Xenia-Rosemarie REIT

Wie schwierig ist eine Modellierungsaufgabe? Denkstrukturen von Lösungsansätzen als Instrument zur Schwierigkeitsanalyse

In der mathematikdidaktischen Forschungsgemeinschaft ist man sich fast immer einig: Anwendungen, Modellieren und Realitätsbezüge sind wichtig und sollen in den Unterricht integriert werden. Allerdings zeigen viele Studien, dass der Anteil des Modellierens im Alltagsunterricht eher gering ist (z.B. Brunner, et al., 2006). Von Lehrern wird dabei häufig u.a. die Komplexität von Modellierungsaufgaben und die mangelnde Planbarkeit der Unterrichtsstunde beim Einsatz von Modellierungsaufgaben angeführt (Schmidt, 2010). Gerade Modellierungsaufgaben weisen scheinbar einige Unwägbarkeiten auf wie z.B. ihr vergleichbar großer Lösungsraum, d.h. dem zur Verfügung stehen mehrerer Lösungswege. Damit verbunden ist das Problem, die Schwierigkeit der Modellierungsaufgabe einzuschätzen. Im Folgenden wird ein Modell vorgestellt, das auf Denkstrukturen von Lösungsansätzen basiert, um den Schwierigkeitsgrad einer Modellierungsaufgabe einschätzen zu können. In einer Studie mit 600 Schülerinnen und Schülern der 9. gymnasialen Jahrgangsstufe soll der theoretisch ermittelte Schwierigkeitsgrad auf Validität überprüft werden.

Projektdesign

Im Rahmen einer Vorstudie wurden sechs Modellierungsaufgaben entwickelt und pilotiert. Dabei konnte der Lösungsraum, im Sinne einer Identifikation der zielführenden Lösungsansätze je Aufgabe, umfassend charakterisiert werden. Kern der Hauptstudie ist die Frage: Wie schwierig ist eine Modellierungsaufgabe bzw. inwiefern unterscheiden sich die Lösungsansätze bzgl. ihrer Schwierigkeit? Um der Antwort näher zu kommen, wurde ein lösungsnahes Modell zur Bestimmung des Schwierigkeitsgrads von Lösungsansätzen entwickelt, das auf den Denkstrukturen der einzelnen Ansätze basiert. Zur empirischen Validierung des Modells bedarf es eines fundierten Bewertungsschemas, das es erlaubt die Schülerlösungen objektiv zu bewerten. Auf der Grundlage von Lösungsansätzen wurde so für jeden Ansatz ein Bewertungsschema entwickelt, das Teilpunkte auf Denkschritte vergibt und sich so an der Denkstruktur des Lösungsansatzes orientiert.

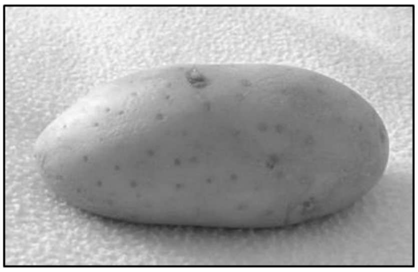
Denkstrukturen von Modellierungsaufgaben

Da Modellierungsaufgaben, wie z.B. die Kartoffel-Aufgabe (siehe Abb. 1), im Gegensatz zu Aufgaben anderer Formate, zumeist einen großen Lö-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 959–962). Münster: WTM-Verlag

sungsraum aufweisen, erscheint uns ein Einbezug der Lösungsansätze in die Abschätzung des Schwierigkeitsgrads unabdingbar. Je nach verwendetem Lösungsansatz ergeben sich verschiedene mathematische Modelle die mit unterschiedlichem mathematischem Fachwissen zielführend verwendet werden müssen. Daher ist eine lösungsbasierte Differenzierung notwendig.

Modellierungsaufgabe Kartoffel



Bei der industriellen Pommes-Herstellung sollen alle Kartoffelstäbchen möglichst gleich groß sein. Da die Kartoffel unregelmäßig geformt ist, bleiben Reste übrig. Die Pommes-Stäbchen werden der Länge nach aus der Kartoffel gestanzt. Die dafür verwendete Kartoffelsorte sieht so aus wie auf dem Foto und ist ungefähr 10 cm lang.

