Christina ROECKERATH, Martin FRANK, Maren HATTEBUHR,
Aachen

Wie funktioniert eigentlich GPS und was hat das mit Mathe zu tun? – Projekttag des EducationLab CAMMP der RWTH Aachen

Im Navi, im Smartphone, beim Geocaching - GPS hat längst Einzug in unser alltägliches Leben gehalten. Aber wie funktioniert eigentlich GPS und was hat das mit Mathematik zu tun? Dieser Fragestellung wird in einem Schülerworkshop nachgegangen, der am EducationLab CAMMP der RWTH Aachen angeboten wird. CAMMP steht für Computational and Mathematical Modelling Program und ist ein Schülerlabor für mathematische Modellierung und Simulation an der RWTH Aachen. Weitere Informationen zu CAMMP finden sich unter www.cammp.rwth-aachen.de.

GPS bedeutet Global Positioning System. Es ist ein Verfahren zur Bestimmung der Standorts eines GPS-Geräts anhand von empfangenen Satellitendaten. Die Satelliten umkreisen die Erde auf Umlaufbahnen und senden dazu fortwährend Sendezeitsignale und Umlaufbahndaten. Der GPS-Workshop wird mit Mathematikkursen der Oberstufe durchgeführt, wobei das Material so konzipiert ist, dass die Schüler/innen weitgehend eigenständig und aktiv das Thema bearbeiten können. Sie verwenden dabei echte Daten, die mit einem GPS-Empfänger vor dem Schülerlabor aufgenommen wurden. Es wird ein als Lückentext vorbereiteter Matlab-Code eingesetzt, in dem die Schüler/innen die entscheidenden Schritte der Modellbildung selbst implementieren. Das Lösen der resultierenden nichtlinearen Gleichungssysteme wird von Matlab übernommen. Anhand von Google maps können die Schüler/innen die erzielten Ergebnisse überprüfen.

Zu Beginn wird die Form der Erde als Kugel angenommen und es werden die Daten von nur drei Satelliten verwendet. Anhand der empfangenen Umlaufbahndaten und der Sendezeit t_S werden dann die Koordinaten (x_S, y_S, z_S) der empfangenen Satelliten bestimmt. Die dazu benötigte Funktion wird im Matlab-Code vorgegeben, sodass die Schüler/innen diese zur Berechnung lediglich verwenden müssen.

Satellitensignale werden mit Lichtgeschwindigkeit übertragen. Anhand der Empfangszeit t_E kann die Entfernung eines Satelliten zum Empfänger, welche auch als Pseudoentfernung bezeichnet wird, durch $d_s = (t_E - t_S)\cdot c$ bestimmt werden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Zur Bestimmung der Empfängerkoordinaten (x_E, y_E, z_E) kann mit dem Satz des Pythagoras oder unter Verwendung von Vektorrechnung das nichtlineare Gleichungssystem

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(1)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(1)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(1)}\right)^2} = d_{S(1)}$$

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(2)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(2)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(2)}\right)^2} = d_{S(2)}$$

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(3)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(3)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(3)}\right)^2} = d_{S(3)}$$

für alle drei Satelliten aufgestellt werden. Zur Lösung verwenden die Schüler/innen die Matlab-Routine *fsolve*, welche die Lösung anhand des Newton-Verfahrens ermittelt. Um die ermittelte Empfängerposition mit Hilfe von Google maps interpretieren zu können, muss sie in geographische Koordinaten umgewandelt werden. Unter Verwendung des Tangens und des Satzes von Pythagoras erhält man

$$\phi = \arctan \frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}}, \qquad \lambda = \arctan2 \frac{y_E}{x_E} \quad \text{und} \quad h = \sqrt{x_E^2 + y_E^2 + z_E^2} - r,$$

wobei ϕ den Längen- und λ den Breitengrad, sowie h die Höhe beschreiben.

Abbildung 1: Nach dem ersten Durchlauf des Modellierungskreislaufs ist die berechnete Empfängerposition mehr als 300 km von der tatsächlichen Empfängerposition entfernt.

Wie in Abbildung 1 dargestellt, ergibt die Berechnung der geographischen Koordinaten anhand der in Aachen aufgenommenen Satellitendaten eine Empfängerposition in der Nähe von Fulda, knapp 350 km entfernt. Es ist demnach notwendig, den Modellierungskreislauf erneut zu durchschreiten. Dazu können verschiedene Verbesserungen bei den Modellannahmen vorgenommen werden.

Anhand der Relativitätstheorie lässt sich erklären, dass die Zeit im Satelliten schneller vergeht als die Zeit auf der Erde. Dieses Phänomen führt zu einem Sendezeitfehler Δt_s, welcher sich mit einem quadratischen Fehlermodell berechnen lässt. Dieses wurde für die Schüler/innen bereits im Matlab-Code implementiert. Zur Verbesserung des Modells müssen sie die Fehlerkorrektur $t_S - \Delta t_s$ bei der Berechnung der Satellitenkoordinaten und der Pseudoentfernungen berücksichtigen.

Ein weiteres Phänomen, welches im ersten Modell noch nicht berücksichtigt wurde, ist die Tatsache, dass die Uhr im Empfänger nicht absolut genau geht und somit ein Empfängerzeitfehler Δt_E vorliegt. Die Fehlerkorrektur $t_E - \Delta t_E$ ergibt die korrigierte Pseudoentfernung $(t_E - \Delta t_E - t_S) \cdot c = d_s - c\,\Delta t_E$. Da mit Δt_E eine weitere Unbekannte vorliegt, werden vier Gleichungen bei der Bestimmung der Empfängerkoordinaten benötigt. Dazu müssen die Daten eines weiteren Satelliten hinzugenommen werden, sodass man das nichtlineare Gleichungssystem

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(1)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(1)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(1)}\right)^2} = d_{S(1)} - c\,\Delta t_E$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(4)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(4)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(4)}\right)^2} = d_{S(4)} - c\,\Delta t_E$$

erhält. Zur Lösung des Gleichungssystems setzen die Schüler erneut Matlab ein und erhalten auf diese Weise den Empfängerzeitfehler Δt_E und die Empfängerkoordinaten (x_E, y_E, z_E).

Da ein GPS Empfänger zwischen 8 und 12 Satellitensignale gleichzeitig empfängt, besteht weiter die Möglichkeit, die Daten aller Satelliten zu verwenden, wodurch weitere Gleichungen hinzukommen.

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(1)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(1)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(1)}\right)^2} = d_{S(1)}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(n)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(n)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(n)}\right)^2} = d_{S(n)}$$

Wir erhalten ein überbestimmtes Gleichungssystem und somit ein nichtlineares Ausgleichsproblem, welches mit der kleinsten Fehlerquadratmethode von Matlab gelöst werden kann.

Die Form der Erde wurde im ersten Modell als Kugel angenommen. Tatsächlich hat sie allerdings eher die Form eines Ellipsoiden, den man sich bildlich als an den Polen zusammengedrückte Mandarine vorstellen kann.

Der Referenzellipsoid WGS84 eignet sich als besseres Modell für die Form der Erde. Die geographischen Koordinaten müssen demnach auf dem Referenzellipsoiden bestimmt werden. Die entsprechenden Gleichungen werden von den Schüler/innen im Internet recherchiert und anschließende mit Matlab gelöst.

In Abbildung 2 (links) ist dargestellt, wie sich die einzelnen Modellverbesserungen auf die Berechnung der Empfängerposition auswirken. Es wird deutlich, dass jede einzelne Modellverbesserung noch nicht zu einem zufriedenstellenden Ergebnis führt. Werden aber alle Modellverbesserungen gemeinsam vorgenommen, so erhält man einen bis auf wenige Meter korrekt berechneten Empfängerstandpunkt, wie in Abbildung 2 (rechts) dargestellt.

Abbildung 2: links: Auswirkungen der verschiedenen Modellverbesserungen: (0) keine Ver-besserung, (1) Satellitenuhr, (2) Empfängeruhr, (3) Form der Erde, (4) alle Satelliten; rechts: Alle Modellverbesserungen zusammen liefern eine gute Näherung für die Empfängerkoordi-naten.

Im Rahmen dieses Workshops durchschreiten Schüler/innen den Modellierungskreislauf mehrfach und können ihr Ergebnis stets direkt überprüfen. Sie erleben so, wie sich das Ergebnis durch schrittweise Verbesserung der Modellannahmen ebenso schrittweise verbessert.

Literatur

Borre, K., & Strang, G. (2012). *Algorithms for global positioning*. Wellesley-Cambridge Press.

Frank, M. & Roeckerath, C. (2012). Gemeinsam mit Profis reale Probleme lösen. Mathematik Lehren, Heft 174*, S. 59 - 61.*