

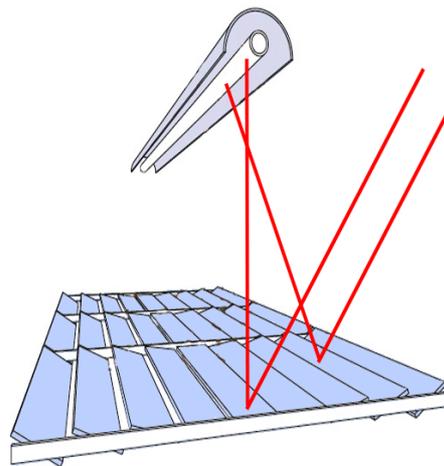
Maren HATTEBUHR, Martin FRANK, Christina ROECKERATH,  
Aachen

## Optimierung der Spiegel in einem Solarkraftwerk Projekttag des EducationLabs CAMMP der RWTH Aachen

Der Energiesektor befindet sich momentan in einem großen Umbruch. Der Ausstieg aus der Kernenergie und die Forderung nach umweltschonenden Energiequellen rücken u.a. solarthermische Kraftwerke, die besonders gut in sonnenreichen Ländern eingesetzt werden können, in den Vordergrund. Diese sind somit Teil aktueller Forschung im Bereich der Energiegewinnung.

Beim Bau solcher Kraftwerke möchte man möglichst wirtschaftlich sein, d.h. man möchte die vorhandene Sonneneinstrahlung optimal ausnutzen. Lösungsansätze für diese Problematik können Schüler/innen im EducationLab CAMMP der RWTH Aachen mittels mathematischer Modellierung erforschen. CAMMP steht für Computational and Mathematical Modelling Program und ist ein Schülerlabor für mathematische Modellierung und Simulation an der RWTH Aachen. Weitere Informationen zu CAMMP finden sich unter [www.cammp.rwth-aachen.de](http://www.cammp.rwth-aachen.de).

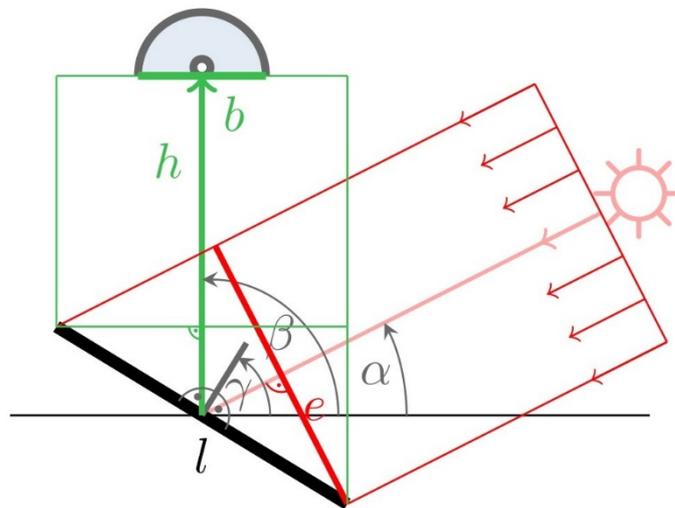
Betrachtet werden solarthermische Kraftwerke, die mittels langer ebener Spiegel, sogenannter Fresnelspiegel, das Sonnenlicht auf ein Absorberrohr konzentrieren und somit das im Rohr enthaltene Wasser erhitzen. Auf diese Weise entsteht Wasserdampf, welcher eine Turbine zur Stromerzeugung antreibt. Ein Sekundärreflektor, welcher um das Absorberrohr herum angebracht ist, sorgt dafür, dass auch Sonnenstrahlen, die unmittelbar am Rohr vorbeigehen, auf das Rohr reflektiert werden (vgl. Abb. 2: Modell eines Spiegels).



