Michael MARXER, Freiburg

Funktionale Zusammenhänge auf den Punkt gebracht. Oder: Warum sich Funktionen nicht gerne „verschieben" lassen

Beim Thema „Funktionen" fokussiert der Mathematikunterricht häufig auf die Betrachtung von Graphen und deren Charakteristika unter Verwendung algebraischer Werkzeuge. Schülerformulierungen wie „Ich verschiebe die Funktion" lassen erkennen, dass ein problematisches Verständnis von Funktionen im Sinne graphischer Objekte vorliegt. Der Beitrag stellt Überlegungen an, wie die Formalisierung der Abhängigkeit von Größen stärker ins Blickfeld gerückt werden kann und illustriert dies an Aufgabenformaten

1. Vorstellungsumbrüche bei der Beschreibung von Funktionen: Von der eindimensionalen zur zweidimensionalen Darstellung

Die Betrachtung funktionaler Zusammenhänge stellt für Lernende einen häufig nicht bewusst erlebten Vorstellungsumbruch dar. In der Arithmetik liegt der Schwerpunkt auf den Operationen, dagegen geht es beim Thema Funktionen um die Betrachtung von *Beziehungen* zwischen Größen. Entsprechend unterscheiden sich die Formalisierungen: Arithmetische Operationen können beispielsweise auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden. Funktionale Beziehungen dagegen erfordern eine Tabelle, ein Pfeildiagramm oder eben die Darstellung mit zwei Zahlenstrahlen, also beispielsweise in einem Koordinatensystem.

Am Anfang der systematischen Behandlung von Funktionen im Unterricht ist es hilfreich, dieser graphischen Formalisierung von Beziehungen größere Aufmerksamkeit zu schenken. Entscheidend ist das Verständnis, dass ein Punkt im Koordinatensystem für einen Zusammenhang zwischen zwei Größen steht. Die weitergehende Erkenntnis besteht darin, dass sich bei Betrachtung einer größeren Zahl von Beziehungen resp. Punkten (manchmal) eine charakteristische Anordnung ergibt, deren geometrische Form sich über Begriffe (Gerade, Parabel, Hyperbel) beschreiben lässt. Dabei muss erstens deutlich werden, dass es sich zunächst um diskrete Werte handelt (und Zwischenpunkte nur vermutet werden können), zweitens, dass eine begrifflich beschreibbare Anordnung der Punkte nicht zwangsläufig gegeben ist.

In der Schule wird dieser Beschäftigung mit diskreten Wertepaaren häufig nicht lange Aufmerksamkeit geschenkt. Dies bewirkt, dass Funktionen – zumindest von den Schülern – begrifflich häufig mit der Form ihres Graphen gleichgesetzt werden: „Die Funktion ist eine Hyperbel", „Die Funkti-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

onsgleichung beschreibt eine um 3 nach links verschobene Parabel“ sind typische Aussagen. Graphen werden dabei als geometrische Objekte interpretiert, die nach erlernten Regeln gestreckt, gestaucht, verschoben und „auf den Kopf gestellt“ werden können. Der um 90° gedrehte Graph einer quadratischen Funktion stellt dann konsequenterweise für Schüler kein Problem dar.

Wenn die Sichtweise verloren geht, dass ein Funktionsgraph aus einer Punktmenge besteht, erschwert dies das Erkennen der jeweils beschriebenen funktionalen Beziehung: Der Graph-als-Bild-Fehler sei hier als ein weitverbreitetes und vielfach untersuchtes Fehlermuster genannt.

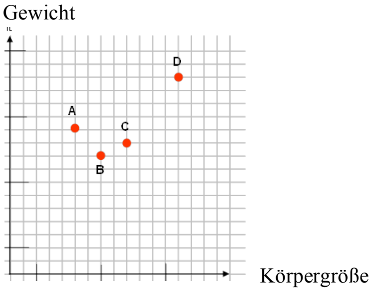
2. Diskrete Zuordnungen

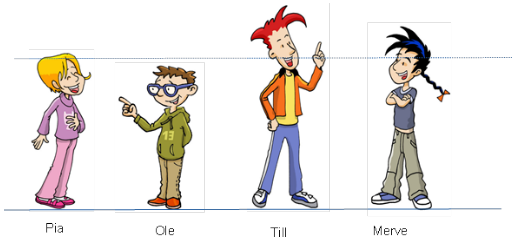
„Schüler ... müssen sich ... mit Phänomenen beschäftigen können, denen ein funktionaler Zusammenhang innewohnt. Erst dann beginnt die mathematische Beschreibung und Analyse“ (Büchter 2008). Beim Thema Funktionen arbeiten die meisten Schulbücher nur während einer kurzen Einführungsphase mit Aufgabenformaten, bei denen Graphen in nichtskalierten zweidimensionalen Achsenkreuzen interpretiert oder gezeichnet werden müssen. Danach wird sehr schnell zu Aufgabenstellungen übergegangen, die sich schwerpunktmäßig dem Wechsel zwischen den Darstellungsformen Graph und Funktionsgleichung widmen. Überwiegend beschränken sich die Beispiele auf Zusammenhänge, die sich als „ordentliche“, d.h. proportionale, lineare, quadratische etc. Funktion beschreiben lassen („Die Bevölkerung Chinas wächst exponentiell“, „Der Zusammenhang ist antiproportional“). Die Graphen lassen sich meist als durchgezogene Linie mit einer charakteristischen Form zeichnen und erlauben in der Idealisierung dieser Beziehung das Aufstellen einer Funktionsgleichung.

Wünschenswert vor allem in der Einführungsphase – aber auch immer wieder „zwischendurch“ – sind Aufgabenformate, die die Beziehungen zwischen zwei Größen buchstäblich „auf den Punkt“ bringen. Die nachstehende Aufgabe wurde angeregt durch die zahlreichen Beispiele von Malcolm Swan (1985). Typisch für solche Aufgabenformate ist, dass als Lösung eine Punktmenge entsteht, deren einzelne Punkte sich gerade *nicht* zu einer charakteristischen Anordnung formieren.

(a) Ordne die Namen den Buchstaben zu.

(b) Zeichne drei Personen E, F und G ein so dass gilt: F ist größer als E, G ist schwerer als F, E ist größer als G





Mathewerkstatt 5, Cornelsen-Verlag

Hier wird erkannt und geübt, wie eine Zuordnung durch einen Punkt dargestellt werden kann. Das Denken „in zwei Richtungen" und das Gespür für die Verwendung von Skalierungen wird angeregt – und zwar gerade *weil* hier noch keine Werte an den Achsen notiert sind, sondern qualitativ in Kategorien wie größer als/ kleiner als gedacht wird.

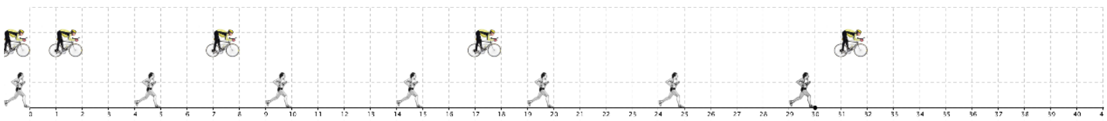
Die Gesamtzahl der Punkte kann nicht als geometrisches Objekt („Parabel", „Gerade") verstanden werden. Vielmehr führt die Aufgabenstellung auf den Kern dessen, was am Thema Funktionen für die Lernenden neu ist: Die graphische Formalisierung einer Beziehung durch einen Punkt.

3. Von der diskreten zur kontinuierlichen Sichtweise

Sobald der einzelne Punkt als Möglichkeit zur Darstellung eines Zusammenhangs verstanden wurde können Punktmengen „als Ganzes" betrachtet werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Untersuchung, ob Zwischenwerte möglich oder sogar zwingend erforderlich sind: entlang einer Geraden, auf einer typischen Kurve etc. Das Repertoire an Funktionen, die hierbei namentlich erfasst und dann auch algebraisch formalisiert werden können, erweitert sich von Klassenstufe zu Klassenstufe.

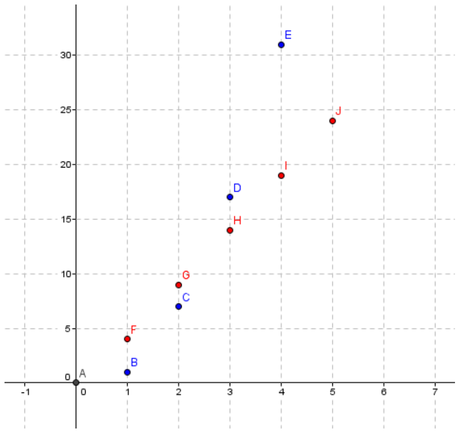
Hierzu ein Aufgabenbeispiel für die Klassenstufe 9:

Vergleich eines Radfahrers und eines Sprinters in der Phase nach dem Start



Mathewerkstatt 9, Cornelsen-Verlag (in Vorbereitung)

Eine Kamera hat jede Sekunde ein Bild geschossen. Man sieht, wer nach 1 Sekunde, nach 2 Sekunden, usw. an welcher Stelle war. Untersuche für beide die Abhängigkeit der zurückgelegten Strecke y von der Zeit x



Lernende machen hier die entscheidende Erfahrung: Der Vorgang ist stetig, die Darstellung ist (noch) diskret. Naheliegend ist, plausible Zwischenwerte (Zwischenpunkte) zu finden. Offensichtlich müssen diese jedoch beim Radfahrer nach einer anderen Regel angenommen werden als beim Sprinter. Eine geradlinige Verbindung der Punkte würde beim Radfahrer die Realität offensichtlich nicht widerspiegeln. Unumstritten ist aber, dass Zwischenpunkte nicht nur zulässig, sondern sogar zwingend erforderlich sind. Hier werden über Alltagserfahrung der Sinn und die Grenzen einer Modellbildung erfahren und der Einsatz dazu passender mathematischer Hilfsmittel erlernt.

Funktionen dienen vor allem dem Aufdecken von Zusammenhängen (Vollrath 2007). Ist die Regelmäßigkeit erst entdeckt, dann erschließt sich, dass zwar zunächst nur ausgewählte Wertepaare verwendet werden, aber dann ein in einer Gleichung beschreibbarer funktionaler Zusammenhang auch für die Zwischenwerte angenommen werden kann.

Variationen der Parameter einer Funktionsgleichung führen schließlich zur weiteren Vertiefung. Die Formulierung „Stauchung der Parabel“ weicht der funktionalen Sicht „Jeder Funktionswert fällt bei entsprechendem Argument kleiner aus“.

Literatur

Vollrath, Hans-Joachim : *Funktionale Zusammenhänge.* In: Linneweber-Lammerskitten, Helmut (Hrsg.) 2014: Fachdidaktik Mathematik. Kallmeyer-Verlag

Leuders, T.; Leuders, J., Jaschke, T. (i. Vorb.): *Bewegungen im Sport*. In: Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg): *Mathewerkstatt 9*. Berlin: Cornelsen

Büchter, Andreas (2008): *Funktionale Zusammenhänge erkunden*. In: Mathematik lehren 148, 2008, S. 4 - 10

Wörn, Claudia (2008): *Funktionen handelnd erleben*. In: Wagner, A. (Hrsg.): Offene Lernangebote und Lernarrangements in der Hauptschule.

Vollrath, Hans-Joachim & Weigand, Hans-Georg (2007): *Algebra in der Sekundarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag

Swan, Malcolm (1985): *The language of functions and graphs. An examination module for secondary schools.* Manchester, Nottingham: Joint Matriculation Board & Shell Centre for Mathematical Education