

# Total positive Funktionen und exponentielle B-Splines in der Zeit-Frequenz-Analyse

## **Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Der Fakultät für Mathematik  
der Technischen Universität Dortmund  
vorgelegt von

**Tobias Kloos**

im Jahr 2015

Dissertation

Fakultät für Mathematik

Technische Universität Dortmund

Vorsitzender der Prüfungskommission: Prof. Dr. Matthias Röger

Erstgutachter: Prof. Dr. Joachim Stöckler

Zweitgutachter: Prof. Dr. Ole Christensen

Dritter Prüfer: Prof. Dr. Rainer Brück

Datum des Prüfungskolloquiums: 27.11.2015





## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Anwendung von Schoenbergs total positiven Funktionen, sowie exponentieller B-Splines in der Zeit-Frequenz-Analyse. Wir werden aufzeigen, dass sich diese Funktionen sehr gut als Fenster der Gabor-Transformation eignen und darüber hinaus anwendungsorientierte Algorithmen zur Implementierung angeben.

Nach einer kurzen Einführung in die Thematik betrachten wir zunächst die Zak-Transformierten der genannten Funktionen und charakterisieren für eine Teilklasse der total positiven Funktionen ihre Nullstellenmengen. Dies liefert bereits Gabor-Frames mit ganzzahligem oversampling und gibt Hinweise über die Existenz im Fall von rationalem oversampling. Anschließend beschäftigen wir uns mit Gabor-Systemen auf beliebigen separablen Gittern und legen einige Situationen dar, in welchen die Systeme der betrachteten Funktionen einen Frame liefern. In diesen Fällen beschreiben wir Algorithmen zur Konstruktion unendlich vieler verschiedener Duale mit kompakten Trägern, welche gegen den kanonischen Dual konvergieren. Weiter geben wir einen kurzen Einblick in die sich ergebenden Möglichkeiten zur Bildung von Gabor-Frames über nicht-separablen Gittern. Abschließend erläutern wir, wie die gewonnenen Erkenntnisse genutzt werden können, um diskrete Gabor-Frames und deren Duale zu konstruieren.

Einige Resultate dieser Arbeit wurden bereits veröffentlicht in:

[63]

KLOOS, T. ; STÖCKLER, J.: Zak transforms and Gabor frames of totally positive functions and exponential B-splines. In: *J. Approx. Theory* 184 (2014), S. 209–237

[62]

KLOOS, T.: Zeros of the Zak Transform of Totally Positive Functions. In: *J. Fourier Anal. Appl.* 21 (2015), S. 1130–1145

[64]

KLOOS, T. ; STÖCKLER, J. ; GRÖCHENIG, K.: Implementation of discretized Gabor frames and their duals. (2015). <http://arxiv.org/abs/1506.06918>. – submitted



## Abstract

This thesis deals with the applicability of Schoenberg's totally positive functions and exponential B-splines in time-frequency analysis. We show that these functions provide excellent windows for the Gabor transform and give some application-oriented algorithms.

After a brief introduction to the topic, we consider the Zak transform of totally positive functions and exponential B-splines. We characterize the zero set of this transform for a special subclass of totally positive functions, which directly leads to the existence of Gabor frames with integer oversampling, and gives some information about the case of rational oversampling. Afterwards, we deal with Gabor systems on arbitrary separable lattices and present some concrete situations, where the considered functions yield a frame. In these cases, we describe algorithms for constructing infinitely many different duals with compact support, which converge to the canonical dual. We also provide a brief insight how to handle Gabor systems on non-separable lattices. Finally, we explain to construct discrete Gabor frames and their duals in the aforementioned situations.

Some results of this thesis are already published in:

[63]

KLOOS, T. ; STÖCKLER, J.: Zak transforms and Gabor frames of totally positive functions and exponential B-splines. In: *J. Approx. Theory* 184 (2014), pp. 209–237

[62]

KLOOS, T.: Zeros of the Zak Transform of Totally Positive Functions. In: *J. Fourier Anal. Appl.* 21 (2015), pp. 1130–1145

[64]

KLOOS, T. ; STÖCKLER, J. ; GRÖCHENIG, K.: Implementation of discretized Gabor frames and their duals. (2015). <http://arxiv.org/abs/1506.06918>. – submitted



## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich zunächst einigen Menschen danken, die mich bei der Erstellung dieser Dissertation sehr unterstützt haben.

In besonders hohem Maße bin ich Prof. Dr. Joachim Stöckler zu Dank verpflichtet für die zahlreichen fruchtbaren Diskussionen und seine Ermunterung zur Entwicklung und Bearbeitung neuer Ansätze. Weiterhin danke ich Prof. Dr. Ole Christensen und Prof. Dr. Karlheinz Gröchenig für viele inspirierende Gespräche während einiger Forschungsaufenthalte der vergangenen Jahre.

Darüber hinaus danke ich Dr. Thorsten Camps, Dr. Martin Scheer, Dr. Tobias Springer und Sven Badke für ihre fortwährende Unterstützung und Aufheiterung im Alltag, insbesondere an den vermeintlich erfolgloseren Tagen. Außerdem gebührt mein Dank unserer Sekretärin Christine Mecke für die Hilfe bei administrativen Tätigkeiten.

Schließlich möchte ich auch meiner Familie, allen voran Sara Saad, sowie meinen Eltern Thomas und Annemie Kloos danken, welche in allen Belangen des Lebens immer an meiner Seite stehen. Durch ihren Beistand und ihre Rücksicht trugen sie einen großen Teil zur Fertigstellung dieser Arbeit bei.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Basen und Frames . . . . .	5
1.2 Gabor-Frames für $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	11
1.3 Periodische exponentielle B-Splines . . . . .	19
1.4 Total positive Funktionen . . . . .	27
<b>2 Die Zak-Transformation</b>	<b>33</b>
2.1 Eigenschaften der Zak-Transformation . . . . .	34
2.2 Gabor-Frames und die Zak-Transformation . . . . .	37
2.3 Nullstellen der Zak-Transformierten von TP Funktionen und EB-Splines . . . . .	42
<b>3 TP Funktionen und PEB-Splines als Gabor-Fenster</b>	<b>53</b>
3.1 Gabor-Frames von TP Funktionen und PEB-Splines . . . . .	53
3.2 Einschränkungen für PEB-Splines . . . . .	62

<b>4</b>	<b>Duale Gabor-Frames</b>	<b>69</b>
4.1	Algorithmen zur Berechnung von Dualen mit kompakten Trägern . . . . .	69
4.2	Die finite section Methode und die Konvergenz der Duale . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Nicht-separable Gitter</b>	<b>81</b>
5.1	Die metaplektische Darstellung . . . . .	83
5.2	Die multiwindow Methode . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Diskrete Gabor-Frames</b>	<b>91</b>
	<b>Ausblick</b>	<b>97</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

# Einleitung

Die Zeit-Frequenz-Analyse ist ein großer Bestandteil der angewandten harmonischen Analysis. Sie beschäftigt sich im Grunde mit der Fragestellung, welche Frequenzen ein zeitabhängiges Signal zu einem bestimmten Zeitpunkt beinhaltet, oder aber zu welchen Zeitpunkten eine bestimmte Frequenz in einem frequenzabhängigen Signal vorkommt. Den Grundstein der Frequenzanalyse legte Fourier dabei bereits 1822 durch die nach ihm benannte Fourier-Reihe. Die darauf basierende Fourier-Transformation liefert ein probates Mittel zur Bestimmung aller Frequenzen eines zeitabhängigen Signals. Die bei der Zeit-Frequenz-Analyse gewünschte Lokalisation dieser Frequenzen liefert die Kurzzeit-Fourier- oder aber auch die Gabor-Transformation. Bei diesen Ansätzen werden mittels Fourier-Transformation Frequenz-Analysen kurzer Ausschnitte des gesamten Signals durchgeführt, um so die Frequenzen zeitabhängig bestimmen zu können. Eines der größten Probleme dabei ist die Wahl eines geeigneten Fensters, d.h. einer Funktion, welche man verwendet um das Signal auf einen gewissen Zeitbereich einzuschränken. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation gibt es kein Fenster, welches sowohl in der Zeit, als auch in der Frequenz gut lokalisiert ist. Von Neumann und Gabor wählten für ihre Gabor- oder diskrete Kurzzeit-Fourier-Transformation ein Gauß-Fenster, welches die Unschärfe nach Heisenberg zumindest minimiert. Heutzutage werden Gabor-Systeme in vielen Bereichen der Ingenieurwissenschaften angewandt, allen voran der Bild- und Musiksinalverarbeitung. Dabei wird auch auf Hamming-, Blackman-, Hann-, Nuttall-, Barlett-, Kosinus- und viele weitere Fenster zurückgegriffen. Die Vielzahl an Fenstern, welche heutzutage verwendet werden verdeutlicht eindrucksvoll die mit der Auswahl verbundenen Schwierigkeiten. Da häufig Eigenschaften wie ein endlicher Träger bzw. exponentielles Abklingen oder Glätte als Voraussetzung gestellt werden, möchten wir in der vorliegenden Arbeit zwei Klassen von Fensterfunktionen genauer untersuchen, welche ebendiese Eigenschaften besitzen. Zum

einen die total positiven (TP) Funktionen, eine Klasse die von Schoenberg [77] bereits in anderem Zusammenhang näher betrachtet wurde, und zum anderen (kardinale) exponentielle B-Splines (EB-Splines), welche ebenfalls häufig mit Schoenberg in Verbindung gebracht werden [76], jedoch auch schon früher von Quade und Collatz verwendet wurden [70]. Dabei beinhalten die total positiven Funktionen Fenster wie das Gauß-Fenster, die einseitige und zweiseitige Exponentialfunktion und auch den Sekans Hyperbolicus, welche allesamt bereits in der Gabor-Analyse eingesetzt werden. Im Folgenden unterscheiden wir vor allem die unendlich oft differenzierbaren TP Funktionen, die sogenannten unendlichen Typen, und die TP Funktionen endlichen Typs, welche nur endlich oft differenzierbar sind.

Zu den exponentiellen B-Splines gehören insbesondere auch die polynomialen B-Splines. Von diesen werden gerade die charakteristische Funktion und die Hutfunktion oft verwendet.

Wir werden in der vorliegenden Arbeit zeigen, dass sich Funktionen beider Klassen als Fenster bestimmter Gabor-Systeme eignen und darüber hinaus Möglichkeiten zur Implementation beschreiben.

In Kapitel 1 wiederholen wir zunächst die Grundlagen zu Basen, Frames und insbesondere Gabor-Frames und geben die wichtigsten Hilfsmittel für die Analyse von Gabor-Systemen an. Dies schließt allen voran die Resultate von Wexler und Raz [87], Janssen [51], sowie Ron und Shen [74] ein. Anschließend führen wir exponentielle B-Splines und total positive Funktionen ein. Während die meisten Resultate zu den Splines bereits seit der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts bekannt sind, wurde die gleichmäßige Konvergenz von TP Funktionen endlichen Typs gegen eine TP Funktion unendlichen Typs in der Form wie in Satz 1.34 erst 2015 in [62] bewiesen und bildet eine wichtige Grundlage für die Ergebnisse aus Kapitel 2. Am Ende der jeweiligen Abschnitte zeigen wir die Möglichkeiten der Implementation von EB-Splines nach Cox und deBoor [26], Dyn und Ron [31, 73], Christensen und Massopust [18], sowie der TP Funktionen endlichen Typs nach Kloos, Stöckler und Gröchenig [64] auf. Diese werden in naher Zukunft in der Large Time-Frequency Analysis Toolbox (LTFAT) [69], einer kostenlosen Toolbox für Matlab, öffentlich zur Verfügung gestellt.

Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit einem der wichtigsten Hilfsmittel im Zusammenhang mit Gabor-Systemen, der Zak-Transformation. Diese Transformation ist in der Physik bereits seit 1950 bekannt, hielt allerdings erst 1982 durch die Arbeit von Janssen [49] Einzug in die Gabor-Theorie. Seit den Arbeiten von Daubechies [21] und Zibulski und Zeevi [91]

weiß man, dass gerade Lage und Anzahl der Nullstellen der Zak-Transformierten eine große Rolle bei Gabor-Systemen spielen. Die Hauptresultate dieses Kapitels sind daher das Theorem 2.16 bzw. Korollar 2.15 von Kloos und Stöckler [63], sowie die Theoreme 2.18 und 2.22 von Kloos [62], nach denen die Zak-Transformierten der meisten TP Funktionen in gewisser Weise nur wenige Nullstellen besitzen. Ähnliche Resultate sind nur für vereinzelte Funktionsklassen, wie beispielsweise den superkonvexen Funktionen nach Janssen [56] bekannt. Für die Beweise der genannten Resultate wird eine enge Verknüpfung der TP Funktionen und EB-Splines aufgeführt und ausgenutzt, welche auch im weiteren Verlauf immer wieder Verwendung findet.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit der Fragestellung welche Gabor-Systeme von TP Funktionen oder EB-Splines einen Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  liefern. Dabei behandeln wir zunächst den Fall eines Gabor-Systems über separablen Gittern  $\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Zu einer festen Fensterfunktion  $g$  bezeichnen wir hierfür die Menge aller Parameterpaare  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ , für welche das Gabor-System zu  $g$  über dem zugehörigen separablen Gitter einen Frame liefert, als die Framemenge dieser Funktion. Für das Gauß-Fenster haben Lyubarskii [67] und Seip [81], für den Sekans Hyperbolicus Janssen [54] und für TP Funktionen endlichen Typs Gröchenig und Stöckler [41] die Framemengen bereits vollständig charakterisiert. Für letzteres Resultat werden wir einen wesentlich kürzeren Alternativbeweis angeben, welcher die Verknüpfung der Zak-Transformierten von TP Funktionen und EB-Splines ausnutzt. Mit den weiteren Resultaten aus dem zweiten Kapitel können wir darüber hinaus Gabor-Frames von TP Funktionen unendlichen Typs bestimmen.

Für die Framemenge von EB-Splines gibt es nur weniger weitreichende Resultate als für TP Funktionen. Die gesamte Framemenge ist bisher nur von einem einzigen EB-Spline bekannt, der charakteristischen Funktion. Zur Framemenge allgemeiner EB-Splines werden wir die positiven Resultate von Daubechies, Grossmann und Meyer [23], Kloos und Stöckler [63], Christensen, Kim und Kim [17], sowie Lemvig und Nielsen [65] aufzeigen, und durch Theorem 3.5 ein weiteres Resultat dieses Typs beweisen, welches zudem das Resultat von Christensen, Kim und Kim einschließt und somit einen Alternativbeweis hierfür liefert. Anschließend werden wir einige negative Resultate zu Gabor-Frames von EB-Splines aufführen und dennoch zwei neue Beispiele angeben, in denen die bisher bekannten Restriktionen keine Rolle spielen. Durch diese Beispiele wird deutlich, dass es bei Gabor-Frames gewisser separabler Gitter zwingend notwendig ist sich eines EB-Splines zu bedienen, welcher ausdrücklich kein polynomialer B-Spline

ist.

In Kapitel 4 betrachten wir Algorithmen zur Bestimmung von dualen Fenstern von TP Funktionen und EB-Splines, welche von Bannert, Gröchenig, Kloos und Stöckler [61, 41, 4, 63] angegeben wurden. Mit Hilfe der sogenannten finite section Methode zeigen wir anschließend in Theorem 4.7 und 4.8, den Hauptresultaten dieses Kapitels, dass die berechneten Duale der Algorithmen gegen den kanonischen Dual konvergieren. Der Beweis nach Gröchenig, Kloos und Stöckler [64] ist im Hinblick auf die finite section Methode nicht-symmetrischer biinfiniter Matrizen sicherlich auch von allgemeinerem Interesse.

Anschließend, in Kapitel 5, werden wir kurz auf Gabor-Systeme nicht-separabler Gitter eingehen und die Möglichkeiten des Umgangs mit diesen Systemen aufzeigen. Hierzu geben wir lediglich ein kurzes Beispiel eines Frames über einem solchen Gitter an.

Im sechsten Kapitel zeigen wir schlussendlich, wie man die bisherigen Resultate nutzen kann, um diskrete Gabor-Frames für  $\mathbb{C}^K$  zu bestimmen. Besonders interessant sind dabei die resultierenden Algorithmen, welche eine schnelle und stabile Möglichkeit der Implementation der Fenster und zugehöriger Duale liefern. Diese werden ebenfalls in der LTFAT erscheinen.

Wir schließen die Darlegungen mit einem kurzen Ausblick, welcher weiterhin offene Fragestellungen und somit mögliche Forschungsansätze aufzählt.

# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Basen und Frames

Basen bieten in endlich dimensionalen Vektorräumen die Möglichkeit Elemente des Raumes als eine Linearkombination der Basiselemente darzustellen. Die Verallgemeinerung dieses Begriffs auf unendlich dimensionale Räume ist jedoch nicht ganz einfach. Zwar existiert nach dem Lemma von Zorn in jedem Vektorraum ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, jedoch folgt aus dem Satz von Baire, dass jede solche Basis eines unendlich dimensional Banach-Raumes überabzählbar groß sein muss. Daher sind diese sogenannten *Hamel-Basen*, welche endliche Linearkombinationen zur Darstellung der Elemente liefern, im Fall von unendlich dimensionalen Räumen als Basen ungeeignet. Die Antwort auf die Frage nach einem zweckmäßigen Basisbegriff in unendlich dimensional Banach-Räumen lieferte Schauder 1927 mit der nach ihm benannten *Schauder-Basis*. Nachfolgend werden wir diesen und verschiedene andere Basisbegriffe kurz wiederholen. Anschließend führen wir Frames für Hilbert-Räume ein und erläutern kurz die Unterschiede und Vorteile gegenüber der Verwendung von Basen. In 1.2 beschränken wir uns auf Gabor-Frames für  $L^2(\mathbb{R})$ . Sofern nicht anders gekennzeichnet, basieren die Ausführungen in diesem Abschnitt auf den Büchern [14, 15] und [36], welche sich ebenfalls für tiefgreifendere Studien in diesem Themengebiet eignen.

**Definition 1.1.** Es sei  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Familie von Elementen des Banach-Raumes  $\mathcal{B}$ . Dann nennen wir diese Familie:

- (i) Schauder-Basis von  $\mathcal{B}$ , falls für jedes  $x \in \mathcal{B}$  eine eindeutige Folge von Koeffizienten  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  existiert, sodass

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k. \quad (1.1)$$

- (ii) Unbedingte Basis von  $\mathcal{B}$ , falls sie eine Schauder-Basis ist und die Reihe in (1.1) für jedes  $x \in \mathcal{B}$  unbedingte konvergiert.

Besitzt ein Banach-Raum eine Schauder-Basis, so ist dieser separabel. Die Umkehrung hiervon ist allerdings nicht richtig. Ein Gegenbeispiel konstruierte Per Enflo 1973. Anders verhält es sich mit Hilbert-Räumen. Diese besitzen immer ein sogenanntes *vollständiges Orthonormalsystem* zur Darstellung der Elemente, welches genau dann abzählbar ist, wenn der Raum separabel ist. In diesem Fall bezeichnen wir dieses System auch als *Orthonormalbasis*.

**Definition 1.2.** Es sei  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Familie eines Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$ . Dann nennen wir diese Familie Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ , falls sie eine Schauder-Basis und ein Orthonormalsystem ist. In diesem Fall kann jedes Element  $x \in \mathcal{H}$  dargestellt werden als

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k. \quad (1.2)$$

Da diese Reihe unbedingte konvergiert, ist eine Orthonormalbasis gleichzeitig eine unbedingte Basis.

Orthonormalbasen liefern eine einfache Methode ein gegebenes Signal  $x \in \mathcal{H}$  in eine Koeffizientenfolge zu zerlegen und dieses mit derselben Basis wieder zu rekonstruieren. Daher sind diese sehr bequem in der Anwendung und wurden zu Beginn der Signalverarbeitung fast ausschließlich verwendet. Kennt man bereits eine Orthonormalbasis  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ , so lässt sich jede weitere durch die Darstellung  $\{Ux_k\}_{k=1}^{\infty}$  charakterisieren, wobei  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein unitärer Operator ist. Schwächen wir die Eigenschaften der Operatoren  $U$  ein wenig ab, so erhalten wir einen weiteren Basisbegriff.

**Definition 1.3.** Sei  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$  und  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein beschränkter, invertierbarer Operator. Dann heißt  $\{Ux_k\}_{k=1}^{\infty}$  Riesz-Basis von  $\mathcal{H}$ .

Riesz-Basen sind ebenfalls unbedingte Basen und können alternativ auch wie folgt charakterisiert werden.

**Theorem 1.4.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum. Dann ist  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$  eine Riesz-Basis, falls

(i)  $\overline{\text{span}}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$ ,

(ii) Konstanten  $0 < A \leq B < \infty$  existieren, sodass

$$A \|\alpha\|_{\ell^2}^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B \|\alpha\|_{\ell^2}^2, \quad \text{für alle } \alpha = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}). \quad (1.3)$$

Die Konstanten  $A, B$  in Ungleichung (1.3) heißen (untere und obere) Riesz-Schranken. Falls  $A = B = 1$  gilt, ist die Riesz-Basis eine Orthonormalbasis. Da dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, können die Koeffizienten in der Basisdarstellung eines Signals nicht stets über die Riesz-Basis selber repräsentiert werden. Jedoch existiert, ähnlich zu (1.2), eine eindeutige Darstellung des Koeffizientenvektors als das Skalarprodukt des Signals mit der zugehörigen dualen Riesz-Basis.

**Theorem 1.5.** Ist  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum und  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$  eine Riesz-Basis, dann existiert eine weitere, eindeutige Riesz-Basis  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ , sodass

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, y_k \rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle y_k, \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$

Die Riesz-Basis  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  nennt man die duale Riesz-Basis zu  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  und umgekehrt.

Neben Orthonormalbasen existiert mit den Riesz-Basen, inklusive ihrer dualen Basen, damit eine weitere Möglichkeit die Elemente eines Hilbert-Raumes eindeutig in einen Koeffizientenvektor zu zerlegen und auch wieder zu rekonstruieren. Dies ist die Grundvoraussetzung der modernen Signalverarbeitung. In der Regel ist es jedoch nicht nötig eine eindeutige Darstellung zu haben. Daher verwendet man hierfür häufig redundante Familien, sogenannte Frames anstelle von Basen. Diese wurden von Duffin und Schaeffer in [30] 1952 zum ersten Mal eingeführt. Später, mit der grundlegenden Arbeit von Daubechies, Grossmann und Meyer [23], sowie dem Durchbruch der Wavelets (s. [19], [22]) in der Signalverarbeitung, wurden Frames immer populärer. Eine ihrer wichtigsten Eigenschaften im Gegensatz zu Basen ist, dass sie nicht notwendigerweise aus linear unabhängigen Elementen bestehen. Durch diese Redundanz sind sie in manchen Anwendungen wesentlich stabiler. Sind die Koeffizienten eines Signals veräuscht oder gingen einige bei der Übertragung verloren, so kann es mit Frames noch immer

möglich sein das ursprüngliche Signal verlustfrei zu rekonstruieren. Bei Basen ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Ebenfalls führt die Redundanz dazu, dass ein Frame mehrere Duale haben kann. Daher ist es wesentlich einfacher einen Frame und eines der entsprechenden Duale zu finden, anstelle einer geeigneten Basis und der eindeutigen dualen Basis.

**Definition 1.6.** Es sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum und  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Familie in  $\mathcal{H}$ . Existieren  $0 < A \leq B < \infty$ , sodass

$$A \|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq B \|x\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}, \quad (1.4)$$

so nennen wir die Familie  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  einen Frame für  $\mathcal{H}$ . Die Konstanten  $A, B$  heißen in diesem Fall (untere und obere) Frameschranken. Falls nur die rechte Ungleichung erfüllt ist,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq B \|x\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}, \quad (1.5)$$

so heißt  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Bessel-Familie und  $B$  eine Bessel-Schranke.

Da die Frameschranken offensichtlich nicht eindeutig bestimmt sind, interessiert man sich häufig für die *optimalen Frameschranken*

$$A_{opt} := \sup \{A \mid A \text{ ist untere Frameschranke}\}, \quad B_{opt} := \inf \{B \mid B \text{ ist obere Frameschranke}\}.$$

Falls diese identisch sind,  $0 < A_{opt} = B_{opt} < \infty$ , so heißt der Frame *Tight Frame*. Der Quotient  $B_{opt}/A_{opt}$  wird als die *Kondition* des Frames bezeichnet und gibt einen Hinweis auf die numerische Stabilität.

Aus (1.4) folgt, dass Frames vollständige Systeme sind. Weiterhin gilt wegen (1.5), dass der zugehörige *Analyse-* oder *Koeffizientenoperator*

$$\begin{aligned} C : \mathcal{H} &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto (\langle x, x_k \rangle_{\mathcal{H}})_{k=1}^{\infty} \end{aligned}$$

beschränkt ist mit  $\|C\|_{op} = \sqrt{B_{opt}}$ . Wegen

$$\langle x, C^* \mathbf{c} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Cx, \mathbf{c} \rangle_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle_{\mathcal{H}} \bar{c}_k = \langle x, \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \rangle_{\mathcal{H}}$$

für  $\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{N})$  und  $x \in \mathcal{H}$ , ist auch der adjungierte Operator, der *Syntheseoperator*

$$\begin{aligned} D : \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (c_k)_{k=1}^{\infty} &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \end{aligned}$$

beschränkt mit  $\|D\|_{op} = \sqrt{B_{opt}}$ .

Die Verkettung dieser beiden Operatoren liefert den *Frameoperator*

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle_{\mathcal{H}} x_k. \end{aligned}$$

Wegen  $\langle Sx, x \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, x_k \rangle|^2$ , kann man (1.4) auch schreiben als  $AI \leq S \leq BI$ . Demnach ist der Frameoperator  $S$  nach oben und unten beschränkt und positiv. Da er insbesondere selbstadjungiert ist, gilt  $\text{Bild}(S)^\perp = \text{Kern}(S) = 0$  und somit ist er invertierbar auf  $\mathcal{H}$ . Der inverse Operator  $S^{-1}$  ist der zugehörige Frameoperator des Frames  $\{S^{-1}x_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Dieser hat Frameschranken  $0 < B^{-1} \leq A^{-1} < \infty$  und wird *kanonischer dualer Frame* oder kurz *kanonischer Dual* genannt.

**Theorem 1.7.** *Es sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum und  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame mit Frameoperator  $S$ . Dann hat jedes  $x \in \mathcal{H}$  die Darstellungen*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle S^{-1}x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, S^{-1}x_k \rangle x_k, \quad (1.6)$$

wobei beide Reihen unbedingt konvergieren.

Es ist leicht einzusehen, dass jede Riesz-Basis auch ein Frame ist, wobei die entsprechenden Frameschranken die Riesz-Schranken sind. Im Gegensatz zu Riesz-Basen können zu Frames im Allgemeinen allerdings viele verschiedene duale Frames existieren. Tatsächlich ist ein Frame genau dann eine Riesz-Basis, wenn es nur einen eindeutigen dualen Frame gibt, den kanonischen Dual. Oder anders gesagt ist ein Frame genau dann eine Riesz-Basis, wenn die Koeffizientenfolge der Darstellung in (1.6) eindeutig ist. Wegen dieser fehlenden Redundanz von Basen, nennt man eine Riesz-Basis auch einen *exakten Frame* oder andersherum einen Frame, welcher keine Riesz-Basis ist *überbestimmt*. Der kanonische Dual hebt sich in vielerlei Hinsicht von den übrigen Dualen ab. Folgende Eigenschaft wird häufig verwendet.

**Lemma 1.8.** *Es sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum,  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame mit Frameoperator  $S$  und  $\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{N})$  mit  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = x$ . Dann gilt*

$$\left\| (\langle x, S^{-1}x_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}} \right\|_2 \leq \|\mathbf{c}\|_2.$$

*Beweis.* Mit  $\tilde{c}_k = \langle x, S^{-1}x_k \rangle$  folgt

$$\langle x, S^{-1}x \rangle = \sum_{k \in I} \tilde{c}_k \langle x_k, S^{-1}x \rangle = \sum_{k \in I} \tilde{c}_k \overline{\tilde{c}_k} = \|\tilde{\mathbf{c}}\|_2^2.$$

Da ebenfalls

$$\langle x, S^{-1}x \rangle = \sum_{k \in I} c_k \langle x_k, S^{-1}x \rangle = \sum_{k \in I} c_k \overline{\tilde{c}_k} = \langle \mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle$$

gilt, ist  $\langle \mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle = \|\tilde{\mathbf{c}}\|_2^2$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}\|_2^2 &= \|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 + \langle \mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{c}}, \mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}} \rangle \\ &= \|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 + \langle \mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{c}}, \mathbf{c} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle \\ &= \|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 \geq \|\tilde{\mathbf{c}}\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Hat man bereits einen Frame gegeben, so ergibt die elementweise Anwendung eines unitären Operators wiederum einen Frame mit gleichen Frameschranken.

**Lemma 1.9.** *Es seien  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum,  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame mit Frameschranken  $0 < A \leq B < \infty$  und  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein unitärer Operator. Dann ist auch  $\{Ux_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame mit Frameschranken  $A, B$ .*

*Beweis.* Die Bessel-Schranke ergibt sich durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, Ux_k \rangle|^2 \leq B \|U^*x\|^2 = B \|x\|^2.$$

Die untere Frameschranke folgt aus

$$\|x\|^2 = \|U^*x\|^2 \leq \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*x, x_k \rangle|^2 = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, Ux_k \rangle|^2.$$

□

Hiermit beenden wir die kurze Einführung über Basen und Frames in allgemeinen Banach- und Hilbert-Räumen und beschränken uns fortan auf den Hilbert-Raum  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 1.2 Gabor-Frames für $L^2(\mathbb{R})$

Die Gabor-Transformation wurde 1927 zum ersten Mal von von Neumann in seiner Arbeit über Quantenmechanik [86] erwähnt. Später wurde sie nach Gabor benannt, der denselben Ansatz 1946 in [33] beschrieb. Dadurch motiviert nicht nur das globale Frequenzspektrum eines Signals zu bestimmen, wie z.B. durch die Fourier-Transformation, sondern die Frequenzen gleichzeitig auch in der Zeit lokalisieren zu können, möchte man ein Signal bei diesem Ansatz als Linearkombination oder Reihe von Zeit-Frequenz-Shifts einer bestimmten Fensterfunktion darstellen. Die Koeffizientenfolge dieser Darstellung repräsentiert dabei die Energieverteilung des Signals und wird mit der Gabor-Transformation bestimmt. Da Gauß-Atome die Heisenbergsche Unschärferelation minimieren, waren diese zu Beginn der Gabor-Theorie erste Wahl. Hierdurch erhoffte man sich eine höchstmögliche Auflösung. Genauer gesagt betrachteten von Neumann und Gabor Darstellungen

$$f(t) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} g_{k,l}(t),$$

wobei  $g_{k,l}(t) = g(t - k) e^{-2\pi i l t}$  der ganzzahlige Zeit-Frequenz-Shift eines Gauß-Atoms  $g$  ist. Da es damals jedoch nur die Möglichkeit einer iterativen Approximation der Koeffizienten gab, wurde dem zunächst nur wenig Aufmerksamkeit zugetan. Inzwischen wissen wir, dass die Darstellung von von Neumann und Gabor sehr instabil und für die meisten Anwendungen unbrauchbar ist. Für eine stabile Repräsentation aller Signale  $f \in L^2(\mathbb{R})$  benötigt man ein gewisses Maß an Redundanz in dem System der Zeit-Frequenz-Shifts von  $g$ . Dies führte schlussendlich zur Verbindung dieses Ansatzes mit Frames und resultierte in den Gabor-Frames.

Heutzutage werden Gabor-Frames in vielen verschiedenen Gebieten angewendet. Zum einen in der klassischen Sprach- ([75]) und Musiksignalverarbeitung ([29]), aber auch auf dem Gebiet der wireless communication ([47], [83]) oder in weniger offensichtlichen Anwendungsbereichen, wie der Analyse von EEG Signalen ([7], [13]) in der Medizin.

Zu  $t, \omega \in \mathbb{R}$  bezeichne  $T_t : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  den Translationsoperator mit  $T_t g = g(\cdot - t)$  und  $M_\omega : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  den Modulationsoperator mit  $M_\omega g = e^{2\pi i \omega \cdot} g$ . Damit definieren wir Gabor-Systeme wie folgt.

**Definition 1.10.** Es sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  eine nichttriviale Fensterfunktion und  $\alpha, \beta > 0$  zwei

Gitterparameter. Wir bezeichnen das System der zugehörigen Zeit-Frequenz-Shifts

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) := \{M_{\beta l} T_{\alpha k} g \mid k, l \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2\pi i \beta l \cdot} g(\cdot - \alpha k) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$$

als das *Gabor-System* zu  $g$  und dem Gitter  $\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$ . Das Produkt  $\alpha\beta$  wird das *oversampling* bzw.  $(\alpha\beta)^{-1}$  die *Redundanz* des Systems genannt.

Falls  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  ist, so heißt das System ein *Gabor-Frame*.

Die zugehörigen Analyse- und Syntheseoperatoren sind gegeben durch

$$Cf = (\langle f, M_{\beta l} T_{\alpha k} g \rangle)_{k, l \in \mathbb{Z}}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \text{und} \quad Dc = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} c_{k, l} M_{\beta l} T_{\alpha k} g, \quad c \in \ell^2(\mathbb{Z}^2).$$

Der Frameoperator hat demnach die Form

$$Sf = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{\beta l} T_{\alpha k} g \rangle M_{\beta l} T_{\alpha k} g, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Wenn wir im Falle eines Gabor-Systems auf die entsprechend genutzte Fensterfunktion hinweisen möchten, schreiben wir auch  $C_g$  und  $D_g$ . Mit  $S_{g, \gamma} := D_\gamma C_g$  bezeichnen wir den Operator, der ein Signal mit dem Gabor-System zu  $g$  analysiert und mit dem Gabor-System zu  $\gamma$  synthetisiert, also ist  $S_{g, g} = D_g C_g$  demnach der Frameoperator bezüglich des Systems zu  $g$ . Wegen der Identität  $M_\beta T_\alpha f = e^{2\pi i \alpha \beta} T_\alpha M_\beta f$  gilt sowohl  $S M_\beta f = M_\beta S f$ , als auch  $S T_\alpha f = T_\alpha S f$ . Folglich kommutieren  $S$  und der inverse Frameoperator  $S^{-1}$  mit den Zeit-Frequenz-Shifts einer Funktion  $f$ . Daher ist der kanonische Dual eines Gabor-Frames wiederum ein Gabor-Frame und eindeutig durch das *kanonische duale Fenster*  $\gamma^\circ := S^{-1}g$  charakterisiert.

**Lemma 1.11.** *Es sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\alpha, \beta > 0$  und  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$ . Dann existiert eine Funktion  $\gamma \in L^2(\mathbb{R})$ , sodass  $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$  ebenfalls ein Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  ist und*

$$f = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{\beta l} T_{\alpha k} g \rangle M_{\beta l} T_{\alpha k} \gamma = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{\beta l} T_{\alpha k} \gamma \rangle M_{\beta l} T_{\alpha k} g,$$

für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Somit ist  $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$  ein dualer Gabor-Frame zu  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ , wobei  $\gamma$  ein duales Fenster zu  $g$  genannt wird.

Dies bedeutet also, dass für ein Paar  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$  von zueinander dualen Fensterfunktionen  $S_{g, \gamma} = S_{\gamma, g} = I$  gilt. Für ein tieferes Verständnis von Gabor-Frames ist es hilfreich den Frameoperator etwas genauer zu betrachten. Es gibt verschiedene Alternativen diesen darzustellen.

Eine häufig angewandte Variante ist Janssens Darstellung. In dieser wird das *adjungierte Gitter*  $\frac{1}{\beta}\mathbb{Z} \times \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z}$  verwendet, welches wir im weiteren Verlauf ebenfalls zur Charakterisierung von Gabor-Frames und deren Dualen heranziehen werden.

**Theorem 1.12** (Janssens Darstellung [51]). *Es seien  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$  so, dass*

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \left| \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{k}{\beta}} g \rangle \right| < \infty. \quad (1.7)$$

*In diesem Fall besitzt der Operator  $S_{g,\gamma}$  die Darstellung*

$$S_{g,\gamma} = (\alpha\beta)^{-1} \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{k}{\beta}} g \rangle M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{k}{\beta}},$$

*wobei die Reihe absolut in Operatornorm konvergiert.*

Diese Darstellung ist zunächst sehr überraschend. Nach Definition ist  $S_{g,\gamma}f$  eine Linearkombination von Zeit-Frequenz-Shifts von  $\gamma$ , dessen Koeffizienten ähnlich wie bei einer Orthonormalbasis durch die Skalarprodukte von  $f$  mit Zeit-Frequenz-Shifts von  $g$  gebildet werden. Andererseits zeigt Janssens Darstellung, dass  $S_{g,\gamma}f$  als Linearkombination der Zeit-Frequenz-Shifts von  $f$  selbst auf dem adjungierten Gitter dargestellt werden kann.

Mit Hilfe des adjungierten Gitters ergibt sich durch die Biorthogonalitätsbedingungen von Wexler und Raz sogar eine Charakterisierung dualer Gabor-Frames.

**Theorem 1.13** (Wexler-Raz Biorthogonalität [87]). *Falls für  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$  die Systeme  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  und  $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$  Bessel-Systeme sind, so ist äquivalent:*

(i) *Die Gabor-Systeme  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  und  $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$  sind zueinander duale Frames.*

(ii)  *$\langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{k}{\beta}} g \rangle = \delta_{k0} \delta_{l0} \alpha\beta$  für alle  $k, l \in \mathbb{Z}$ .*

Alternativ wird Aussage (i) häufig durch

$$(i^*) \quad S_{g,\gamma} = S_{\gamma,g} = I$$

ersetzt. Denn aus  $S_{g,\gamma} = S_{\gamma,g} = I$  folgt mit Submultiplikativität der Normen

$$\|f\|_2^2 = \|D_\gamma C_g f\|_2^2 \leq \|D_\gamma\|^2 \sum_{l,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{\beta l} T_{\alpha k} g \rangle|^2 \leq \|D_\gamma\|^2 \|C_g\|^2 \|f\|_2^2,$$

für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Wegen der Beschränktheit der Synthese- und Analyseoperatoren von Bessel-Systemen sind die Systeme folglich sogar Frames.

Ron und Shen nutzen ebenfalls Gabor-Systeme auf den adjungierten Gittern um Gabor-Frames zu charakterisieren. Durch ihr Dualitätsprinzip bringen Sie die enge Verbindung von Gabor-Frames und Riesz-Basen zum Ausdruck.

**Theorem 1.14** (Ron-Shen Dualität [74]). *Sind  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$ , so ist  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  genau dann ein Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$ , falls das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})$  auf dem adjungierten Gitter eine Riesz-Basis für seinen abgeschlossenen Spann bildet.*

Eine wichtige Folgerung aus diesem Theorem ist, dass ein Gabor-Frame  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  sogar eine Riesz-Basis bildet. Tatsächlich charakterisiert die Bedingung  $\alpha\beta = 1$  alle Gabor-Frames, welche Riesz-Basen und unter Umständen sogar Orthonormalbasen für  $L^2(\mathbb{R})$  sind (s. Korollar 1.18).

In Lemma 1.8 haben wir gezeigt, dass der kanonische Dual insofern besonders ist, als dass er die Zerlegung mit der kleinsten  $\ell^2$ -Norm liefert. Mittels der vorangegangenen Analyse der dualen Gabor-Systeme können wir im Falle eines Gabor-Frames noch wesentlich genauere Aussagen über die Vielfalt dualer Fenster sagen.

**Proposition 1.15.** *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$ , sodass  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Frame ist für  $L^2(\mathbb{R})$ . Weiterhin bezeichne  $V_g := \overline{\text{span}}(\mathcal{G}(g, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}))$ . Dann gilt für das zugehörige kanonische duale Fenster  $\gamma^\circ \in V_g$  und jedes weitere duale Fenster  $\gamma \in L^2(\mathbb{R})$  erfüllt  $\gamma \in \gamma^\circ + V_g^\perp$ .*

Nimmt man an, dass das kanonische duale Fenster  $\gamma^\circ$  Bedingung (1.7) erfüllt, so sieht man den ersten Teil der Proposition mit Hilfe von Janssens Darstellung des inversen Frameoperators  $S_{g,g}^{-1} = S_{\gamma^\circ, \gamma^\circ}$  sofort ein. Der allgemeine Beweis hiervon ist ein wenig komplizierter. Die zweite Aussage folgt direkt aus der Wexler-Raz Biorthogonalität. Mit [87] wurden in [24] und [51] weitere Eigenschaften des kanonischen Duals eines Gabor-Frames bewiesen, welche in [36] wie folgt zusammengefasst wurden.

**Proposition 1.16.** *Es seien  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$ , sodass  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  und  $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$  zueinander duale Frames für  $L^2(\mathbb{R})$  sind. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\gamma = \gamma^\circ$  ist der kanonische Dual zu  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ .

(ii)  $\|\gamma\|_2 < \|\tilde{\gamma}\|_2$  für jeden weiteren Dual  $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ .

(iii)  $\left\| \frac{\gamma}{\|\gamma\|_2} - \frac{g}{\|g\|_2} \right\|_2 < \left\| \frac{\tilde{\gamma}}{\|\tilde{\gamma}\|_2} - \frac{g}{\|g\|_2} \right\|_2$  für jeden weiteren Dual  $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ .

Eine der anfänglichen Forschungsfragen in der Gabor-Analyse war und ist es noch immer eine Fensterfunktion und passende Gitterparameter zu finden, sodass das Tripel einen Gabor-Frame induziert. Da es im Allgemeinen nicht einfach zu prüfen ist, ob die Framebedingungen erfüllt sind, ist dies an sich bereits eine komplizierte Aufgabe. In der Anwendung werden zudem häufig bestimmte Eigenschaften der Fensterfunktionen gewünscht, wie Glattheit, kompakte Träger oder exponentielles Abklingverhalten. Außerdem sollte der Frame numerisch stabil sein und eventuell eine vorgegebene Redundanz beinhalten. Eine ebenso interessante Frage ist es daher zu einer gegebenen Fensterfunktion (mit gewünschten Eigenschaften) alle möglichen Gitterparameter zu finden, sodass diese Tripel Frames bilden. Wegen des starken Zusammenhangs der Redundanz der Systeme und der Frameschranken und somit der Konditionierung des Frames, könnten bei dieser Kenntnis ein oder mehrere geeignete Frames desselben Fensters zur jeweiligen Anwendung ausgewählt und genutzt werden. Zu einem Fenster  $g \in L^2(\mathbb{R})$  bezeichnen wir die Menge aller geeigneten Gitterparameter

$$\mathcal{F}_g := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \mathcal{G}(g, \alpha, \beta) \text{ ist ein Frame} \}$$

als die *Frame*menge von  $g$ . Für Funktionen mit kompaktem Träger, sieht man schnell ein, dass gewisse Gitterparameter nicht in der Frame

menge liegen können. Ist der Translationsparameter  $\alpha$  größer als die Trägerlänge, so liegen alle Funktionen mit Träger zwischen den Translaten nicht im Aufspann des Systems. Aus Lemma 1.8 und Theorem 1.13 folgt folgende allgemeinere Bedingung an die Dichtheit der Gitter.

**Korollar 1.17.** *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$ . Falls  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  ist, so erfüllen die Gitterparameter  $\alpha\beta \leq 1$ .*

Durch dieses Korollar und Theorem 1.14 schließen wir folgendes.

**Korollar 1.18.** *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *Das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ist genau dann eine Riesz-Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ , falls es ein Frame ist und  $\alpha\beta = 1$ .*

(ii)  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ist genau dann eine Orthonormalbasis für  $L^2(\mathbb{R})$ , falls es ein Tight Frame ist,  $\|g\|_2 = 1$  und  $\alpha\beta = 1$ .

Zusammen mit Proposition 1.15 verdeutlicht Korollar 1.18, dass ein Gabor-Frame, der keine Riesz-Basis ist, unendlich viele duale Fenster besitzt. In diesem Fall hat  $V_g$  nämlich ein nichttriviales orthogonales Komplement.

Die gesamte Framemenge einer Funktion zu bestimmen ist eine solch herausfordernde Aufgabe, dass dies bis 2013 nur für eine handvoll Funktionen gelang. In [53] und [55] für die einseitige und zweiseitige Exponentialfunktion, in [67] bzw. [81] für das Gauß-Fenster und damit in [57] für den Sekans Hyperbolicus. Für die einseitige Exponentialfunktion  $g_1(x) = e^{-ax} \chi_{[0, \infty)}(ax)$ ,  $a \neq 0$ , besteht die Framemenge aus allen Punkten, welche das Dichtheitsresultat erfüllen

$$\mathcal{F}_{g_1} = \mathbb{H} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 < \alpha\beta \leq 1\}.$$

Für die zweiseitige Exponentialfunktion, das Gauß-Fenster und den Sekans Hyperbolicus muss die Hyperbel selbst ebenfalls ausgeschlossen werden

$$\mathcal{F}_g = \mathbb{H}^\circ = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 < \alpha\beta < 1\}.$$

Das heißt, dass die einseitige Exponentialfunktion sogar ein Gabor-System bilden kann, welches eine Riesz-Basis ist. Wir werden später noch sehen, dass die anderen genannten Funktionen dies wegen ihrer Stetigkeit nicht liefern können (Theorem 1.23) und ihre Framemengen mit dieser Ausnahme ebenfalls in einem gewissen Sinne größtmöglich sind. In 2013 erkannten Gröchenig und Stöckler schließlich, dass all die bisher genannten Funktionen zu der Menge der von Schönberg eingeführten total positiven Funktionen gehören (vgl. Abschnitt 1.4) und zeigten in [41], dass die Framemenge jeder sogenannten total positiven Funktion endlichen Typs gleich  $\mathbb{H}^\circ$  ist. Zudem führte dies zu der bislang noch unbewiesenen Vermutung, dass jede stetige total positive Funktion diese Framemenge besitzt. Zur Komplementierung dieser Aufzählung sei noch die charakteristische Funktion erwähnt. Die Framemenge dieser Funktion ist unzusammenhängend und war lange Zeit ein ungelöstes Problem in der Gabor-Theorie. In [20] haben Dai und Sun diese 2014 schließlich vollständig erläutert. Darüber hinaus induzieren auch die Fourier-Transformierten von Fenstern eines Gabor-Frames wiederum einen Gabor-Frame.

**Korollar 1.19.** *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$ , sodass  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  ist. Dann ist auch  $\mathcal{G}(\hat{g}, \beta, \alpha)$  ein Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit selben Frameschranken, wobei  $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$  die Fourier-Transformierte von  $g$  ist.*

*Beweis.* Es ist leicht nachzurechnen, dass  $\mathcal{F}(M_{\beta l} T_{\alpha k} g) = e^{2\pi i \alpha k \beta l} M_{-\alpha k} T_{\beta l} \hat{g}$  gilt. Da die Fourier-Transformation ein unitärer Operator auf  $L^2(\mathbb{R})$  ist, folgt die Behauptung damit aus Lemma 1.9.  $\square$

Eine weitere Möglichkeit Gabor-Frames und ihre Duale zu charakterisieren liefert die *pre-Gramian-Matrix*  $P_g$ . Für eine gegebene Fensterfunktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$  ist sie definiert als

$$P_g(x) = \left( \bar{g} \left( x + \alpha k - \frac{l}{\beta} \right) \right)_{k, l \in \mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In ihrer Arbeit [74] nutzten Ron and Shen die nachträglich nach ihnen benannte *Ron-Shen-Matrix*  $P_g(x)^* P_g(x)$ . Ihr Resultat lässt sich aber auch wie folgt über  $P_g(x)$  ausdrücken.

**Theorem 1.20** ([74]). *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$ . Dann ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  genau dann ein Frame mit Frameschranken  $0 < A \leq B < \infty$ , wenn*

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,inf}_{x \in [0, \alpha]} \|P_g(x) \mathbf{c}\|_2^2 &\geq \beta A \|\mathbf{c}\|_2^2, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, \alpha]} \|P_g(x) \mathbf{c}\|_2^2 &\leq \beta B \|\mathbf{c}\|_2^2 \quad \text{für alle } \mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Hierbei lässt sich die erste Bedingung auch anders formulieren. Falls für alle  $x \in [0, \alpha]$  eine Matrix  $\Gamma_g(x)$  existiert, sodass fast überall  $\Gamma_g(x) P_g(x) = I$  gilt und

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, \alpha]} \|\Gamma_g(x) \mathbf{c}\|_2^2 \leq (\beta A)^{-1} \|\mathbf{c}\|_2^2 \quad \text{für alle } \mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

so ist  $A$  eine untere Frameschranke für  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ . Anders gesprochen heißt das, dass  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  genau dann ein Frame ist, falls die Menge von pre-Gramians (fast überall) gleichmäßig beschränkt ist und (fast überall) eine Menge von (fast überall) gleichmäßig beschränkten Linksinversen besitzt. Andererseits impliziert die Wexler-Raz Biorthogonalität, dass falls  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  und  $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$  zueinander duale Gabor-Frames sind,  $P_\gamma(x)^* P_g(x) = \beta I$  gilt, für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ . Ähnlich wie es mit der Analysematrix bei Frames in endlich dimensionalen Räumen funktioniert, ist es somit möglich mit Hilfe der Linksinversen der pre-Gramians alle dualen Fenster

einer Fensterfunktion zu charakterisieren. Dies haben auch Gröchenig und Stöckler in [41] verwendet, um Duale zu konstruieren. Ein wenig abstrahiert gilt folgendes.

**Proposition 1.21** ([41]). *Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\alpha, \beta > 0$  und das zugehörige Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Bessel-System. Weiter existiere eine Lebesgue-messbare, vektorwertige Funktion  $\sigma(x)$  von  $\mathbb{R}$  nach  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit Periode  $\alpha$ , sodass*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma(x)_k \bar{g}\left(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}\right) = \delta_{l0} \quad \text{für fast alle } x \in [0, \alpha).$$

Falls  $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$  für  $\gamma$  mit

$$\gamma(x) := \beta \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma(x)_k \chi_{[0, \alpha)}(x - \alpha k), \quad x \in \mathbb{R},$$

ein Bessel-System ist, so sind  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  und  $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$  zueinander duale Frames.

Da die Funktion  $\gamma$  ebenso konstruiert ist, dass sie die Wexler-Raz Biorthogonalitätsbedingung erfüllt, folgt die Proposition unmittelbar aus Theorem 1.13. Eines der Probleme in der Anwendung dieser Proposition ist der Nachweis, dass  $\gamma$  und  $g$  tatsächlich Bessel-Systeme induzieren. In der Anwendung wählt man daher häufig Fensterfunktionen aus, deren entsprechende Gabor-Systeme zumindest sicher Bessel-Systeme sind. Ein Raum solcher Funktionen, der in der Gabor-Analyse oft zugrunde gelegt wird ist der *Wiener-Raum*

$$W(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \left| \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, 1]} |g(x + n)| < \infty \right. \right\}. \quad (1.8)$$

Den Teilraum der stetigen Wiener-Funktionen bezeichnen wir mit  $W_0$ . Da beschränkte Funktionen mit kompakten Trägern offensichtlich Wiener-Funktionen sind, ist der Wiener-Raum wegen

$$\|f\|_p = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, 1]} |f(x + n)| \right)^p \right)^{1/p} \leq \|f\|_W$$

ein dichter Teilraum aller Räume  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Im weiteren Verlauf werden wir uns hauptsächlich mit Wiener-Funktionen beschäftigen. Eine Bessel-Schranke der Gabor-Systeme dieser Funktionen zu  $\alpha, \beta > 0$  ist gegeben durch  $(1 + \frac{1}{\alpha})(1 + \frac{1}{\beta}) \|f\|_W^2$  (s. [36]).

Abschließend präsentieren wir noch zwei Versionen des Unschärfepinzips von Gabor-Riesz-Basen. Balian [3] und Low [66] haben die erste Version unabhängig voneinander für Orthonormalbasen formuliert. Ihr Beweis enthielt allerdings eine kleine Lücke, die später von Coifman

und Semmes geschlossen wurde. Daubechies [21] formulierte das Theorem schließlich für Frames, wobei der nun vollständige Beweis nur leicht adaptiert werden musste. Die zweite Version geht auf Heil [43, 6] zurück und formuliert das Resultat für Wiener-Funktionen.

**Theorem 1.22** (Version 1 [3], [66]). *Ist  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  eine Riesz-Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ , so gilt*

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |x g(x)|^2 dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} |\omega \hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right) = \infty.$$

**Theorem 1.23** (Version 2 [43, 6]). *Ist  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  eine Riesz-Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ , so sind  $g \notin W_0$  und  $\hat{g} \notin W_0$ .*

Beide Versionen können mit Hilfe der Zak-Transformation bewiesen werden. Einen Beweis der Version nach Heil werden wir in Kapitel 2 skizzieren.

### 1.3 Periodische exponentielle B-Splines

Wenn auch nicht unter diesem Namen, so wurden die ersten Splines schon 1938 von Quade und Collatz in [70] verwendet, um reelle periodische Funktionen zu interpolieren. Eine Charakterisierung und den Namen *Spline* lieferte Schoenberg 1946 in [76], weshalb er häufig als der Vater der Splines bezeichnet wird. Er war es auch, welcher die B-Splines als eine natürliche Basis einführte. Vor der Einführung von Splines wurden Paare von Knoten und Daten meist durch Polynome interpoliert. Bei  $n$  Knoten und Daten benötigt man dabei im Allgemeinen ein Polynom vom Grad  $n - 1$ . Somit kommt es bei vielen Daten schnell zu unerwünschten Oszillationen. Quade, Collatz und Schoenberg geben hingegen eine Interpolante an, welche nur stückweise polynomial ist und zu einer glatten Funktion zusammengesetzt wird. Dadurch ist diese weniger oszillierend und falls gewünscht sogar beschränkt. Darüber hinaus können Splines durch hinzufügen von Knoten sehr einfach verfeinert werden ohne den Polynomgrad anpassen zu müssen. Neben der Anwendung bei Interpolations- und Approximationsaufgaben werden Splines heutzutage auch in vielen anderen Bereichen, allem voran dem Computer-Aided Design, verwendet. Unter Zuhilfenahme erster Computer wurde es Mitte des letzten Jahrhunderts möglich auch komplexe Kurven zu beschreiben und darzustellen. Da sich neben den univariaten Splinekurven mittels analogem Ansatz auch höherdimensionale, glatte Objekte modellieren lassen, wurde schnell klar, dass diese Ansätze auch industriell nutzbar sind. So

geschah es in den späten 1950'er Jahren, dass de Casteljau für Citroën, Bézier für Renault und Birkhoff, Garabedian und deBoor für General Motors unabhängig voneinander an einer Anwendung von Splineflächen im Karosseriebau arbeiteten.

Ersetzt man den Polynomraum durch andere geeignete Tchebycheff-Räume, so können Splines noch verallgemeinert werden. Daher spricht man heute im Allgemeinen zunächst von Tchebycheff Splines, welche wir nachfolgend kurz einführen werden. Für tiefgreifendere Studien zu Splines empfehlen sich die Monographien [80] und [28]. Eine ausführliche Behandlung von Tchebycheff-Räumen findet man in [59].

Zu einem Intervall  $[a, b] \in \mathbb{R}$ , Funktionen  $U_m = \{u_i\}_{i=1}^m \subset C^{m-1}[a, b]$  und  $k \leq m$  Punkten

$$t_1 \leq \dots \leq t_k = \underbrace{\tau_1, \dots, \tau_1}_{\#l_1} < \dots < \underbrace{\tau_r, \dots, \tau_r}_{\#l_r} \in [a, b]$$

bezeichnen wir mit

$$M \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_k \\ t_1, \dots, t_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1(\tau_1) & \dots & u_k(\tau_1) \\ \frac{d}{dx}u_1(\tau_1) & \dots & \frac{d}{dx}u_k(\tau_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^{l_1-1}u_1(\tau_1) & \dots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{l_1-1}u_k(\tau_1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(\tau_r) & \dots & u_k(\tau_r) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^{l_r-1}u_1(\tau_r) & \dots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{l_r-1}u_k(\tau_r) \end{pmatrix}$$

fortan die zugehörige Kollokationsmatrix des (Hermite-)Interpolationsproblems. Mit  $d_i = \max\{j \mid t_i = \dots = t_{i-j}\}$ , für  $i = 1, \dots, k$ , erhalten wir die Schreibweise

$$M \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_k \\ t_1, \dots, t_k \end{pmatrix} = \left( \left( \frac{d}{dx} \right)^{d_i} u_j(t_i) \right)_{i,j=1}^k.$$

**Definition 1.24.** Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $U_m = \{u_i\}_{i=1}^m \subset C^{m-1}[a, b]$ . Wir nennen  $U_m$  ein *Extended Complete Tchebycheff (ECT) -System*, falls

$$\det \left( M \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_k \\ t_1, \dots, t_k \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \text{für alle } t_1 \leq \dots \leq t_k \in [a, b]$$

und alle  $k = 1, \dots, m$ . Ist  $U_m$  ein ECT-System, so heißt der durch diese Basis aufgespannte,  $m$ -dimensionale Raum  $\mathcal{U}_m$  ein *ECT-Raum*.

Es ist bereits seit den sechziger Jahren (s. [59]) bekannt, dass  $U_m$  genau dann ein ECT-System bildet, wenn die *Wronski-Determinante*

$$W(u_1, \dots, u_k)(x) = \det \left( \left( \frac{d}{dx} \right)^{i-1} u_j(x) \right)_{i,j=1}^k$$

für alle  $k = 1, \dots, m$  und alle  $x \in [a, b]$  positiv ist. Darüber hinaus existieren für alle ECT-Räume sogenannte kanonische ECT-Systeme. Diese liefern eine Möglichkeit der Konstruktion von ECT-Räumen und gewähren einen tiefen Einblick in die Struktur ebendieser.

**Theorem 1.25** ([59]). *Für  $i = 1, \dots, m$  seien  $w_i \in C^{m-i}[a, b]$  positive Funktionen auf  $[a, b]$ . Dann bilden*

$$\begin{aligned} u_1(x) &= w_1(x) \\ u_2(x) &= w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) ds_2 \\ &\vdots \\ u_m(x) &= w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) \int_a^{s_2} \cdots \int_a^{s_{m-1}} w_m(s_m) ds_m \cdots ds_2 \end{aligned}$$

ein ECT-System auf  $[a, b]$ . Ist andersherum  $\mathcal{U}_m$  ein ECT-Raum, so existiert ein zugehöriges ECT-System dieser Form als Basis von  $\mathcal{U}_m$ .

ECT-Systeme wie in Theorem 1.25 heißen auch *kanonische ECT-Systeme*. Mit Hilfe dieser definieren wir die Differentialoperatoren

$$D_i f = \frac{d}{dx} \left( \frac{f}{w_i} \right), \quad L_i = D_i \cdots D_1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.9)$$

Damit sind ECT-Räume  $\mathcal{U}_m$  als der Kern des zugehörigen Differentialoperators  $L_m$  charakterisiert.

**Lemma 1.26.** (i) *Für  $1 \leq k \leq j \leq m$  ist  $L_j u_k = 0$  und  $\mathcal{U}_m$  somit der Kern von  $L_m$ .*

(ii) *Die Funktionen  $(L_j u_{j+1}, \dots, L_j u_m)$  bilden wiederum ein ECT-System auf  $[a, b]$ , das sogenannte  $j$ -reduzierte ECT-System mit Gewichtsfunktionen  $w_{j+1}, \dots, w_m$ .*

Das bekannteste Beispiel eines ECT-Raumes ist der Polynomraum. Eine zugehörige kanonische Basis ist

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x - a, \quad \dots, \quad u_m(x) = (x - a)^m,$$

welche man durch die Gewichte  $w_1(x) = 1$ ,  $w_i(x) = i - 1$ ,  $i = 2, \dots, m$  erhält. Wie bereits erwähnt, verwendete Schoenberg den Polynomraum zur anfänglichen Definition von Splines. Wir führen nun die allgemeineren Tchebyscheff Splines mit einfachen Knoten ein. Für die Definition von Tchebyscheff Splines mit Vielfachheiten der Knoten siehe [80, Kapitel 9].

**Definition 1.27.** Es seien  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b\}$  eine Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  und  $\mathcal{U}_m$  ein  $m$ -dimensionaler ECT-Raum. Dann nennen wir

$$\mathfrak{T}(\mathcal{U}_m; \Delta) = \{ s \in C^{m-2} \mid s|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathcal{U}_m, i = 0, \dots, k \}$$

den *Raum der Tchebyscheff Splines mit (einfachen) Knoten  $x_1, \dots, x_k$* . Die Dimension des Raumes ist  $\dim \mathfrak{T} = k + m$ .

Eine der bekanntesten Basen des polynomialen Spline Raumes  $\mathfrak{T}(\mathfrak{P}_{m-1}; \Delta)$  ist die der Monome und abgebrochenen Potenzfunktionen  $(x - x_i)_+^{m-1} := (x - x_i)^{m-1} \chi_{[x_i, \infty)}$

$$\left( 1, (x - a), \dots, (x - a)^{m-1}, (x - x_1)_+^{m-1}, \dots, (x - x_k)_+^{m-1} \right).$$

Dabei ist hervorzuheben, dass  $(x - \cdot)_+^{m-1}$  die *Greensche Funktion* des Differentialoperators  $\left(\frac{d}{dx}\right)^m$  ist. Dies verdeutlicht den engen Zusammenhang zwischen den Splines und dem zugrundeliegenden ECT-Raum. Mit Hilfe dividierter Differenzen kann man darüber hinaus aus  $(x - \cdot)_+^{m-1}$  eine Basis von glatten Funktionen mit kompakten Trägern herleiten, die *polynomialen B-Splines*. Betrachtet man nun einen allgemeinen Tchebyscheff Spline-Raum, so können mit Hilfe der Greenschen Funktionen des jeweiligen Differentialoperators  $L_m$  ebenfalls Basen mit diesen Eigenschaften hergeleitet werden (s. [80]), die *Tchebyscheff B-Splines* oder kurz *TB-Splines*. In der Approximationstheorie spielen TB-Splines aufgrund ihrer vielzähligen Anwendungen eine besondere Rolle. Zu Knoten  $a \leq y_k < \dots < y_{k+m} \leq b$  ist der TB-Spline  $B_m^k \in C^{m-2}$  der Ordnung  $m$  bis auf Normalisierung eindeutig charakterisiert durch  $\text{supp } B_m^k = [y_k, y_{k+m}]$  und  $B_m^k|_{(y_j, y_{j+1})} \in \mathcal{U}_m$ ,  $k \leq j \leq k + m - 1$ . Ihre Ableitungen können rekursiv durch TB-Splines über dem reduzierten Tchebyscheff-Raum dargestellt werden. Bezeichnen wir mit  $B_{m-1}^k$  den TB-Spline mit Knoten  $y_k, \dots, y_{k+m-1}$  zum einmal reduzierten ECT-System  $\mathcal{U}_{m-1}$ , so existieren Konstanten  $a_k, b_k > 0$  mit

$$L_1 B_m^k = a_k B_{m-1}^k - b_k B_{m-1}^{k+1}. \quad (1.10)$$

Bezugnehmend auf die ursprüngliche Idee der Anwendung von Splines bei Interpolationsaufgaben zeigt folgendes Theorem unter welchen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung existiert.

**Theorem 1.28** ([80]). *Es seien  $\{B_m^k \mid k = 1, \dots, N\}$  TB-Splines zu  $\mathcal{U}_m$  mit Knoten  $y_1 < \dots < y_{m+N}$ . Dann gilt für alle  $1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq N$  und alle  $t_1 < \dots < t_s$ ,*

$$\det \left( M \begin{pmatrix} B_m^{k_1}, \dots, B_m^{k_s} \\ t_1, \dots, t_s \end{pmatrix} \right) \geq 0,$$

wobei strikte Positivität genau dann gilt, wenn  $t_j \in (y_{k_j}, y_{k_j+m})$  für alle  $j = 1, \dots, s$ .

Wann immer also der  $j$ 'te Knoten noch im Träger des  $j$ 'ten betrachteten TB-Splines liegt, ist das zugehörige Interpolationsproblem eindeutig lösbar. Diese besondere Lage der Knoten wird *Verflechtungseigenschaft* bzw. *interlacing property* genannt.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der TB-Splines ist die *Variationsverminderung* von TB-Spline-Reihen. Nach [25] hat eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mindestens  $p$  starke Vorzeichenwechsel, wenn eine monotone Folge  $(\tau_j)_{0 \leq j \leq p}$  in  $[a, b]$  existiert, sodass  $f(\tau_0) \neq 0$ , und falls  $p \geq 1$  ist,  $f(\tau_{j-1})f(\tau_j) < 0$  gilt, für alle  $j = 1, \dots, p$ . Das Supremum aller starken Vorzeichenwechsel von  $f$  wird mit  $S^-(f)$  bezeichnet. Analog definiert man ebenfalls die Anzahl aller starken Vorzeichenwechsel  $S^-(c)$  einer Folge reeller Zahlen  $c = (c_k)_{0 \leq k \leq N}$ .

**Theorem 1.29** (Variationsverminderung, [80]). *Es seien  $\{B_m^k \mid k = 1, \dots, N\}$  TB-Splines zu  $\mathcal{U}_m$  mit Knoten  $y_1 < \dots < y_{m+N}$ . Dann ist die Anzahl der starken Vorzeichenwechsel der TB-Spline-Reihe  $f = \sum_{k=0}^N c_k B_m^k$  beschränkt durch die Anzahl der starken Vorzeichenwechsel der Koeffizientenfolge  $(c_k)_{0 \leq k \leq N}$*

$$S^-(f) \leq S^-(c). \quad (1.11)$$

Im weiteren Verlauf werden wir uns auf *Periodische Exponentielle B-Splines* (PEB-Splines) nach [72] beschränken. Diese sind charakterisiert durch

(E<sub>1</sub>) die kardinalen Knoten  $y_k = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , und

(E<sub>2</sub>) die Gewichtsfunktionen  $w_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , mit

$$w_j(x) = e^{\alpha_j x} r_j(x), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad r_j(x+1) = r_j(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Falls  $r_j \equiv 1$  für alle  $1 \leq j \leq m$ , nennen wir die zugehörigen PEB-Splines *Exponentielle B-Splines* (EB-splines). Für den PEB-Spline der Ordnung  $m$  gilt wegen seiner speziellen Form

$$B_m^k(x) = e^{\alpha_1 k} B_m^0(x - k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Daher ist der PEB-Spline Raum  $\mathfrak{T}(\mathcal{U}_m; \mathbb{Z})$  translations-invariant und die PEB-Spline Basis eindeutig bestimmt durch  $B_m := B_m^0$ . Mit der Bezeichnung  $B_{m-1} := B_{m-1}^0$  für den PEB-Spline der Ordnung  $m - 1$  des einmal reduzierten ECT-Systems und Knoten  $0, 1, \dots, m - 1$ , lässt sich die Rekursionsformel (1.10) in diesem speziellen Fall schreiben als

$$L_1 B_m = a_{m-1}^{-1} (B_{m-1} - B_{m-1}(\cdot - 1)), \quad a_{m-1} > 0, \quad (1.13)$$

(s. [72]). Darüber hinaus lässt sich die Variationsverminderung (1.11) wegen Formel (1.12) im Falle von PEB-Splines schreiben als

$$S^- \left( \sum_{k=0}^N c_k B_m(\cdot - k) \right) \leq S^-(\mathbf{c}). \quad (1.14)$$

Da sie als natürliche Verallgemeinerung der polynomialen B-Splines verstanden werden können, und diese bereits früh Einzug in die Signalverarbeitung hielten, wurden gerade die EB-Splines bereits als Fensterfunktionen zur Gabor-Analyse herangezogen (s. z.B. [18]). Zu  $m \in \mathbb{N}$  und  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  ist der EB-Spline der Ordnung  $m$  zu den Gewichten  $\Lambda$  gegeben durch die Faltung

$$B_\Lambda := B_m = e^{\lambda_1(\cdot)} \chi_{[0,1]} * e^{\lambda_2(\cdot)} \chi_{[0,1]} * \dots * e^{\lambda_m(\cdot)} \chi_{[0,1]}. \quad (1.15)$$

Demnach lautet die Fourier-Transformierte

$$\hat{B}_\Lambda(\omega) = \prod_{\nu=1}^m \frac{e^{\lambda_\nu - 2\pi i \omega} - 1}{\lambda_\nu - 2\pi i \omega}.$$

Die zugehörigen Gewichtsfunktionen sind

$$w_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad w_i = e^{(\lambda_i - \lambda_{i-1})x}, \quad i = 2, \dots, m,$$

und der Differentialoperator (1.9) besitzt die Darstellung

$$L_m = e^{\lambda_m x} \prod_{k=1}^m \left( \frac{d}{dx} - \lambda_k \text{id} \right) \quad (1.16)$$

(vgl. [80], [72]).

Setzt man nun also alle  $m$  Gewichte gleich Null,  $\Lambda = (0, \dots, 0)$ , so erhält man den kardinalen polynomialen B-Spline  $B_\Lambda = N_m$  der Ordnung  $m$ . Für die Verwendung von EB-Splines spricht auch ihre einfache numerische Anwendbarkeit, welche wir nachfolgend kurz veranschaulichen

wollen. Für den Fall, dass alle Gewichte des EB-Splines verschieden sind,  $\lambda_1 < \dots < \lambda_m$ , ist der zugrunde liegende ECT-Raum der Aufspan der Exponentialfunktionen mit den jeweiligen Gewichten

$$\mathcal{U}_m = \text{span}\{e^{\lambda_j x} \mid 1 \leq j \leq m\}$$

und  $B_\Lambda|_{[k-1,k]}$  eine Linearkombination dieser

$$B_\Lambda(x+k-1) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^{(k)} e^{\lambda_j x}, \quad x \in [0,1), 1 \leq k \leq m, \quad (1.17)$$

mit reellen Koeffizienten  $\alpha_j^{(k)}$ . Mit der Darstellung (1.16) sieht man leicht, dass diese im Kern des Differentialoperators  $L_m$  liegen. Im Fall  $m \geq 2$  haben Christensen und Massopust in [18] die geschlossene Form

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} \prod_{\substack{r=1, \\ r \neq j}}^m (\lambda_j - \lambda_r)^{-1}, & k = 1 \\ (-1)^{k-1} \frac{\sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq m, \\ j_1, \dots, j_{k-1} \neq j}} e^{\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_{k-1}}}}{\prod_{\substack{r=1, \\ r \neq j}}^m (\lambda_j - \lambda_r)}, & k = 2, \dots, m \end{cases}$$

der Koeffizienten angegeben, sodass die entsprechenden EB-Splines explizit ausgewertet werden können.

Im Falle eines EB-Splines mit nur einem Gewicht höherer Vielfachheit  $\Lambda = (\lambda, \dots, \lambda)$ , ist der zugrunde liegende ECT-Raum

$$\mathcal{U}_m = \{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}\}$$

und der EB-Spline erfüllt

$$B_\Lambda = e^{\lambda(\cdot)} (\chi_{[0,1)} * \dots * \chi_{[0,1)}) = e^{\lambda(\cdot)} N_m.$$

Somit kann  $B_\Lambda$  mit dem Algorithmus von Cox und deBoor (s. [26]), bzw. mittels der zwei-Term Rekursion (s. [80, §4.4])

$$N_m(x) = \frac{x N_{m-1}(x) + (m-x) N_{m-1}(x-1)}{m-1}$$

berechnet werden.

Im allgemeinen Fall

$$\Lambda = (\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{s_1}, \dots, \underbrace{\xi_r, \dots, \xi_r}_{s_r}),$$

mit paarweise verschiedenen Gewichten  $\xi_1, \dots, \xi_r \in \mathbb{R}$  und Vielfachheiten  $s_j \in \mathbb{N}$ , ist der ECT-Raum

$$\mathcal{U}_m = \text{span}\{e^{\xi_1 x}, xe^{\xi_1 x}, \dots, x^{s_1-1}e^{\xi_1 x}, \dots, e^{\xi_r x}, \dots, x^{s_r-1}e^{\xi_r x}\}$$

und der EB-Spline erfüllt

$$B_\Lambda(x+k-1) = \sum_{j=1}^r p_j^{(k)}(x)e^{\xi_j x}, \quad x \in [0, 1), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (1.18)$$

wobei  $p_j^{(k)}$  reelle Polynome vom Grad  $s_j - 1$  sind. In diesem Fall, kann folgende vier-Term Rekursion von Dyn und Ron angewandt werden.

**Theorem 1.30** ([31], [73]). *Für  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_N$  erfüllt der zugehörige EB-Spline  $B_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$  die Rekursion*

$$B_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}(x) = \frac{B_{\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}}(x) - B_{\lambda_2, \dots, \lambda_N}(x) + e^{\lambda_1} B_{\lambda_2, \dots, \lambda_N}(x-1) - e^{\lambda_N} B_{\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}}(x-1)}{\lambda_1 - \lambda_N}.$$

Durch Iteration dieser Rekursion kann jeder EB-Spline als Linearkombination von EB-Splines niedrigerer Ordnung dargestellt werden, denen entweder nur disjunkte Gewichte oder aber ein Gewicht höherer Vielfachheit zugrunde liegen. Diese können dann wie bereits beschrieben ausgewertet werden.

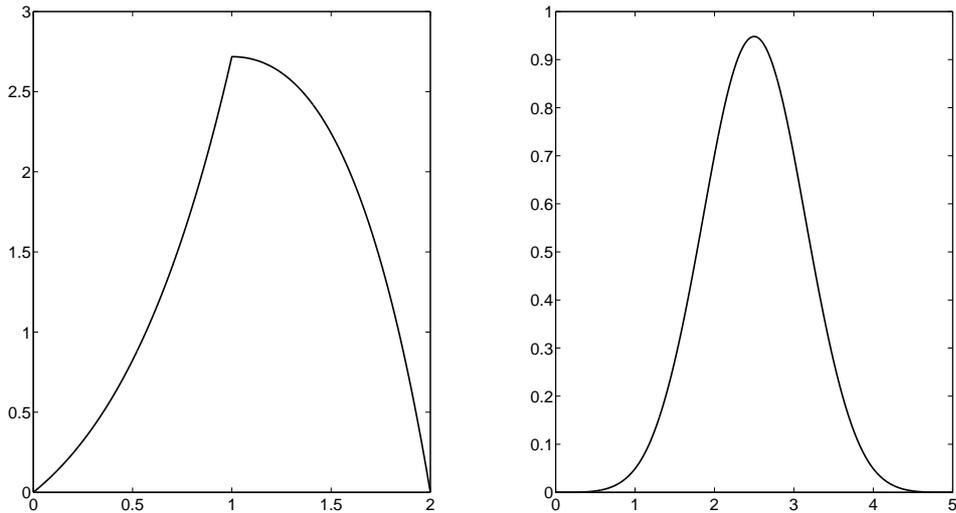


Abbildung 1.1: Die Graphen zweier EB-Splines. Links mit Gewichten  $\Lambda = (1, 1)$ , rechts mit Gewichten  $\Lambda = (-2, -1, 0, 1, 2)$ .

In Abbildung 1.1 wurden die beschriebenen Methoden verwendet, um die Graphen eines un-symmetrischen, stetigen, jedoch nicht differenzierbaren (links) und eines symmetrischen, drei-mal stetig-differenzierbaren (rechts) EB-Splines darzustellen.

## 1.4 Total positive Funktionen

Neben den bereits erwähnten Beispielen an Fensterfunktionen, wie dem Gauß-Fenster, der zweiseitigen Exponentialfunktion, der charakteristischen Funktion oder B-Splines, werden in der Signalverarbeitung häufig auch Hamming-, Blackman-, Hann-, Nuttall-, Barlett-, Kosinus- und viele weitere Fenster verwendet. Diese, meist nach den publizierenden Autoren benannten Fenster haben vieles gemein. In der Regel handelt es sich um positive, symmetrische, mehr oder weniger stark lokalisierte Fenster mit kompaktem Träger. Da sie relativ unflexibel sind, müssen bei gegebenem Problem dann eines oder mehrere passende Fenster mit gewünschten Eigenschaften gewählt werden.

Daubechies stellte 1990 in [21] die Vermutung auf, dass jedes Gabor-System positiver, integrierbarer Funktionen mit positiver, integrierbarer Fourier-Transformierten im Fall  $\alpha\beta < 1$  einen Frame induziert und somit als Fensterfunktion gewählt werden könnte. Dies wurde jedoch 1996 in [52] von Janssen widerlegt. In den vergangenen Jahren entstand dieselbe Vermutung zu Schoenbergs Klasse der total positiven Funktionen, welche von Gröchenig in [37, Conjecture 4.1] auch publiziert wurde (vgl. Kapitel 3).

**Definition 1.31** (Total positive (TP) Funktionen, [77]). Eine nichtkonstante, messbare Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt total positiv, falls für jedes  $N \in \mathbb{N}$  und beliebige, aufsteigend sortierte Folgen von reellen Zahlen

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N, \quad y_1 < y_2 < \dots < y_N,$$

die Matrix  $A = (g(x_j - y_k))_{j,k=1}^N$  eine nichtnegative Determinante hat.

Mit  $N = 1$  sieht man leicht ein, dass diese Funktionen positiv sind. Das einfachste Beispiel einer TP Funktion ist die Exponentialfunktion  $e^{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Induktiv verifiziert man,

dass die Determinante der Matrizen aus der Definition für  $N \geq 2$  verschwindet. Beispiele für integrierbare TP Funktionen sind die einseitige und zweiseitige Exponentialfunktion, sowie die Gauß-Funktion. Schoenberg gab bereits folgende Charakterisierung über die zweiseitige Laplace-Transformation an und beschrieb dadurch gleichzeitig die Klasse aller integrierbaren TP Funktionen.

**Theorem 1.32** ([77], [78]). *Eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche nicht die gewöhnliche Exponentialfunktion  $g(x) = Ce^{ax}$  ist, ist genau dann eine TP Funktion, falls ihre zweiseitige Laplace-Transformation in einem Streifen  $S = \{s \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Re} s < \beta\}$  mit  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$  existiert und auf  $S$  dargestellt wird als*

$$(\mathcal{L}g)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st} dt = Cs^{-n}e^{\gamma s^2 - \delta s} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\delta_{\nu}s}}{1 + \delta_{\nu}s},$$

wobei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $C, \gamma, \delta, \delta_{\nu}$  reelle Parameter mit

$$C > 0, \quad \gamma \geq 0, \quad 0 < \gamma + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{\nu}^2 < \infty$$

sind. Weiter ist  $g$  damit eine integrierbare TP Funktion genau dann, wenn ihre Fourier-Transformation existiert und gegeben ist als

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i t \omega} dt = Ce^{-\gamma \omega^2} e^{-2\pi i \delta \omega} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \delta_{\nu} \omega}}{1 + 2\pi i \delta_{\nu} \omega},$$

mit denselben Bedingungen an  $C, \gamma, \delta, \delta_{\nu}$  wie oben.

Nachfolgend beschäftigen wir uns hauptsächlich mit integrierbaren TP Funktionen ohne Faltung mit Gauß-Kern und unterscheiden zwischen unendlichen und endlichen Typen. Zum einen betrachten wir stetige TP Funktionen  $g, g_n \in L^2(\mathbb{R})$ , welche bis auf Normalisierung und Translation gegeben sind durch ihre Fourier-Transformierte

$$\hat{g}(\omega) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{\omega}{a_{\nu}}}}{1 + 2\pi i \frac{\omega}{a_{\nu}}}, \quad \hat{g}_n(\omega) = \prod_{\nu=1}^n \frac{e^{2\pi i \frac{\omega}{a_{\nu}}}}{1 + 2\pi i \frac{\omega}{a_{\nu}}}, \quad n \geq 2, \quad (1.19)$$

wobei  $(a_{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{-2} < \infty$ . Wenden wir die inverse Fourier-Transformation auf (1.19) an, so erhalten wir folgende Darstellung dieser Funktionen in der Zeit

$$g(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}| e^{-a_{\nu}(x + \frac{1}{a_{\nu}})} \chi_{[0, \infty)}(\operatorname{sign}(a_{\nu})(x + \frac{1}{a_{\nu}})), \quad (1.20)$$

$$g_n(x) = \prod_{\nu=1}^n |a_{\nu}| e^{-a_{\nu}(x + \frac{1}{a_{\nu}})} \chi_{[0, \infty)}(\operatorname{sign}(a_{\nu})(x + \frac{1}{a_{\nu}})).$$

Zum anderen betrachten wir die einzig unstetige TP Funktion  $g_1 \in L^2(\mathbb{R})$  mit

$$g_1(x) = |a_1| e^{-a_1(x + \frac{1}{a_1})} \chi_{[0, \infty)}(\text{sign}(a_1)(x + \frac{1}{a_1})), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{a_1}\}.$$

Aus Gründen der Eindeutigkeit setzen wir stets  $g_1(-\frac{1}{a_1}) = \frac{|a_1|}{2}$ . Die Fourier-Transformation lautet

$$\hat{g}_1(\omega) = \frac{e^{2\pi i \frac{\omega}{a_1}}}{1 + 2\pi i \frac{\omega}{a_1}}.$$

Wegen des exponentiellen Abklingverhaltens,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x\tau} g(x) = 0, \quad |\tau| < \min_{\nu} |a_{\nu}|,$$

liegen diese Funktionen im Wiener-Raum. Darüber hinaus erkennt man an der Fourier-Transformierten, dass sie skalierungsinvariant sind. Ist  $g$  die TP Funktion mit Gewichten  $(a_{\nu})$ , so ist  $g_{\alpha} := g(\cdot\alpha)$  die TP Funktion mit Gewichten  $(\alpha a_{\nu})$ .

Ebenso wie Schoenberg, bezeichnen wir die reziproke Funktion der Laplace-Transformierten von  $g$  und  $g_n$  mit  $\Psi$  und  $\Psi_n$ ,

$$\Psi(s) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + a_{\nu}^{-1}s) e^{-a_{\nu}^{-1}s}, \quad \Psi_n(s) = \prod_{\nu=1}^n (1 + a_{\nu}^{-1}s) e^{-a_{\nu}^{-1}s}. \quad (1.21)$$

Diese sind offensichtlich ganze Funktionen mit Nullstellen auf der reellen Achse. In [46] und [78] nutzten sowohl Hirschmann und Widder, als auch Schoenberg diese Funktionen unabhängig voneinander um zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x),$$

gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ . In [62] wurde diese Konvergenzaussage sogar noch verschärft. Hierzu stellen wir fest, dass  $|1 - (1 - z)e^z| \leq |z|^2$  ist, für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \leq 1$  und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - (1 + a_{\nu}^{-1}s) e^{-a_{\nu}^{-1}s} \right|, \quad s \in \mathbb{C},$$

daher lokal gleichmäßig in  $\mathbb{C}$  konvergiert. Somit gilt dies auch für das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + a_{\nu}^{-1}s) e^{-a_{\nu}^{-1}s}. \quad (1.22)$$

Weiterhin gilt für die Laplace-Transformierten der betrachteten TP Funktionen folgendes.

**Lemma 1.33** ([46]). Für alle  $\tau_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und alle  $p \in \mathbb{N}$  existiert eine Konstante  $M_p > 0$ , sodass

$$\left| \frac{1}{\Psi(\omega + i\tau)} \right| \leq M_p |\tau|^{-p} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R} \text{ mit } |\tau| \geq |\tau_0|,$$

und falls  $n \geq p$

$$\left| \frac{1}{\Psi_n(\omega + i\tau)} \right| \leq M_p |\tau|^{-p} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R} \text{ mit } |\tau| \geq |\tau_0|,$$

gleichmäßig für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  mit  $|\omega| \leq K < \infty$ .

Damit kann folgendes Resultat zur Konvergenz von TP Funktionen endlichen Typs gegen eine TP Funktion unendlichen Typs gezeigt werden.

**Satz 1.34** ([62]). Es seien  $g$  eine TP Funktion unendlichen Typs und  $g_n$  die TP Funktion endlichen Typs der ersten  $n$  Gewichte von  $g$ , wie in (1.19). Dann gilt mit  $a_0 := \min_{\nu \in \mathbb{N}} |a_\nu|$ , dass für  $0 \leq \sigma < a_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g(x) - g_n(x)| e^{\sigma|x|} = 0,$$

gleichmäßig in  $x \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Da die Laplace-Transformationen von  $g$  und  $g_n$  existieren und in dem Streifen  $-a_0 < \operatorname{Re} s < a_0$  holomorph sind, gilt für  $0 \leq \sigma < a_0$  und positives  $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |g(x) - g_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left( \frac{1}{\Psi(s)} - \frac{1}{\Psi_n(s)} \right) e^{xs} ds \right| \\ &\leq \frac{e^{-\sigma x}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\Psi(i\tau - \sigma)} - \frac{1}{\Psi_n(i\tau - \sigma)} \right| d\tau. \end{aligned}$$

Zu  $R > 0$  teilen wir das letzte Integral nun auf als die Summe der Integrale über  $I = [-R, R]$  und  $\mathbb{R} \setminus I$ . Zum einen existiert nach (1.22) zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$

$$\int_{-R}^R \underbrace{\left| \frac{1}{\Psi(i\tau - \sigma)} - \frac{1}{\Psi_n(i\tau - \sigma)} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) gleichmäßig in } [-R, R]} d\tau \leq 2\varepsilon R$$

gilt. Zum anderen existiert nach Lemma 1.33 zu jedem  $p \in \mathbb{N}$  und allen  $n > p$  eine von  $n$  unabhängige Konstante  $M_p$ , sodass der zweite Summand abgeschätzt werden kann durch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus I} \left| \frac{1}{\Psi(i\tau - \sigma)} - \frac{1}{\Psi_n(i\tau - \sigma)} \right| d\tau &\leq 4M_p \int_R^\infty \tau^{-p} d\tau \\ &= \frac{4M_p}{p-1} R^{-p+1}. \end{aligned}$$

Mit  $p \geq 2$  und ausreichend großem  $R$  folgt damit die Behauptung. Integriert man zu Beginn des Beweises über eine Parallele zur imaginären Achse durch  $\sigma$  anstatt durch  $-\sigma$ , so erhält man analog die Aussage für negatives  $x \in \mathbb{R}_-$ .  $\square$

TP Funktionen unendlichen Typs sind auch unendlich oft differenzierbar (wenn auch nicht notwendig reell-analytisch), TP Funktionen endlichen Typs  $n$  zumindest noch  $n - 2$  mal. Fügt man zu Beginn des obigen Beweises für  $r \in \mathbb{N}$  noch den Faktor  $s^r$  zum Integranden hinzu, so folgt ab ausreichend großem  $n$  dieselbe gleichmäßige Konvergenz für alle Ableitungen  $g_n^{(r)} \rightarrow g^{(r)}$ .

Ähnlich zu den EB-Splines können auch TP Funktionen endlichen Typs einfach ausgewertet werden (vgl. [64]). Da das Produkt der  $n$  Modulationen in (1.19) für  $\hat{g}_n$  zu einer Modulation zusammengefasst und als Translation dieser Funktion aufgefasst werden kann, vernachlässigen wir diese an dieser Stelle und betrachten stattdessen  $g_n$  mit

$$\hat{g}_n(\omega) = \prod_{\nu=1}^n \frac{1}{1 + 2\pi i \frac{\omega}{a_\nu}} \quad \text{bzw.} \quad g_n(x) = \ast_{\nu=1}^n |a_\nu| e^{-a_\nu x} \chi_{[0,\infty)}(a_\nu x). \quad (1.23)$$

Sind alle Gewichte identisch  $a_\nu = a$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ , so ergibt sich mittels der Faltung für  $g_n$  die explizite Darstellung

$$g_n(x) = |a| \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} e^{-ax} \chi_{[0,\infty)}(ax).$$

Besitzt  $g_n$  hingegen zwei unterschiedliche Gewichte  $a_1 \neq a_n$ , so gilt die Rekursion

$$g_n(x) = g_{a_1, \dots, a_n}(x) = \frac{a_1 g_{a_2, \dots, a_n}(x) - a_n g_{a_1, \dots, a_{n-1}}(x)}{a_1 - a_n}.$$

Denn für die Fourier-Transformierte der rechten Seite rechnet man sofort nach

$$\begin{aligned} \frac{a_1 \hat{g}_{a_2, \dots, a_n}(\omega) - a_n \hat{g}_{a_1, \dots, a_{n-1}}(\omega)}{a_1 - a_n} &= \frac{1}{a_1 - a_n} \left( a_1 \prod_{\nu=2}^n \frac{a_\nu}{a_\nu + 2\pi i \omega} - a_n \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_\nu}{a_\nu + 2\pi i \omega} \right) \\ &= \frac{\prod_{\nu=1}^n a_\nu}{a_1 - a_n} \frac{(a_1 + 2\pi i \omega) - (a_n + 2\pi i \omega)}{\prod_{\nu=1}^n (a_\nu + 2\pi i \omega)} \\ &= \prod_{\nu=1}^n \frac{a_\nu}{a_\nu + 2\pi i \omega} = \hat{g}_{a_1, \dots, a_n}(\omega). \end{aligned}$$

In Abbildung 1.2 wurde diese Methode verwendet, um die Graphen zweier TP Funktionen darzustellen. Auf der linken Seite sieht man eine einseitige Exponentialfunktion, der einzig

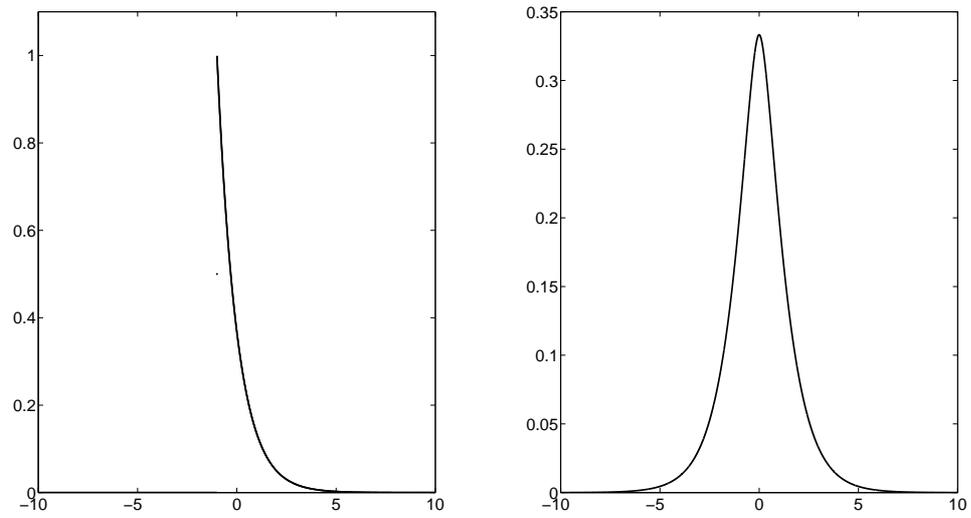


Abbildung 1.2: Die Graphen zweier TP Funktionen endlichen Typs. Links  $g_1$  mit Gewicht  $a_1 = 1$ , rechts  $g_4$  mit Gewichten  $-2, -1, 1, 2$ .

unstetige Typ von TP Funktionen, auf der rechten Seite hingegen eine symmetrische und zweimal stetig-differenzierbare TP Funktion.

## Kapitel 2

# Die Zak-Transformation

Ein sehr wichtiges Hilfsmittel in der Analyse von Gabor-Frames ist die *Zak-Transformation*. Unter verschiedensten Namen hielt diese Transformation aber auch Einzug in viele weitere Forschungsgebiete. Zuerst wurde sie vermutlich 1950 von Gel'fand [34] eingeführt und seinerzeit oft *Gel'fand mapping* genannt. Später wurde sie in der Festkörperphysik von Zak [88, 89] und unabhängig von Gel'fand wiederentdeckt. Heute wird sie darüber hinaus auch in der Quantenfeldtheorie [60] angewandt. Ferner ergaben sich weitere vermutlich unabhängige Entdeckungen dieser Transformation in der Theorie der Differentialgleichungen [10] und unter dem Namen des *exponential Euler spline* auch im Zusammenhang mit kardinaler Spline Interpolation [79]. Wachsendes Interesse in der Zeit-Frequenz-Analyse gewann die Transformation mit den Darstellungen von Janssen in [49, 50]. Durch die Verwendung zur Charakterisierung von Gabor-Frames auf dem kritischen Gitter in [21] und mit rationalem oversampling in [90, 91] etablierten Daubechies und Zibulski, Zeevi die Zak-Transformation vollends. Sie lieferten durch ihre Arbeiten eine Möglichkeit der Berechnung diskreter Gabor-Frames und zugehöriger Duale, ein Grundstein für die Anwendung in den Ingenieurwissenschaften. Eine ausführlichere Zusammenfassung der grundlegendsten Eigenschaften und Anwendungen der Zak-Transformation findet sich z.B. in [14, 15] und [36].

## 2.1 Eigenschaften der Zak-Transformation

**Definition 2.1.** Zu  $\alpha > 0$  und einer Funktion  $f$  nach  $\mathbb{R}$ , ist die *Zak-Transformation* definiert durch

$$Z_\alpha f(x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega}, \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^2.$$

Für beschränkte Funktionen mit kompaktem Träger existiert die Zak-Transformation daher punktweise, für Funktionen  $f \in W(\mathbb{R})$  aus dem Wiener-Raum (1.8) ist sie zumindest noch fast überall beschränkt  $Z_\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  (s. [36]). Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , so folgt

$$\int_0^{1/\alpha} \int_0^\alpha |Z_\alpha f(x, \omega)| \, dx \, d\omega \leq \int_0^{1/\alpha} \int_0^\alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x - \alpha k)| \, dx \, d\omega = \frac{1}{\alpha} \|f\|_1$$

und damit  $Z_\alpha f \in L^1(Q_\alpha)$ , wobei  $Q_\alpha := [0, \alpha] \times [0, \frac{1}{\alpha}]$  der sogenannte *Fundamentbereich* der Transformation ist. Für Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ist der Formalismus der Zak-Transformation ebenfalls wohldefiniert und liefert sogar einen unitären Operator.

**Satz 2.2.** Zu  $\alpha > 0$  liefert die Zak-Transformation durch  $f \rightarrow \sqrt{\alpha} Z_\alpha f$  einen unitären Operator von  $L^2(\mathbb{R})$  nach  $L^2(Q_\alpha)$ .

*Beweis.* (vgl. [15]) Ist  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , so sind die Funktionen  $F_k(x, \omega) := f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega}$  aus  $L^2(Q_\alpha)$  und paarweise orthogonal

$$\langle F_j, F_k \rangle_{L^2(Q_\alpha)} = \int_0^\alpha f(x - \alpha j) \overline{f(x - \alpha k)} \int_0^{1/\alpha} e^{2\pi i \alpha \omega (j-k)} \, d\omega \, dx = 0, \quad j \neq k.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\alpha} Z_\alpha f\|_{L^2(Q_\alpha)}^2 &= \alpha \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_k \right\|_{L^2(Q_\alpha)}^2 = \alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|F_k\|_{L^2(Q_\alpha)}^2 \\ &= \alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{1/\alpha} \int_0^\alpha |F_k(x, \omega)|^2 \, dx \, d\omega = \alpha \frac{1}{\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\alpha |f(x - \alpha k)|^2 \, dx = \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

wonach  $\sqrt{\alpha} Z_\alpha$  eine Isometrie ist. Nun betrachten wir das Bild der Orthonormalbasis

$$\left\{ f_{n,m}(x) := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \chi_{[0,\alpha]}(x - \alpha n) e^{2\pi i m \frac{x}{\alpha}} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

des  $L^2(\mathbb{R})$  unter der Zak-Transformation. Eine kurze Rechnung ergibt für  $x \in (0, \alpha)$

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha} Z_\alpha f_{m,n}(x, \omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{[0, \alpha]}(x - (n+k)\alpha) e^{2\pi i m (\frac{x}{\alpha} - k)} e^{2\pi i \alpha k \omega} \\ &= e^{2\pi i m \frac{x}{\alpha}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{[0, \alpha]}(x - (n+k)\alpha) e^{2\pi i \alpha k \omega} = e^{2\pi i m \frac{x}{\alpha}} e^{-2\pi i \alpha n \omega}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Folglich wird die Orthonormalbasis  $\{f_{m,n}\}$  des  $L^2(\mathbb{R})$  unter  $\sqrt{\alpha} Z_\alpha$  auf die Orthonormalbasis

$$\left\{ e_{n,m}(x, \omega) := e^{2\pi i m \frac{x}{\alpha}} e^{-2\pi i \alpha n \omega} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

des  $L^2(Q_\alpha)$  abgebildet. Der Operator ist also ein isometrischer Isomorphismus.  $\square$

Da die Zak-Transformierte *quasiperiodisch* ist, das bedeutet sie ist periodisch im zweiten Argument

$$Z_\alpha f(x, \omega + \frac{n}{\alpha}) = Z_\alpha f(x, \omega), \quad n \in \mathbb{N},$$

und fast periodisch im ersten Argument

$$Z_\alpha f(x + \alpha n, \omega) = e^{2\pi i \alpha n \omega} Z_\alpha f(x, \omega), \quad n \in \mathbb{N},$$

ist diese Transformation auf ihrem Fundamentalebene  $Q_\alpha$  vollständig erklärt und für Funktionen aus  $L^1(\mathbb{R})$  oder  $L^2(\mathbb{R})$  folglich auf ganz  $\mathbb{R}^2$  wohldefiniert. Darüber hinaus ist sie stetig, falls  $f \in W_0(\mathbb{R})$  ist.

**Lemma 2.3.** *Ist  $f \in W_0(\mathbb{R})$ , so ist die Zak-Transformierte  $Z_\alpha f$  für alle  $\alpha > 0$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$ .*

*Beweis.* (vgl. [36]) Da  $f \in W(\mathbb{R})$  ist, existiert zu allen  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\sum_{|k| > N} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, \alpha]} |f(x - \alpha k)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Weiter ist  $f$  stetig, weshalb folglich auch die Partialsummen  $\sum_{|k| \leq N} f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega}$  für alle  $N \in \mathbb{N}$  stetig sind auf  $\mathbb{R}^2$ . Demgemäß existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $(x, \omega), (x', \omega') \in \mathbb{R}^2$  mit  $|x - x'| + |\omega - \omega'| < \delta$

$$\left| \sum_{|k| \leq N} f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega} - \sum_{|k| \leq N} f(x' - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega'} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Infolgedessen erhalten wir

$$\begin{aligned}
|Z_\alpha f(x, \omega) - Z_\alpha f(x', \omega')| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x' - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega'} \right| \\
&\leq \left| \sum_{|k| \leq N} f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega} - \sum_{|k| \leq N} f(x' - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega'} \right| \\
&\quad + 2 \sum_{|k| > N} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, \alpha]} |f(x - \alpha k)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist  $Z_\alpha f$  stetig. □

Aus der Definition folgt mit  $f_\alpha = f(\alpha \cdot)$  die Skalierungsgleichung

$$Z_\alpha f(x, \omega) = Z_1 f_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}, \alpha \omega\right). \quad (2.1)$$

Daher betrachtet man bei Skalierungsinvarianten Funktionstypen wie TP Funktionen häufig nur  $\alpha = 1$ . Sind weiter  $f, \hat{f} \in W(\mathbb{R})$ , so gilt ferner

$$Z_\alpha f(x, \omega) = \alpha^{-1} e^{2\pi i x \omega} Z_{1/\alpha} \hat{f}(\omega, -x). \quad (2.2)$$

Vorausgesetzt  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ist absolutintegrierbar, so bietet sich überdies die Möglichkeit der Rekonstruktion von  $f$  und der Fourier-Transformierten  $\hat{f}$  aus der Zak-Transformierten.

**Lemma 2.4.** *Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , so gelten die Umkehrungen*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha \int_0^{1/\alpha} Z_\alpha f(x, \omega) d\omega, \\
\hat{f}(\omega) &= \int_0^\alpha Z_\alpha f(x, \omega) e^{-2\pi i x \omega} dx.
\end{aligned}$$

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich sofort aus den direkten Rechnungen

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/\alpha} Z_\alpha f(x, \omega) d\omega &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{1/\alpha} f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega} d\omega = \alpha^{-1} f(x), \\
\int_0^\alpha Z_\alpha f(x, \omega) e^{-2\pi i x \omega} dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\alpha f(x - \alpha k) e^{-2\pi i (x - \alpha k) \omega} = \hat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Gabor-Frames und die Zak-Transformation

Im Falle des kritischen Gitters  $\alpha\beta = 1$  kann die Zak-Transformation wie folgt zur Charakterisierung von Gabor-Riesz-Basen verwendet werden.

**Satz 2.5** ([45]). *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha > 0$ .*

- (i)  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  ist genau dann vollständig in  $L^2(\mathbb{R})$ , wenn  $Z_\alpha g(x, \omega) \neq 0$  fast überall.
- (ii)  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  ist genau dann ein Bessel-System für  $L^2(\mathbb{R})$ , wenn  $|Z_\alpha g|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .
- (iii)  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  ist genau dann eine Gabor-Riesz-Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ , wenn Riesz-Schranken  $0 < A \leq B < \infty$  existieren, sodass  $A \leq \alpha |Z_\alpha g(x, \omega)|^2 \leq B$  fast überall.
- (iv)  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  ist genau dann eine Orthonormalbasis für  $L^2(\mathbb{R})$ , wenn  $\alpha |Z_\alpha g(x, \omega)|^2 = 1$  fast überall.

*Beweis.* Zu (i): Wiederum bezeichne  $e_{n,m}$  die Elemente der Orthonormalbasis

$$\left\{ e_{n,m}(x, \omega) = e^{2\pi i m \frac{x}{\alpha}} e^{-2\pi i \alpha n \omega} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

von  $L^2(Q_\alpha)$ . Man rechnet leicht nach, dass

$$Z_\alpha \left( M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\alpha k} g \right) (x, \omega) = Z_\alpha g(x, \omega) e_{k,l}(x, \omega)$$

gilt. Damit folgt für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit Satz 2.2

$$\langle f, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\alpha k} g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \alpha \langle Z_\alpha f, e_{k,l} Z_\alpha g \rangle_{L^2(Q_\alpha)} = \alpha \langle Z_\alpha f \overline{Z_\alpha g}, e_{k,l} \rangle_{L^2(Q_\alpha)}.$$

Ist nun  $Z_\alpha g \neq 0$  fast überall und  $f \neq 0$ , so ist auch  $Z_\alpha f \overline{Z_\alpha g}$  nicht die Nullfunktion und  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  somit vollständig. Existiert andererseits eine Menge  $\mathfrak{M} \subset Q_\alpha$ ,  $\mathfrak{M} \neq Q_\alpha$ , mit positivem Maß  $\lambda(\mathfrak{M}) > 0$ , sodass  $Z_\alpha g = 0$  auf  $\mathfrak{M}$ , so liefert jede Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp}(Z_\alpha f) = \mathfrak{M}$ , dass  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  nicht vollständig sein kann. Verschwindet  $Z_\alpha g$  sogar auf ganz  $Q_\alpha$ , so muss  $g$  schon Null sein und kann kein vollständiges Gabor-System bilden.

Zu (ii)-(iv): Dieselben Rechnungen wie oben liefern für die Zak-Transformierte des Frameope-

rators  $S$  angewandt auf  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
Z_\alpha(Sf) &= Z_\alpha \left( \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\alpha k} g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\alpha k} g \right) \\
&= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\alpha k} g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} Z_\alpha g e_{k,l} \\
&= \alpha \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \langle Z_\alpha f, Z_\alpha g e_{k,l} \rangle_{L^2(Q_\alpha)} Z_\alpha g e_{k,l} \\
&= \alpha Z_\alpha g \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \langle \overline{Z_\alpha g} Z_\alpha f, e_{k,l} \rangle_{L^2(Q_\alpha)} e_{k,l} = \alpha Z_\alpha g \overline{Z_\alpha g} Z_\alpha f.
\end{aligned}$$

Diese Faktorisierung impliziert wiederum

$$\langle Sf, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \alpha \langle Z_\alpha Sf, Z_\alpha f \rangle_{L^2(Q_\alpha)} = \alpha^2 \langle |Z_\alpha g|^2 Z_\alpha f, Z_\alpha f \rangle_{L^2(Q_\alpha)},$$

woraus die übrigen Aussagen folgen.  $\square$

Für den Fall des rationalen oversamplings  $\alpha\beta = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $\text{ggT}(p, q) = 1$ , haben Zibulski und Zeevi mit Hilfe der Zak-Transformation ebenfalls eine Charakterisierung von Gabor-Frames gefunden. Zu dem Rechteck  $Q_{\alpha,p} := [0, \frac{\alpha}{p}] \times [0, \frac{1}{\alpha}]$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{H}_{\alpha,p} := L^2(Q_{\alpha,p}, \mathbb{C}^p)$  den Hilbert-Raum der quadratintegrierbaren, vektorwertigen Funktionen auf  $Q_{\alpha,p}$  mit Norm

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{\alpha,p}}^2 = \sum_{j=1}^p \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\frac{\alpha}{p}} |f_j(x, \omega)|^2 dx d\omega.$$

Dann liefert die vektorwertige Zak-Transformation

$$Z_\alpha f(x, \omega) := \left( Z_\alpha f \left( x + \frac{\alpha}{p} r, \omega \right) \right)_{r=0}^{p-1}$$

nach Satz 2.2 durch  $\sqrt{\alpha} \mathcal{Z}_\alpha$  einen unitären Operator von  $L^2(\mathbb{R})$  nach  $\mathcal{H}_{\alpha,p}$ . Weiter sei  $\mathcal{A}(x, \omega) = (A_{r,s}(x, \omega))_{r,s=0}^{p-1}$  die  $p \times p$ -Matrix mit Einträgen

$$A_{r,s}(x, \omega) := \alpha \sum_{j=0}^{q-1} \overline{Z_\alpha(x + \frac{\alpha}{p} s, \omega - \beta j)} Z_\alpha(x + \frac{\alpha}{p} r, \omega - \beta j) e^{2\pi i j(r-s)/q}, \quad (x, \omega) \in Q_{\alpha,p}.$$

**Theorem 2.6** (Zibulski-Zeevi [90, 91]). *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $0 < \alpha\beta = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $\text{ggT}(p, q) = 1$ . Dann gilt*

$$\mathcal{Z}_\alpha(S_{g,g}f)(x, \omega) = \mathcal{A}(x, \omega) \mathcal{Z}_\alpha f(x, \omega)$$

für fast alle  $(x, \omega) \in Q_{\alpha,p}$ .

Der Beweis hiervon ergibt sich durch das einfache, aber längliche Nachrechnen der Gleichung. Da  $\mathcal{Z}_\alpha$  bis auf Normalisierung ein unitärer Operator ist, liefert das Theorem, dass das Spektrum des Frameoperators an den Eigenwerten der Matrix  $\mathcal{A}(x, \omega)$  abgelesen werden kann. Schreiben wir die Matrix in Anlehnung an die Ron-Shen Matrix als

$$\mathcal{A}(x, \omega) = \mathcal{Q}(x, \omega)^* \mathcal{Q}(x, \omega),$$

mit rechteckiger  $q \times p$  - Matrix

$$\mathcal{Q}(x, \omega) = \sqrt{\alpha} \left( \overline{Z_\alpha g(x + \frac{\alpha}{p} r, \omega - \beta j)} e^{-2\pi i j r / q} \right)_{j,r=0}^{q-1, p-1},$$

so gilt folgendes Resultat.

**Korollar 2.7.** *Sind  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $0 < \alpha\beta = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(p, q) = 1$ , so ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  genau dann ein Frame mit Frameschranken  $0 < A \leq B < \infty$ , wenn*

$$\begin{aligned} \text{ess inf}_{Q_{\alpha,p}} \|\mathcal{Q}(x, \omega) \mathbf{c}\|_2^2 &\geq A \|\mathbf{c}\|_2^2, \\ \text{ess sup}_{Q_{\alpha,p}} \|\mathcal{Q}(x, \omega) \mathbf{c}\|_2^2 &\leq B \|\mathbf{c}\|_2^2 \quad \text{für alle } \mathbf{c} \in \mathbb{C}^p. \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.8.** (i) Im Falle des rationalen oversamplings lässt sich die Frage nach einem Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  also überprüfen, indem man zeigt, dass die Zeilen der Matrizen  $\mathcal{Q}(x, \omega)$  für fast alle  $x, \omega \in \mathbb{R}$  einen Frame des  $\mathbb{C}^p$  mit gleichmäßigen Frameschranken bilden.

(ii) Inzwischen gibt es mehrere Versionen der Zibulski-Zeevi Matrizen. In [68] zeigten Lyubarskii und Nes, dass die Matrix

$$\mathcal{P}(x, \omega) := \left( \overline{Z_{\alpha q} g(x + \alpha k + \frac{l}{\beta}, \omega)} \right)_{k,l=0}^{q-1, p-1} \quad (2.3)$$

denselben Rang hat wie  $\mathcal{Q}(x, \omega)$ . Daher kann alternativ auch  $\mathcal{P}(x, \omega)$  auf  $Q_{\alpha,p}$  betrachtet werden, welche am ehesten als eine rationale Version der pre-Gramian-Matrix aus Theorem 1.20 aufgefasst werden kann.

(iii) Eine weitere bekannte Variante, welche ebenfalls von Zibulski und Zeevi beschrieben wurde, ist die Matrix

$$\tilde{\mathcal{Q}}(x, \omega) := \frac{1}{\sqrt{\beta p}} \left( \overline{Z_{\beta^{-1}} g(x - \frac{p}{q} j, \omega + \frac{r}{p})} \right)_{j,r=0}^{q-1, p-1}. \quad (2.4)$$

Diese beinhaltet Auswertungen der Zak-Transformierten bezüglich  $\beta^{-1}$  anstelle von  $\alpha$ , und ist auf  $[0, q^{-1}] \times [0, p^{-1}]$  vollständig erklärt anstatt auf  $Q_{\alpha,p}$ .

Auch im allgemeinen Fall  $\alpha, \beta > 0$ , kann die Zak-Transformation helfen ein Gabor-System auf die Frameeigenschaft zu überprüfen. Für die pre-Gramian-Matrix aus Theorem 1.20 liefert die Anwendung der Parseval Identität

$$\begin{aligned} \|P_g(x)\mathbf{c}\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \bar{g}\left(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}\right) \right|^2 \\ &= \alpha \int_0^{1/\alpha} \left| \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} c_l \bar{g}\left(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}\right) e^{-2\pi i k \alpha \omega} \right|^2 d\omega \\ &= \alpha \left\| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l Z_\alpha \bar{g}\left(x - \frac{l}{\beta}, \cdot\right) \right\|_{L^2(0, \frac{1}{\alpha})}^2. \end{aligned}$$

Diese Identität nutzten Janssen und Strohmer in [57], um zu zeigen, dass der Sekans Hyperbolicus dieselbe Framemenge besitzt wie das Gauß-Fenster. Ihr Ansatz kann wie folgt zusammengefasst werden.

**Satz 2.9.** *Es seien  $\alpha, \beta, \eta > 0$ ,  $g, h \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Frameschranken  $0 < A \leq B < \infty$ . Weiterhin existiere die Faktorisierung*

$$Z_{\eta\alpha} h\left(\eta x, \frac{\omega}{\eta}\right) = D(x) \cdot C(\omega) \cdot Z_\alpha g(x, \omega), \quad (x, \omega) \in Q_\alpha,$$

mit nach unten und oben beschränkten Faktoren

$$0 < \sqrt{a} \leq \text{ess inf } |C(\omega)|^2 \leq \text{ess sup } |C(\omega)|^2 \leq \sqrt{b} < \infty,$$

$$0 < \sqrt{a} \leq \text{ess inf } |D(x)|^2 \leq \text{ess sup } |D(x)|^2 \leq \sqrt{b} < \infty.$$

Dann ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(h, \eta\alpha, \frac{\beta}{\eta})$  ebenfalls ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Frameschranken  $0 < a\eta A \leq b\eta B < \infty$ .

Ähnlich zum Gauß-Fenster und dem Sekans Hyperbolicus gilt folgende Faktorisierung für TP Funktionen und EB-Splines.

**Lemma 2.10** ([63]). *Es seien  $\alpha > 0$  und  $g \in L^1(\mathbb{R})$  eine TP Funktion endlichen Typs  $m \geq 2$  mit Fourier-Transformierter*

$$\hat{g}(\omega) = \prod_{\nu=1}^m \frac{1}{1 + 2\pi i \frac{\omega}{a_\nu}},$$

wobei  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sind  $\lambda_\nu := -\alpha a_\nu$  und  $B_\Lambda$  der zugehörige EB-Spline wie in (1.15), so gilt

$$\alpha Z_\alpha g(x, \omega) = \prod_{\nu=1}^m \frac{\alpha a_\nu}{1 - e^{-\alpha(a_\nu + 2\pi i \omega)}} Z_1 B_\Lambda\left(\frac{x}{\alpha}, \alpha \omega\right), \quad (x, \omega) \in [0, \alpha] \times [0, \frac{1}{\alpha}).$$

*Beweis.* Die Fourier-Transformierte von  $B_\Lambda$  lautet

$$\begin{aligned} \hat{B}_\Lambda(\omega) &= \prod_{\nu=1}^m \frac{e^{\lambda_\nu - 2\pi i \omega} - 1}{\lambda_\nu (1 - 2\pi i \frac{\omega}{\lambda_\nu})} \\ &= \prod_{\nu=1}^m \frac{1 - e^{-(\alpha a_\nu + 2\pi i \omega)}}{\alpha a_\nu} \prod_{\nu=1}^m (1 + 2\pi i \frac{\omega}{\alpha a_\nu})^{-1} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=: t(\omega)} \\ &= t(\omega) \alpha \hat{g}_\alpha(\omega), \end{aligned}$$

wobei  $t$  eine eins-periodische Funktion ist und  $g_\alpha = g(\alpha \cdot)$ . Dies bedeutet, dass

$$Z_1 \hat{B}_\Lambda(\omega, x) = t(\omega) \alpha Z_1 \hat{g}_\alpha(\omega, x)$$

und mit (2.1), (2.2) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \alpha Z_\alpha g(x, \omega) &= \alpha Z_1 g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}, \alpha \omega\right) \\ &= \alpha Z_1 \hat{g}_\alpha\left(\alpha \omega, -\frac{x}{\alpha}\right) e^{2\pi i x \omega} \\ &= t(\alpha \omega)^{-1} Z_1 \hat{B}_\Lambda\left(\alpha \omega, -\frac{x}{\alpha}\right) e^{2\pi i x \omega} \\ &= t(\alpha \omega)^{-1} Z_1 B_\Lambda\left(\frac{x}{\alpha}, \alpha \omega\right), \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Da der Faktor  $t$  aus der obigen Faktorisierung nach oben und unten beschränkt ist, ist  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  nach Satz 2.9 genau dann ein Frame, falls  $\mathcal{G}(B_\Lambda, 1, \alpha \beta)$  ein Frame ist. Darüber hinaus besitzen die Zak-Transformierten  $Z_\alpha g$  und  $Z_1 B_\Lambda$  für alle  $\alpha > 0$  im Fundamentalbereich gleich viele, proportional zueinander angeordnete Nullstellen.

## 2.3 Nullstellen der Zak-Transformierten von TP Funktionen und EB-Splines

Wie im letzten Abschnitt deutlich wird, spielen Anzahl und Lage der Nullstellen der Zak-Transformierten im Zusammenhang mit Gabor-Frames gerade bei rationalem oversampling eine wichtige Rolle. Bereits 1975 zeigten Auslander und Tolmieri [2], dass jede stetige Zak-Transformierte mindestens eine Nullstelle besitzt. Später lieferte Janssen [49] einen wesentlich kürzeren Beweis dieser Aussage.

**Theorem 2.11** ([2, 49]). *Ist die Transformierte  $Z_\alpha f$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$ , so besitzt sie mindestens eine Nullstelle im Fundamentalbereich  $Q_\alpha$ .*

*Beweis.* Nehmen wir an  $Z_\alpha f$  sei stetig, habe jedoch keine Nullstellen in  $Q_\alpha$ . Dann existiert ein stetiger Logarithmus (s. [71]), sodass

$$Z_\alpha f(x, \omega) = |Z_\alpha f(x, \omega)| e^{2\pi i \varphi(x, \omega)},$$

mit stetiger Funktion  $\varphi$ . Wegen der Quasiperiodizität gibt es daher eine Funktion  $\varkappa : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  mit

$$\varphi(x + \alpha n, \omega + \frac{k}{\alpha}) = \varphi(x, \omega) + \alpha n \omega + \varkappa(n, k), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Hiermit ergibt sich für  $(x, \omega) = (0, 0)$

$$\varphi(\alpha n, \frac{k}{\alpha}) = \varphi(0, 0) + \varkappa(n, k).$$

Andererseits rechnet man ebenfalls schnell nach

$$\varphi(\alpha n, \frac{k}{\alpha}) = \varphi(0, \frac{k}{\alpha}) + \alpha n \frac{k}{\alpha} + \varkappa(n, 0) = \varphi(0, 0) + nk + \varkappa(n, 0) + \varkappa(0, k),$$

$$\varphi(\alpha n, \frac{k}{\alpha}) = \varphi(\alpha n, 0) + \varkappa(0, k) = \varphi(0, 0) + \varkappa(0, k) + \varkappa(n, 0).$$

Die drei obigen Gleichungen zusammen implizieren damit, dass

$$\varkappa(n, k) = \varkappa(n, 0) + \varkappa(0, k) = \varkappa(n, 0) + \varkappa(0, k) + kn$$

gilt. Daher muss die Annahme, dass  $Z_\alpha f$  keine Nullstelle besitzt, falsch sein.  $\square$

Da wir in Lemma 2.3 bereits festgestellt haben, dass die Zak-Transformierte einer jeden stetigen Wiener-Funktion ebenfalls stetig ist, haben diese demnach Nullstellen. Dies bedeutet

nach Satz 2.5, dass sie keine Gabor-Riesz-Basen bilden können. Gemeinsam mit Korollar 1.19 folgt somit das Balian-Low-Theorem 1.23. Insbesondere kann es also keine Gabor-Riesz-Basis einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger, wie etwa einem stetigen EB-Spline geben. In Abbildung 2.1 haben wir den EB-Spline  $B_\Lambda$  mit  $\Lambda = (-1, 1, 5)$  und den Betrag der Zak-Transformierten  $Z_1 B_\Lambda$  dargestellt. Man erkennt ganz deutlich die Nullstelle bei  $\omega = \frac{1}{2}$ .

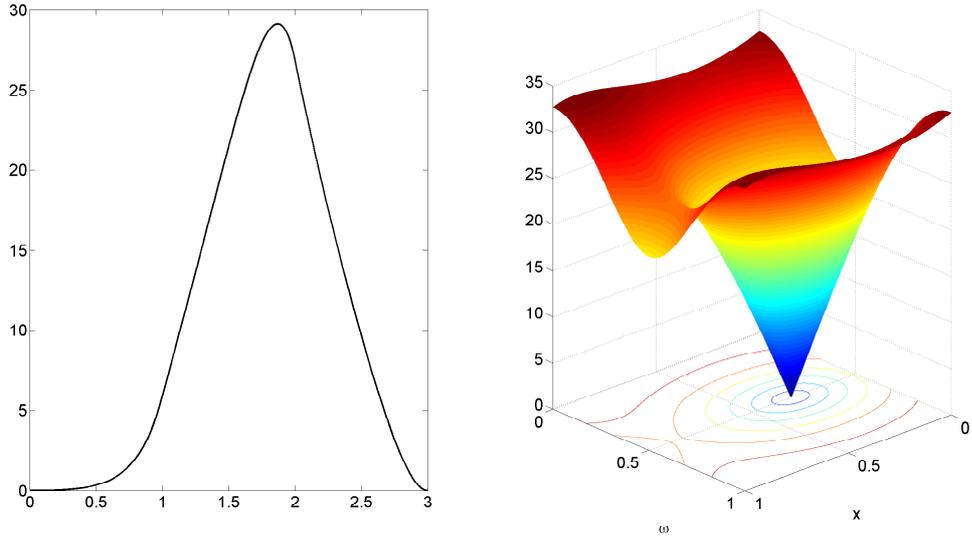


Abbildung 2.1: Die Graphen des EB-Splines  $B_\Lambda$  mit  $\Lambda = (-1, 1, 5)$  und des Betrages der zugehörigen Zak-Transformierten  $Z_1 B_\Lambda$  auf  $Q_1$ .

Später werden wir noch sehen, dass die Zak-Transformierte und ihre Nullstellen bei diskretisierten Frames ebenfalls eine große Rolle spielen. Zunächst möchten wir aber die Zak-Transformierte von stetigen TP Funktionen und EB-Splines genauer betrachten. Da beide Funktionstypen Wiener-Funktionen sind, haben die Transformaten mindestens eine Nullstelle im Fundamentalbereich. Nachfolgend möchten wir die Nullstellenmenge weiter konkretisieren. Hierzu komplexifizieren wir das zweite Argument der Zak-Transformierten zeitweilen und bedienen uns der Funktionentheorie.

**Definition 2.12.** Die komplexifizierte Zak-Transformierte einer Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  zu  $\alpha > 0$  ist definiert als

$$Z_\alpha f(x, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k s} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - \alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega} e^{-2\pi \alpha k \tau},$$

mit  $x, \omega, \tau \in \mathbb{R}$ ,  $s = \omega + i\tau \in \mathbb{C}$  so, dass die Reihe konvergiert.

Wegen des bereits erwähnten exponentiellen Abklingverhaltens integrierbarer TP Funktionen

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{xs} g(x) = 0, \quad |s| < a_0 = \min_{\nu} |a_{\nu}|,$$

existiert deren komplexifizierte Zak-Transformierte für alle  $\omega + i\tau$  mit  $|\tau| < \frac{a_0}{2\pi}$ . Für festes  $x$  bilden diese sogar eine holomorphe Funktion.

**Theorem 2.13** ([62]). *Es seien  $g$  eine TP Funktion unendlichen Typs und  $g_n$  die TP Funktion endlichen Typs  $n \in \mathbb{N}$  wie in (1.19). Dann sind für  $\alpha > 0$  die zugehörigen Zak-Transformierten  $Z_{\alpha}g_n(x_0, \cdot)$  und  $Z_{\alpha}g(x_0, \cdot)$  für festes  $x_0 \in [0, \alpha)$  holomorphe Funktionen in dem Streifengebiet  $S_{\xi} = \{s \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(s)| < \xi\}$  mit  $0 \leq \xi < \frac{a_0}{2\pi}$ . Darüber hinaus konvergiert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_{\alpha}g(x, s) - Z_{\alpha}g_n(x, s)| = 0,$$

gleichmäßig für alle  $s = \omega + i\tau$  in dem Streifen  $S_{\xi}$ ,  $0 \leq \xi < \frac{a_0}{2\pi}$ , und alle  $x \in [0, \alpha)$ .

*Beweis.* Die Holomorphie von  $Z_{\alpha}g_n(x_0, \cdot)$  folgt direkt aus Lemma 2.10 und Formel (1.18). Diese liefern eine Darstellung als Produkt einer endlichen Exponentialsumme und einem rationalen Faktor, dessen Singularitäten außerhalb von  $S_{\xi}$  liegen. Die Holomorphie von  $Z_{\alpha}g(x_0, \cdot)$  folgt damit aus der gleichmäßigen Konvergenz, welche wir nun zeigen.

Es seien  $x \in [0, \alpha)$  und  $c \in \mathbb{R}$  mit  $2\pi\xi < 2\pi c < a_0$ . Nach Satz 1.34 existiert zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$\begin{aligned} |Z_{\alpha}g(x, s) - Z_{\alpha}g_n(x, s)| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x + \alpha k) - g_n(x + \alpha k)| e^{2\pi\alpha|k\tau|} \\ &\leq \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi c|x + \alpha k|} e^{2\pi\alpha|k\tau|} \\ &\leq \varepsilon \left( \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi\alpha k(|\tau| - c)} + e^{-2\pi c x} + e^{2\pi c} \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{2\pi\alpha k(c - |\tau|)} \right) \\ &\leq \varepsilon (1 + e^{2\pi c}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\pi\alpha k(|\tau| - c)} \leq \varepsilon (1 + e^{2\pi c}) \frac{e^{2\pi\alpha(c - |\tau|)}}{2\pi\alpha(c - |\tau|)}. \end{aligned}$$

Somit ist der zweite Teil des Theorems bewiesen und es folgt, dass  $Z_{\alpha}g(x_0, \cdot)$  als gleichmäßiger Grenzwert holomorpher Funktionen in  $S_{\xi}$  selbst eine holomorphe Funktion ist.  $\square$

Als nächstes bestimmen wir die Nullstellenmenge von  $Z_{\alpha}g_n$  für eine TP Funktion endlichen Typs. Dafür genügt es nach Lemma 2.10 die Transformierte von EB-Splines für  $\alpha = 1$  zu be-

trachten. Die Idee des Beweises ist es starke Vorzeichenwechsel (s. Abschnitt 1.3) zu zählen und durch die Quasiperiodizität einen Widerspruch zu höheren Nullstellenanzahlen zu erzeugen.

**Theorem 2.14** ([62]). *Es sei  $\Lambda \in \mathbb{R}^m$  und  $B_\Lambda$  der zugehörige (stetige) EB-Spline der Ordnung  $m \geq 2$ . Dann erfüllt die komplexifizierte Zak-Transformierte*

$$Z_1 B_\Lambda(x, s) \neq 0 \quad \text{für } x \in [0, 1) \text{ und } s \in \mathbb{C} \text{ mit } |\operatorname{Re}(s)| < \frac{1}{2}.$$

*Ist andererseits  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ , so existiert ein  $x_s \in [0, 1)$  mit  $Z_1 B_\Lambda(x_s, s) = 0$  und  $Z_1 B_\Lambda(x, s) \neq 0$  für  $x \in [0, 1) \setminus \{x_s\}$ .*

*Beweis.* Wir schreiben den Vektor der Gewichte wieder als

$$\Lambda = (\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{s_1}, \dots, \underbrace{\xi_r, \dots, \xi_r}_{s_r}),$$

mit paarweise verschiedenen Gewichten  $\xi_1, \dots, \xi_r \in \mathbb{R}$  und Vielfachheiten  $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{N}$ . Zu  $s \in \mathbb{C}$  mit  $|\operatorname{Re}(s)| < \frac{1}{2}$  betrachten wir die komplexwertige Funktion  $h := Z B_\Lambda(\cdot, s)$ . Nach (1.18) erhalten wir für  $x \in [0, 1)$  die Darstellung

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} B_\Lambda(x+k) e^{-2\pi i k s} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^r p_j^{(k)}(x) e^{\xi_j x} e^{-2\pi i (k-1)s} \\ &= \sum_{j=1}^r \underbrace{\sum_{k=1}^m p_j^{(k)}(x) e^{-2\pi i (k-1)s}}_{:=q_j(x)} e^{\xi_j x}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit komplexwertigen Polynomen  $q_j$  vom Grad  $\sigma_j - 1 \leq s_j - 1$ . Weiter sind die kardinalen Translate der EB-Splines lokal linear unabhängig. Dies bedeutet, dass Splinereihen der Form  $\sum B_\Lambda(\cdot + k) c_k$  mit reellen Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{R}$  nur genau dann auf einem Intervall  $(a, b) \in \mathbb{R}$  verschwinden, falls alle Koeffizienten  $c_k$  mit  $\operatorname{supp} B_\Lambda(\cdot + k) \cap (a, b) \neq \emptyset$  Null sind. Da aber nach Voraussetzung  $|\operatorname{Re}(s)| < \frac{1}{2}$  gilt, können keine zwei aufeinanderfolgenden Koeffizienten von der Funktion  $\operatorname{Re}(h)$  gleichzeitig verschwinden. Somit kann  $\operatorname{Re}(h)$  auf keinem Intervall mit positivem Maß Null sein, was bedeutet, dass mindestens ein Polynom  $q_j$  nicht Null ist. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $\sigma_1 \geq 1$  gilt, und der Summand  $q_1(x) e^{\xi_1 x}$  in  $h|_{[0,1)}$  daher nicht identisch Null ist. Sollte ein anderes Polynom  $q_j$  Null sein, so setzen wir  $\sigma_j = 0$  und bezeichnen mit  $\gamma = \sigma_1 + \dots + \sigma_j$  die Summe der Polynomgrade. Nun verwenden wir die Identität

$$e^{\xi_j x} \frac{d}{dx} \left( e^{-\xi_j x} h(x) \right) = q'_j(x) e^{\xi_j x} + \sum_{k \neq j} ((\xi_k - \xi_j) q_k(x) + q'_k(x)) e^{\xi_k x}.$$

Für den obigen Differentialoperator schreiben wir  $\mathcal{D}_j$  und setzen  $\mathfrak{D} := \mathcal{D}_1^{\sigma_1-1} \prod_{j=2}^r \mathcal{D}_j^{\sigma_j}$ . Damit erhalten wir

$$\mathfrak{D}h(x) = be^{\xi_1 x}, \quad x \in (0, 1),$$

mit einer Konstante  $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Durch die Quasiperiodizität ergibt sich

$$\mathfrak{D}h(x) = be^{\xi_1(x-k)} e^{2\pi i k s}, \quad x \in (k, k+1),$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

Gäbe es nun ein  $\tilde{x} \in [0, 1)$  mit  $Z_1 B_\Lambda(\tilde{x}, s) = h(\tilde{x}) = 0$ , so würde  $h$  wegen der Quasiperiodizität in allen Punkten  $\tilde{x} + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , verschwinden. Somit hätte  $f = \operatorname{Re}(h)$  in diesen Punkten wegen der lokalen linearen Unabhängigkeit isolierte Nullstellen, also mindestens  $N \in \mathbb{N}$  isolierte Nullstellen im Intervall  $[0, N]$ . Da  $f \in C^{m-2}(\mathbb{R})$  ist,  $f^{(m-2)}$  noch absolut stetig und  $\mathfrak{D}$  ein Differentialoperator der Ordnung  $\gamma - 1 \leq m - 1$  ist, folgt mit Rolles Theorem

$$S^-(\mathfrak{D}f) \geq N - \gamma + 1 \quad \text{im Intervall } [0, N]. \quad (2.6)$$

Schreiben wir  $s = \omega + i\tau$ ,  $\omega, \tau \in \mathbb{R}$ , so ist das Vorzeichen von  $\mathfrak{D}f$  in jedem Intervall  $[k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , andererseits eindeutig bestimmt durch

$$\operatorname{sign}(\mathfrak{D}f)(x) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \left( b e^{2\pi i k(\omega + i\tau)} \right) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \left( b e^{2\pi i k \omega} \right), \quad x \in [k, k+1).$$

Daraus folgt direkt

$$S^-(\mathfrak{D}f) \leq 2N|\omega| \quad \text{im Intervall } [0, N],$$

was einen Widerspruch zu (2.6) liefert für  $|\omega| < \frac{1}{2}$  und ausreichend großes  $N$ . Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Für den Fall  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$  nimmt man an, dass  $Z_1 B_\Lambda(\cdot, s)$  zwei Nullstellen bzw. eine doppelte Nullstelle im Intervall  $[0, \alpha)$  besitzt und führt dies mit denselben Argumenten zum Widerspruch.  $\square$

Da sich Lemma 2.10 bezüglich der komplexifizierten Zak-Transformierten auch auf die Menge  $[0, \alpha) \times (-\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha}] \times i(-\frac{a_0}{2\pi}, \frac{a_0}{2\pi})$  verallgemeinern lässt und die Transformierte von Translaten einer Funktion wegen

$$Z_\alpha(T_t f)(x, s) = Z_\alpha f(x - t, s)$$

eine lediglich verschobene Nullstellenmenge besitzt, impliziert obiges Theorem folgendes Korollar.

**Korollar 2.15** ([62]). *Es sei  $g_n$  eine (stetige) TP Funktion endlichen Typs  $n \geq 2$  wie in (1.19). Dann erfüllt die komplexifizierte Zak-Transformierte für  $\alpha > 0$*

$$Z_\alpha g_n(x, s) \neq 0 \quad \text{für } x \in [0, \alpha) \text{ und } s \in \left(-\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha}\right) \times i\left(-\frac{\alpha_0}{2\pi}, \frac{\alpha_0}{2\pi}\right).$$

*Ist hingegen  $s \in \frac{1}{2\alpha} \times i\left(-\frac{\alpha_0}{2\pi}, \frac{\alpha_0}{2\pi}\right)$ , so existiert ein  $x_s \in [0, \alpha)$  mit  $Z_\alpha g_n(x_s, s) = 0$  und  $Z_\alpha g_n(x, s) \neq 0$  für  $x \in [0, \alpha) \setminus \{x_s\}$ .*

In [63] wurde mit Hilfe der Variationsverminderung (1.14) darüber hinaus ein Beweis angeführt, welcher die Nullstellenmenge der Zak-Transformierten auf  $\mathbb{R}^2$  der etwas allgemeineren PEB-Splines ebenfalls charakterisiert.

**Theorem 2.16** ([63]). *Es sei  $m \geq 2$  und  $B_m$  ein (stetiger) PEB-Spline der Ordnung  $m$ . Dann hat  $Z_1 B_m$  genau eine Nullstelle im Fundamentalbereich  $Q_1 = [0, 1]^2$ . Genauer existiert  $\tilde{x} \in [0, 1)$ , sodass  $Z_1 B_m(\tilde{x}, \frac{1}{2}) = 0$ , und  $Z_1 B_m(x, \omega) \neq 0$  für alle  $(x, \omega) \in [0, 1)^2 \setminus \{(\tilde{x}, \frac{1}{2})\}$ .*

Um nun auch die Nullstellenmenge der Transformierten einer TP Funktion unendlichen Typs bestimmen zu können, verwenden wir den Satz von Hurwitz.

**Satz 2.17** (Hurwitz). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $(f_n)$  eine Folge holomorpher Funktionen in  $D$ , welche lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Falls jedes  $f_n$  höchstens  $k$  Nullstellen in  $D$  besitzt, so besitzt auch  $f$  höchstens  $k$  Nullstellen oder es gilt  $f(z) = 0$  für alle  $z \in D$ .*

**Theorem 2.18** ([62]). *Sei  $g$  eine TP Funktion unendlichen Typs der Form (1.19). Dann erfüllt die komplexifizierte Zak-Transformierte für  $\alpha > 0$*

$$Z_\alpha g(x, s) \neq 0 \quad \text{für } x \in [0, \alpha) \text{ und } s \in \left(-\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha}\right) \times i\left(-\frac{\alpha_0}{2\pi}, \frac{\alpha_0}{2\pi}\right).$$

*Beweis.* Da  $g$  insbesondere positiv ist, gilt  $Z_\alpha g(x, 0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k) > 0$ . Somit kann die Zak-Transformierte nicht identisch Null sein auf  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times i\left(-\frac{\alpha_0}{2\pi}, \frac{\alpha_0}{2\pi}\right)$ . Damit folgt die Behauptung aus Theorem 2.13, Korollar 2.15 und Theorem 2.17.  $\square$

Tatsächlich besitzen die Zak-Transformierten der stetigen TP Funktionen wie in (1.19) alle exakt nur eine Nullstelle in ihrem Fundamentalbereich  $Q_\alpha$ . Dies beweisen wir allerdings nicht

mit Hilfe des Satzes von Hurwitz, sondern bedienen uns weitaus elementarerer Argumente. Hierzu betrachten wir fortan wieder die gewöhnliche Zak-Transformierte auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemma 2.19** ([62]). *Es seien  $\xi_1, \dots, \xi_r \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden,  $q_1, \dots, q_r$  nichttriviale reelle Polynome vom Grad  $\sigma_j - 1$  und  $\gamma = \sigma_1 + \dots + \sigma_r$ . Weiter sei  $h \in C^{\gamma-2}(\mathbb{R})$  die reellwertige Funktion mit absolut stetiger Ableitung  $h^{(\gamma-2)}$  und habe die Form*

$$h(x) = \sum_{j=1}^r q_j(x) e^{\xi_j x}, \quad x \in [0, 1),$$

$$h(x+1) = -h(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Dann existiert ein  $x_0 \in \mathbb{R}$ , sodass  $h$  auf jedem Intervall  $[x_0 + k, x_0 + k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , monoton ist.*

*Beweis.* Wegen der Stetigkeit und Periodizität,  $h(x+2) = -h(x+1) = h(x)$ , ist das Bild von  $h$  beschränkt und  $h$  hat mindestens ein Maximum  $x_0$  (und ein Minimum) in dem Periodenintervall  $[0, 2)$ . Falls  $h$  nicht monoton fallend in  $[x_0, x_0 + 1)$  ist, so existiert wegen der 2-Periodizität ein  $c \in \mathbb{R}$ , sodass  $h_c := h(\cdot) + c$  mindestens vier Nullstellen in  $[0, 2)$  besitzt. Nun betrachten wir wieder den Differentialoperator  $\mathfrak{D} = \mathcal{D}_1^{\sigma_1-1} \prod_{j=2}^r \mathcal{D}_j^{\sigma_j}$  aus dem Beweis von Theorem 2.14. Wenden wir diesen Operator auf  $h_c$  an, so erhalten wir

$$\mathfrak{D}h_c(x) = be^{\xi_1 x} + \underbrace{\prod_{j=2}^r (-\xi_j)^{\sigma_j} (-\xi_1)^{\sigma_1-1}}_{=: \tilde{c}} c, \quad b \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, 1),$$

und wegen  $h(x+1) = -h(x)$  ist

$$\mathfrak{D}h_c(x) = (-1)^k be^{\xi_1(x-k)} + \tilde{c}, \quad x \in (k, k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Für die Anzahl der starken Vorzeichenwechsel folgt also

$$4N - \gamma + 1 \leq \mathcal{S}^-(\mathfrak{D}h_c) \leq 2N \quad \text{auf } [0, 2N],$$

was für großes  $N \in \mathbb{N}$  einen Widerspruch liefert. Damit ist gezeigt, dass  $h$  auf jedem Intervall  $[x_0 + k, x_0 + k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , monoton ist, wobei  $x_0 + k$  die Extrema von  $h$  sind.  $\square$

**Korollar 2.20** ([62]). *Es seien  $\Lambda = (\xi_1, \dots, \xi_1, \dots, \xi_r, \dots, \xi_r) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\xi_i \neq \xi_j$ , und  $B_\Lambda$  der zugehörige EB-Spline wie in (1.15). Dann existieren  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ , sodass  $Z_1 B_\Lambda(\cdot, \frac{1}{2})$  auf  $[x_0 + k, x_0 + k + 1)$  und die Ableitung  $\mathcal{D}_n Z_1 B_\Lambda(\cdot, \frac{1}{2})$ ,  $1 \leq n \leq r$ , auf  $[y_0 + k, y_0 + k + 1)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  monoton sind.*

*Beweis.* Mit denselben Bezeichnungen wie in (2.5) gilt

$$\begin{aligned} Z_1 B_\Lambda(x, \tfrac{1}{2}) &= \sum_{j=1}^r q_j(x) e^{\xi_j x}, \\ \mathcal{D}_n Z_1 B_\Lambda(x, \tfrac{1}{2}) &= \left( \mathcal{D}_n \left( \sum_{j=1}^r q_j e^{\xi_j \cdot} \right) \right)(x) = e^{\xi_n x} \frac{d}{dx} \left( e^{-\xi_n x} \sum_{j=1}^r q_j(x) e^{\xi_j x} \right) \\ &= q'_n(x) e^{\xi_n x} + \sum_{j \neq n} ((\xi_j - \xi_n) q_j(x) + q'_j(x)) e^{\xi_j x}. \end{aligned}$$

Mit  $e^{2\pi i \frac{k}{2}} = (-1)^k$  und der Quasiperiodizität der Zak-Transformierten folgt die Behauptung somit aus Lemma 2.19.  $\square$

**Korollar 2.21** ([62]). *Es sei  $g$  eine TP Funktion unendlichen Typs wie in (1.19). Dann existiert ein  $x_0 \in [0, \alpha)$ , sodass  $Z_\alpha g(\cdot, \frac{1}{2\alpha})$  für  $\alpha > 0$  auf jedem Intervall  $[x_0 + \alpha k, x_0 + \alpha(k+1))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , monoton ist.*

*Beweis.* Wegen der Stetigkeit und Periodizität ist das Bild von  $f := Z_\alpha g(\cdot, \frac{1}{2\alpha})$  beschränkt und  $f$  besitzt mindestens ein Maximum (und ein Minimum) im Periodenintervall  $[0, 2\alpha)$ . Ohne Einschränkung sei  $x_0 \in [0, \alpha)$  ein Maximum (und  $x_0 + \alpha$  ein Minimum). Falls  $f$  nicht monoton fallend auf  $[x_0, x_0 + \alpha)$  ist, so existiert ein  $\delta > 0$  und Punkte  $z_1 < z_2 < z_3 \in [x_0 + \delta, x_0 + 1 - \delta]$ , sodass  $f$  monoton auf  $[x_0, x_0 + \delta)$  ist, und es gilt

$$f(z_1) < f(z_2), \quad f(z_3) < f(z_2).$$

Mit  $\varepsilon = \frac{1}{4} \min\{f(x_0) - f(z_1), f(z_2) - f(z_1), f(z_2) - f(z_3)\}$  existiert nach der gleichmäßigen Konvergenz aus Theorem 2.13 ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $f_n := Z_\alpha g_n(\cdot, \frac{1}{2\alpha})$  mit  $n \geq n_0$  gilt

$$f_n(x_0) > f_n(z_1), \quad f_n(z_2) > f_n(z_1), \quad f_n(z_2) > f_n(z_3).$$

Demnach existiert kein Intervall der Länge  $\alpha$  auf dem  $f_n$  monoton ist. Nach Theorem 2.10 existiert daher ebenfalls kein Intervall der Länge eins, auf dem die Zak-Transformierte des entsprechenden EB-Splines  $Z_1 B_\Lambda(\cdot, \frac{1}{2})$  monoton ist, was im Widerspruch zu Lemma 2.20 steht.  $\square$

Nun können wir zeigen, dass auch die Zak-Transformierten von TP Funktionen unendlichen Typs ohne Faltung mit Gauß-Kern nur genau eine Nullstelle in ihrem Fundamentalbereich  $Q_\alpha$  besitzen.

**Theorem 2.22** ([62]). *Zu jeder TP Funktion  $g$  unendlichen Typs wie in (1.19) und  $\alpha > 0$  existiert ein  $\tilde{x} \in [0, \alpha)$ , sodass  $Z_\alpha g(\tilde{x}, \frac{1}{2\alpha}) = 0$  und  $Z_\alpha g(x, \frac{1}{2\alpha}) \neq 0$  für alle  $x \in [0, \alpha) \setminus \{\tilde{x}\}$ .*

*Beweis.* Nach Theorem 2.11 und 2.18 muss  $Z_\alpha g(\cdot, \frac{1}{2\alpha})$  eine Nullstelle in  $[0, \alpha)$  besitzen. Außerdem folgt wegen  $\hat{g}(\frac{1}{2\alpha}) \neq 0$  aus Lemma 2.4, dass  $Z_\alpha g(\cdot, \frac{1}{2\alpha})$  nicht identisch Null sein kann. Gäbe es zwei oder mehr isolierte Nullstellen in diesem Intervall, so wäre  $Z_\alpha g(\cdot, \frac{1}{2\alpha})$  dort nicht monoton, was ein Widerspruch zu Korollar 2.21 wäre. Daher nehmen wir nun an, dass es genau ein einzelnes Nullstellenintervall  $[z_1, z_2] \subset [x_0, x_0 + \alpha)$  dieser Funktion gibt. Zunächst sei  $a_1 < 0$ , wobei  $g$  gegeben ist durch die Fourier-Transformierte

$$\hat{g}(\omega) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{\omega}{a_\nu}}}{1 + 2\pi i \frac{\omega}{a_\nu}}.$$

Da  $f := Z_\alpha g(\cdot, \frac{1}{2\alpha})$  monoton fallend auf  $[x_0, x_0 + \alpha)$  ist, folgt nach dem Mittelwertsatz, dass für alle  $0 < \varepsilon < -(\alpha a_1)^{-1}$  mit  $z_2 + \varepsilon < x_0 + \alpha$  ein  $0 < \theta < \varepsilon$  existiert, sodass

$$|f'(z_2 + \theta)| = \frac{|f(z_2 + \varepsilon) - f(z_2)|}{\varepsilon} \geq \frac{|f(z_2 + \theta) - f(z_2)|}{\varepsilon} > -\alpha a_1 |f(z_2 + \theta)|.$$

Andererseits gilt  $f'(x_0 + \alpha) = 0$  und  $f(x_0 + \alpha) < 0$ . Daher erfüllt die Ableitung

$$\mathcal{D}_1 f = \left( \frac{d}{dx} + \alpha a_1 \text{id} \right) f = f' + \alpha a_1 f \quad (2.7)$$

$\mathcal{D}_1 f(x_0) < 0$ ,  $\mathcal{D}_1 f(z_2) = 0$ ,  $\mathcal{D}_1 f(z_2 + \theta) < 0$  und  $\mathcal{D}_1 f(x_0 + \alpha) > 0$ . Also ist  $\mathcal{D}_1 f$  auf keinem Intervall der Länge  $\alpha$  monoton. Mit analoger Argumentation wie in dem Beweis aus Korollar 2.21 existiert nach Theorem 2.13 ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass auch  $\mathcal{D}_1 Z_\alpha g_n(\cdot, \frac{1}{2\alpha})$  für jedes  $n \geq n_0$  auf keinem Intervall der Länge  $\alpha$  monoton ist. Nach Theorem 2.10 ist dann jedoch die Transformierte des entsprechenden EB-Splines  $\mathcal{D}_1 Z_1 B_\Lambda(\cdot, \frac{1}{2})$  ebenso auf keinem Intervall der Länge eins monoton, was wiederum ein Widerspruch zu Korollar 2.20 ist. Betrachten wir das Intervall  $[x_0, z_1]$  anstelle von  $[z_2, x_0 + \alpha]$ , so folgt der Fall  $a_1 > 0$  vollkommen analog.  $\square$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass die Zak-Transformierten aller TP Funktionen der Form wie in (1.19) bzw. (1.20) für jedes  $\alpha > 0$  genau eine Nullstelle in ihrem Fundamentaltbereich  $Q_\alpha$  besitzen. In [50] zeigte Janssen bereits 1988, dass auch die Transformierte des Gauß-Fensters nur genau eine Nullstelle in  $Q_\alpha$  besitzt. Da der Sekans Hyperbolicus nach

$$\frac{1}{\pi} \text{sech}^\wedge(\omega) = \text{sech}(\pi^2 \omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2\pi i \frac{\omega}{2k-1}} \cdot \frac{1}{1 - 2\pi i \frac{\omega}{2k-1}}$$

ebenfalls eine TP Funktion unendlichen Typs ohne Faltung mit Gauß-Kern ist, liefert Theorem 2.22 gemeinsam mit der Faktorisierung aus [57] sogar einen Alternativbeweis für diese Aussage. Dennoch existiert noch kein Beweis dafür, dass die Zak-Transformierten aller beliebigen TP Funktionen nur genau eine Nullstelle besitzen.

Der Vollständigkeit halber möchten wir noch erwähnen, dass Schoenberg in [79] bereits feststellte, dass  $Z_1 N_m$  des polynomialen B-Splines  $N_m$  genau eine Nullstelle hat bei  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , falls  $m$  gerade ist und bei  $(0, \frac{1}{2})$ , falls  $m$  ungerade ist. Darüber hinaus hat Janssen in [50] und [56] noch weitere Untersuchungen der Nullstellen von Zak-Transformierten diverser Funktionen durchgeführt, unter anderem für die Klasse der von ihm eingeführten *superkonvexen* Funktionen.



## Kapitel 3

# TP Funktionen und PEB-Splines als Gabor-Fenster

Das von Gabor und von Neumann ursprünglich vorgeschlagene Gauß-Fenster zur Bildung eines Gabor-Systems ist nach Theorem 1.32 eine TP Funktion. Die zugehörige Framemenge wurde 1992 in [67] bzw. [81] vollständig beschrieben. Ebenso ist der Sekans Hyperbolicus eine TP Funktion, dessen Framemenge 2002 in [54] charakterisiert wurde. In [41] wurde 2013 schließlich die Framemenge einer jeden TP Funktion endlichen Typs (vgl. (1.19)) dargelegt. All diese Framemengen sind im Sinne des Balian-Low-Theorems maximal, was die außerordentliche Eignung dieser Fenster in der Gabor-Analyse verdeutlicht. Weiter wurden in [16], [18] und [17] bereits EB-Splines als Fensterfunktionen eines Gabor-Frames untersucht und einige positive Resultate bewiesen. Daher möchten wir uns nachfolgend mit Gabor-Systemen von TP Funktionen und PEB-Splines beschäftigen.

### 3.1 Gabor-Frames von TP Funktionen und PEB-Splines

Zu Beginn möchten wir zwei lange bekannte Resultate erläutern, welche sich für PEB-Splines aufgrund ihrer kompakten Träger ergeben. Da ein PEB-Spline  $B_m$  der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$  im Gegensatz zu TP Funktionen den Träger  $\text{supp}(B_m) = [0, m]$  besitzt, kann  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$  nur dann zu der Framemenge  $\mathcal{F}_{B_m}$  gehören, wenn  $\alpha \leq m$  gilt. Ist nämlich  $\alpha > m$ , so hat die pre-

Gramian-Matrix  $P_{B_m}(x)$  für alle  $x \in (m, \alpha)$  Nullspalten. Daher kann es nach Theorem 1.20 keine untere Frameschranke  $A > 0$  geben. Andererseits haben Daubechies, Grossmann und Meyer in [23] für Funktionen mit kompaktem Träger eine einfache Charakterisierung von Gabor-Frames bestimmter Gitter gefunden. Entgegen der meisten in der Literatur angegebenen Beweise, lässt sich auch dieses Resultat anhand der pre-Gramian-Matrix überprüfen.

**Theorem 3.1** ([23] Painless non-orthogonal expansions). *Sind  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$  mit kompaktem Träger  $\text{supp}(g) = [0, L]$ ,  $0 < \alpha \leq L$  und  $0 < \beta \leq \frac{1}{L}$ , so ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  genau dann ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Frameschranken  $0 < A \leq B < \infty$ , wenn*

$$A \leq \beta^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x + \alpha k)|^2 \leq B$$

für fast alle  $x \in [0, \alpha)$  gilt.

*Beweis.* Wir betrachten wieder die pre-Gramian-Matrix  $P_g(x)$  und nehmen zunächst  $\beta < \frac{1}{L}$  an. Für  $x \in [0, L]$  gilt damit  $x + \frac{1}{\beta} > L$  und  $x - \frac{1}{\beta} < 0$ . Daher sind die Indexbereiche der nicht verschwindenden Einträge jeder Spalte in diesem Fall disjunkt. Wegen  $\alpha \leq L$  gibt es darüber hinaus für jedes  $l \in \mathbb{Z}$  ein  $k_l \in \mathbb{Z}$ , sodass  $x + \alpha k_l - \frac{l}{\beta} \in [0, L]$  ist. Die Matrix besitzt also eine Gestalt

$$\begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ \cdots & 0 & * & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & * & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & * & 0 & \cdots \\ & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots \\ & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung folgt somit aus dem Ron-Shen Theorem 1.20. Ist hingegen  $\beta = \frac{1}{L}$ , so betrachten wir die eindeutige Division mit Rest  $L = n\alpha + r$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  und  $r \in [0, \alpha)$ . In diesem Fall können zu  $x \in [0, \alpha)$  genau dann zwei Einträge einer Zeile von  $P_g(x)$  ungleich Null sein, wenn  $k, l \in \mathbb{Z}$  existieren, sodass  $x + \alpha k - Ll = x + \alpha(k - ln) - rl = 0$  ist. Demnach besitzt die pre-Gramian-Matrix für  $x \in [0, \alpha)$  und  $x \notin r\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  wiederum die obige Gestalt. Da dies nur abzählbar viele  $x \in [0, \alpha)$  ausschließt, impliziert auch in diesem Fall das Ron-Shen Theorem die Behauptung. Man beachte, dass die pre-Gramian-Matrix im kritischen Fall  $\beta = \frac{1}{L}$  und  $\alpha = L$  sogar Diagonalgestalt hat.  $\square$

Da man in der obigen Situation punktweise fast überall auch sehr einfach eine Linksinverse bestimmen kann, liefert Proposition 1.21 darüber hinaus eine Möglichkeit der Konstruktion eines dualen Fensters. Wegen der besonderen Struktur kann man sogar die Moore-Penrose Pseudoinverse sehr einfach ablesen

$$\left(P_g(x)^\dagger\right)_{j,l} = \frac{g(x + \alpha l - \frac{j}{\beta})}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|g(x + \alpha k - \frac{j}{\beta})\right|^2}.$$

Da diese das Fenster mit der kleinsten  $L^2(\mathbb{R})$ -Norm liefert, erhalten wir nach Proposition 1.16 somit das kanonische duale Fenster  $\gamma(x)^\circ = \frac{\beta}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x + \alpha k)|^2} g(x)$ .

Inzwischen ist ein allgemeineres Resultat von ähnlichem Typ bekannt, welches das obige enthält. Wir erwähnen dieses aus Gründen der Vollständigkeit, verzichten an dieser Stelle jedoch auf einen Beweis und verweisen auf den Artikel oder [14, 15].

**Theorem 3.2** ([11] Casazza-Christensen Schranken). *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta > 0$ . Falls*

$$B = \frac{1}{\beta} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, \alpha]} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + \alpha k) \overline{g(x + \alpha k - \frac{l}{\beta})} \right| < \infty,$$

*so ist  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Bessel-System mit Bessel-Schranke  $B$ . Ist darüber hinaus auch*

$$A = \frac{1}{\beta} \operatorname{ess\,inf}_{x \in [0, \alpha]} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x - \alpha k)|^2 - \sum_{l \neq 0} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + \alpha k) \overline{g(x + \alpha k - \frac{l}{\beta})} \right| \right) > 0,$$

*so ist  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Frameschranken  $A, B$ .*

Vor Kurzem haben Lemvig und Nielsen in [65] einen weiteren Teil der Framemenge von Funktionen mit kompakten Trägern gefunden (vgl. Abbildung 3.1). Hierzu haben Sie ein Dual angegeben, welches seinerseits einen noch kleineren Träger besitzt als das Fenster selbst.

**Satz 3.3** (Painless expansions for alternate duals [65]). *Es seien  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$  mit kompaktem Träger  $\operatorname{supp}(g) = [0, L]$ ,  $L > 0$ ,*

$$(\alpha, \beta) \in \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 < \alpha < L, 0 < \beta \leq \frac{2}{L + \alpha}, \alpha\beta < 1 \right\}$$

*und  $c := \operatorname{ess\,inf}_{x \in [\frac{L-\alpha}{2}, \frac{L+\alpha}{2}]} |g(x)| > 0$ . Dann ist das Fenster  $h$  mit*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{g(x)}, & x \in [\frac{L-\alpha}{2}, \frac{L+\alpha}{2}], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

*wohldefiniert und die Gabor-Systeme  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ,  $\mathcal{G}(h, \alpha, \beta)$  zueinander duale Frames für  $L^2(\mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Da  $h, g \in L^\infty(\mathbb{R})$  sind und kompakten Träger haben, sind beide Funktionen aus dem Wiener-Raum und induzieren Bessel-Systeme. Weiter ist

$$\begin{aligned} \langle h, M_{\frac{L}{\alpha}} T_{\frac{k}{\beta}} g \rangle &= \beta \int_{\frac{L-\alpha}{2}}^{\frac{L+\alpha}{2}} g(x - \frac{k}{\beta}) \frac{1}{g(x)} e^{2\pi i l \frac{x}{\alpha}} dx \\ &= \beta \delta_{k0} \int_{\frac{L-\alpha}{2}}^{\frac{L+\alpha}{2}} e^{2\pi i l \frac{x}{\alpha}} dx = \alpha \beta \delta_{k0} \delta_{l0}. \end{aligned}$$

Daher folgt die Behauptung aus der Wexler-Raz Biorthogonalität aus Theorem 1.13.  $\square$

Man beachte, dass das Tripel  $(h, \alpha, \beta)$  im obigen Satz wegen  $\beta < \frac{1}{\alpha}$  die Bedingungen aus Theorem 3.1 erfüllt. Von dieser Seite aus betrachtet haben Lemvig und Nielsen daher ein nicht kanonisches Dual für diesen Fall konstruiert. Da die optimale obere Frameschranke von  $\mathcal{G}(h, \alpha, \beta)$  nach Theorem 1.20 gleich  $B_{opt}^h = \frac{\beta}{c^2}$  ist, ergibt sich für die optimale untere Frameschranke von  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  somit die Abschätzung  $A_{opt}^g \geq \frac{c^2}{\beta}$ .

Die obigen Resultate nutzten bislang nur den kompakten Träger der Funktionen aus. Folgendes Resultat, ebenfalls aus 2015, hat ein wenig schärfere Voraussetzungen an das Fenster, welche von den PEB-Splines ebenfalls erfüllt werden.

**Satz 3.4** ([17]). *Es sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  eine stetige Funktion mit kompaktem Träger  $\text{supp}(g) = [0, L]$ ,  $L > 0$ , welche positiv ist  $g(x) > 0$  für  $x \in (0, L)$ . Dann ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  für alle  $\frac{L}{2} \leq \alpha < L$  und  $0 < \beta < \frac{1}{\alpha}$ .*

Das Resultat ist ein einfaches Korollar eines Theorems von Christensen, Kim und Kim über Gabor-Frames bestimmter Gitter von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und endlicher Nullstellenanzahl im Inneren des Trägers (s. [17]). Im obigen Fall können wir jedoch noch mehr Gitterparameter bestimmen, die zur Framemenge gehören (vgl. Abbildung 3.1) und einen wesentlich einfacheren und direkten Beweis dazu angeben.

**Theorem 3.5.** *Es sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  eine stetige Funktion mit kompaktem Träger  $\text{supp}(g) = [0, L]$ ,  $L > 0$ , welche positiv ist  $g(x) > 0$  für  $x \in (0, L)$ . Dann ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  für alle  $\alpha, \beta > 0$  mit  $\alpha\beta < 1$ ,  $\alpha < L$  und  $\alpha + \frac{1}{\beta} \geq L$ .*

*Beweis.* Man beachte, dass  $\alpha + \frac{1}{\beta} > 2\alpha$  ist. Satz 3.4 ist also tatsächlich in dem Theorem enthalten. Da  $g$  stetig ist und in  $L^2(\mathbb{R})$  liegt, muss die Funktion auch beschränkt sein. Wegen

des kompakten Trägers ist sie sogar aus  $W(\mathbb{R})$  und induziert somit ein Bessel-System. Es bleibt zu zeigen, dass  $S_g$  nach unten beschränkt ist.

Wegen  $\alpha < L$  folgt der Fall  $\beta \leq \frac{1}{L}$  aus Theorem 3.1. Aufgrund der Äquivalenz

$$\alpha + \frac{1}{\beta} \geq L \iff \beta \leq \frac{1}{L - \alpha},$$

sei daher fortan  $\frac{1}{L} < \beta \leq \frac{1}{L - \alpha}$ . Unter der Bedingung  $\alpha\beta < 1$  impliziert dies  $\frac{1}{L} < \beta < \frac{2}{L}$ . Wir verwenden die Idee der Konstruktion von dünn besetzten, gleichmäßig beschränkten Linksinversen der pre-Gramian-Matrix, um mit deren Hilfe ein duales Fenster zu entwickeln. Diese Methode wurde zuvor bereits erfolgreich in [41] und [63] verwendet. Genauer betrachten wir die pre-Gramian-Matrix  $P_g(x)$  auf dem Intervall  $I = [L - \frac{1}{\beta}, L - \frac{1}{\beta} + \alpha]$  der Länge  $\alpha$  und konstruieren punktweise einen Zeilenvektor  $\sigma(x)$ , sodass

$$\sigma(x)P_g(x) = (\delta_{l0})_{l \in \mathbb{Z}} \tag{3.1}$$

gilt. Auf diese Vektoren wenden wir schließlich Proposition 1.21 an. Mit

$$k_0 := \left\lceil \frac{L - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta} - \alpha} \right\rceil - 1$$

folgt für alle  $x \in I$  offenbar

$$\begin{aligned} 0 < L - \frac{1}{\beta} \leq x \leq L - \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) < L, \\ 0 < L - \frac{1}{\beta} - k_0 \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \leq x - k_0 \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \leq \frac{1}{\beta} < L. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Da  $\frac{1}{\beta}$  darüber hinaus größer der halben Trägerlänge von  $g$  ist, können in jeder Zeile der pre-Gramian-Matrix nur höchstens zwei Einträge ungleich Null sein. Durch die Bedingung  $\alpha + \frac{1}{\beta} \geq L$  folgt, dass die zwei diagonal gelegenen Auswertungsstellen  $x_0 - \frac{1}{\beta}$  und  $x_0 + \alpha$  für kein  $x_0 \in \mathbb{R}$  beide im Inneren des Trägers  $[0, L]$  von  $g$  liegen können. Damit gibt es keinen

vollbesetzten  $2 \times 2$ -Block, sodass die Matrix eine Gestalt der Form

$$P_g(x) = \begin{pmatrix} \ddots & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & * & \ddots \end{pmatrix}$$

besitzt. Somit ist die quadratische Teilmatrix

$$P_0(x) := \left( g(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}) \right)_{k,l=0,\dots,k_0}$$

aus den mittleren  $k_0 + 1$  Zeilen- und Spalteneinträgen für alle  $x \in I$  regulär. Genauer ist  $P_0(x)$  untere oder obere Dreiecksmatrix, sodass die Determinante aus dem Produkt der Diagonalelemente besteht, welche nach Formel (3.2) ihrerseits gleichmäßig in  $x$  nach unten beschränkt sind

$$\det P_0(x) = \prod_{k=0}^{k_0} (P_0(x))_{k,k} \geq c^{k_0+1} > 0. \quad (3.3)$$

Nun definieren wir

$$(\sigma_0(x), \dots, \sigma_{k_0}(x)) = (P_0(x)^{-1})_{k=1, l=1, \dots, k_0+1} \quad \text{für } x \in I \quad (3.4)$$

und setzen die übrigen Komponenten  $\sigma_k(x) = 0$  für  $k < 0$  und  $k > k_0$ . Durch die Wahl von  $k_0$  gilt für alle  $k = 0, \dots, k_0$

$$x + \alpha k - \frac{l}{\beta} > L \quad \text{falls } l < 0 \quad \text{und} \quad x + \alpha k - \frac{l}{\beta} < 0 \quad \text{falls } l > k_0.$$

Folglich ist (3.1) für  $\sigma(x)$  erfüllt. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Determinante (3.3), sind nach der Cramerschen Regel darüber hinaus auch die Einträge der Inversen  $P_0(x)^{-1}$  gleichmäßig beschränkt, was wiederum

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{x \in I} |\sigma_k(x)| < \infty$$

liefert. Damit liegt auch die Funktion  $\gamma$  mit

$$\gamma(x) = \beta \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma(x)_k \chi_{[0, \alpha)}(x - \alpha k), \quad x \in \mathbb{R},$$

im Wiener-Raum und die Behauptung folgt aus Proposition 1.21.  $\square$

Die obige Konstruktion von Dualen kann auch für PEB-Splines im Speziellen verwendet werden. Dabei werden die Gitterparameter  $\alpha, \beta > 0$  so gewählt, dass durch die Verflechtungseigenschaft der PEB-Splines aus Theorem 1.28 eine Blockgestalt der biinfinite Matrix in reguläre Blöcke endlicher Größe gesichert wird.

**Theorem 3.6** ([63]). *Es seien  $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  und  $B_m$  ein (stetiger) kardinaler PEB-Spline mit Knoten  $0, \dots, m$ . Dann ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(B_m, \alpha, \beta)$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$ , falls:*

- (i)  $\alpha \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,  $\beta > 0$  und  $\alpha\beta < 1$ ,
- (ii)  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \{1, 2^{-1}, \dots, (m-1)^{-1}\}$  und  $\alpha\beta < 1$ .

*Beweis.* Da die Splines im Wiener-Raum liegen, induzieren sie Bessel-Systeme. Daher bleibt noch zu zeigen, dass die entsprechenden Gabor-Systeme auch eine positive untere Frameschranke besitzen. Hierzu folgen wir der Idee aus dem Beweis zu Theorem 3.5 und wählen zu  $x \in I = [m - \frac{1}{\beta}, m - \frac{1}{\beta} + \alpha]$  und

$$k_0 := \left\lceil \frac{m - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta} - \alpha} \right\rceil - 1$$

wieder die quadratische, endliche Teilmatrix

$$P_0(x) = \left( B_m(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}) \right)_{k, l=0, \dots, k_0}$$

mit strikt positiven Diagonalelementen. Im Fall (ii) mit  $\beta^{-1} \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  ist  $P_0(x)$  genau die Kollokationsmatrix

$$P_0(x) = M \begin{pmatrix} B_m & B_m(\cdot - \beta^{-1}) & \cdots & B_m(\cdot - k_0\beta^{-1}) \\ x & x + \alpha & \cdots & x + k_0\alpha \end{pmatrix}$$

und somit nach Theorem 1.28 regulär. Analog kann die transponierte Teilmatrix  $P_0(x)^T$  im Fall (i) mit  $\alpha \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  ebenfalls als die Kollokationsmatrix

$$P_0(x)^T = M \begin{pmatrix} B_m & B_m(\cdot + \alpha) & \cdots & B_m(\cdot + k_0\alpha) \\ x & x - \beta^{-1} & \cdots & x - k_0\beta^{-1} \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Damit ist auch diese Matrix regulär nach Theorem 1.28, und es existiert wieder eine gleichmäßige untere Schranke für die Determinante. Denn wegen der Stetigkeit der Funktion  $g$ , hängen auch die Einträge der pre-Gramian-Matrix und somit die Determinante von  $P_0(x)$  stetig von  $x$  ab. Da  $I$  kompakt ist, existiert ein  $c > 0$ , sodass  $\det P_0(x) \geq c$  ist für alle  $x \in I$ . Mit derselben Konstruktion des Duals  $\gamma$  und den analogen Schlüssen wie im Beweis von Theorem 3.5 folgt damit bereits die Behauptung.  $\square$

Wegen der engen Verknüpfung von EB-Splines und TP Funktionen endlichen Typs liefert dieser Satz einen Alternativbeweis für die vollständige Bestimmung der Framemenge dieser TP Funktionen.

**Theorem 3.7** ([41]). *Es sei  $g_n$  eine TP Funktion endlichen Typs  $n \geq 2$  wie in (1.19) bzw. (1.20). Dann ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(g_n, \alpha, \beta)$  für alle Parameter  $\alpha, \beta > 0$  mit  $\alpha\beta < 1$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Die Behauptung folgt wegen der Faktorisierung der Zak-Transformierten in Lemma 2.10 unmittelbar aus Satz 2.9 und Theorem 3.6.  $\square$

**Bemerkung 3.8.** Insgesamt haben wir damit folgende positive Resultate zu den Framemengen von PEB-Splines und TP Funktionen:

(i) *PEB-Splines:* Ist  $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  und  $B_m$  ein (stetiger) kardinaler PEB-Spline mit Knoten  $0, \dots, m$ , so ist  $\mathcal{G}(B_m, \alpha, \beta)$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  für alle Gitterparameter aus

$$\left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \left| 0 < \alpha\beta < 1 \text{ mit } 0 < \alpha < m \text{ und } \beta \leq \frac{2}{m+\alpha} \text{ oder } \beta \leq \frac{1}{m-\alpha} \right. \right\} \cup \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \left| 0 < \alpha\beta < 1 \text{ mit } \frac{1}{\beta} \in \{1, 2, \dots, m-1\} \text{ oder } \alpha \in \{1, 2, \dots, m-1\} \right. \right\}. \quad (3.5)$$

In einem Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \frac{\alpha}{n}, \beta)$  für  $n \in \mathbb{N}$  ist darüber hinaus das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  enthalten. Daher gehören auch alle Tupel  $(\frac{\alpha}{n}, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$  zur Framemenge  $\mathcal{F}_{B_m}$  der Splines, sofern  $(\alpha, \beta)$  in der Menge (3.5) liegt.

Diese bekannten Teile von  $\mathcal{F}_{B_m}$  sind für  $m = 3$  in Abbildung 3.1 aufgezeichnet. Für Gitterparameter aus dem roten Bereich und auf den gestrichelten Linien bildet das zugehörige Gabor-System aufgrund des kompakten Trägers bzw. der Stetigkeit keinen Frame. Für Gitterparameter aus den grünen Bereichen bzw. auf den durchgezogenen Linien, liefert das zu-

gehörige System einen Frame. Im oberen Bild ist nur die Menge (3.5) verdeutlicht. Der hellgrüne Bereich kommt aus Theorem 3.1, der mittelgrüne Bereich aus Satz 3.3, der dunkelgrüne Bereich aus Theorem 3.5, und die noch dunkleren grünen Linien aus Theorem 3.6. In dem unteren Bild wurden darauf basierend auch alle Bereiche skizziert, welche durch das beschriebene oversampling entstehen.

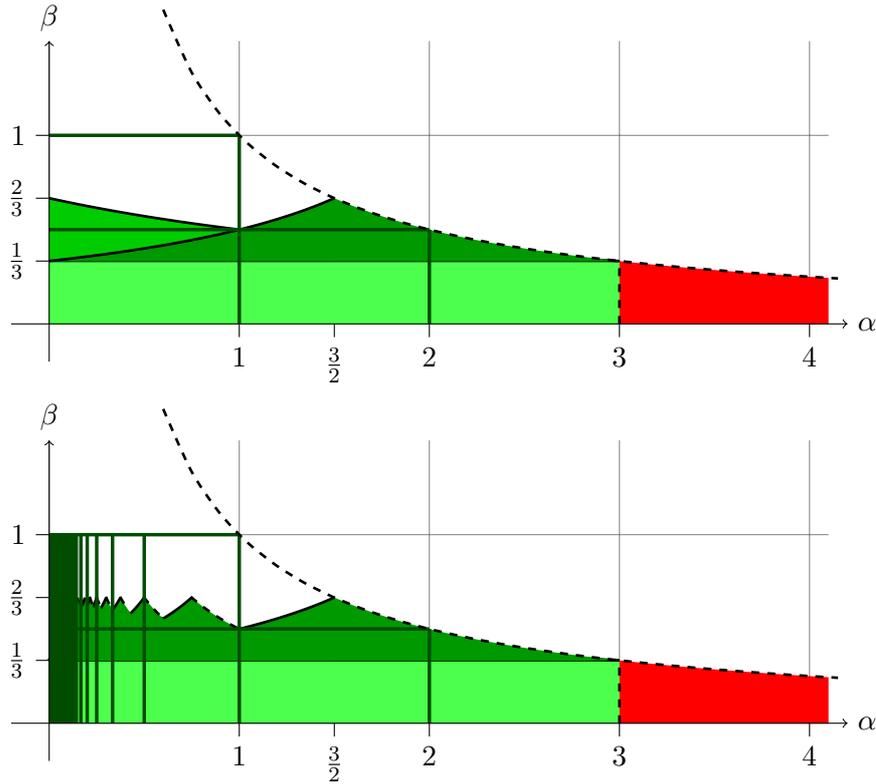


Abbildung 3.1: Bekannte Teile der Framemenge eines PEB-Splines der Ordnung drei. Für Gitterparameter aus dem roten Bereich und auf den gestrichelten Linien, bildet das zugehörige Gabor System aufgrund des kompakten Trägers bzw. der Stetigkeit keinen Frame. Für Gitterparameter aus den grünen Bereichen bzw. auf den durchgezogenen Linien, liefert das zugehörige System einen Frame.

(ii) *TP Funktionen:* Es sei  $h$  ein Gauß-Fenster,  $\text{sech}$  der Sekans Hyperbolicus und  $g_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine TP Funktion endlichen Typs wie in (1.19) bzw. (1.20). Dann sind die Framemengen eindeutig charakterisiert als

$$\mathcal{F}_{g_1} = \mathbb{H} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \alpha, \beta > 0 \text{ mit } \alpha\beta \leq 1\} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_h = \mathcal{F}_{\text{sech}} = \mathcal{F}_{g_n} = \mathbb{H}^\circ, \quad n \geq 2.$$

Für eine beliebige andere TP Funktion unendlichen Typs  $g$  wie in (1.19) bzw. (1.20) folgt aus

Theorem 2.22 mit Satz 2.5, Korollar 2.7 und Bemerkung 2.8, dass

$$\mathcal{F}_g \subseteq \mathbb{H}^\circ \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_g \supseteq \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \alpha, \beta > 0 \text{ mit } (\alpha\beta)^{-1} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}.$$

Doch auch für diese Funktionen besteht die bislang unbewiesene Vermutung, dass  $\mathcal{F}_g = \mathbb{H}^\circ$  ist.

## 3.2 Einschränkungen für PEB-Splines

Beide behandelten Funktionstypen, die TP Funktionen und auch die PEB-Splines, scheinen sich sehr gut als Fenster für Gabor-Systeme zu eignen. Doch neben den Obstruktionen durch die kompakten Träger sind für gewisse PEB-Splines noch weitere Ausnahmen an Gitterparametern bekannt, welche allesamt aus einer speziellen Eigenschaft herrühren.

**Definition 3.9.** Man sagt die kardinalen Translate einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind eine Teilung der Eins, falls die Summe aller Translate identisch Eins ist

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\cdot + k) \equiv 1. \quad (3.6)$$

Es ist bereits seit langem bekannt, dass die kardinalen Translate des polynomialen Splines  $N_m$  eine Teilung der Eins sind (s. [80]). Diese Eigenschaft lässt sich allerdings noch auf weitere PEB-Splines übertragen.

**Satz 3.10** ([18]). Für  $m \in \mathbb{N}$  seien  $\Lambda \in \mathbb{R}^m$  und  $B_\Lambda$  der zugehörige EB-Spline.

(i) Sind die Gewichte  $\lambda_j \neq 0$  für alle  $j = 1, \dots, m$ , so existiert kein  $C \in \mathbb{R}$ , sodass  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_\Lambda(x + k) = C$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) Hat der EB-Spline die Form

$$B_\Lambda = e^{\lambda_1(\cdot)} \chi_{[0,1]} * \dots * e^{\lambda_l(\cdot)} \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} \dots * \chi_{[0,1]}$$

mit  $\lambda_j \neq 0$  für alle  $j = 1, \dots, l < m$ , so gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_\Lambda(x - k) = \prod_{j=1}^l \frac{e^{\lambda_j} - 1}{\lambda_j} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für stetige Funktionen mit Eigenschaft (3.6) gehören gewisse Gitterparameter mit  $\alpha\beta < 1$  nicht zur Framemenge. Dies wurde von Del Prete in [27] zunächst für kardinale polynomiale B-Splines bewiesen und später in [39] wiederentdeckt und allgemeiner formuliert.

**Satz 3.11** ([39]). *Es sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, sodass  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  zu  $\alpha > 0$  für kein  $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Es sei  $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Der Ausgangspunkt des Beweises liegt in der Beobachtung, dass die Zak-Transformierte  $Z_{\beta-1}g$  ganze Nulllinien im Fundamentalbereich besitzt (vgl. Abbildung 3.2, rechts). Denn für  $r \in \{1, 2, \dots, \beta-1\}$  gilt

$$Z_{\beta-1}g(x, r) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g(x - \frac{l}{\beta}) e^{2\pi i \frac{l}{\beta} r} = \sum_{l=0}^{\beta-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - \frac{l}{\beta} - n) e^{2\pi i (\frac{l}{\beta} + n)r} = \sum_{l=0}^{\beta-1} e^{2\pi i l \frac{r}{\beta}} = 0$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Nach Korollar 2.7 und Bemerkung 2.8 bzw. der Darstellung (2.4) der Zibulski-Zeevi-Matrix, bedeutet dies, dass  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  mit  $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$  keinen Frame bildet. Um zu zeigen, dass dies auch für alle  $0 < \alpha < \beta^{-1}$  gilt, betrachten wir zu  $N \in \mathbb{N}$  die Folge  $\mathbf{c}^N = (c_l^N)_{l \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  mit Einträgen

$$c_l^N = \begin{cases} e^{2\pi i \frac{l}{\beta} r}, & \text{falls } |l| \leq N, \\ 0, & \text{falls } |l| > N, \end{cases}$$

und die Indexmengen

$$V_l = \{n \in \mathbb{Z} \mid g(x + \alpha k - \frac{l}{\beta} - n) \neq 0\} \quad , \quad W_l = \{n \in \mathbb{Z} \mid c_{l+n\beta}^N \neq 0\}.$$

Damit verschwindet der  $k$ 'te Eintrag von  $\mathbf{v}^N = P_g(x)\mathbf{c}^N$ ,

$$(\mathbf{v}^N)_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}) c_l^N = 0,$$

falls entweder  $V_l \subset W_l$  oder aber  $V_l \cap W_l = \emptyset$  für alle  $l = 0, \dots, \beta-1$  gilt. Dies bedeutet anders herum, dass  $(\mathbf{v}^N)_k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  genau dann nicht Null ist, wenn  $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$  existieren, sodass

$$g(x + \alpha k - \frac{j_1}{\beta}) \neq 0 \neq g(x + \alpha k - \frac{j_2}{\beta}) \quad \text{und} \quad c_{j_1}^N = 0 \neq c_{j_2}^N.$$

Wegen des kompakten Trägers von  $g$  können für alle  $x \in \mathbb{R}$  und unabhängig von  $N$  nur höchstens endlich viele  $k \in \mathbb{Z}$  existieren, die das erfüllen. Somit existiert also ein  $M \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\|\mathbf{v}^N\|_2 \leq M \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| g(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}) \right|^2 \leq M(\beta \|g\|_\infty (L+1))^2.$$

Da aber andererseits  $\|\mathbf{c}^N\|_2 = \sqrt{2N+1}$  ist, kann die pre-Gramian-Matrix nicht nach unten beschränkt sein.  $\square$

**Bemerkung 3.12.** Für gewisse Funktionen, wie z.B. die stetigen PEB-Splines, weiß man, dass die Framemenge offen ist (s. [32]). Im obigen Beweis genügt es in diesen Fällen daher, wenn man zeigt, dass  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  für  $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  und  $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$  mit  $\alpha\beta < 1$  kein Frame ist.

Lange Zeit gab es keine weiteren negativen Resultate über die Framemenge von B-Splines. So kam in [37] bereits die Vermutung auf, alle stetigen polynomialen B-Splines  $N_m$  würden für alle Gitter mit  $\alpha\beta < 1$ ,  $0 < \alpha < m$  und  $0 < \beta \neq 2, 3, \dots$  einen Frame liefern. Diese Hoffnung wurde erst kürzlich in [65] genommen. Lemvig und Nielsen zeigten, dass die Partition der Eins von Translaten polynomialer B-Splines bei sehr geringer Störung des Translationsparameters zumindest auf einer Menge mit positivem Maß noch immer gilt. Durch die Charakterisierung von Frames mit rationalem oversampling über die Zak-Transformierte bewiesen sie damit Folgendes.

**Satz 3.13** ([65]). *Es seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > \frac{3}{2}$  und  $p, q \in \mathbb{N}$  so, dass  $\alpha\beta = \frac{p}{q}$ ,  $\text{ggT}(p, q) = 1$ . Ist nun  $N_m$  der polynomiale B-Spline und*

$$\beta - [\beta] \leq \frac{1}{mq},$$

wobei  $[\cdot] = \lfloor \cdot + \frac{1}{2} \rfloor$  die Rundung zum nächstgelegenen Integer beschreibt, so ist  $\mathcal{G}(N_m, \alpha, \beta)$  kein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$ .

Auf einen Beweis der erwähnten Resultate verzichten wir und geben stattdessen ein weiteres, sehr einfaches Gegenbeispiel für die erwähnte Behauptung über die Framemenge polynomialer B-Splines an, welches Lemvig und Nielsen ebenfalls publizierten. Zu  $\alpha = \frac{1}{3}$  und  $\beta = \frac{5}{2}$  ist  $\alpha\beta = \frac{5}{6} =: \frac{p}{q}$  und für  $N_2$  gilt nach (2.3)

$$\mathcal{P}(1, 0) = \left( Z_{\alpha q} N_2 \left( 1 + \alpha k + \frac{l}{\beta}, 0 \right) \right)_{k,l=0}^{q-1, p-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 15 & 9 & 3 & 3 & 9 \\ 10 & 4 & 2 & 8 & 14 \\ 5 & 1 & 7 & 13 & 11 \\ 0 & 6 & 12 & 12 & 6 \\ 5 & 11 & 13 & 7 & 1 \\ 10 & 14 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nach drei Schritten des Gaußschen Eliminationsverfahrens erhält man

$$\mathcal{P}(1,0) \rightsquigarrow \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 15 & 9 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Zak-Transformierte von  $N_2$  stetig ist, kann  $\mathcal{G}(N_2, \frac{1}{3}, \frac{5}{2})$  nach Korollar 2.7 und Bemerkung 2.8 somit kein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  sein.

In der Tat besitzt  $\mathcal{P}(\cdot, 0)$  für  $N_2$  und das obige Gitter für kein  $x \in \mathbb{R}$  vollen Rang. Dies liegt wieder an der Partition der Eins, wie Gröchenig kurz nach Publikation des Beispiels in [38] zeigte. Darin verdeutlicht er auch, dass solche Ausnahmen für alle PEB-Splines mit Eigenschaft (3.6) existieren. Insgesamt zeichnet sich derweil ein Bild ab, welches die Vermutung aufwirft, dass die Framemenge stetiger polynomialer B-Splines ähnlich kompliziert ist wie die der charakteristischen Funktion (vgl. [20]). Da dies bislang ausschließlich auf die Partition der Eins zurückzuführen ist, gilt selbiges natürlich auch für PEB-Splines mit dieser Eigenschaft, wie zum Beispiel die EB-Splines aus Satz 3.10, jedoch eben nicht zwangsläufig für PEB-Splines ohne diese Eigenschaft.

**Beispiel 3.14** (Gabor-Riesz-Basen mit EB-Splines). *Es ist nicht erst seit der unlängst erschienenen Charakterisierung der Framemenge von  $\chi_{[0,1]}$  bekannt, dass  $\mathcal{G}(\chi_{[0,1]}, \alpha, \frac{1}{\alpha})$  nur für  $\alpha = 1$  eine Riesz-Basis (bzw. Orthonormalbasis) ist (s. [12], [56]). Im Vergleich dazu betrachten wir nun einen EB-Splines  $B_\lambda = e^{\lambda(\cdot)} \chi_{[0,1]}$  der Ordnung eins mit  $\lambda \neq 0$ . Für jedes beliebige  $0 < \alpha \leq 1$  erfüllt die zugehörige Zak-Transformierte*

$$Z_\alpha B_\lambda(x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_\lambda(x + \alpha k) e^{-2\pi i \omega \alpha k} = \sum_{k=0}^{n_0} e^{\lambda(x + \alpha k)} e^{-2\pi i \omega \alpha k} = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n_0} \left( e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)} \right)^k$$

für alle  $(x, \omega) \in [0, \alpha) \times [0, \frac{1}{\alpha})$  und  $n_0 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ . Da  $e^{\alpha\lambda} \neq 1$  nach Voraussetzung, erhält man unter Verwendung der geometrischen Summenformel

$$|Z_\alpha B_\lambda(x, \omega)| = e^{\lambda x} \left| \frac{1 - e^{\alpha(n_0+1)(\lambda - 2\pi i \omega)}}{1 - e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)}} \right| \geq e^{\lambda x} \frac{|1 - e^{\alpha\lambda(n_0+1)}|}{1 + e^{\alpha\lambda}} > 0. \quad (3.7)$$

Durch die Quasiperiodizität liefert dies eine untere Schranke für alle  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^2$ . Nach Satz 2.5 und Korollar 2.7 ist  $\mathcal{G}(B_\lambda, \alpha, \beta)$  somit für alle  $\alpha, \beta > 0$  mit  $(\alpha\beta)^{-1} \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \leq 1$  ein Frame. Durch (3.7) lässt sich im kritischen Fall sehr einfach eine untere Frameschranke bestimmen.

**Beispiel 3.15** (Gabor-Frames stetiger EB-Splines bei  $\beta = 2, 3, \dots$ ). Nach dem Ergebnis von Del Prete kann  $N_2$  für  $\beta = 2, 3, \dots$  keinen Gabor-Frame induzieren. Betrachten wir nun allerdings den stetigen EB-Spline der Ordnung zwei mit  $\Lambda = (\lambda, \lambda)$  für ein  $\lambda \neq 0$ , also  $B_\Lambda = e^{\lambda(\cdot)} N_2$ , so können wir zeigen, dass dieser sehr wohl einen Gabor-Frame für diese Wahlen von  $\beta$  liefern kann. Hierfür untersuchen wir zu  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , die Zak-Transformierte  $Z_\alpha B_\Lambda$  erneut auf Nullstellen. Diese erfüllt für  $x \in [0, \alpha)$

$$\begin{aligned}
Z_\alpha B_\Lambda(x, \omega) &= \sum_{k=0}^{2n-1} B_\Lambda(x + \alpha k) e^{-2\pi i \alpha k \omega} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\lambda x} e^{\lambda \alpha k} (x + \alpha k) e^{-2\pi i \alpha k \omega} + \sum_{k=n}^{2n-1} e^{\lambda x} e^{\lambda \alpha k} (2 - (x + \alpha k)) e^{-2\pi i \alpha k \omega} \\
&= e^{\lambda x} \left[ x \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)} \right)^k - \sum_{k=n}^{2n-1} \left( e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)} \right)^k \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \alpha k \left( e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)} \right)^k + \sum_{k=n}^{2n-1} (2 - \alpha k) \left( e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)} \right)^k \right) \right] \\
&=: e^{\lambda x} (x a(\omega) + b(\omega)).
\end{aligned}$$

Da  $e^{\lambda x}$  keine Nullstellen besitzt, untersuchen wir nun für festes  $\omega$  das lineare Polynom  $p^\omega(x) = x a(\omega) + b(\omega)$ . Für  $a(\omega)$  ergibt sich die kurze Rechnung

$$\begin{aligned}
a(\omega) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)} \right)^k - \sum_{k=n}^{2n-1} \left( e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)} \right)^k \\
&= \frac{1 - e^{n\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)}}{1 - e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)}} - \left( \frac{1 - e^{2n\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)}}{1 - e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)}} - \frac{1 - e^{n\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)}}{1 - e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)}} \right) = \frac{(1 - e^{\lambda - 2\pi i \omega})^2}{1 - e^{\alpha(\lambda - 2\pi i \omega)}}.
\end{aligned}$$

Da aber  $\lambda \neq 0$  ist, muss  $a(\omega) \neq 0$  sein und folglich kann  $p^\omega$  für jedes  $\omega$  nur maximal eine Nullstelle in  $[0, \alpha)$  haben.

Betrachten wir nun zu  $\beta = 2, 3, \dots$  ein  $\alpha = \frac{1}{q\beta}$  für  $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , so gilt  $(\alpha\beta)^{-1} = q$ , und aus der Stetigkeit der Zak-Transformierten folgt

$$\sum_{k=0}^{q-1} |Z_{\alpha q} B_\Lambda(x + \alpha k, \omega)|^2 \geq c > 0 \quad \text{für alle } (x, \omega) \in [0, \alpha] \times [0, \frac{1}{\alpha}].$$

Nach Korollar 2.7 und Bemerkung 2.8 bildet das Gabor-System  $\mathcal{G}(B_\Lambda, \alpha, \beta)$  daher einen Frame.

Durch numerische Berechnungen drängt sich weiter die Vermutung auf, dass die Zak-Transformierte von  $B_\Lambda$  nur genau eine Nullstelle im Fundamentalbereich besitzt, wie Abbildung 3.2 zeigt. Hingegen besitzt die Transformierte des polynomialen Splines  $N_2$  eine Nullstellenlinie.

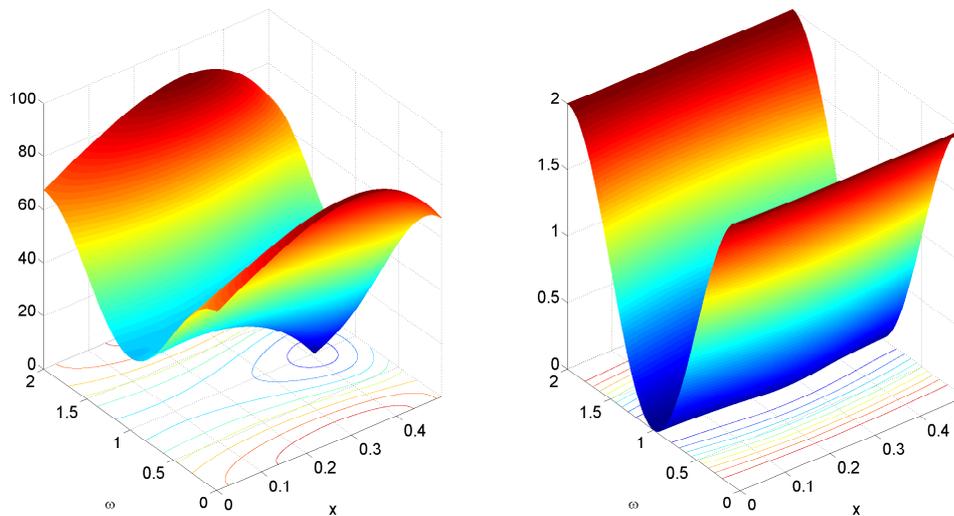


Abbildung 3.2: Absolutbeträge der Zak-Transformierten  $Z_{\frac{1}{2}} B_{\Lambda}$  für  $\Lambda = [3, 3]$  (links) und  $Z_{\frac{1}{2}} N_2$  (rechts).

Die beiden obigen Beispiele zeigen, dass sich EB-Splines, dessen Translate die Eins nicht partitionieren, in manchen Situationen besser als Fenster eines Gabor-Systems eignen, als es die polynomialen B-Splines tun. Auch wenn es keine große Überraschung wäre, so ist bisher noch kein Gitter bekannt, für welches ein PEB-Spline mit Eigenschaft (3.6) einen Frame induziert, ein PEB-Spline selbiger Ordnung ohne diese Eigenschaft hingegen nicht.



## Kapitel 4

# Duale Gabor-Frames

Spätestens bei Anwendungsaufgaben stellt sich die Frage nach einem geeigneten Dual zu einem gegebenen Fenster. Im Fall von Theorem 3.1 konnten wir über die Moore-Penrose Pseudoinverse den kanonischen Dual ablesen. Nach Proposition 1.21 würde aber auch jede andere Linksinverse der pre-Gramian-Matrix punktweise ein duales Fenster liefern. Dies haben wir in Theorem 3.5 und Theorem 3.6 ausgenutzt und nicht-kanonische Duale konstruiert um zu zeigen, dass gewisse Fenster einen Frame induzieren. Diese Methode wurde in [41] auch im Zusammenhang mit TP Funktionen endlichen Typs verwendet. Darauf basierend wurden in [61, 4] für TP Funktionen und in [63] für PEB-Splines Algorithmen formuliert, mit deren Hilfe unendlich viele verschiedene duale Fenster mit kompakten Trägern konstruiert werden können. Die nachfolgenden Versionen sind im wesentlichen in [64] publiziert worden.

### 4.1 Algorithmen zur Berechnung von Dualen mit kompakten Trägern

**Algorithmus 4.1.** Eingabeparameter sind Gewichte  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}_+$  und  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_-$  einer TP Funktion  $g_{n+m}$  endlichen Typs  $n + m \in \mathbb{N}$  wie in (1.19), Gitterparameter  $\alpha, \beta > 0$  mit  $\alpha\beta < 1$ , eine natürliche Zahl  $L \in \mathbb{N}_0$  zur Steuerung des Trägers des Duals  $\gamma_L$  und ein Punkt  $x \in [0, \alpha)$ .

Ausgabeparameter sind ganze Zahlen  $k_1(L), k_2(L) \in \mathbb{Z}$  und das  $\alpha$ -Sampling  $\gamma_L(x + \alpha k)$ ,  $k_1(L) \leq k \leq k_2(L)$ , eines zu  $g_{n+m}$  dualen Fensters  $\gamma_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger.

1. Setze  $r := \left\lfloor \frac{1}{1-\alpha\beta} \right\rfloor$ ,  $l_1 = -(r+1)m$  und  $l_2 = (r+1)n$ .

2. Mit  $l_1(L) := l_1 - L$  und  $l_2(L) := l_2 + L$  sind

$$\begin{aligned} k_1(L) &:= \left\lfloor \frac{l_1 - L + m - 1}{\alpha\beta} - \frac{x}{\alpha} \right\rfloor + 1, \\ k_2(L) &:= \left\lceil \frac{l_2 + L - n + 1}{\alpha\beta} - \frac{x}{\alpha} \right\rceil - 1. \end{aligned}$$

3. Betrachte die endliche Teilmatrix  $P_L(x) := (p_{k,l})_{k_1(L) \leq k \leq k_2(L), l_1(L) \leq l \leq l_2(L)}$ ,

$$p_{k,l} = g \left( x + \alpha k - \frac{l}{\beta} \right),$$

der biinfiniten pre-Gramian-Matrix  $P_g(x)$ .

4. Berechne die Moore-Penrose Pseudoinverse

$$P_L(x)^\dagger = (q_{l,k})_{l_1(L) \leq l \leq l_2(L), k_1(L) \leq k \leq k_2(L)}$$

von  $P_L(x)$ .

5. Das Sampling des Duals  $\gamma_L$  in den Punkten  $\{x + \alpha k \mid k_1(L) \leq k \leq k_2(L)\}$  ist gegeben als

$$\gamma_L(x + \alpha k) := \begin{cases} \beta q_{0,k} & , \text{ falls } k_1(L) \leq k \leq k_2(L), \\ 0 & , \text{ falls } k < k_1(L) \text{ oder } k > k_2(L). \end{cases}$$

Dass die Linksinverse der Teilmatrix  $P_L(x)$  im obigen Algorithmus tatsächlich eine Zeile einer Linksinversen der gesamten biinfiniten Matrix  $P_g$  liefert, liegt daran, dass die Spalten

$$(P_g(x))_{k_1(L) \leq k \leq k_2(L), l}, \quad l < l_1(L) \text{ oder } l > l_2(L), \quad (4.1)$$

linear abhängig von denen aus  $P_L(x)$  sind. Diese sehr starke Bedingung ist eine große Besonderheit der TP Funktionen endlichen Typs und wurde in [41] durch die *Schoenberg-Whitney Bedingungen*, einer Art Verflechtungseigenschaft für TP Funktionen, gezeigt. Im Falle von PEB-Splines ist die Auswahl des endlichen Ausschnittes der pre-Gramian deutlich einfacher, wie aus den Beweisen zu Theorem 3.5 und Theorem 3.6 hervorgeht. Wegen des kompakten

Trägers wird  $P_L$  falls möglich so ausgewählt, dass die Spalten (4.1) allesamt Nullspalten sind, die betrachtete Teilmatrix jedoch trotzdem vollen Rang hat. Man beachte, dass der nachfolgende Algorithmus unter den Voraussetzungen eines Gabor-Systems wie in Theorem 3.5 keine PEB-Splines als Fenster voraussetzt. In diesem Falle funktioniert er für alle positiven, stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

**Algorithmus 4.2.** Eingabeparameter sind der Vektor  $\Lambda \in \mathbb{R}^m$  des zugehörigen EB-Splines  $B_\Lambda$ , Gitterparameter  $\alpha, \beta > 0$  wie in Theorem 3.5 oder Theorem 3.6, eine natürliche Zahl  $L \in \mathbb{N}_0$  zur Steuerung des Trägers des Duals  $\gamma_L$  und ein Punkt  $x \in \left[ m - \frac{1}{\beta}, m - \frac{1}{\beta} + \alpha \right)$ .

Ausgabeparameter sind ganze Zahlen  $k_1(L), k_2(L) \in \mathbb{Z}$  und das  $\alpha$ -Sampling  $\gamma_L(x + \alpha k)$ ,  $k_1(L) \leq k \leq k_2(L)$ , eines zum EB-Spline  $B_\Lambda$  dualen Fensters  $\gamma_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger.

1. Setze  $l_2(L) := \left\lceil \frac{m - \frac{1}{\beta} + \alpha L}{\frac{1}{\beta} - \alpha} \right\rceil - 1$  und  $l_1(L) := - \left\lfloor \frac{\frac{1}{\beta} + \alpha(L-1)}{\frac{1}{\beta} - \alpha} \right\rfloor + 1$ , sowie  $k_1(L) := l_1(L) - L$  und  $k_2(L) := l_2(L) + L$ .
2. Betrachte die endliche Teilmatrix  $P_L(x) := (p_{k,l})_{k_1(L) \leq k \leq k_2(L), l_1(L) \leq l \leq l_2(L)}$ ,

$$p_{k,l} = g \left( x + \alpha k - \frac{l}{\beta} \right),$$

der biinfinite pre-Gramian-Matrix  $P_g(x)$ .

3. Berechne die Moore-Penrose Pseudoinverse

$$P_L(x)^\dagger = (q_{l,k})_{l_1(L) \leq l \leq l_2(L), k_1(L) \leq k \leq k_2(L)}$$

von  $P_L(x)$ .

4. Das Sampling des Duals  $\gamma_L$  in den Punkten  $\{x + \alpha k \mid k_1(L) \leq k \leq k_2(L)\}$  ist gegeben als

$$\gamma_L(x + \alpha k) := \begin{cases} \beta q_{0,k} & , \text{ falls } k_1(L) \leq k \leq k_2(L), \\ 0 & , \text{ falls } k < k_1(L) \text{ oder } k > k_2(L). \end{cases}$$

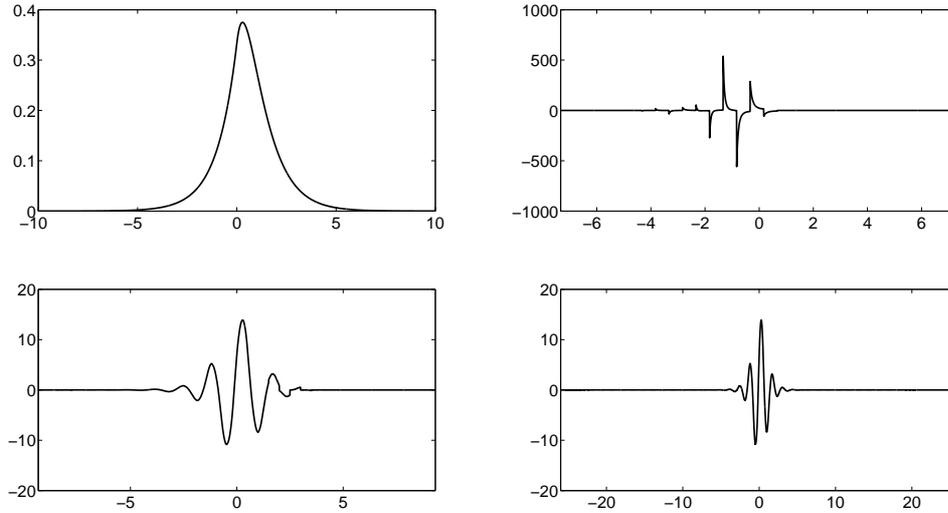


Abbildung 4.1: Graphen der um Null zentrierten TP Funktion  $g_3$  mit Gewichten  $(-1, 1, 2)$  (oben links) und dreier zugehörigen Duale zu  $\alpha = \frac{1}{2}$  und  $\beta = \frac{3}{2}$ , berechnet mit Hilfe des Algorithmus 4.1. Oben rechts mit  $L = 0$ , unten links mit  $L = 5$  und unten rechts mit  $L = 30$ .

Die in den Algorithmen berechneten Fenster sind im Allgemeinen unstetig. Für einen stetigen Dual eines PEB-Splines benötigt man zu der Teilmatrix  $P_L(x)$  aus Algorithmus 4.2 eine Linksinverse  $\Gamma(x)$  (nicht notwendigerweise die Moore-Penrose Pseudoinverse), sodass deren nullte Zeile, d.h. die Zeile zum Index  $j = 0$ , als Funktion in  $x$  für alle  $k = k_1(L), \dots, k_2(L) - 1$

$$\lim_{y \rightarrow \alpha} \Gamma_{0,k}(m - \frac{1}{\beta} + y) = \Gamma_{0,k+1}(m - \frac{1}{\beta}), \text{ sowie } \Gamma_{0,k_1(L)}(m - \frac{1}{\beta}) = 0 = \lim_{y \rightarrow \alpha} \Gamma_{0,k_2(L)}(m - \frac{1}{\beta} + y)$$

erfüllt. Für einen stetigen Dual einer TP Funktion müssen ähnliche Bedingungen erfüllt werden, wobei darauf zu achten ist, dass die Teilmatrix  $P_L(x)$  in Algorithmus 4.1 nicht unabhängig von  $x$  ausgewählt wird.

In Abbildung 4.1 haben wir drei Duale der TP Funktion  $g_3$  mit Gewichten  $(-1, 1, 2)$  dargestellt. Bei kleinem  $L$  und somit kleinem Träger erkennt man sehr deutlich die Unstetigkeitsstellen der Duale. Für sehr große  $L$  scheinen diese zu verschwinden. Durch Approximationen an den kanonischen Dual wurde in [61] numerisch bereits verdeutlicht, dass die mit den Algorithmen berechneten Duale gegen den kanonischen Dual zu konvergieren scheinen. Dies wurde vor kurzem in [64] bewiesen. Dafür wurde ausgenutzt, dass die endlichen Ausschnitte  $P_L(x)$  gleichmäßig in  $L$  und  $x$  nach oben und unten beschränkt sind. Auf den konstruktiven Beweis hierzu verzichten wir an dieser Stelle.

**Theorem 4.3** ([64]). *Es sei  $f$  eine TP Funktion endlichen Typs wie in (1.19) oder ein EB-Spline wie in (1.15). Dann existieren positive Konstanten  $A, B > 0$ , sodass für den endlichen Ausschnitt  $P_L(x)$  aus Algorithmus 4.1 bzw. 4.2*

$$A\|\mathbf{c}\|_2 \leq \|P_L(x)\mathbf{c}\|_2 \leq B\|\mathbf{c}\|_2, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{C}^{k_2(L)-k_1(L)+1},$$

*gilt, gleichmäßig in  $L$  und  $x$ . Damit folgt  $\|\gamma_L\|_2 \leq \sqrt{\alpha} \beta A^{-1}$  für alle  $L \in \mathbb{N}$ .*

Die Konvergenz der Duale  $\gamma_L$  gegen den kanonischen Dual  $\gamma^\circ$  folgt damit aus einem neuen Resultat über die *finite section* Methode nicht-symmetrischer biinfiniter Matrizen.

## 4.2 Die finite section Methode und die Konvergenz der Duale

Im Folgenden sei zu  $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$  und  $\mathbf{b} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  der Operator  $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$  die Orthogonalprojektion

$$\mathcal{P}_{\mathbf{n}} \mathbf{b} = (\dots, 0, b_{-n_1}, b_{-n_1+1}, \dots, b_{n_2-1}, b_{n_2}, 0, \dots)^T$$

auf den  $n_1 + n_2 + 1$ -dimensionalen Unterraum  $\mathcal{P}_{\mathbf{n}} \ell^2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^{n_1+n_2+1}$ . Zu einer biinfiniten Matrix  $U = (u_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  wird  $\mathcal{P}_{\mathbf{n}} U \mathcal{P}_{\mathbf{n}}$  manchmal mit dem zugehörigen endlichen Ausschnitt von  $U$  identifiziert. Auch wenn  $\mathcal{P}_{\mathbf{n}} U \mathcal{P}_{\mathbf{n}}$  auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  nicht invertierbar sein kann, nutzen wir die Notation  $(\mathcal{P}_{\mathbf{n}} U \mathcal{P}_{\mathbf{n}})^{-1}$ , sofern der Ausschnitt auf  $\mathcal{P}_{\mathbf{n}} \ell^2(\mathbb{Z})$  invertierbar ist.

Bei der finite section Methode geht es im wesentlichen darum, dass in gewissen Situationen statt des Problems

$$U\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.2}$$

das lineare Gleichungssystem

$$\mathcal{P}_{\mathbf{n}} U \mathcal{P}_{\mathbf{n}} x_{\mathbf{n}} = \mathcal{P}_{\mathbf{n}} \mathbf{b} \tag{4.3}$$

gelöst werden kann und  $x_{\mathbf{n}}$  eine gute Näherung an die Lösung  $\mathbf{x}$  darstellt. Der Beginn dieser Methode geht auf Gohberg und Fel'dman [35] zurück. Wir benötigen später noch das folgende grundlegende Theorem, welches einen Einblick in diese Methode gewährt (s. z.B. [42]).

**Theorem 4.4.** *Es sei  $U$  ein positiv definit, invertierbarer Operator auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Dann konvergiert die Lösung  $x_{\mathbf{n}}$  zu  $\mathbf{n} = (-n, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , des Problems (4.3) in  $\ell^2(\mathbb{Z})$  gegen die Lösung  $\mathbf{x}$  des Problems (4.2) für  $n \rightarrow \infty$ .*

*Beweis.* Mit  $\lambda_- := \min \sigma(U)$  und  $\lambda_+ := \max \sigma(U)$ , also  $\sigma(U) \subseteq [\lambda_-, \lambda_+]$  gilt

$$\lambda_- \|\mathcal{P}_n \mathbf{b}\|_2^2 \leq \langle U \mathcal{P}_n \mathbf{b}, \mathcal{P}_n \mathbf{b} \rangle \leq \lambda_+ \|\mathcal{P}_n \mathbf{b}\|_2^2.$$

Damit folgt für  $U_n := \mathcal{P}_n U \mathcal{P}_n$  ebenso  $\sigma(U_n) \subseteq [\lambda_-, \lambda_+]$  auf  $\mathcal{P}_n \ell^2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^{2n+1}$ . Es ist  $U_n$  also invertierbar auf  $\mathcal{P}_n \ell^2(\mathbb{Z})$  und erfüllt  $\|U_n^{-1}\| \leq \lambda_-^{-1} = \|U^{-1}\|$ . Wir betrachten nun kurzzeitig die Erweiterung  $\tilde{U}_n := U_n + \lambda_+(I - \mathcal{P}_n)$ . Die Einschränkung von  $\tilde{U}_n$  auf  $\mathcal{P}_n \ell^2(\mathbb{Z})$  ist also  $U_n$  selbst. Weiter ist  $\tilde{U}_n$  invertierbar auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit  $\tilde{U}_n^{-1} = U_n^{-1} + \lambda_+^{-1}(I - \mathcal{P}_n)$ , wobei man beachte, dass nach den obigen Konventionen  $U_n U_n^{-1} = \mathcal{P}_n$  gilt. Damit liest man sofort ab, dass  $\sigma(\tilde{U}_n) \subseteq [\lambda_-, \lambda_+]$ . Außerdem konvergieren sowohl  $U_n$ , als damit auch  $\tilde{U}_n$  nach

$$\begin{aligned} \|(U_n - U) \mathbf{b}\|_2 &\leq \|(U_n - \mathcal{P}_n U) \mathbf{b}\|_2 + \|(\mathcal{P}_n U - U) \mathbf{b}\|_2 \\ &= \|\mathcal{P}_n U (\mathcal{P}_n - I) \mathbf{b}\|_2 + \|(\mathcal{P}_n - I) U \mathbf{b}\|_2 \end{aligned}$$

gegen  $U$  im Sinne der starken Operator-topologie. Dies impliziert nach

$$\|(\tilde{U}_n^{-1} - U^{-1}) \mathbf{b}\|_2 = \|\tilde{U}_n^{-1} (U - \tilde{U}_n) U^{-1} \mathbf{b}\|_2 \leq \|\tilde{U}_n^{-1}\| \|(U - \tilde{U}_n) U^{-1} \mathbf{b}\|_2,$$

dass auch  $\tilde{U}_n^{-1}$  stark gegen  $U^{-1}$  konvergiert. Somit folgt für die Lösungen  $x_n$  und  $x$  insgesamt

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|_2 &= \|U^{-1} \mathbf{b} - U_n^{-1} \mathcal{P}_n \mathbf{b}\|_2 \\ &\leq \|(U^{-1} - \tilde{U}_n^{-1}) \mathbf{b}\|_2 + \|\tilde{U}_n^{-1} (I - \mathcal{P}_n) \mathbf{b}\|_2 \\ &\leq \|\tilde{U}_n^{-1}\| \left[ (\|U\| + \lambda_+) \|( \mathcal{P}_n - I) U^{-1} \mathbf{b}\|_2 + 2 \|(\mathcal{P}_n - I) \mathbf{b}\|_2 \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned} \tag{4.4}$$

wie gewünscht. □

Eine Verallgemeinerung dieses Resultats auf weitere Klassen von Matrizen bzw. Operatoren ist nicht ohne weiteres möglich. Eine Eigenschaft, derer sich im Kontext der finite section Methoden in den letzten Jahren häufig bedient wurde, und die auch unsere pre-Gramian-Matrizen erfüllen, ist die Voraussetzung des exponentiellen Abklingens der betrachteten Matrizen. Im weiteren Verlauf bedienen wir uns daher auch des folgenden Resultats von Jaffard [48] und Baskakov [5].

**Proposition 4.5** ([48],[5]). *Es sei  $A = (A_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  eine biinfinite Matrix und  $C, a > 0$ , sodass*

$$|A_{jk}| \leq C e^{-a|j-k|} \quad \text{für alle } j, k \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Ist  $A$  darüber hinaus invertierbar auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , so besitzt auch die Inverse  $A^{-1}$  ein exponentielles Abklingverhalten. Genauer existieren  $C' > 0$  und  $0 < \tilde{a} < a$  mit

$$|(A^{-1})_{jk}| \leq C' e^{-\tilde{a}|j-k|} \quad \text{für alle } j, k \in \mathbb{Z}.$$

**Korollar 4.6.** *Es seien  $A$  ein positiv definit, invertierbarer Operator auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit exponentiellem Abklingverhalten wie in (4.5) und  $(\mathcal{P}_n A \mathcal{P}_n)_n$  eine Folge endlicher Ausschnitte. Dann ist jede einzelne Matrix  $\mathcal{P}_n A \mathcal{P}_n$  invertierbar auf  $\mathcal{P}_n \ell^2(\mathbb{Z})$  und es existieren Konstanten  $C' > 0$  und  $0 < \tilde{a} < a$ , sodass*

$$\left| (\mathcal{P}_n A \mathcal{P}_n)_{jk}^{-1} \right| \leq C' e^{-\tilde{a}|j-k|} \quad \text{für } -n_1 \leq j, k \leq n_2. \quad (4.6)$$

*Beweis.* Der Beweis dieses Korollars zu Proposition 4.5 basiert auf den Ideen aus [42] und [40]. Es sei  $\mathcal{A}$  die biinfinite Matrix, gebildet durch das Anordnen der endlichen Ausschnitte  $\mathcal{P}_n A \mathcal{P}_n$  entlang der Diagonalen. Dann besitzt  $\mathcal{A}$  offensichtlich selbst das exponentielle Abklingverhalten (4.5). Da andererseits  $A$  invertierbar und positiv ist, liegt das Spektrum in einem positiven Intervall  $\sigma(A) \subseteq [\lambda_-, \lambda_+]$ ,  $\lambda_-, \lambda_+ > 0$ , was damit auch für das Spektrum der Ausschnitte  $\mathcal{P}_n A \mathcal{P}_n$  auf  $\mathcal{P}_n \ell^2(\mathbb{Z})$  gilt (vgl. Beweis zu Theorem 4.4). Somit ist  $\mathcal{A}$  wiederum invertierbar auf  $\oplus \mathcal{P}_n \ell^2(\mathbb{Z}) \simeq \ell^2(\mathbb{Z})$ . Nach Proposition 4.5 besitzt  $\mathcal{A}^{-1}$  also selbst exponentielles Abklingverhalten. Da  $\mathcal{A}^{-1}$  nach Konstruktion aus den Blöcken  $(\mathcal{P}_n A \mathcal{P}_n)^{-1}$  besteht, erfüllen diese  $\left| (\mathcal{P}_n A \mathcal{P}_n)_{jk}^{-1} \right| \leq C' e^{-\tilde{a}|j-k|}$  für  $-n_1 \leq j, k \leq n_2$ .  $\square$

Um zu zeigen, dass die konstruierten Duale  $\gamma_L$  aus den Algorithmen 4.1 und 4.2 gegen den kanonischen Dual  $\gamma^\circ$  konvergieren, müssen wir zeigen, dass die nullten Zeilen der Linksinversen, aus denen die Duale konstruiert werden, gleichmäßig gegen die nullte Zeile der Moore-Penrose Pseudoinversen von  $P_g(x)$  konvergiert. Denn nach Proposition 1.16 besitzt  $\gamma^\circ$  die kleinste  $L^2(\mathbb{R})$ -Norm unter allen Dualen. Wegen der Darstellung über die Zeilen der Linksinversen zur pre-Gramian-Matrix muss  $\gamma^\circ$  durch die Moore-Penrose-Pseudoinverse bestimmt sein. Da die verschiedenen Linksinversen aus den obigen Algorithmen durch endliche Ausschnitte  $P_L(x)$  der pre-Gramian gebildet werden, betrachten wir formal das finite section Problem

$$\left\| e_0^T P_g(x)^\dagger - e_0^T P_L(x)^\dagger \right\|_2 = \left\| P_g(x) (P_g(x)^* P_g(x))^{-1} e_0 - P_L(x) (P_L(x)^* P_L(x))^{-1} e_0 \right\|_2, \quad (4.7)$$

wobei  $P_L(x)$  mit  $\mathbf{n}(L) := (|l_1(L)|, l_2(L))$  und  $\mathbf{r}(L) := (|k_1(L)|, k_2(L))$  die Darstellung  $P_L(x) = \mathcal{P}_{\mathbf{r}} P_g(x) \mathcal{P}_{\mathbf{n}}$  besitzt. Es handelt sich bei den Matrizen insbesondere also um unsymmetrische Ausschnitte. Einige Resultate über unsymmetrische finite section Methoden haben Gröchenig, Rzeszotnik und Strohmer in [40] bereits angegeben. Davon sind allerdings keine auf den vorliegenden Fall anwendbar.