**Abb. 1:** links: Solarfeld eines Fresnelsolarkraftwerks (Quelle: Novatec Solar GmbH);  
rechts: Modell eines Solarfeldes eines Fresnelsolarkraftwerks

Im Workshop erarbeiten Mathematikurse der Mittel- und Oberstufe einen Tag lang weitgehend eigenständig ein mathematisches Modell zur Energiegewinnung anhand eines Fresnelkraftwerks. Dazu verwenden sie echte Daten, welche von einem Solarkraftwerk in Kalifornien stammen und von der Firma Novatec Solar GmbH zur Verfügung gestellt wurden. Weiter erhalten sie einen vorbereiteten Matlab-Code, in dem sie die entscheidenden Modellierungsschritte selbst ergänzen müssen. Der Matlab-Code erlaubt zusätzlich eine graphische Interpretation der Ergebnisse durch eine Simulation des modellierten Kraftwerks. So erhalten die Schüler/innen eine direkte Rückmeldung bezüglich ihrer Ergebnisse und werden zum wiederholten Durchlaufen des Modellierungskreislaufs angeregt.

Im Rahmen des Workshops wird zunächst der Frage nachgegangen, wie ein Spiegel in Abhängigkeit vom aktuellen Sonnenstand ausgerichtet werden muss, damit ein Sonnenstrahl, der am Spiegelmittelpunkt reflektiert wird, das Absorberrohr trifft. Dazu werden die folgenden Modellannahmen vorgenommen (vgl. Abb. 2): Alle Betrachtungen sollen im 2-Dimensionalen stattfinden, wobei eine Übertragung ins 3-Dimensionale in einer Erweiterung möglich ist. Es wird weiter angenommen, dass alle Sonnenstrahlen parallel einfallen und alle Strahlen, die von unten auf den Sekundärreflektor fallen, auf das Absorberrohr reflektiert werden. Außerdem wird zunächst nur einen Spiegel betrachtet, dessen Spiegelmittelpunkt direkt unter dem Rohr steht.



**Abb. 2:** Modell eines Spiegels: in rot: einfallendes Sonnenband; in grün: reflektiertes Sonnenband; Sonneneinfallswinkel  $\alpha$ ; Reflexionswinkel  $\beta$ ; Normalenwinkel  $\gamma$ ; Sekundärreflektorbreite  $b$ ; Sonnenbandbreite  $e$ ; Absorberrohrhöhe  $h$ ; Spiegelbreite  $l$

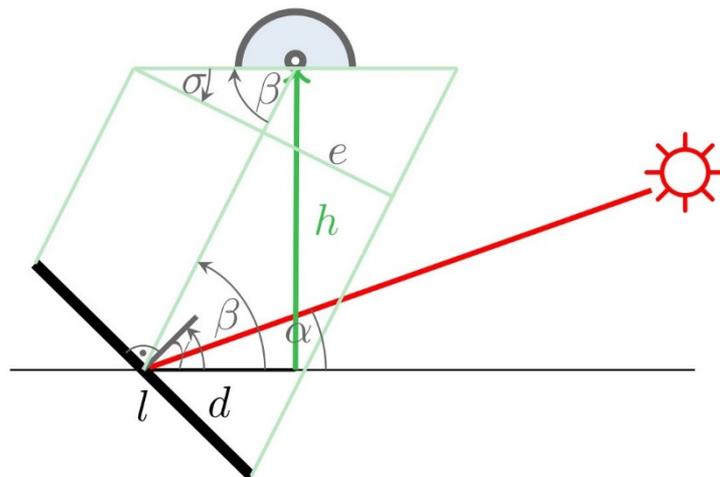
Zur mathematischen Beschreibung wird der Sonneneinfallswinkel mit  $\alpha$  bezeichnet. Weiter wird der Spiegelneigungswinkel zwischen der Horizontalen und der Spiegelnormalen im Spiegelmittelpunkt mit  $\gamma$  sowie der Win-

kel zwischen dem reflektierten Sonnenstrahl und der Horizontalen mit  $\beta$  bezeichnet. Für den einfachen Fall, dass der Spiegel direkt unter dem Absorberrohr steht, ist  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Gesucht ist also der Neigungswinkel  $\gamma$  in Abhängigkeit vom Sonneneinfallswinkel  $\alpha$ . Aus der Physik ist bekannt, dass der Einfallswinkel und der Ausfallswinkel gleich groß sind. Unter Ausnutzung einfacher Winkelbeziehungen erhält man  $\beta - \gamma = \gamma - \alpha$  und somit  $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Nachdem der Spiegel richtig ausgerichtet ist, möchte man wissen, welche Leistung am Absorberrohr anliegt. Dazu ist zunächst die Leistung  $L_S$  pro Meter, die am Spiegel anliegt, zu modellieren. Anschließend ist der Anteil  $a$  des reflektierten Strahlenpakets, das den Sekundärreflektor trifft, zu ermitteln, um abschließend aus diesen beiden Ergebnissen die am Absorberrohr anliegende Leistung  $L_R$  zu bestimmen.

