79] MAURER, H.: *On the Minimum Principle for Optimal Control Problems with State Constraints*. In *Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster*, Band 41, 1979.
- [Mau94a] MAURER, H. und PESCH, H.J.: *Solution Differentiability for Nonlinear Parametric Control Problems*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Band 32 (6), S. 1542–1554, 1994.
- [Mau94b] MAURER, H. und PESCH, H.J.: *Solution Differentiability for Nonlinear Parametric Control Problems with Control-State Constraints*. *Control and Cybernetics*, Band 23, S. 201–227, 1994.
- [Mül77] MÜLLER, P.C.: *Stabilität und Matrizen : Matrizenverfahren in der Stabilitätstheorie linearer dynamischer Systeme*. Springer, Berlin et al., 1977.
- [NAG09a] *NAG Fortran Library Routine Document E04UCF/E04UCA*. 2009.  
<http://www.nag.co.uk/nagware/mt/doc/e04ucf.html>
- [NAG09b] *NAG Library Manual, Mark 22*. 2009.  
[http://www.nag.com/numeric/FL/nagdoc\\_f122/pdf/Frontmatter/manconts.pdf](http://www.nag.com/numeric/FL/nagdoc_f122/pdf/Frontmatter/manconts.pdf)
- [Neu76] NEUSTADT, L.W.: *Optimization: A Theory of Necessary Conditions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- [Noc99] NOCEDAL, J. und WRIGHT, S.J.: *Numerical Optimization*. Springer, New York et al., 1999.
- [Pon67] PONTRYAGIN, L.S., BOLTJANSKIJ, V.G., GAMKRELIDZE, R.V. und MISCENKO, E.F.: *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. R. Oldenbourg, München, Wien, 1967.
- [Pot66] POTTER, J.E.: *Matrix quadratic solutions*. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Band 14, S. 496–501, 1966.
- [Sch80] SCHITTKOWSKI, K.: *Nonlinear Programming Codes*, Band 183 von *Lecture Notes in Economics and Mathematical System*. Springer, Berlin et al., 1980.



- [Sch81a] SCHITTKOWSKI, K.: *The nonlinear programming method of Wilson, Han, and Powell with an augmented Lagrangian type line search function Part 1: Convergence analysis*. *Numerische Mathematik*, Band 38 (1), S. 83–114, 1981.
- [Sch81b] SCHITTKOWSKI, K.: *The nonlinear programming method of Wilson, Han, and Powell with an augmented Lagrangian type line search function Part 2: An efficient implementation with linear least squares subproblems*. *Numerische Mathematik*, Band 38 (1), S. 115–127, 1981.
- [Sch81c] SCHITTKOWSKI, K.: *Organization, Test and Performance of Optimization Programs*, Band 30 von *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer, Berlin et al., 1981.
- [Sch85] SCHITTKOWSKI, K. (Hg.): *Computational Mathematical Programming*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [Sta05] STACH, R.: *Optimale Steuerung und Regelung eines Industrieroboter*. Diplomarbeit, Universität Bremen, Bremen, 2005.
- [Vog08] VOGELSANG, J.: *Optimal Control of long cable crane systems*. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 8, S. 10151–10152, 2008.
- [Vos06] VOSSEN, G.: *Numerische Lösungsmethoden, hinreichende Optimalitätsbedingungen und Sensitivitätsanalyse für optimale bang-bang und singuläre Steuerungen*. Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Münster, Münster, 2006.
- [Wei73] WEIHRICH, G.: *Optimale Regelung linearer deterministischer Prozesse*. Oldenbourg, München et al., 1973.
- [Wes08] Westfalia Holding GmbH & Co. KG: *Werbebrochure Westfalia*. 2008.
- [Wes09] Westfalia Holding GmbH & Co. KG: *Die Aviator<sup>TM</sup> Technologie - Der neue Überflieger*. 2009.  
[www.westfaliaeurope.com/Aviator.153.0.html](http://www.westfaliaeurope.com/Aviator.153.0.html)