**Theorem 4.7** ([64]). *Es seien  $(\chi(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  eine strikt monoton wachsende Folge von ganzen Zahlen und  $U = (u_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  eine biinfinite Matrix so, dass  $U^*U$  invertierbar auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  ist und zum anderen Konstanten  $c, a > 0$  existieren mit*

$$|u_{j,k}| \leq c e^{-a|j-\chi(k)|} \quad \text{für alle } j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

Weiter existiere zu jedem  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$  ein  $\mathbf{r}(\mathbf{n}) = (r_1(\mathbf{n}), r_2(\mathbf{n})) \in \mathbb{N}^2$ , sodass für die endlichen Ausschnitte  $U_{\mathbf{n}} := \mathcal{P}_{\mathbf{r}(\mathbf{n})} U \mathcal{P}_{\mathbf{n}}$  eine in  $\mathbf{n}$  gleichmäßige untere Schranke  $A > 0$  existiere, d.h.

$$A \|\mathbf{c}\|_2 \leq \|U_{\mathbf{n}} \mathbf{c}\|_2 \quad \text{für alle } \mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{Z}). \quad (4.9)$$

Dann existieren  $\tilde{c}, \tilde{a} > 0$ , sodass für alle  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$

$$\|U (U^* U)^{-1} e_0 - U_{\mathbf{n}} (U_{\mathbf{n}}^* U_{\mathbf{n}})^{-1} e_0\|_2 \leq \tilde{c} e^{-\tilde{a} n_0}, \quad (4.10)$$

mit  $n_0 := \min\{n_1, n_2, r_1(\mathbf{n}), r_2(\mathbf{n})\}$ .

*Beweis.* Nachfolgend schreiben wir kurz  $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$  ohne auf die Abhängigkeit  $\mathbf{r}(\mathbf{n})$  einzugehen und schreiben  $b := U (U^* U)^{-1} e_0$ , sowie  $d_{\mathbf{n}} := U_{\mathbf{n}} (U_{\mathbf{n}}^* U_{\mathbf{n}})^{-1} e_0$ . Mit diesen Bezeichnungen lässt sich (4.10) abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|b - d_{\mathbf{n}}\|_2 &\leq \|(U - U \mathcal{P}_{\mathbf{n}}) (U^* U)^{-1} e_0\|_2 \\ &\quad + \left\| U \mathcal{P}_{\mathbf{n}} \left( (U^* U)^{-1} - (\mathcal{P}_{\mathbf{n}} U^* U \mathcal{P}_{\mathbf{n}})^{-1} \right) e_0 \right\|_2 \\ &\quad + \left\| \left( U \mathcal{P}_{\mathbf{n}} (\mathcal{P}_{\mathbf{n}} U^* U \mathcal{P}_{\mathbf{n}})^{-1} - U_{\mathbf{n}} (U_{\mathbf{n}}^* U_{\mathbf{n}})^{-1} \right) e_0 \right\|_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die drei Teile auf der rechten Seite der Ungleichung behandeln wir nun einzeln. Alle sich ergebenden Konstanten  $c_i$  erfüllen  $c_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

1. Da  $U$  nach Voraussetzung die Abklingbedingung (4.8) erfüllt, klingt die symmetrische Matrix  $U^* U$  bezüglich der Diagonalen genauso ab. Es existieren also  $C, a > 0$  mit

$$|(U^* U)_{jk}| \leq C e^{-a|j-k|} \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Da  $U^*U$  darüber hinaus positiv und invertierbar ist, folgt aus Theorem 4.5 ein ähnliches Abklingverhalten für die Inverse, d.h. es existieren weiter  $C' > 0$  und  $0 < \tilde{a} < a$ , sodass

$$\left| (U^*U)_{jk}^{-1} \right| \leq C' e^{-\tilde{a}|j-k|} \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere folgt für den Vektor  $v := (U^*U)^{-1} e_0$  die Bedingung

$$|v_j| \leq c_1 e^{-\tilde{a}|j|} \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

Wegen

$$\|(I - \mathcal{P}_n)v\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{-n_1-1} |v_j|^2 + \sum_{j=n_2+1}^{\infty} |v_j|^2 \leq C' \sum_{|j|>n_0} e^{-\tilde{a}|j|} = \mathcal{O}(e^{-\tilde{a}|n_0|}),$$

ist damit insgesamt

$$\|(U - U\mathcal{P}_n)(U^*U)^{-1} e_0\|_2 \leq \|U\| \|(I - \mathcal{P}_n)v\|_2 \leq c_2 e^{-\tilde{a}n_0}.$$

2. Da  $U^*U$  positiv und invertierbar ist, liegt das Spektrum des Operators in einem positiven Intervall  $\sigma(U^*U) \subseteq [\lambda_-, \lambda_+]$ ,  $0 < \lambda_- \leq \lambda_+ < \infty$ . Die Konvergenz des zweiten Summanden folgt somit aus Theorem 4.4. Wegen  $\|(\mathcal{P}_n - I)e_0\|_2 = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}^2$ , erhalten wir nach (4.4) mit der Notation  $v = (U^*U)^{-1} e_0$  von eben

$$\|((U^*U)^{-1} - (\mathcal{P}_n U^*U \mathcal{P}_n)^{-1}) e_0\|_2 \leq \frac{2\lambda_+}{\lambda_-} \|(\mathcal{P}_n - I)v\|_2$$

und folglich

$$\|U\mathcal{P}_n((U^*U)^{-1} - (\mathcal{P}_n U^*U \mathcal{P}_n)^{-1}) e_0\|_2 \leq c_3 e^{-\tilde{a}n_0}.$$

3. Die Abschätzung des dritten und letzten Summanden aus (4.11) bedarf einer geometrischen Interpretation der Zeilen der Moore-Penrose Pseudoinversen. Hierzu sei

$$b_n := (U\mathcal{P}_n)(\mathcal{P}_n U^*U \mathcal{P}_n)^{-1} e_0$$

die transponierte nullte Zeile der Moore-Penrose Pseudoinversen von  $U\mathcal{P}_n$  und  $d_n$  wie eben. Nach Korollar 4.6 erfüllt  $(\mathcal{P}_n U^*U \mathcal{P}_n)^{-1}$  die Abklingbedingung (4.6) unabhängig von  $n$ . Somit erhalten wir für die Einträge von  $b_n$  wiederum

$$|(b_n)_j| \leq c_4 e^{-\tilde{a}|j|}. \quad (4.13)$$

Da die Moore-Penrose Psuedoinverse im vorliegenden Fall eine Linksinverse von  $U\mathcal{P}_n$  liefert, gilt weiter

$$b_n \perp V_n := \text{span}\{u_k \mid -n_1 \leq k \leq n_2, k \neq 0\},$$

wobei  $u_k, k \in \mathbb{Z}$ , die Spalten der Matrix  $U$  sind. Analog gilt ebenso

$$d_n \perp \mathcal{P}_r V_n.$$

Mit der Bezeichnung  $\Pi_W$  für die Orthogonalprojektion auf den Unterraum  $W$  seien weiter

$$\tilde{b}_n := (I - \Pi_{V_n}) u_0 \quad \text{und} \quad \tilde{d}_n := (I - \Pi_{\mathcal{P}_r V_n}) \mathcal{P}_r u_0.$$

Wegen  $b_n \in \text{Bild}(U\mathcal{P}_n)$  und  $d_n \in \text{Bild}(U_n)$  können wir die Vektoren  $b_n$  und  $d_n$  daher umschreiben als

$$b_n = \frac{\tilde{b}_n}{\|\tilde{b}_n\|_2} \quad \text{und} \quad d_n = \frac{\tilde{d}_n}{\|\tilde{d}_n\|_2},$$

wobei die Normalisierung aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \langle b_n, u_0 \rangle = 1 \quad \text{und} \quad \langle \tilde{b}_n, u_0 \rangle = \langle \tilde{b}_n, \tilde{b}_n + \Pi_{V_n} u_0 \rangle = \|\tilde{b}_n\|_2^2, \\ \langle d_n, \mathcal{P}_r u_0 \rangle = 1 \quad \text{und} \quad \langle \tilde{d}_n, \mathcal{P}_r u_0 \rangle = \langle \tilde{d}_n, \tilde{d}_n + \Pi_{\mathcal{P}_r V_n} \mathcal{P}_r u_0 \rangle = \|\tilde{d}_n\|_2^2 \end{aligned}$$

folgt. Anstatt sofort den dritten Summanden  $\|b_n - d_n\|_2$  zu betrachten, schätzen wir nun zunächst  $\|\tilde{b}_n - \tilde{d}_n\|_2$  ab. Die Differenz dieser beiden Vektoren ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{b}_n - \tilde{d}_n &= (I - \mathcal{P}_r)(u_0 - \Pi_{V_n} u_0) + \Pi_{\mathcal{P}_r V_n} \mathcal{P}_r u_0 - \mathcal{P}_r \Pi_{V_n} u_0 \\ &= (I - \mathcal{P}_r) \tilde{b}_n + \Pi_{\mathcal{P}_r V_n} \mathcal{P}_r (u_0 - \Pi_{V_n} u_0) \\ &= (I - \mathcal{P}_r) \tilde{b}_n + \Pi_{\mathcal{P}_r V_n} \mathcal{P}_r \tilde{b}_n. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Nach Voraussetzung (4.9) bilden die abgeschnittenen Spalten  $\mathcal{P}_r u_k$ , mit  $-n_1 \leq k \leq n_2$  und  $k \neq 0$ , eine Riesz-Basis des  $\mathcal{P}_r V_n$  mit unterer Riesz-Schranke  $A$ . Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \|\Pi_{\mathcal{P}_r V_n} \mathcal{P}_r \tilde{b}_n\|_2^2 &\leq A^{-2} \sum_{-n_1 \leq k \leq n_2, k \neq 0} \left| \langle \Pi_{\mathcal{P}_r V_n} \mathcal{P}_r \tilde{b}_n, \mathcal{P}_r u_k \rangle \right|^2 \\ &= A^{-2} \sum_{-n_1 \leq k \leq n_2, k \neq 0} \left| \langle \mathcal{P}_r \tilde{b}_n, u_k \rangle \right|^2 \\ &= A^{-2} \sum_{-n_1 \leq k \leq n_2, k \neq 0} \left| \langle (\mathcal{P}_r - I) \tilde{b}_n, u_k \rangle \right|^2 \\ &\leq A^{-2} B \left\| (\mathcal{P}_r - I) \tilde{b}_n \right\|_2^2, \end{aligned}$$

wobei  $B = \|U\|^2$  eine Bessel-Schranke der Spalten  $u_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ist. Zusammen mit (4.14) impliziert dies

$$\|\tilde{b}_n - \tilde{d}_n\|_2 \leq c_5 \|(I - \mathcal{P}_r) \tilde{b}_n\|_2.$$

Um nun schlussendlich auf  $\|b_n - d_n\|_2$  zu schließen, verwenden wir, dass zwei nichttriviale Vektoren  $y, w$  die Beziehung

$$\left\| \frac{y}{\|y\|_2^2} - \frac{w}{\|w\|_2^2} \right\|_2 \leq \frac{3 \|y - w\|_2}{\min\{\|y\|_2^2, \|w\|_2^2\}}$$

erfüllen. Da wie bereits erwähnt  $b_n \in \text{Bild}(UP_n)$  und  $d_n \in \text{Bild}(U_n)$ , liefert (4.9) die Normschranken

$$0 < A \leq \|\tilde{b}_n\|_2, \|\tilde{d}_n\|_2 \leq \|u_0\|_2.$$

Insgesamt folgt mit (4.13)) daher schließlich

$$\|b_n - d_n\|_2 \leq \frac{3}{A^2} \|\tilde{b}_n - \tilde{d}_n\|_2 \leq \frac{3c_5}{A^2} \|(I - \mathcal{P}_r) \tilde{b}_n\|_2 \leq c_6 e^{-\tilde{a}n_0}.$$

Durch Summation der Konstanten folgt Behauptung (4.10) somit mit der Konstanten  $\tilde{c} = c_2 + c_3 + c_6$ .  $\square$

Die Voraussetzung des exponentiellen Abklingens der Matrix  $U$  aus Theorem 4.7 wird von allen pre-Gramian-Matrizen exponentiell abklingender Funktionen erfüllt. Genauer ist in diesem Fall  $\chi(k) = \frac{k}{\alpha\beta}$  die Linie, entlang derer das Abklingen gemessen wird. Darüber hinaus besitzen die endlichen Ausschnitte  $P_L$  der Algorithmen 4.1 und 4.2 nach Theorem 4.3 eine gleichmäßige untere Schranke wie in (4.9). Daher können wir Theorem 4.7 auf unsere ursprüngliche Problemstellung (4.7) anwenden.

**Theorem 4.8** ([64]). *Es sei  $f$  eine TP Funktion endlichen Typs wie in (1.19) oder ein EB-Spline wie in (1.15). Dann konvergiert die Folge der Duale  $(\gamma_L)_{L \in \mathbb{N}}$  aus Algorithmus 4.1 bzw. 4.2 in  $L^2(\mathbb{R})$  exponentiell gegen den kanonischen Dual  $\gamma^\circ$  von  $f$ , d.h. es existieren  $\tilde{c}, \rho > 0$  mit*

$$\|\gamma_L - \gamma^\circ\|_2 \leq \tilde{c} e^{-\rho L}.$$

*Beweis.* Es seien  $\mathbf{n}(L) := (|l_1(L)|, l_2(L))$  und  $\mathbf{r}(L) := (|k_1(L)|, k_2(L))$  wie in den Algorithmen. Damit besitzen die endlichen Ausschnitte  $P_L(x)$  die Darstellung  $P_L(x) = \mathcal{P}_r P_f(x) \mathcal{P}_n$  und

nach Theorem 4.7 gilt für alle  $x$

$$\left\| e_0^T P_f(x)^\dagger - e_0^T P_L(x)^\dagger \right\|_2 \leq \tilde{c} e^{-\tilde{a}n_0}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|\gamma_L - \gamma^\circ\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_L(x) - \gamma^\circ(x)|^2 dx = \int_0^\alpha \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\gamma_L(x + \alpha j) - \gamma^\circ(x + \alpha j)|^2 dx \\ &= \int_0^\alpha \left\| e_0^T P_L(x)^\dagger - e_0^T P_f(x)^\dagger \right\|_2^2 dx \leq C e^{-2\tilde{a}n_0}, \end{aligned}$$

wobei  $n_0 := \min\{n_1, n_2, r_1(\mathbf{n}), r_2(\mathbf{n})\}$  nur vom gewählten Fenster  $f$  und  $L$  abhängt. □

## Kapitel 5

# Nicht-separable Gitter

Bislang haben wir uns ausschließlich mit Gabor-Systemen der Form

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \{M_{\beta l} T_{\alpha k} g \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$$

beschäftigt. Anschaulich bedeuten solche Systeme, dass eine Fensterfunktion  $g$  mit fester Zeit-Frequenz-Lokalisation auf die Gitterpunkte des rechteckigen oder *separablen* Gitters  $\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$  der Zeit-Frequenz-Ebene gelegt wird. Um nun einerseits einen Frame zu erhalten, müssen die Gitterpunkte ausreichend nahe beieinander liegen. Um andererseits wenig Redundanz zu beinhalten, sollten sie so weit wie möglich auseinander liegen. Gehen wir nun davon aus, dass die Zeit-Frequenz-Lokalisation des Fensters  $g$  nicht rechteckig, sondern eher gleichmäßig in Zeit- und Frequenzrichtung ist, so kann ein rechteckiges Gitter nicht optimal sein, sofern man an einer guten Überdeckung der Ebene mit wenig Überlappung interessiert ist. Optimalitätsfragen dieser Art werden noch heute in der Geometrie diskutiert. Für den Fall einer kreisrunden Lokalisation ist die beste Packung über einem Gitter auf der Ebene allerdings schon seit 1773 bekannt. In diesem Jahre zeigte Lagrange, dass die dichteste Kreisgitterpackung durch ein hexagonales Gitter erzielt wird und ohne Überlappung damit knapp 91% der Ebene überdeckt werden kann. Ein Rechtecksgitter erzielt hingegen maximal 79% Überdeckung (vgl. Abbildung 5.1). In 1910 zeigte Thue dann sogar, dass die dichteste Kreispackung überhaupt die dichteste Kreisgitterpackung ist. Diese anschaulichen Überlegungen führen dazu, dass auch andere Gitter zur Bildung von Gabor-Systemen herangezogen werden. Da das Gauß-Fenster seinerseits eine kreisrunde Zeit-Frequenz-Lokalisation aufweist, wird für dieses beispielsweise

bei OFDM-Designs gerne auf ein hexagonales Gitter zurückgegriffen (s. z.B. [84, 85]). In [1] vermuteten Abreu und Dörfler sogar, dass dieses Gitter für ein Gauß-Fenster und bei fester gegebener Redundanz den Gabor-Frame mit der besten Konditionszahl liefert.

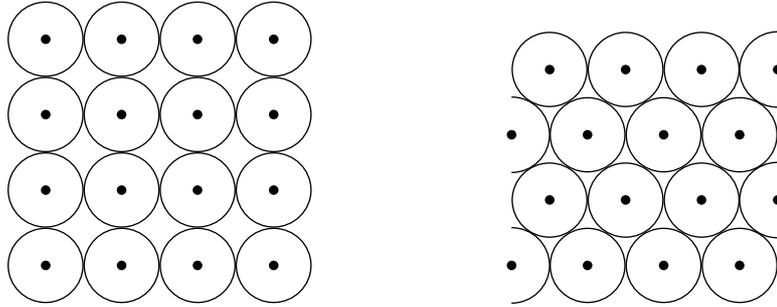


Abbildung 5.1: Kreisgitterpackung der Ebene durch ein quadratisches (links) und ein hexagonales (rechts) Gitter.

Formal existieren neben Gabor-Systemen über separablen Gittern noch Gabor-Systeme über *nicht-separablen* Gittern und *irreguläre* Gabor-Systeme. Letztere bestehen aus abzählbar vielen Zeit-Frequenz-Shifts eines Fensters, welche aus keinerlei Gitter auf der Zeit-Frequenz-Ebene hervorgehen müssen. Dadurch geht viel der inneren Struktur von Gabor-Systemen verloren, welche diese Form sehr viel schwerer zu fassen macht. Eine Einführung zu irregulären Gabor-Systemen findet sich in [14, 15] und [44]. Wir werden nicht weiter auf solche Systeme eingehen und beschäftigen uns nachfolgend mit Gabor-Systemen nicht-separabler Gitter, wie das bereits erwähnte hexagonale eines ist. Sofern nicht anders gekennzeichnet, beruht die folgende Einführung auf [36, Kapitel 9] und [44].

**Definition 5.1.** Wir nennen die Menge  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  ein (*symplektisches*) *Gitter* auf  $\mathbb{R}^2$ , wenn  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\mathcal{A} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  existieren, sodass  $\Delta = a\mathcal{A}\mathbb{Z}^2$ .  $\Delta$  heißt außerdem ein *separables Gitter*, falls  $\mathcal{A}$  eine Diagonalmatrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

ist. Weiter bezeichnen wir mit  $\text{vol}(\Delta) := |\det(a\mathcal{A})| = a^2$  das *Volumen* eines Gitters  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^2$  und mit  $\Delta^\circ := \text{vol}(\Delta)^{-1}\Delta = a^{-1}\mathcal{A}\mathbb{Z}^2$  das zu  $\Delta$  *adjungierte Gitter*.

**Bemerkungen 5.2.** (i) Allgemein bezeichnet man jede nichttriviale diskrete additive Untergruppe  $\Delta \triangleleft \mathbb{R}^2$  als ein Gitter *in*  $\mathbb{R}^2$ . Erfüllt ein Gitter  $\Delta = \mathcal{A}\mathbb{Z}^2$  mit regulärer Matrix

$\mathcal{A} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ , so heißt  $\Delta$  ein Gitter auf  $\mathbb{R}^2$ .

(ii) Für  $d \geq 2$  existieren neben den symplektischen noch weitere Formen von Gittern auf  $\mathbb{R}^{2d}$ . Die symplektischen unter ihnen werden von Matrizen der symplektischen Gruppe  $\text{Sp}(d)$ , einer Untergruppe der speziellen linearen Gruppe  $\text{SL}(2d, \mathbb{R})$ , gebildet. Wegen  $\text{Sp}(1) = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ , induzieren für  $d = 1$  jedoch alle Matrizen  $\tilde{\mathcal{A}} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$  per Definition ein symplektisches Gitter. Alle Gitter auf  $\mathbb{R}^2$  sind also symplektisch.

(iii) Zu  $\alpha, \beta > 0$  ist  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha/\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta/\alpha} \end{pmatrix}$  aus  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Daher ist das Gitter  $\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z} = \sqrt{\alpha\beta}\mathcal{A}\mathbb{Z}^2$  tatsächlich separabel und besitzt das Volumen  $\alpha\beta$ .

Zu  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  bezeichnen wir mit  $\rho(z) := M_{z_2} T_{z_1}$  den Operator des zugehörigen Zeit-Frequenz-Shifts. Ein Gabor-System zu  $g \in L^2(\mathbb{R})$  bezüglich des Gitters  $\Delta$  ist definiert als

$$\mathcal{G}(g, \Delta) = \{\rho(z)g \mid z \in \Delta\}.$$

Sind  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{G}(g, \Delta), \mathcal{G}(\gamma, \Delta)$  Bessel-Systeme für  $L^2(\mathbb{R})$ , so bezeichnen wir den zugehörigen Frameoperator mit

$$S_{g, \gamma}^{\Delta} f := \sum_{z \in \Delta} \langle f, \rho(z)g \rangle \rho(z)\gamma, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Falls  $\Delta = \alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$  ein separables Gitter auf  $\mathbb{R}^2$  ist, schreiben wir auch  $S_{g, \gamma}^{\alpha, \beta}$ . Um Gabor-Systeme über nicht-separablen Gittern zu untersuchen, gibt es zwei häufig verwendete Zugänge.

## 5.1 Die metaplektische Darstellung

In der metaplektischen Darstellung nutzt man aus, dass zu jeder symplektischen Matrix  $\mathcal{A}$  ein unitärer *symplektischer Operator*  $\mu_{\mathcal{A}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  existiert, sodass

$$\rho_{\mathcal{A}}(z) := \rho(\mathcal{A}z) = \mu_{\mathcal{A}} \rho(z) \mu_{\mathcal{A}}^{-1}$$

für alle  $z \in \mathbb{R}^2$ . Der Operator  $\mu_{\mathcal{A}}$  stammt aus der sogenannten *metaplektischen Gruppe*  $\text{Mp}(1)$ , dem Namensgeber dieser Darstellung. Mittels eines solchen Operators gilt für zwei Bessel-Systeme  $\mathcal{G}(g, a, a), \mathcal{G}(\gamma, a, a)$  für  $L^2(\mathbb{R})$  und ein symplektisches Gitter  $\Delta = a\mathcal{A}\mathbb{Z}^2$ , dass

$$\mathcal{G}(g, \Delta) = \mu_{\mathcal{A}} \mathcal{G}(\mu_{\mathcal{A}}^{-1}g, a, a) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G}(\gamma, \Delta) = \mu_{\mathcal{A}} \mathcal{G}(\mu_{\mathcal{A}}^{-1}\gamma, a, a).$$

Mit  $\tilde{g} := \mu_{\mathcal{A}}^{-1}g$  und  $\tilde{\gamma} := \mu_{\mathcal{A}}^{-1}\gamma$  erhält man daraus

$$S_{g,\gamma}^{\Delta} = \mu_{\mathcal{A}} S_{\tilde{g},\tilde{\gamma}}^{a,a} \mu_{\mathcal{A}}^{-1}.$$

Somit ist es möglich ein Gabor-System eines nicht-separablen symplektischen Gitters  $\Delta$  auf ein Gabor-System des entsprechenden separablen Gitters zurückzuführen. Daher existiert also zu jedem Gitter  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^2$  eine Funktion  $h$ , sodass das Gabor-System  $\mathcal{G}(h, \Delta)$  einen Frame bildet. Hierzu sucht man sich einfach eine Funktion  $g$ , welche auf dem zugehörigen separablen Gitter einen Frame induziert (z.B. mit Hilfe von Theorem 3.1) und wendet den passenden inversen symplektischen Operator auf diese an, um  $h$  zu erhalten. Das Problem bei gegebenem  $\Delta$  ist, einen passenden symplektischen Operator zu finden. Drei grundlegende Operatoren lassen sich schnell herleiten. Zu

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

beispielsweise, ist die Fourier-Transformation  $\mathcal{F} = \mu_{\mathcal{A}}$  ein zugehöriger symplektischer Operator (vgl. Korollar 1.19). Zu

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ist der Skalierungsoperator  $\mu_{\mathcal{B}} = D_b$  mit  $D_b f(x) := \sqrt{|b|}f(bx)$  und zu

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

ist die Multiplikation mit einem Chirp  $\mu_{\mathcal{C}} = \mathcal{N}_c^{-1}$  mit  $\mathcal{N}_c f(x) := e^{-\pi i c x^2}$  jeweils ein zugehöriger symplektischer Operator. Für jede weitere symplektische Matrix lieferten Kaiblinger und Neuhauser in [58] eine Konstruktion eines passenden Operators als Produkt zweier Fourier-Transformationen, eines Skalierungsoperators und zweier Multiplikationen mit einem Chirp. Selbst im Fall von Matrizen aus  $\text{Sp}(d)$  für  $d \geq 2$  funktioniert diese Konstruktion noch. Dort benötigt man allerdings eine weitere Multiplikation mit einem Chirp.

Wegen des engen Zusammenhangs zu separablen Gittern, lassen sich viele wichtige Erkenntnisse aus Abschnitt 1.2 direkt auf nicht-separable symplektische Gitter übertragen.

**Korollar 5.3** (Janssens Darstellung (vgl. Theorem 1.12)). *Es seien  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\Delta \triangleleft \mathbb{R}^2$  ein symplektisches Gitter, sodass*

$$\sum_{z \in \Delta^\circ} |\langle \gamma, \rho(z)g \rangle| < \infty.$$

Dann besitzt der Frameoperator  $S_{g,\gamma}^\Delta$  die Gestalt

$$S_{g,\gamma}^\Delta = \text{vol}(\Delta)^{-1} \sum_{z \in \Delta^\circ} \langle \gamma, \rho(z)g \rangle \rho(z),$$

wobei die Reihe absolut in Operatornorm konvergiert.

**Korollar 5.4** (Wexler-Raz Biorthogonalität (vgl. Theorem 1.13)). *Falls für  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$  und ein symplektisches Gitter  $\Delta \triangleleft \mathbb{R}^2$  die Systeme  $\mathcal{G}(g, \Delta)$  und  $\mathcal{G}(\gamma, \Delta)$  Bessel-Systeme sind, so sind äquivalent:*

(i) *Die Gabor-Systeme  $\mathcal{G}(g, \Delta)$  und  $\mathcal{G}(\gamma, \Delta)$  sind zueinander duale Frames.*

(ii)  *$\langle \gamma, \rho(z)g \rangle = \delta_{z0} \text{vol}(\Delta)^{-1}$  für alle  $z \in \Delta^\circ$ .*

**Korollar 5.5** (Ron-Shen Dualität (vgl. Theorem 1.14)). *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\Delta \triangleleft \mathbb{R}^2$  ein symplektisches Gitter. Dann ist  $\mathcal{G}(g, \Delta)$  genau dann ein Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$ , falls das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \Delta^\circ)$  eine Riesz-Basis für seinen abgeschlossenen Spann bildet.*

**Korollar 5.6** (vgl. Korollar 1.17). *Es seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\Delta \triangleleft \mathbb{R}^2$  ein symplektisches Gitter. Falls  $\mathcal{G}(g, \Delta)$  ein Gabor-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  ist, so ist  $\text{vol}(\Delta) \leq 1$ .*

## 5.2 Die multiwindow Methode

Eine weitere Methode zur Analyse von Gabor-Frames über nicht-separablen Gittern geht auf Zibulski und Zeevi [91] zurück. Es seien  $\Delta$  ein Gitter auf  $\mathbb{R}^2$ ,  $z_0 = 0, z_1, \dots, z_r \in \Delta$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , und  $\Delta' \subset \mathbb{R}^2$  ein separables Gitter, sodass

$$\Delta = \bigcup_{j=0}^r z_j + \Delta'.$$

In diesem Fall (vgl. Abbildung 5.10) lässt sich das Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \Delta)$  zu  $g \in L^2(\mathbb{R})$  schreiben als

$$\mathcal{G}(g, \Delta) = \bigcup_{j=0}^r \mathcal{G}(\rho(z_j)g, \Delta'). \quad (5.1)$$

Wir können statt des ursprünglichen Systems also die Vereinigung mehrerer Systeme über einem separablen Gitter betrachten. Diese Methode funktioniert beispielsweise auch bei hexagonalen Gittern, welche als Vereinigung zweier quadratischer Gitter betrachtet werden können.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen Zerlegung eines Gitters liefert folgendes bekannte Lemma.

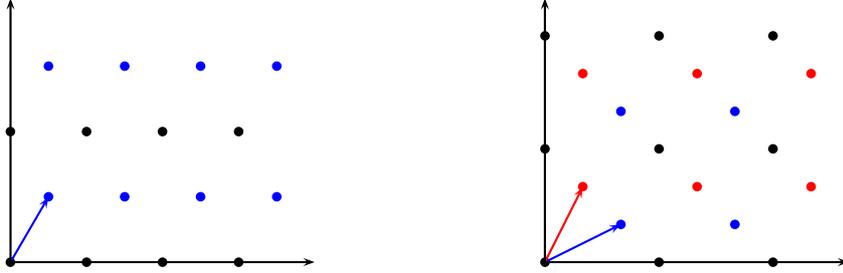


Abbildung 5.2: Beispiele nicht-separabler Gitter auf  $\mathbb{R}^2$ , konstruiert durch Translate eines rechteckigen separablen Gitters.

**Lemma 5.7.** *Es seien  $\mathcal{A} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\Delta = a\mathcal{A}\mathbb{Z}^2$  das zugehörige Gitter. Existieren weiter eine untere Dreiecksmatrix*

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

mit  $\frac{l_{21}}{l_{22}} \in \mathbb{Q}$  und eine ganzzahlige Matrix  $M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ , sodass  $\mathcal{A} = LM$ , dann gibt es ein separables Gitter  $\Delta'$  und  $z_0 = 0, z_1, \dots, z_r \in \Delta$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ , mit

$$\Delta = \bigcup_{j=0}^r z_j + \Delta'.$$

*Beweis.* Da  $M$  ganzzahlige Einträge besitzt und  $|\det(M)| = 1$  ist, liefert  $M$  lediglich eine Permutation  $M\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2$ . Im Fall  $l_{21} = 0$  ist demnach nichts mehr zu zeigen. Nehmen wir nun an, dass  $l_{21} \neq 0$ . In diesem Fall existieren nach Voraussetzung  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und  $q \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(p, q) = 1$ , sodass  $\frac{l_{21}}{l_{22}} = \frac{p}{q}$ . Hiermit liefert die Matrix

$$\mathcal{A}' = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} ql_{11} & 0 \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix}$$

ein separables Gitter  $\Delta' = \sqrt{q} a \mathcal{A}' \mathbb{Z}^2$ , sodass

$$\Delta = \bigcup_{j=0}^{q-1} j \rho(a l_{11}, a l_{21}) + \Delta',$$

wie gewünscht. □

**Beispiel 5.8.** Das Gitter  $\Delta = a\mathcal{A}\mathbb{Z}^2$  mit  $a \neq 0$  und

$$\mathcal{A} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

lässt sich schreiben als  $\Delta = \Delta' \cup \left( \rho\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \Delta' \right)$ , wobei  $\Delta' = \sqrt{2} a\mathcal{A}'\mathbb{Z}^2$  mit

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun ein Gabor-System wie in (5.1) und schreiben  $g_j := \rho(z_j)g$ , so besteht der Frameoperator  $S^\Delta = S_{g,g}^\Delta$  aus der Summe der Frameoperatoren der Fenster  $g_j$  über dem separablen Gitter  $\Delta'$

$$S^\Delta f = \sum_{j=0}^r S_{g_j, g_j}^{\Delta'} f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Da  $\alpha, \beta > 0$  existieren mit  $\Delta' = \alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$ , folgt punktweise (vgl. [91])

$$\begin{aligned} S^\Delta f(x) &= \sum_{j=0}^r \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{\beta l} T_{\alpha k} g_j \rangle M_{\beta l} T_{\alpha k} g_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^r \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} g_j(x - \alpha k) e^{2\pi i \beta l x} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g_j(t - \alpha k)} e^{-2\pi i \beta l t} dt \\ &= \sum_{j=0}^r \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} g_j(x - \alpha k) e^{2\pi i \beta l x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{\frac{1}{\beta}} f\left(t + \frac{m}{\beta}\right) \overline{g_j\left(t - \alpha k + \frac{m}{\beta}\right)} e^{-2\pi i \beta l t} dt. \end{aligned}$$

Bedienen wir uns nun der Tatsache, dass das System  $\{\sqrt{\beta} e^{2\pi i \beta l \cdot}\}_{l \in \mathbb{Z}}$  eine Orthonormalbasis für  $L^2([0, \frac{1}{\beta}])$  ist, erhalten wir

$$S^\Delta f(x) = \frac{1}{\beta} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f\left(x + \frac{m}{\beta}\right) \sum_{j=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_j(x - \alpha k) \overline{g_j\left(x - \alpha k + \frac{m}{\beta}\right)}. \quad (5.2)$$

Mit der Idee aus [74]  $f$  als eine vektorwertige Funktion mit Einträgen  $f_k(x) = f\left(x + \frac{k}{\beta}\right)$  für  $x \in [0, \frac{1}{\beta})$  aufzufassen, impliziert dies

$$S^\Delta f(x) = \frac{1}{\beta} P_g^\Delta(x)^* P_g^\Delta(x) f(x),$$

wobei die zugehörige Ron-Shen-Matrix  $G_g^\Delta(x) = P_g^\Delta(x)^* P_g^\Delta(x)$  Einträge

$$(G_g^\Delta(x))_{n,m} = \sum_{j=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_j\left(x - \alpha k + \frac{n}{\beta}\right) \overline{g_j\left(x - \alpha k + \frac{m}{\beta}\right)}$$

besitzt. Die pre-Gramian-Matrix zu dem Gabor-System  $\mathcal{G}(g, \Delta)$  erhalten wir demnach, indem man die Zeilen der pre-Gramian-Matrizen der Systeme  $\mathcal{G}(g_j, \Delta')$  untereinander mischt

$$P_g^\Delta(x) = \begin{pmatrix} g_0(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}) \\ \vdots \\ g_r(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}) \end{pmatrix}_{k,l \in \mathbb{Z}}. \quad (5.3)$$

Neben den in Abschnitt 5.1 erwähnten Charakterisierungen eines Gabor-Frames über Gittern auf  $\mathbb{R}^2$ , können wir bei der hier betrachteten Struktur also auch auf Theorem 1.20 zurückgreifen. Außerdem lassen sich einige hinreichende Bedingungen für einen Gabor-Frame auch im Fall mehrerer Fenster formulieren. Formel (5.2) gibt beispielsweise eine allgemeinere Version von Theorem 3.1.