Es sind nun die Breite  $l$  des Spiegels und die Leistung  $L$  der Sonnenstrahlung pro Meter gegeben. Durch Anwenden von Winkelsätzen kann die Sonnenbandbreite  $e$  durch  $e = l \cdot \cos(\gamma - \alpha)$  ermittelt werden. Daraus erhalten wir für die am Spiegel anliegende Leistung  $L_S = e \cdot L$ .

Auch das reflektierte Strahlenbündel hat die Breite  $e$  und damit die Leistung  $L_S$ . Da die Strahlen auf der gesamten Breite  $b$  des Sekundärreflektors senkrecht einfallen, kann der Anteil  $a$  des reflektierten Strahlenbündels, das den Sekundärreflektor und damit das Absorberrohr trifft, durch  $a = \min\{1, b/e\}$  beschrieben werden. Die am Absorberrohr ankommende Leistung  $L_R$  lässt sich nun mit  $L_R = a \cdot L_S$  berechnen.



**Abb. 3:** Modell eines um  $d$  verschobenen Spiegels; in rot: einfallender Sonnenstrahl; in grün: reflektiertes Sonnenband; Sonneneinfallswinkel  $\alpha$ ; Reflexionswinkel  $\beta$ ; Normalenwinkel  $\gamma$ ; Spiegelverschiebung  $d$ ; Sonnenbandbreite  $e$ ; Absorberrohrhöhe  $h$ ; Spiegelbreite  $l$

Im nächsten Schritt soll ein seitlich verschobener Spiegel modelliert werden (vgl. Abb. 3). Die Verschiebung des Spiegelmittelpunktes sei mit  $d$  und die Höhe des Absorberrohrs mit  $h$  bezeichnet. Unter Verwendung des Tangens erhält man

$$\beta = \begin{cases} \arctan \frac{h}{d}, & d < 0 \\ \pi/2, & d = 0. \\ \pi - \arctan \frac{h}{d}, & d > 0 \end{cases}$$

Mit  $\beta$  lässt sich der Neigungswinkel  $\gamma$  auch im Falle des verschobenen Spiegels mit  $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  bestimmen.

Weiter ist auch für den verschobenen Spiegel die am Absorberrohr ankommende Leistung in drei Schritten zu bestimmen: Die Berechnung der auf dem Spiegel einfallenden Sonnenleistung verändert sich nicht. Es gilt  $L_S = e \cdot L$  mit  $e = l \cdot \cos(\gamma - \alpha)$ . Zur Berechnung des Anteils  $a$  des reflektierten Strahlenbündels, welches den Sekundärreflektor trifft, gilt  $a = \min\{1, b \cdot \cos \sigma / e\}$ , wobei  $\sigma = |\beta - \pi/2|$ . Die am Absorberrohr ankommende Leistung  $L_R$  lässt sich nun wie zuvor mit  $L_R = a \cdot L_S$  bestimmen.

Die bisher vorgestellten Inhalte wurden mehrfach im Rahmen eines Projekttages, der etwa vier reine Arbeitsstunden umfasst, von Schulklassen ab der neunten Jahrgangsstufe erfolgreich bearbeitet. Eine Erweiterung des Moduls ist durch verschiedene Ergänzungen möglich. Beispielsweise kann das Modell um mehrere Spiegel erweitert werden oder es können Reflexionsstörungen durch Wind oder Sand einbezogen werden. Interessant ist auch eine Modellierung der pro Tag oder pro Jahr eingefangenen Energie, sowie der Entwicklung von Optimierungsstrategien auf Basis des Modells.

## Literatur

- Frank, M. & Roeckerath, C. (2012). Gemeinsam mit Profis reale Probleme lösen. In: *Mathematik Lehren*, Heft 174, S. 59 - 61.
- Mertins, M. (2009): Technische und wirtschaftliche Analyse von horizontalen Fresnel-Kollektoren, Universität Karlsruhe (TH). Dissertation.
- Roeckerath, C. (2012): Mathematische Modellierung der Spiegel eines solarthermischen Kraftwerks im Rahmen einer Modellierungswoche und einer Projektwoche in der Sekundarstufe II. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Zweiten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen.