

Kay ACHMETLI, Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

## **Förderung von Grundvorstellungen und der Flexibilität mithilfe multipler Lösungen**

Die Behandlung von multiplen Lösungen im Unterricht gilt als Qualitätskriterium für einen kognitiv aktivierenden Unterricht und ist schon lange ein wichtiges Thema in den didaktischen Diskussionen über vernetzte, gehaltvolle und nachhaltige Lernprozesse (Neubrand, 2006). Im DFG-Projekt MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht) wird die Entwicklung von multiplen Lösungen bei der Bearbeitung von realitätsbezogenen Aufgaben untersucht. Theoretisch können multiple Ergebnisse, welche in der ersten Projektphase untersucht wurden, und multiple mathematische Lösungswege unterschieden werden (Schukajlow & Krug, 2014). Innerhalb des Inhaltsbereichs „Lineare Funktionen“ werden in der zweiten Projektphase zwei mathematische Lösungswege fokussiert, welche zwei wesentliche Aspekte im Umgang mit Funktionen (Vollrath, 1989; vom Hofe, 2003) betonen. In Anlehnung an die Differenzierung verschiedener Lösungswege von Hußmann und Laakmann (2011) sowie Krämer, Schukajlow und Blum (2012) wird ein numerischer Lösungsweg mithilfe einer Tabelle (primär Zuordnungsaspekt) und ein inhaltlicher Lösungsweg mittels Differenzenbildung (primär Kovariationsaspekt) vermittelt.

### **Multiple Lösungen, Adaptivität und Flexibilität**

Neben einigen theoriegeleiteten Vermutungen (siehe Zusammenfassung bei Schukajlow und Blum (2011)), die für die Behandlung von multiplen Lösungen sprechen, gibt es nur wenige experimentelle Studien, die diese Vermutungen untersucht haben. Beispielsweise konnten Große und Renkl (2006) sowie Rittle-Johnson and Star (2007, 2009) Vorteile von Lernumgebungen, in denen mehrere Lösungsmethoden zu einer innermathematischen Aufgabe behandelt und gegenübergestellt werden, im Vergleich zu Lernsettings, in denen die jeweilige Lösungsmethode nach einander und an verschiedenen innermathematischen Aufgaben behandelt wird, aufzeigen. Schukajlow und Krug (2013a, 2013b, 2013c, 2014) haben einen positiven Einfluss der Behandlung multipler Lösungen auf die Selbstregulation, Planung, Kontrolle, Präferenz für offene Aufgaben und das Interesse von Lernenden festgestellt sowie die Anzahl der Lösungen und das Kompetenzerleben als wichtige Faktoren identifiziert, welche die Effekte von multiplen Lösungen auf Leistungen vermitteln (Schukajlow, Krug, & Rakoczy, eingereicht). Des Weiteren konnten Rittle-Johnson und Star (2009) sowie Große und Renkl (2006) positive Effekte von multiplen Lösungen auf die

Flexibilität und Effektivität von Lösungswegen feststellen. Die Flexibilität bei der Auswahl passender Lösungswege ist ein wichtiger Teil des Fachwissens und somit – ebenso wie die Förderung der Adaptivität – ein zentraler Aspekt des Mathematikunterrichts (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009).

Für die weiteren Analysen möchten wir zwischen Flexibilität und Adaptivität unterscheiden (siehe Verschaffel, Luwel, Torbeyns und Van Dooren (2009)). Flexibilität wird als die Fähigkeit operationalisiert, verschiedene (multiple) Strategien (Lösungswege) verwenden zu können und zwischen diesen zu wechseln. Adaptivität wird als die Fähigkeit beschrieben, eine passende Strategie in Bezug auf das Individuum (personelle Adaptivität), die Anforderung und/oder Kontextmerkmale zu wählen.

### **Forschungsfragen**

Es wird den folgenden Fragestellungen nachgegangen:

- Sind Lernende, die zwei Lösungswege kennengelernt haben, im Unterricht bzw. im Nachtest flexibel?
- Ist die Flexibilität im Unterricht bzw. im Nachtest prädiktiv für die Leistungsentwicklung der Schüler?

### **Methode**

Insgesamt vier Schulen mit jeweils drei 9. Klassen (N=307) haben an der Untersuchung teilgenommen. Jede Klasse wurde parallelisiert bezüglich Leistung und Geschlecht auf zwei gleich große Gruppen aufgeteilt und entsprechend einer Bedingung (multiple mathematische Lösungswege, numerischer Lösungsweg, inhaltlicher Lösungsweg) unterrichtet. In allen drei Bedingungen wurde auf Basis der empirisch erprobten, selbstständigkeitsstimulierenden „operativ-strategischen“ Lehr-Lernmethode vier Stunden lang unterrichtet. Die Schüler der Bedingung der multiplen mathematischen Lösungswege haben die gestellten Aufgaben mit zwei Lösungswegen und Lernende der beiden anderen Bedingungen mit jeweils einem Lösungsweg bearbeitet. Der Unterricht wurde von sechs erfahrenen Lehrkräften erteilt, die vor der Unterrichtseinheit geschult wurden. Jede Lehrkraft hat die gleiche Anzahl der Gruppen in entsprechenden Bedingungen an einer Schule unterrichtet, so dass der Einfluss der Lehrerpersönlichkeit in allen Bedingungen identisch war. Gerahmt waren diese vier Unterrichtsstunden von einem 90-minütigen Vor- bzw. Nachtest. Für eine ausführliche Beschreibung des Designs der experimentellen Studie sei an dieser Stelle auf Achmetli, Schukajlow und Krug (2014) verwiesen. Mittels der Vermittlung multipler mathematischer Lösungswege wurde die Flexibilität der Schüler in der entsprechenden Bedingung trainiert. Ferner hatten sie die Möglich-

keit in der letzten Unterrichtsstunde die Aufgaben mit nur einem Lösungs-  
weg zu bearbeiten, welchen sie entsprechend ihrer persönlichen Präferenzen  
wählen und somit personell-adaptiv sein konnten.

Die Flexibilität im Unterricht haben wir anhand der letzten beiden Aufga-  
ben gemessen. Um die Flexibilität im Nachtest zu analysieren wurden Auf-  
gaben identifiziert, die strukturell ähnlich zu den Unterrichtsaufgaben sind.  
Dadurch war es möglich, die Variation der gewählten Lösungswege auf die  
Flexibilität zurückzuführen.

## **Ergebnisse und Zusammenfassung**

Zur Kontrolle des Treatments wurden alle Unterrichtsstunden gefilmt, es  
war immer mindestens ein Mitarbeiter in jeder Unterrichtsstunde anwesend  
und die Anzahl der entwickelten Lösungen wurde von zwei unabhängigen  
Ratern mit sehr guter Übereinstimmung kodiert. Wie intendiert erstellen  
fast alle Schüler in der Bedingung der multiplen mathematischen Lösungs-  
wege zwei oder mehr Lösungen, während in den beiden anderen Bedin-  
gungen nur selten mehr als ein Lösungsweg erstellt wurde.

Die Analyse der Schülerlösungen im Hinblick auf Flexibilität im Unterricht  
bzw. im Nachtest ergibt ein eindeutiges Bild. Häufig zeigen Schüler keine  
Flexibilität. Das heißt sie wählen nur einen Lösungsweg, auch wenn sie  
vorher beide Lösungswege kennengelernt und geübt haben. Sie sind somit  
eher personell-adaptiv und haben offenbar eine Präferenz für einen be-  
stimmten Lösungsweg entwickelt. Man kann allerdings festhalten, dass  
Schüler, die im Unterricht bzw. im Nachtest die Aufgaben flexibel bearbei-  
ten eine signifikant höhere Leistungsentwicklung haben als Schüler, die  
stets nur einen Lösungsweg präferieren.

Da also Flexibilität einen signifikant positiven Einfluss auf die Leistungs-  
entwicklung hat, stellt sich abschließend die Frage, welche Maßnahmen –  
neben der Vermittlung von multiplen mathematischen Lösungswegen – zu-  
sätzlich ergriffen werden sollten, um die Flexibilität zu fördern.

## **Literatur**

- Achmetli, K., Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Effects of prompting students to use  
multiple solution methods while solving real-world problems on students' self-  
regulation. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of  
the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 1-8). Vancouver, Canada:  
PME.
- Große, C. S., & Renkl, A. (2006). Effects of multiple solution methods mathematics  
learning. *Learning and Instruction*, 16(2), 122-138.
- Hußmann, S., & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion-viele Gesichter: Darstellen und  
Darstellungen wechseln: na.

- Krämer, J., Schukajlow, S., & Blum, W. (2012). Bearbeitungsmuster von Schülern bei der Lösung von Modellierungsaufgaben zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen. *Mathematica Didactica*, 35, 50-72.
- Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (pp. 162-177). Berlin: Cornelsen.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561-574.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529-544.
- Schukajlow, S., & Blum, W. (2011). Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser, & P. Bender (Eds.), *Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung - Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der empirischen Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens* (pp. 249-267). Münster: LIT Verlag.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (2013a). Considering multiple solutions for modelling problems - design and first results from the MultiMa-Project. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 15 Proceedings)* (pp. 207-216). Heidelberg: Springer.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (2013b). Planning, monitoring and multiple solutions while solving modelling problems. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 177-184)*. Kiel, Germany: PME.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (2013c). Uncertainty orientation, preferences for solving tasks with multiple solutions and modelling. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1429-1438). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(4), 497-533.
- Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (submitted). Effects of Prompting Multiple Solutions for Modelling Problems on Students' Performance.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3-37.
- vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren*(118), 4-8.