**Korollar 5.9** ([91] Painless non-orthogonal expansions for multiwindow Gabor frames). *Zu  $r \in \mathbb{N}$  seien  $g_0, \dots, g_r \in L^\infty(\mathbb{R})$  mit kompakten Trägern  $\text{supp}(g_j) = [0, L]$  für  $j = 0, \dots, r$ ,  $0 < \alpha \leq L$  und  $0 < \beta \leq \frac{1}{L}$ . Dann ist das Gabor-System*

$$\bigcup_{j=0}^r \mathcal{G}(g_j, \alpha, \beta)$$

*genau dann ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Frameschranken  $0 < A \leq B < \infty$ , wenn*

$$A \leq \beta \sum_{j=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_j(x + \alpha k)|^2 \leq B$$

*für fast alle  $x \in [0, \alpha)$ .*

Wir kehren nun zurück zu der anfänglichen Frage nach Gabor-Frames von TP Funktionen und EB-Splines. Mit den obigen Strukturen lässt sich zeigen, dass diese Funktionen auch für nicht-separable Gitter auf  $\mathbb{R}^2$  Frames induzieren können. Dabei schließen wir den trivialen Fall aus, dass das Gitter ein separables Gitter enthält, für welches die Fensterfunktion einen Frame induziert.

**Beispiel 5.10.** *Zu  $\alpha, \beta > 0$  mit  $1 < \alpha\beta < 2$  und*

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{2}{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \beta \end{pmatrix}$$

*betrachten wir das Gitter  $\Delta = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}} \mathcal{A}\mathbb{Z}^2$ . Nach Lemma 5.7 lässt sich dieses mit  $\Delta' = \alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$  darstellen als  $\Delta = \Delta' \cup \rho(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}) + \Delta'$ . Für eine TP Funktion endlichen Typs  $g$  ist nach*

Formel (5.3) für alle  $\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}
\|P_g^\Delta(x) \mathbf{c}\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l g(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l g(x + \alpha(k + \frac{1}{2}) - \frac{l}{\beta}) e^{2\pi i \frac{\beta}{2}(x + \alpha k - \frac{l}{\beta})} \right|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l g(x + \alpha k - \frac{l}{\beta}) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l (-1)^l g(x + \alpha(k + \frac{1}{2}) - \frac{l}{\beta}) \right|^2 \\
&= \alpha \left\| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l Z_{\alpha} g \left( x - \frac{l}{\beta}, \cdot \right) \right\|_{L^2(0, \frac{1}{\alpha})}^2 + \alpha \left\| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l (-1)^l Z_{\alpha} g \left( x + \frac{\alpha}{2} - \frac{l}{\beta}, \cdot \right) \right\|_{L^2(0, \frac{1}{\alpha})}^2 \\
&\geq \frac{C}{\alpha} \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l B_{\Lambda} \left( \frac{x}{\alpha} + k - \frac{l}{\alpha\beta} \right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l (-1)^l B_{\Lambda} \left( \frac{x}{\alpha} + k + \frac{1}{2} - \frac{l}{\alpha\beta} \right) \right|^2 \right],
\end{aligned}$$

wobei  $B_{\Lambda}$  der zugehörige EB-Spline und  $C = \operatorname{ess\,inf}_{\omega \in [0, \alpha^{-1}]} |t^{-1}(\omega)|^2$  aus Lemma 2.10 sind. Ähnlich zum Fall separabler Gitter können wir statt des Systems einer TP Funktion über  $\Delta$  daher ebenso ein System des passenden EB-Splines über  $\tilde{\Delta} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}} \tilde{\mathcal{A}}\mathbb{Z}^2$  mit

$$\tilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{2}{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\alpha\beta}{2} & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

betrachten.

Wegen  $\alpha\beta < 2$  ist  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha\beta} > 1$ . Für den Spline  $B_{\lambda} = e^{\lambda(\cdot)} \chi_{[0,1]}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , besitzt die pre-Gramian-Matrix  $P_{B_{\lambda}}^{\tilde{\Delta}}$  daher die Gestalt

$$P_{B_{\lambda}}^{\tilde{\Delta}}(x) = \begin{pmatrix} \ddots & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \quad \ddots \end{pmatrix}.$$

Vollkommen analog zum Beweis zu Theorem 3.5 lässt sich somit auch in diesem Fall ein duales Fenster konstruieren und Korollar 5.4 impliziert, dass  $\mathcal{G}(B_{\lambda}, \tilde{\Delta})$  ein Gabor-Frame ist. Folglich ist das Gabor-System  $\mathcal{G}(g_1, \Delta)$  einer jeden TP Funktion vom Typ Eins ebenso ein Frame.

Allgemein existiert wegen der Darstellung der pre-Gramian-Matrix (5.3) ein Analogon von Satz 2.9 für jedes Gitter auf  $\mathbb{R}^2$ . Nach Lemma 2.10 herrscht die Korrespondenz der TP Funktion endlichen Typs und EB-Splines wie im obigen Beispiel somit ebenfalls für alle Gitter. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Funktionstypen noch auf vielen weiteren nicht-separablen Gittern Frames induzieren. Bislang ist diese Vermutung allerdings weitestgehend unerforscht.

## Kapitel 6

# Diskrete Gabor-Frames

Möchte man TP Funktionen oder EB-Splines in der Anwendung einsetzen, so stellt sich spätestens an dieser Stelle die Frage nach diskreten Gabor-Frames, also Gabor-Frames ebensolcher Funktionen für den  $\mathbb{C}^K$ . Nachfolgend werden wir kurz demonstrieren, dass man diese sehr leicht durch Diskretisierung der Fenster erhält, was wiederum durch einfache Algorithmen realisierbar ist. Eine umfassendere Einführung in dieses Themengebiet liefert [82].

Wir benötigen im Folgenden zum einen den Samplingoperator  $S_\delta$  zur Abtastrate  $\delta > 0$ , definiert durch

$$S_\delta g := \sqrt{\delta} (g(\delta k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

und zum anderen den Periodisierungsoperator  $P_K$  zur Periode  $K > 0$ , mit

$$P_K g(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + Kk), \quad x \in [0, K).$$

Letzterer kann auch auf diskrete Signale  $\mathbf{c} \in \ell^1(\mathbb{Z})$  angewandt werden. In diesem Fall ist

$$P_K \mathbf{c} := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j+Kk} \right)_{j=0, \dots, K-1} \in \mathbb{C}^K.$$

Darüber hinaus bezeichnet  $D_h$  zu  $h > 0$  wiederum den Skalierungsoperator

$$D_h g(x) = \sqrt{h} g(hx).$$

Wegen des exponentiellen Abklingverhaltens der TP Funktionen bzw. des kompakten Trägers der EB-Splines ist jedes Sampling  $S_\delta g$  solcher Funktionen absolut summierbar. Daher existiert

deren Diskretisierung  $P_K S_\delta g \in \mathbb{C}^K$  für alle  $\delta > 0$  und  $K \in \mathbb{N}$ . Sind nun  $a \in \mathbb{N}$  die Länge eines diskreten Zeitshifts,  $M$  die Anzahl der Frequenzkanäle und  $b, N \in \mathbb{N}$  so, dass  $Mb = Na = K$ , so ist das zugehörige diskrete Gabor-System definiert als

$$\mathcal{G}(P_K S_\delta g, a, \frac{1}{M}) = \left\{ e^{2\pi i \frac{l}{M} \cdot} P_K S_\delta g(\cdot - ka) \left| \begin{array}{l} k = 0, \dots, N-1 \text{ und} \\ l = 0, \dots, M-1 \end{array} \right. \right\}.$$

Um zu zeigen, dass TP Funktionen und EB-Splines nach obiger Konstruktion auch einen diskreten Gabor-Frame liefern können, sofern sie es im stetigen Fall tun, bedienen wir uns der diskreten Variante von Theorem 1.13.

**Satz 6.1** (Wexler-Raz Biorthogonalität). *Zu  $K, a, M, b, N \in \mathbb{N}$  seien  $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^K$ , sodass  $\mathcal{G}(\mathbf{c}, a, \frac{1}{M})$  und  $\mathcal{G}(\mathbf{d}, a, \frac{1}{M})$  Bessel-Systeme für  $\mathbb{C}^K$  sind. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Gabor-Systeme  $\mathcal{G}(\mathbf{c}, a, \frac{1}{M})$  und  $\mathcal{G}(\mathbf{d}, a, \frac{1}{M})$  sind zueinander duale Frames für  $\mathbb{C}^K$ .*

(ii)  *$\langle \mathbf{d}, M \frac{mN}{K} T_{nM} \mathbf{c} \rangle = \frac{K}{MN} \delta_{m0} \delta_{n0}$  für alle  $m = 0, \dots, a-1$  und  $n = 0, \dots, b-1$ .*

**Proposition 6.2.** *Es seien  $\alpha, \beta > 0$  und  $a, b, M, N, K \in \mathbb{N}$ , sodass  $\alpha\beta = \frac{a}{M} = \frac{b}{N}$  und  $Mb = Na = K$ . Weiter seien  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$ , sodass  $(g(x + \alpha j))_{j \in \mathbb{Z}}$  und  $(\gamma(x + \alpha j))_{j \in \mathbb{Z}}$  für alle  $x \in [0, \alpha)$  absolut summierbar sind und*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(x + \alpha j) \bar{g}(x + \alpha j - \frac{k}{\beta}) = \beta \delta_{k0}$$

für alle  $x \in [0, \alpha)$ . Dann sind  $\mathcal{G}(P_K S_{\alpha/a} g, a, \frac{1}{M})$  und  $\mathcal{G}(P_K S_{\alpha/a} \gamma, a, \frac{1}{M})$  zueinander duale Gabor-Frames für  $\mathbb{C}^K$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $\mathbf{c} := P_K S_{\alpha/a} g$  und  $\mathbf{d} := P_K S_{\alpha/a} \gamma$  und beweisen die Proposition über Satz 6.1. Nach Voraussetzung der absoluten Summierbarkeit sind die diskreten Gabor-Systeme  $\mathcal{G}(\mathbf{c}, a, \frac{1}{M})$  und  $\mathcal{G}(\mathbf{d}, a, \frac{1}{M})$  Bessel-Systeme für  $\mathbb{C}^K$ . Es bleibt die Biorthogonalität zu überprüfen. Mit  $\frac{N}{K} = \frac{1}{a}$  ist

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}, M \frac{mN}{K} T_{nM} \mathbf{c} \rangle &= \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{d}(k) \bar{\mathbf{c}}(k - nM) e^{-2\pi i \frac{mNk}{K}} \\ &= \sum_{k=0}^{a-1} e^{-2\pi i \frac{mNk}{K}} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{d}(k + aj) \bar{\mathbf{c}}(k + aj - nM). \end{aligned}$$

Die rechte Summe lässt sich wegen  $\frac{\alpha M}{a} = \frac{1}{\beta}$  und  $\alpha N = \frac{b}{\beta}$  darüber hinaus schreiben als

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{d}(k + aj) \bar{\mathbf{c}}(k + aj - nM) &= \frac{\alpha}{a} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} \gamma\left(\frac{\alpha k}{a} + \alpha(j + rN)\right) \bar{g}\left(\frac{\alpha k}{a} + \alpha(j + sN) - \frac{\alpha n M}{a}\right) \\
&= \frac{\alpha}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[ \gamma\left(\frac{\alpha k}{a} + \alpha j\right) \sum_{s \in \mathbb{Z}} \bar{g}\left(\frac{\alpha k}{a} + \alpha(j + sN) - \frac{n}{\beta}\right) \right] \\
&= \frac{\alpha}{a} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left[ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma\left(\frac{\alpha k}{a} + \alpha j\right) \bar{g}\left(\frac{\alpha k}{a} + \alpha j + \frac{sb}{\beta} - \frac{n}{\beta}\right) \right] \\
&= \frac{\alpha}{a} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \beta \delta_{(n-sb)0} = \frac{\alpha \beta}{a} \delta_{n0}
\end{aligned}$$

für alle  $n = 0, \dots, b - 1$ . Daher folgt mit  $\frac{K}{MN} = \alpha \beta$  insgesamt

$$\langle \mathbf{d}, M_{\frac{mN}{K}} T_{nM} \mathbf{c} \rangle = \frac{\alpha \beta}{a} \sum_{k=0}^{a-1} e^{-2\pi i \frac{mNk}{K}} \delta_{n0} = \frac{K}{MN} \delta_{m0} \delta_{n0}$$

für alle  $n = 0, \dots, b - 1$  und alle  $m = 0, \dots, a - 1$ , wie gewünscht.  $\square$

Aus der obigen Proposition folgt, dass TP Funktionen bzw. EB-Splines zusammen mit den jeweiligen Dualen aus den Algorithmen 4.1 bzw. 4.2 auch diskrete Frames liefern. Wegen  $S_\delta D_h = S_{\delta h}$  setzt man bei der Implementierung häufig eine Abtaste  $\delta = 1$  voraus und skaliert die Fensterfunktion zuvor geeignet. Es stellt sich somit die Frage, wie man die diskreten Fenster  $P_K S_1 \tilde{g} =: P_K S \tilde{g}$  einer skalierten TP Funktion bzw. eines skalierten EB-Splines  $\tilde{g}$  schnell und numerisch stabil implementieren kann. Wegen der einfachen Überlegung

$$P_K S \tilde{g}(k) = Z_K \tilde{g}(k, 0), \quad k = 0, \dots, K - 1, \tag{6.1}$$

kann dies sehr gut über die Zak-Transformierte realisiert werden. Zum Ende des Abschnitts 1.3 haben wir bereits eine gute Möglichkeit zur Implementierung von EB-Splines angegeben. Da diese kompakte Träger besitzen, kann auf dieselbe Weise die Zak-Transformierte und somit auch diskretisierte EB-Splines berechnet werden. Nach Lemma 2.10 ist selbige Implementation ebenfalls für den Fall einer TP Funktion endlichen Typs geeignet. In [64] ist darüber hinaus eine direkte Implementation diskreter TP Funktionen endlichen Typs angegeben, auf welche wir an dieser Stelle verzichten.

Die Duale aus Algorithmus 4.1 bzw. 4.2 können ebenfalls sehr simpel diskretisiert und implementiert werden. Durch die Wahlen  $x = 0, \frac{\alpha}{a}, \dots, \frac{(a-1)\alpha}{a}$  berechnet man zunächst das Sampling

$S_{\alpha/a}\gamma_L$  des Duals  $\gamma_L$ . Daraus erhält man dann durch

$$P_K S_{\alpha/a}\gamma_L(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (S_{\alpha/a}\gamma_L)(k + jK), \quad k = 0, \dots, K - 1$$

den diskretisierten Dual. Hierbei ist zu beachten, dass die konstruierten Duale kompakten Träger haben und die obige Reihe damit sicher konvergiert.

In Abbildung 6.1 haben wir Algorithmus 4.1 wie oben beschrieben angewandt, um für  $K = 600$ ,  $a = \alpha = 12$  und  $M = \beta^{-1} = 20$  die diskretisierte TP Funktion mit Gewichten  $-3, -1, 1, 3$  und den zugehörigen diskretisierte Dual  $\gamma_L$  mit  $L = 10$  zu berechnen.

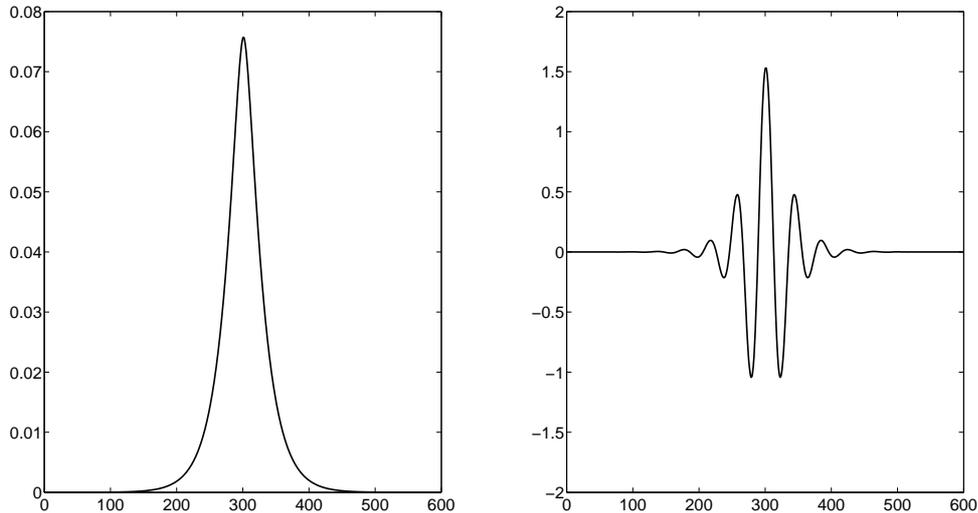


Abbildung 6.1: Eine symmetrische diskrete TP Funktion (links) und der zugehörige diskrete Dual  $\gamma_{10}$  (rechts) zu  $K = 600$ ,  $a = 12$  und  $M = 20$ .

In vielen Situationen liefern die diskreten TP Funktionen oder EB-Splines sogar noch im kritischen Fall einen Frame, auch wenn sie dies auf  $L^2(\mathbb{R})$  nicht tun. Folgende Proposition erhält man allein durch die Kenntnis der Nullstelle der Zak-Transformierten von TP Funktionen (vgl. Abschnitt 2.3).

**Proposition 6.3.** [4],[62] *Es sei  $g$  eine stetige TP beliebigen Typs wie in (1.19) bzw. 1.20. Weiter seien  $\alpha = M \in \mathbb{N}$ ,  $\beta = 1/M$  und  $K \in \mathbb{N}$  mit  $K/M \in \mathbb{N}$ . Falls  $K/M$  ungerade ist, so bildet das diskrete Gabor-System  $\mathcal{G}(P_K Sg, \alpha, \beta)$  eine Basis des  $\mathbb{C}^K$ .*

*Ist darüber hinaus  $g$  eine gerade Funktion und die Anzahl der Frequenzkanäle  $M$  ungerade, so bildet das diskrete Gabor-System  $\mathcal{G}(P_K Sg, \alpha, \beta)$  ebenso eine Basis des  $\mathbb{C}^K$ .*

Da stetige TP Funktionen für  $L^2(\mathbb{R})$  niemals eine Riesz-Basis liefern, kann in den Fällen obiger Proposition kein diskreter Dual mit Hilfe des Algorithmus 4.1 berechnet werden. Hier kann beispielsweise die diskrete Zak-Transformierte ausgenutzt werden, um den kanonischen Dual zu bestimmen (s. [8]).



# Ausblick

Wir haben gezeigt, dass sowohl TP Funktionen als auch EB-Splines Gabor-Frames für  $L^2(\mathbb{R})$  und somit auch Gabor-Frames für  $\mathbb{C}^K$  liefern können. Darüber hinaus eignen sich die vorgestellten Algorithmen hervorragend zur Berechnung von Dualen. Trotzdem gibt es auch für diese Funktionstypen noch viele offene Fragen, von denen wir einige aufzählen möchten.

(P1) Eine wichtige Charakterisierung von Gabor-Frames mit rationalem oversampling wurde in Kapitel 2 über die Zak-Transformation hergeleitet. In diesem Zusammenhang haben wir gezeigt, dass die Zak-Transformierten aller stetigen TP Funktionen ohne Faltung mit Gauß-Kern genau eine Nullstelle in  $Q_\alpha$  besitzen. Da dies auch für die Transformierte eines Gauß-Kerns gilt, drängt sich die Vermutung auf, dass die Zak-Transformierten aller stetigen TP Funktionen nur genau eine Nullstelle im Fundamentalbereich haben. Dieses Problem ist bei genauerer Betrachtung wesentlich schwieriger als man zunächst denken mag. Ein generelles Resultat über die Nullstellen der Zak-Transformierten einer Faltung von Funktionen wäre darüber hinaus denkbar und sehr hilfreich bei der Bestimmung zugehöriger Frameschranken (und somit der Konditionierung) der Frames von TP Funktionen.

(P2) Im direkten Zusammenhang zu (P1) steht auch die Überlegung, ob jede TP Funktion für alle Gitterparameter  $\alpha, \beta > 0$  mit  $\alpha\beta < 1$  einen Frame liefert. Dies wurde bereits in [37] von Gröchenig als Vermutung formuliert. Wegen der positiven Resultate für TP Funktionen endlichen Typs wäre es auch hier interessant zu wissen, wie sich die Frameschranken verhalten, wenn die Fensterfunktion eine Faltung zweier Funktionen ist, deren Frameschranken bekannt sind. In [9] und [63] wurde bereits bewiesen, dass die untere Frameschranke eines Gabor-Frames mit Gauß-Kern, dem Sekans Hyperbolicus oder ei-

ner zweiseitigen Exponentialfunktion für  $\alpha\beta \rightarrow 1$  asymptotisch linear gegen 0 läuft. Ein ähnliches Verhalten ist für jede TP Funktion vorstellbar.

- (P3) Durch die neusten Erkenntnisse über die Framemenge der Hutfunktion  $N_2$  und die Beispiele 3.14 und 3.15 erscheint es sehr gewagt eine Vermutung über die Framemenge von EB-Splines mit oder ohne Partition der Eins aufzustellen. In der Tat ist es denkbar, dass die Framemenge polynomialer B-Splines, bzw. EB-Splines mit einem Gewicht Null eine ähnlich komplexe Struktur aufweist, wie die der charakteristische Funktion. Generell sind die Framemengen dieser Funktionstypen aber noch weitestgehend unbekannt und bieten viele Möglichkeiten für zukünftige Forschungsansätze. Denkbar wäre es auch sich zunächst mehr Gedanken um die Zak-Transformierten von EB-Splines zu machen. Erfüllen die Shifts nicht die Partition der Eins, so stellt sich beispielsweise die Frage, ob die Zak-Transformierte immer nur endlich (oder abzählbar) viele Nullstellen im Fundamentalebene besitzt.
- (P4) Zahllose offene Fragen bieten darüber hinaus Gabor-Frames auf nicht-separablen Gittern. Diese sind selbst im vorgestellten univariaten Fall noch weitestgehend unerforscht. Mit Hilfe der pre-Gramian-Matrix ist es vorstellbar, dass man zumindest für TP Funktionen endlichen Typs und einige ausgewählte EB-Splines allgemeine positive Resultate für nicht-separable Gitter finden kann. In Situationen wie in Beispiel 5.10 kann die entsprechende pre-Gramian als Schurprodukt einer pre-Gramian zu einem separablen Gitter und einer unendlichen Matrix mit Blöcken aus Fouriermatrizen dargestellt werden. Dies könnte einen Ansatz liefern die Ergebnisse über separable Gittern auf diesen Fall und insbesondere auf hexagonale Gitter zu übertragen.

Dies sind sicherlich vier der größten Fragestellungen die im Zusammenhang von TP Funktionen und EB-Splines als Fensterfunktion von Gabor-Systemen noch ungeklärt sind. Dennoch ist davon auszugehen, dass zumindest kleinere Fortschritte dieser schwierigen Probleme in den kommenden Monaten und Jahren erzielt werden können.

# Literaturverzeichnis

- [1] L. D. Abreu and M. Dörfler. An inverse problem for localization operators. *Inverse Problems*, 28:115001, 2012.
- [2] L. Auslander and R. Tolimieri. *Abelian harmonic analysis, theta functions and function algebras on a nilmanifold*, volume 436 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1975.
- [3] R. Balian. Un principe d’incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre*, pages 1357–1362, 1981.
- [4] S. Bannert, K. Gröchenig, and J. Stöckler. Discretized Gabor frames of totally positive functions. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 60:159–169, 2014.
- [5] A. G. Baskakov. Estimates for the elements of inverse matrices, and the spectral analysis of linear operators. *Izv. Russ. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 61:3–26, 1997.
- [6] J. J. Benedetto, C. Heil, and D. F. Walnut. Differentiation and the balian-low theorem. *J. Fourier Anal. Appl.*, 1:355–402, 1995.
- [7] S. Blanco, C. E. D’Attellisand S. I. Isaacson, O. Rosso, and R. O. Sirne. Time-frequency analysis of EEG series (11): Comparison between methods based on Gabor and wavelet transforms. *Physical Rev. E.*, 54(6), 1996.
- [8] H. Bölскеi and F. Hlawatsch. Discrete Zak transforms, polyphase transforms, and applications. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 45:851–866, 1997.

- [9] A. Borichev, K. Gröchenig, and Y. Lyubarskii. Frame constants of Gabor frames near the critical density. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 94:170–182, 2010.
- [10] J. Brezin. Harmonic analysis on nilmanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 150:611–618, 1970.
- [11] P. G. Casazza and O. Christensen. Weyl-heisenberg frames for subspaces of  $L^2(\mathbb{R})$ . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129:145–154, 2000.
- [12] P. G. Casazza and M. C. Lammers. Classifying characteristic functions giving weyl-heisenberg frames. *Proc. SPIE*, 4119, 2000.
- [13] L. Chen, E. Zhao, D. Wang, Z. Han, S. Zhang, and C. Xu. Feature Extraction of EEG Signals from Epilepsy Patients Based on Gabor Transform and EMD Decomposition. In *Sixth International Conference on Natural Computation*, volume 3, pages 1243–1247, 2010.
- [14] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Birkhäuser, 2003.
- [15] O. Christensen. *Frames and Bases: An Introduction Course*. Birkhäuser, 2008.
- [16] O. Christensen, H. O. Kim, and R. Y. Kim. Gabor windows supported on  $[-1,1]$  and compactly supported dual windows. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 28:89–103, 2010.
- [17] O. Christensen, H. O. Kim, and R. Y. Kim. On Gabor frames generated by sign-changing windows and B-splines. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 39:534–544, 2015.
- [18] O. Christensen and P. Massopust. Exponential B-splines and the partition of unity property. *Adv. Comput. Math.*, 37:301–318, 2012.
- [19] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*, volume 1 of *Wavelet Analysis and Its Applications*. Academic Press, 1992.
- [20] X. R. Dai and Q. Sun. The *abc*-problem for Gabor systems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2014. accepted.
- [21] I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequezny localization and signal analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36:961–1005, 1990.

- [22] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, 1st edition, 1992.
- [23] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.*, 27:1271–1283, 1986.
- [24] I. Daubechies, H. J. Landau, and Z. Landau. Gabor time-frequency lattices and the wexler-raz identity. *J. Fourier Anal. Appl.*, 1:437–478, 1995.
- [25] C. de Boor. Splines as linear combinations of B-splines: A survey. In G. G. Lorentz, C. K. Chui, and L. L. Schumaker, editors, *Approximation Theory II*, pages 1–47. Academic Press, Inc., 1976.
- [26] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer, 1978.
- [27] V. Del Prete. Estimates, decay properties, and computation of the dual function for gabor frames. *J. Fourier Anal. Appl.*, 20:865–895, 1999.
- [28] R. A. DeVore and G. G. Lorentz. *Constructive Approximation*. Springer, 1993.
- [29] M. Dörfler. Time-frequency analysis for music signals: A mathematical approach. *J. New Music Res.*, 30:3–12, 2001.
- [30] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer. A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72:341–366, 1952.
- [31] N. Dyn and A. Ron. Recurrence relations for Tchebycheffian B-splines. *J. Anal. Math.*, 51:118–135, 1988.
- [32] H. G. Feichtinger and N. Kaiblinger. Varying the time-frequency lattice of gabor frames. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356:2001–2023, 2004.
- [33] D. Gabor. Theory of communication. *J. Inst. Elec. Eng.*, 93:429–457, 1946.
- [34] I. Gel’fand. Eigenfunction expansions for an equation with periodic coefficients. *Dokl. Akad. Nauk, SSR*, 76:1117–1120, 1950.
- [35] I. C. Gohberg and I. A. Fel’dman. Convolution equations and projection methods for their solution. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81:546–551, 1975.

- [36] K. Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, 2001.
- [37] K. Gröchenig. The Mystery of Gabor Frames. *J. Fourier Anal. Appl.*, 20:865–895, 2014.
- [38] K. Gröchenig. Partition of unity and new observations for Gabor frames. 2015.
- [39] K. Gröchenig, A. J. E. M. Janssen, N. Kaiblinger, and G. Pfander. B-splines, wavelet scaling functions, and gabor frames. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 49:3317–3320, 2003.
- [40] K. Gröchenig, Z. Rzeszotnik, and T. Strohmer. Convergence Analysis of the Finite Section Method and Banach Algebras of Matrices. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 67:183–202, 2010.
- [41] K. Gröchenig and J. Stöckler. Gabor frames of totally positive functions. *Duke Math. J.*, 162:1003–1031, 2013.
- [42] R. Hagen, S. Roch, and B. Silbermann.  $C^*$ -algebras and numerical analysis. *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.*, 236, 2001.
- [43] C. Heil. *Wiener Amalgam Spaces in Generalized Harmonic Analysis and Wavelet Theory*. PhD thesis, Univ. of Maryland, 1990.
- [44] C. Heil. History and evolution of the density theorem for Gabor frames. *J. Fourier Anal. Appl.*, 13:113–166, 2007.
- [45] C. E. Heil and D. F. Walnut. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Rev.*, 31:628–666, 1989.
- [46] I. I. Hirschman and D. V. Widder. The inversion of a general class of convolution transforms. *Transaction of the American Mathematical Society*, 66:135–201, 1949.
- [47] F. Hlawatsch and G. Matz. *Wireless Communications over rapidly time-varying channels*. Academic Press, 2011.
- [48] S. Jaffard. Propriétés des matrices ”bien localisées”près de leur diagonale et quelques applications. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 7:461–476, 1990.
- [49] A. J. E. M. Janssen. Bargmann transform, Zak transform and coherent states. *J. Math. Phys.*, 23:720–731, 1982.
- [50] A. J. E. M. Janssen. The Zak transform: A signal transform for sampled time-continuous signals. *Philips Journal of Research*, 43:23–69, 1988.

- [51] A. J. E. M. Janssen. Duality and Biorthogonality for Weyl-Heisenberg Frames. *J. Fourier Anal. Appl.*, 1:403–436, 1995.
- [52] A. J. E. M. Janssen. Some Counterexamples in the Theory of Weyl-Heisenberg Frames. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 42:621–623, 1996.
- [53] A. J. E. M. Janssen. Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations. *Indag. Math.*, 7:165–183, 1996.
- [54] A. J. E. M. Janssen. Analysis of some fast algorithms to compute canonical windows for gabor frames. unpublished, 2002.
- [55] A. J. E. M. Janssen. Some iterative algorithms to compute canonical windows for gabor frames. *Proceedings of IMS Workshop on Time-Frequency Analysis and Applications*, Singapore, Septmeber 2003.
- [56] A. J. E. M. Janssen. Zak transforms with few zeros and the tie. In H. G. Feichtinger and T. Strohmer, editors, *Advances in Gabor Analysis, Applied and Numerical Harmonic Analysis*, pages 31–70. Birkhäuser, 2003.
- [57] A. J. E. M. Janssen and T. Strohmer. Hyperbolic secants yield Gabor frames. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 12:259–267, 2002.
- [58] N. Kaiblinger and M. Neuhauser. Metaplectic operators for finite abelian groups and  $\searrow^d$ . *Indag. Math.*, 20:233–246, 2009.
- [59] S. Karlin and W. J. Studden. *Tschebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics*. Interscience Publisher, 1966.
- [60] J. Klauder and B. S. Skagerstam. *Coherent States: Application in Physics and Mathematical Physics*. World Scientific Publishing Co., Inc., 1985.
- [61] T. Kloos. Gabor Frames total-positiver Funktionen endlicher Ordnung. Diplomarbeit, TU Dortmund, 2012.
- [62] T. Kloos. Zeros of the Zak Transform of Totally Positive Functions. *J. Fourier Anal. Appl.*, 21:1130–1145, 2015.
- [63] T. Kloos and J. Stöckler. Zak transforms and Gabor frames of totally positive functions and exponential B-splines. *J. Approx. Theory*, 184:209–237, 2014.

- [64] T. Kloos, J. Stöckler, and K. Gröchenig. Implementation of discretized Gabor frames and their duals. 2015. submitted.
- [65] J. Lemvig and K. H. Nielsen. A counterexample to the B-spline conjecture for Gabor frames. 2015.
- [66] F. Low. Complete sets of wave packets. In C. DeTar, editor, *A Passion for Physics - Essay in Honor of Geoffrey Chew*, pages 17–22. World Scientific, 1985.
- [67] Y. Lyubarskii. Frames in the Bargmann space of entire functions. In *Entire and Subharmonic Functions*, volume 11 of *Advances in Soviet Mathematics*, pages 167–180. Amer. Math. Soc., 1992.
- [68] Y. Lyubarskii and P. G. Nes. Gabor frames with rational density. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 34:488–494, 2013.
- [69] Z. Průša, P. L. Søndergaard, N. Holighaus, C. Wiesmeyr, and P. Balazs. The Large Time-Frequency Analysis Toolbox 2.0. In Mitsuko Aramaki, Olivier Derrien, Richard Kronland Martinet, and Sølvi Ystad, editors, *Sound, Music, and Motion*, Lecture Notes in Computer Science, pages 419–442. Springer International Publishing, 2014.
- [70] W. Quade and L. Collatz. Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen. In *Preuß. Akad. Wiss. Sitz.-ber. d. phys.-math. Kl.*, pages 383–429, 1938.
- [71] T. Rado and P. V. Reichelderfer. *Continuous Transformations in Analysis*. Springer Verlag, 1955.
- [72] A. Ron. *On Exponential Box Splines and Other Types of Non-Polynomial B-Splines*. PhD thesis, Tel Aviv University, 1987.
- [73] A. Ron. Exponential box splines. *Const. Approx.*, 4:357–378, 1988.
- [74] Amos Ron and Zuowei Shen. Weyl-heisenberg frames and riesz bases in  $l_2(\setminus^d)$ . *Duke Math. J.*, 89:237–282, 1997.
- [75] P. C. Russel, J. Cosgrave, D. Tomtsis, A. Vourdas, L. Stergioulas, and G. R. Jones. Extraction of information from acoustic vibration signals using Gabor transform type devices. *Meas. Sci. Technol.*, page 1282–1290, 1998.

- [76] I. J. Schoenberg. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*, 4:45–96 and 112–141, 1946.
- [77] I. J. Schoenberg. On totally positive functions, Laplace integrals and entire functions of the Laguerre-Pólya-Schur type. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 33:11–17, 1947.
- [78] I. J. Schoenberg. On Pólya frequency functions. I. The totally positive functions and their Laplace transforms. *J. Anal. Math.*, 1:331–374, 1951.
- [79] I. J. Schoenberg. *Cardinal Spline Interpolation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1973.
- [80] L. L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. John Wiley and Sons, 1981.
- [81] K. Seip. Bargmann-Fock space. I. *J. Reine Angew. Math.*, 429:91–106, 1992.
- [82] P. L. Søndergaard. Gabor Frames by sampling and periodization. *Adv. Comput. Math.*, 27:355–373, 2007.
- [83] S. Sriram, N. Vijayakumar, P. A. Kumar, A. S. Shetty, V. P. Prasshant, and A. Narayanankutty. Spectrally Efficient Multi-Carrier Modulation Using Gabor Transform. *Wireless Engineering and Technology*, 4:112–116, 2013.
- [84] T. Strohmer and S. Beaver. Optimal OFDM System Design through Optimal Sphere Coverings. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 4, pages 2373 – 2376, 2001.
- [85] T. Strohmer and S. Beaver. Optimal OFDM Design for Time-Frequency Dispersive Channels. *IEEE Trans. Commun.*, 51:1111 – 1122, 2003.
- [86] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, 1927.
- [87] J. Wexler and S. Raz. Discrete Gabor Expansions. *Signal Processing*, 21:207–220, 1990.
- [88] J. Zak. Finite translation in solid state physic. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1385–1397, 1967.
- [89] J. Zak. Dynamics of electrons in solid external fields. *Phys. Rev.*, 168:686–695, 1968.
- [90] M. Zibulski and Y. Y. Zeevi. Oversampling in the Gabor Scheme. *IEEE Trans. Signal Process.*, 41:2679–2678, 1993.

- [91] M. Zibulski and Y. Y. Zeevi. Analysis of multiwindow Gabor-type schemes by frame methods. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 4:188–221, 1997.