

Stefanie AREND, Oldenburg

Eine semiotische Perspektive vor dem Hintergrund des RBC-Modells auf den Umgang von Studienanfängern mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit

Der Übergang von der Schule zur Hochschule wird für Studienanfänger/innen der Mathematik immer wieder als starker Bruch thematisiert. Ein wesentlicher Aspekt für diesen anspruchsvollen Übergang sind dabei die ganz unterschiedlichen Herangehensweisen an Begriffe wie Stetigkeit. (vgl. Ableitinger 2012) Während Stetigkeit in der Schule primär anhand der Vorstellung von Durchzeichenbarkeit thematisiert wird, steht an der Universität die formale ε - δ -Definition im Mittelpunkt. Diese formale Definition ist dabei insbesondere in Bezug auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und für eine Verallgemeinerung auf topologischen Räumen fundamentaler Bestandteil der höheren Mathematik. Neben dieser innermathematischen Relevanz erscheint der Umgang mit solchen formalen Definitionen aber auch dahingehend wichtig, weil damit das logische Denkvermögen ebenso wie der Umgang und die Anwendung von mathematischer Fachsprache geübt und intensiviert werden.

Forschungsfragen und -design

All diese Überlegungen führen zu der zentralen Forschungsfrage des hier vorgestellten Projektes: Welche epistemischen Schwierigkeiten und Hindernisse zeigen sich bei Studienanfänger/innen im Umgang mit der Definition? Dazu: Wie wird mit der Definition im Sinne von Strategien im Rahmen von Stetigkeitsnachweisen im epistemischen Handlungsprozess umgegangen? Und: Wie tief ist das individuelle Verständnis der Studierenden zur Definition konsolidiert? Neben einem Interesse an der Identifizierung von Schwierigkeiten im Umgang mit der Definition und einer Analyse vom Verständnis geht es dabei aber auch um eine Sensibilisierung für den Anspruch, dem Studienanfänger/innen mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit gegenüberstehen.

Um eine optimale Datengrundlage zu schaffen wird ein etwa zweiwöchiger Brückenkurs zur ε - δ -Definition von Stetigkeit konzipiert, an dem 18 freiwillige Studierende zu Beginn ihres Studiums teilnehmen. Hier erfahren sie eine erste intensive Auseinandersetzung mit der Definition. Im Anschluss daran werden aufgabenbasierte Einzelinterviews durchgeführt, bei denen es darum geht Stetigkeitsnachweise mit der Definition durchzuführen und zu erklären.

Auswertungsmethodik

Der Fokus bei der Analyse der Daten liegt dann auf den studentischen Erklä-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

rungen der selbstständigen Bearbeitungen und den Notizen. Analysegrundlage für den Umgang mit der Definition sind semiotische Prozesskarten (SPK) nach Schreiber (2010). Durch sie wird der Erklärungsprozess als komplexer semiotischer Prozess deutlich, der sich aus Zeichentriaden im Sinne von Peirce zusammensetzt. Dabei besteht ein Zeichen stets aus einem wahrnehmbaren Repräsentamen, dem Interpretanten (üblicherweise als Äquivalent oder Weiterentwicklung vom Repräsentamen) und dem Objekt, für das das Repräsentamen steht (vgl. Nagl 1992, 30).

Zur Erstellung der SKP werden zuvor Analysen mit dem RBC-Modell zur Identifikation epistemischer Handlungen in der Phase der Herausbildung und Festigung des mathematischen Konstruktes durchgeführt. Dabei liegt dem Modell die Annahme zugrunde, dass bestehendes Wissen in neuen Kontexten reorganisiert wird. Zentral sind dann R(ecognizing)-Handlungen, die immer dann auftreten, wenn ein Konstrukt von einem Lernenden in der aktuellen Situation als relevant wiedererkannt wird und ein B(uilding-with), das das Verknüpfen und Zusammensetzen dieser erkannten Konstrukte meint. (vgl. Bikner-Ahsbahr, A., Kidron, I. & Dreyfus, T. 2011)

Für die Analyse vom individuellen Verständnis der Definition wird ein normatives Konsolidierungs-Verständnisdiagramm (KVD) entwickelt:

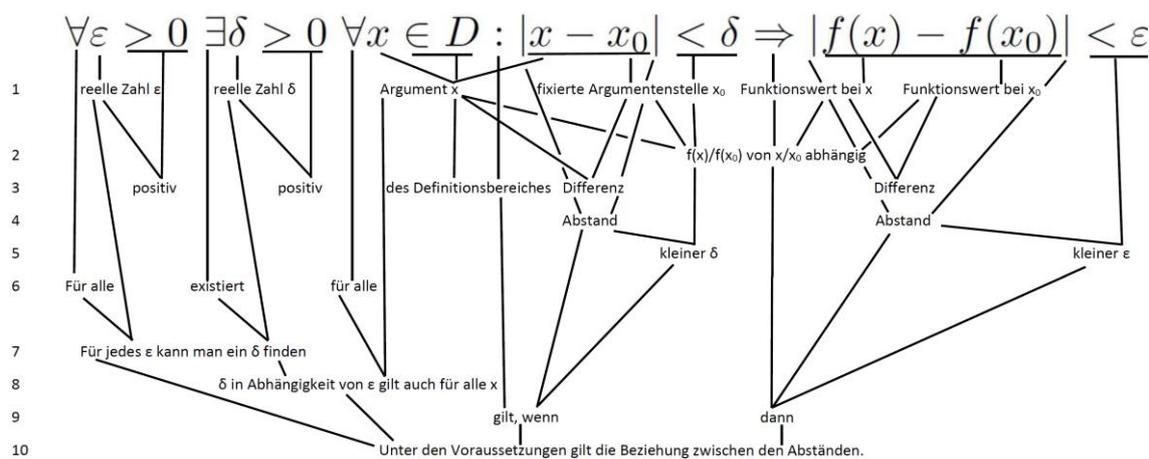


Abbildung 1: normatives Konsolidierungs-Verständnisdiagramm (KVD)

Das KVD basiert dabei auf einer Definition vom Verständnis nach Hiebert et al. (1997, 2): „Knowing a subject means getting inside it and seeing how things work, how things are related to each other, and why they work like they do.“ Damit wird ein Verständnis der Definition so aufgefasst, dass jedes einzelne Zeichen der Definition für sich und in Relation zu den anderen Zeichen in der Definition (in seiner Funktion) durchdrungen werden muss. Um ein solches Verständnis bei den Studienanfängern dann darstellbar und untereinander vergleichbar zu machen, werden für jeden Studierenden als Konglomerat aus mehreren Aufgabenbearbeitungen individuell gefärbte KVDe erstellt. Diese dienen dann dem Herausarbeiten von Verständnistypen.

Fallbeispiel Anna und Bärbel

Im Zuge der Interviews wird von Anna und Bärbel ein Nachweis mittels der ϵ - δ -Definition gefordert, dass die konstante reelle Funktion $f(x)=4$ stetig ist. Eine erste Analysephase mit dem RBC-Modell macht deutlich, dass beide Studenten die zentralen Bestandteile der Definition wiedererkennen und sie in B-Handlungen etwas mit den Zeichen anfangen können. Zusammen mit der semiotischen Analyse ergeben sich dann die folgenden beiden SPK, die hier nur in ihrer Struktur erfasst werden sollen (links: Anna, rechts: Bärbel):

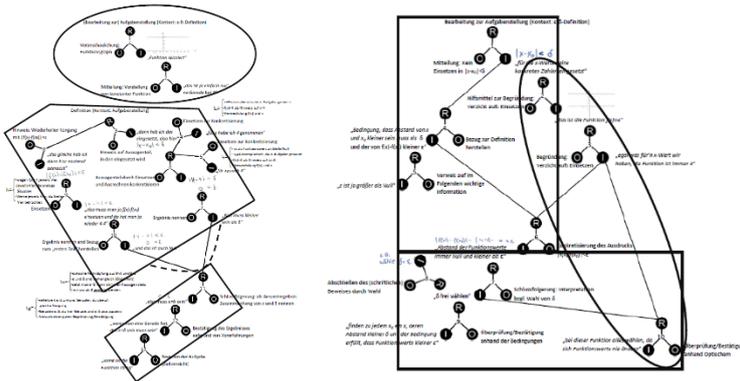


Abbildung 2: Struktur SPK Anna und Bärbel

Die beiden Ovale stehen dabei für den Einsatz von einer Skizze oder Überlegung zu der als besonders (wieder)erkannten Funktion. Bei Anna wird deutlich, dass die Triaden in der SPK völlig unverbunden zum übrigen Erklärungsprozess sind. Aus der Struktur der SPK von Bärbel geht hervor, dass sie immer wieder Verknüpfungen zur Funktion herstellt und nutzt. Damit einher geht auch, dass sich Anna primär auf Einsetzungen in die beiden zentralen Ungleichungen $|x-x_0| < \delta$ und $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$ fokussiert (vgl. Fünfeck in Struktur). Sie setzt dabei aber nicht nur die Funktionswerte als Vier, sondern auch x und x_0 . Mit dem Einbeziehen einer Zeige-Geste kann später vermutet werden, dass Anna mit x_0 den Funktionswert an der Stelle Null assoziiert. Eine Erklärung für das Setzen von $x=4$ ist nicht zu finden. Da sich dann in beiden Beträgen Null ergibt folgert die Studentin vor dem Hintergrund einer erinnerten Wahl für ϵ (anstatt für δ) in einem „lokalen Schluss“, dass $\epsilon=\delta$ sein muss. Dieser Schluss ist in der Struktur mit der gestrichelten Verbindung der beiden Vielecke visualisiert. Bärbel hingegen erinnert sich zwar auch an eine Wahl für δ , ihr Gelingen im neuen Kontext der Aufgabe aber flexible B-Handlungen. Dabei ist sie weniger auf Einsetzungen als das Erfassen von Strukturen fokussiert, sodass sie keine konkreten Zahlenwerte für die Argumente verwendet. Stattdessen schließt sie wegen der Differenz der Funktionswerte als Null auf eine Beliebigkeit der Wahl und setzt „z.B. $\delta=\epsilon$ “. Aus der Struktur der SPK geht hervor, dass das Erfassen der Struktur und der Schluss der Wahl (als die beiden Rechtecke) wesentlich (globaler) miteinander und auch mit der Skizze verbunden sind. Dieser Umgang mit der Definition wird später als typisch herausgestellt und mit den Strategien „Ich suche eine Struktur!“ und „Grafik hilft!“ umschrieben. Die Strategie von Anna hingegen wird mit „Erstmal einsetzen!“ bezeichnet.

Die beiden Ovale stehen dabei für den Einsatz von einer Skizze oder Überlegung zu der als besonders (wieder)erkannten Funktion. Bei Anna wird deutlich, dass die Triaden in der SPK völlig unverbunden zum übrigen Erklärungsprozess sind.

Bezogen auf das individuelle Verständnis der beiden Studierenden entsteht bei Anna vor allem auf der Grundlage der Schwierigkeiten mit Argument und Funktionswert (Ebene 1 und 2 im KVD) und der Tatsache, dass sie ein ε anstatt δ wählt (Ebene 7 und 8) ein eher schwaches KVD. Das KVD von Bärbel hingegen ist wesentlich stärker ausgebaut. Jedoch werden auch bei ihr insgesamt Unsicherheiten mit der logischen Komplexität (Ebene 9 und 10, insbesondere mit der Implikation) der Definition deutlich.

Ergebnisse und Fazit

Bei den Studierenden mit einem tieferen Verständnis dominieren Strategien, bei denen nach Strukturen gesucht wird. Bei denen mit einem schwächeren Verständnis findet sich häufiger die Fokussierung auf Einsetzungen. Potenziell zeigt sich aber gerade darin, dass alle Probanden einen Ansatz haben.

Beim Herausarbeiten der Verständnistypen fällt weiter auf, dass viele der Studienanfänger/innen wie Anna bereits fundamentale Schwierigkeiten auf den ersten Ebenen des KVDs haben. Außerdem zeigt sich, dass keiner der Studierenden die logische Komplexität und damit die Ebene 9 und 10 des KVDs vollständig durchdringt. Das lässt den Schluss zu, dass das Erfassen der logischen Komplexität der Definition mit Implikation und Quantifizierungen als epistemologisches Hindernis im Sinne von Brousseau (1997) identifiziert werden kann. Das geht auch mit einer historischen Analyse der Entwicklung der Definition einher, bei der Weierstraß z. B. erst in den 1850er Jahren die Quantoren für die Definition der Stetigkeit einführte (Grabner 1983). Solche epistemologischen Hindernisse rechtfertigen auch eine lange individuelle Lernentwicklung im Umgang mit der Definition und sensibilisieren für den Anspruch, dem Studienanfänger/innen gegenüberstehen.

Literatur

- Ableitinger, C. (2012). Typische Teilprozess beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33, Issue 1, S.87-111.
- Bikner-Ahsbahr, A., Kidron, I. & Dreyfus, T. (2011). *Epistemisch handeln können – aber wie?* Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactique des mathématiques, 1979-1990*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Grabner, J.V. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly*, Volume 90, Number 3, p. 185-194.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, H., Oliver, A. & Wearne, D. (1997). *Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding*. Heinemann: Portsmouth.
- Nagl, L. (1992). *Charles Sanders Peirce*. Frankfurt am Main: Campus Verlag.
- Schreiber, C. (2010). *Semiotische Prozess-Karten, Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen*. Dissertation. Münster: Waxmann.