Christian RÜTTEN, Stephanie WESKAMP, Essen

Türme bauen – Eine kombinatorische Lernumgebung für Grundschulkinder und Lehramtsstudierende

1. Einleitende Bemerkungen

Ein und dieselbe mathematische Problemstellung kann Lernende verschiedenen Alters sowie unterschiedlicher Lernvoraussetzungen zu ähnlichen Entdeckungen herausfordern. Dazu muss diese im Sinne substanzieller Lernumgebungen reichhaltig in Bezug auf fachlichen Inhalt und mögliche mathematische Aktivitäten sein (vgl. z. B. Wittmann 1998; Krauthausen & Scherer 2014). Eine entsprechende kombinatorische Problemstellung aus dem Bereich des Auf- und Abzählens (vgl. Danckwerts u. a. 1985) liegt der Lernumgebung ‚Türme bauen' zugrunde. Während Probleme des *Aufzählens* auf die Auflistung der zu der Figurenmenge gehörenden Objekte zielen, versuchen Probleme des *Abzählens* die Frage nach der Mächtigkeit der entsprechenden Figurenmenge zu beantworten. Bei der Bearbeitung solcher Probleme sind Strukturierungs- und Zählstrategien von zentraler Bedeutung, wobei diese in der Regel in Wechselwirkung stehen (vgl. Höveler i. Dr.; auch Lockwood 2013). Einerseits beruhen Zählstrategien darauf, dass eine vorhandene Struktur des zu zählenden Bereichs genutzt oder eine geeignete Strukturierung vorgenommen wird (vgl. Müller & Wittmann 1984, S. 219), andererseits bieten sie häufig Hinweise auf effektivere Strukturierungen, die als Grundlage für Begründungen und Beweise der entsprechenden Zählstrategie dienen können. Aufgabenstellungen, die sowohl Aspekte des Auf- als auch des Abzählens umfassen, können unter anderem aufgrund dieses Zusammenspiels von Strukturierungs- und Zählstrategien eine gewisse inhaltliche Reichhaltigkeit besitzen.

2. Lernumgebung ‚Türme bauen'

Die kombinatorische Lernumgebung ‚Türme bauen' bietet sowohl Grundschulkindern als auch Lehramtsstudierenden vielfältige Zugangsweisen und Bearbeitungsmöglichkeiten. In dieser Lernumgebung sollen die jeweiligen Lernenden durch das Zusammenstecken von gelben und blauen 2x2-Legosteinen Türme bauen, wobei niemals blaue Legosteine aufeinandergesetzt werden dürfen (vgl. Rényi 1982, S. 128-130; Cofman 1992; Böttinger 2006). Dabei soll die Anzahl der Türme bestimmter Höhe gesucht und eine entsprechende Zählstrategie generiert werden. Als solche lässt sich eine der Fibonacci-Folge analoge Strategie ausmachen: Die Gesamtheit aller Türme aus $(n + 1)$ Steinen entsteht aus der Summe aller Türme aus n Steinen, auf

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

die jeweils ein gelber Stein gesetzt wird, und aller Türme aus (n – 1) Steinen, auf die zunächst ein gelber und dann ein blauer Stein gesteckt wird.

Diese Lernumgebung wird an der Universität Duisburg-Essen in zwei unabhängigen Kontexten eingesetzt, einerseits im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' andererseits in der Lehrveranstaltung ‚Elementare Kombinatorik'. Im Rahmen der ‚Mathe-Spürnasen' experimentieren Grundschulkinder der Jahrgangsstufe 4 an einem Vormittag an der Universität in Kleingruppen zu einem substanziellen mathematischen Thema. Jedes Thema umfasst eine Einführungseinheit und drei Vertiefungseinheiten mit verschiedenen Kontexten. Die kombinatorische Aufgabe ‚Türme bauen' stellt eine Vertiefung zum Thema ‚Fibonacci-Folge' dar, die in der Einführung im Zusammenhang mit der Kaninchenaufgabe entdeckt wurde. In der Vertiefung wird zunächst jedoch kein Bezug genommen, vielmehr soll der Zusammenhang in der Reflexion entdeckt werden.

Im Rahmen der Fachveranstaltung ‚Elementare Kombinatorik' für Lehramtsstudierende des ersten Semesters im Bachelorstudiengang für das Lehramt an Grundschulen soll die Auseinandersetzung mit den fachlich relevanten Inhalten für den Kombinatorikunterricht der Grundschule erfolgen. In den Übungen arbeiten die Studierenden im Sinne entdeckenden Lernens an kombinatorischen Lernumgebungen. Dabei wählen sie frei Sozialform und Hilfsmittel (z. B. Vorlesungsskript, Taschenrechner etc.). Die Bearbeitung dokumentieren die Studierenden schriftlich für ihr Veranstaltungsportfolio.

3. Strukturierungs- und Zählstrategien

Bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung ‚Türme bauen' können unterschiedliche Strukturierungsstrategien zur Anwendung kommen. Verschiedene Autoren beschreiben auf empirischer Grundlage Strukturierungsstrategien für andere kombinatorische Aufgaben, welche zur Beschreibung des Strukturierungsspektrums beim ‚Türme bauen' adaptiert werden können. So werden unter anderem gestaltorientiert von Grundschulkindern und Studierenden Gegenpaare, Umwendungen oder Treppenmuster genutzt, um einen bzw. weitere Türme zu finden (vgl. z. B. English 1991; Stein 1995, 1999; Hoffmann 2003; Höveler i. Dr.). Dabei fokussieren diese Strukturierungen unter horizontaler Perspektive

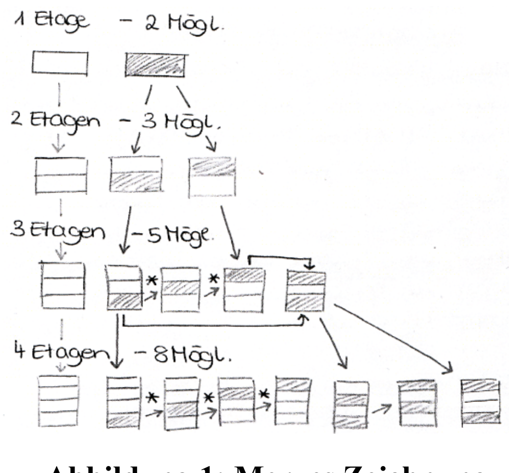

Abbildung 1: Merves Zeichnung

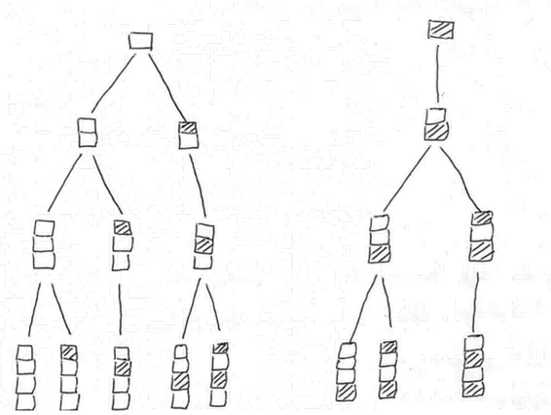

Abbildung 2: Tims Zeichnung

auf das Finden weiterer Türme derselben Höhe. Darüber hinaus finden sich zumindest in den Bearbeitungen der Studierenden auch Strategien unter sowohl horizontaler als auch vertikaler wie unter rein vertikaler Perspektive. Beispielsweise fertigt die Studentin Merve eine instruktive Zeichnung an, in der deutlich wird, dass sich sowohl unter horizontaler Perspektive weitere Türme gleicher Höhe durch Ausnutzen des Treppenmusters als auch unter vertikaler Perspektive Türme der Höhe (n +1) aus Türmen mit n Steinen aufgrund ähnlicher Bauprinzipien finden lassen (Abb. 1). Andere Studierende erstellen zur Dokumentation ihrer Bearbeitung unter rein vertikaler Perspektive Baumdiagramme, bei denen immer ein gelber und wenn möglich ein blauer Stein auf die Türme aus n Steinen gesetzt wird, um Türme der Höhe (n + 1) zu erzeugen (Abb. 2). Bei der Lernumgebung ‚Türme bauen' lassen sich somit Strukturierungen in Bezug auf *Spektrum* und *Perspektive* vornehmen.

Mittels dieser Strukturierungen entdecken die meisten Lernenden – Grundschulkinder wie Studierende – arithmetische Muster, denen sie die Qualität einer Zählstrategie beimessen. Dabei muss die vermutete Zählstrategie nicht immer korrekt sein. So erkennt der Viertklässler Florian bei den Türmen mit bis zu vier Steinen für die Anzahl der Türme T_n das Muster $T_n = T_{n-1} + n - 1$ ($n <$ 5), welches von ihm wie folgt beschrieben wird: *„Weil das bei der zweiten Etage einer mehr ist als bei der ersten. Bei der dritten sind zwei mehr und bei der vierten sind drei mehr und bei der fünften sind dann vier mehr.*" Aufgrund dieses Musters schließt Florian, dass die Anzahl der Türme aus fünf Steinen 12 sei. Nina dagegen vermutet, dass es 18 Türme mit fünf Etagen gibt. *„Ich habe einfach so gerechnet, wie Mira das gerechnet hat letztes Mal und das zusammengezogen.*" Darin zeigt sich am konkreten Beispiel die Vermutung, dass die Summe $T_1 + T_2 + T_3 +…+ T_n$ die Anzahl der Türme der Höhe (n + 1) liefern könnte. Sarah entdeckt in den Anzahlen der Türme das Muster der Fibonacci-Folge und nutzt es, um die Anzahl der Türme der Höhe 5 zu bestimmen: *„Weil zwei plus drei sind fünf und drei plus fünf sind acht. [...] Dann sind fünf plus acht, sind dann wieder dreizehn."* Diese Hypothesen zu Zählstrategien werden bei den ‚Mathe-Spürnasen' genutzt, um das Beweis- und Begründungsbedürfnis der Lernenden zu wecken, indem sie aufgefordert werden, durch eine erneute Strukturierung die vermutete Zählstrategie zu begründen. Die Studierenden werden durch die Aufgabenstellung direkt zur Begründung gefundener Zählstrategien aufgefordert. Dabei stellt die ggf. für die Begründung notwendige

Restrukturierung sowohl für die Grundschulkinder als auch für die Studierenden eine Herausforderung dar.

4. Fazit und Perspektiven

Es zeigt sich, dass ein und dieselbe Problemstellung unterschiedlichen Lerngruppen vielfältige Bearbeitungsmöglichkeiten bieten kann. Aufgrund des Zusammenspiels von Auf- und Abzählproblemen bietet die Lernumgebung ‚Türme bauen' eine reichhaltige Auseinandersetzung mit dem entsprechenden kombinatorischen Inhalt. Darüber hinaus eröffnet sie vielfältige Strukturierungsmöglichkeiten, die zur Hypothesenbildung bezüglich Zählstrategien anregen. Ein fruchtbarer Einsatz dieser Lernumgebung ist auch in anderen Klassenstufen denkbar und eine Erprobung im zweiten Schuljahr im Rahmen von Bachelorarbeiten geplant.

Literatur

Böttinger, C. (2006). Aufgaben für begabte Schüler. Modelle für die Fibonacci-Zahlen. *Grundschulunterricht*, *53*(2), 44-46.

Cofman, J. (1992). Verallgemeinerung der Fibonacci-Folge, *Praxis der Mathematik*, *34*(4), 157-160.

Danckwerts, R., Vogel, D. & Bovermann, K. (1985). *Elementare Methoden der Kombinatorik. Abzählen - Aufzählen - Optimieren*. Wiesbaden: Teubner

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(5), 451-474.

Höveler, K. (im Druck). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern*. Wiesbaden: Springer.

Hoffmann, A. (2003). *Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit*. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Krauthausen, G & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 251–265.

Rényi, A. (1982). *Tagebuch über die Informationstheorie*. Basel: Birkhäuser.

Stein, M. (1995). Elementare Bausteine von Problemlöseprozessen: Gestaltorientierte Verhaltensweisen. *mathematica didactica*, *18*(2), 59-84.

Stein, M. (1999). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *20*(1), 3-27.

Müller, G. & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele* (3. neubearb. Aufl). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *16*(3), 329-342.