Wie viele vollständige Pommes-Stäbchen erhält man aus einer ganzen Kartoffel?

Begründe deine Lösung mit geeigneten Rechnungen.

Abb. 1: Modellierungsaufgabe „Kartoffel“

Das entwickelte Modell zur Bestimmung des Schwierigkeitsgrads von Modellierungsaufgaben beruht auf der Identifikation von sogenannten Denkoperationen in Lösungsansätzen. In Anlehnung an die Simplex-Komplex-Idee von Breidenbach (1969) entsteht so eine Denkstruktur für den jeweiligen Lösungsansatz, welche Auskunft über die zu leistenden Denkschritte gibt (siehe Abb. 2). Orientierung findet der Ansatz zudem in der Cognitive Load Theory, welche die Belastung kognitiver Ressourcen im Arbeitsgedächtnis beschreibt und simultan durchzuführende Prozesse als stärkere Belastung anführt (Sweller, 2010). Bezogen auf das Denkstrukturmodell bedeutet das, dass parallele Denkoperationen (wie man sie im Denkstrukturmodell in Abb. 2, mitte, wiederfindet), eine Verkomplizierung der Lösung zur Folge haben und somit zu einem höheren Schwierigkeitsgrad führen als z.B. solche, die nur sequentielle Denkoperationen erfordern. Um der stärkeren Gewichtung paralleler Denkoperationen und aber auch einer inhaltlichen Interpretierbarkeit gerecht zu werden wird der Schwierigkeitsgrad eines Lösungsansatzes als Summer der Fakultäten der einzelnen Ebenen berechnet (siehe Abb. 2, rechts). Diese spiegeln die Anzahlen der Möglichkeiten wieder, die Denkoperationen einer Ebene durchzuführen und beziehen den kognitiven Anspruch paralleler Denkoperationen ein.

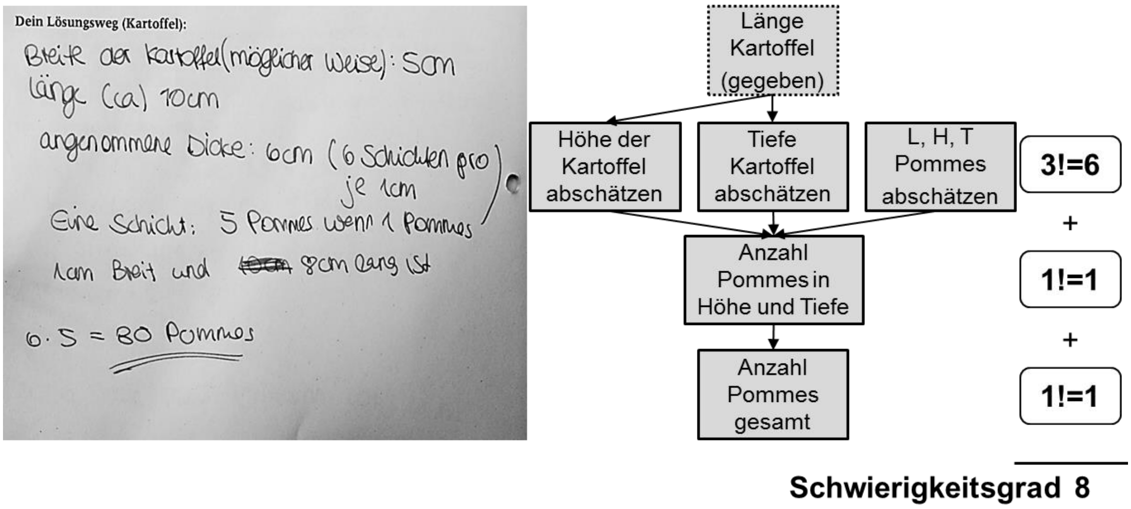


Abb. 2: Schülerlösung (links) mit Denkstruktur (mitte) und Schwierigkeitsgrad (rechts)

Erste Ergebnisse

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse der ersten drei Modellierungsaufgaben Cola, Kartoffel und Tennis zu sehen. Bei der Auswertung wurden jeweils die verwendeten Lösungsansätze identifiziert. Aus der Denkstruktur dieser konnte der Schwierigkeitsgrad je Lösungsansatz, sowie der gemittelte Schwierigkeitsgrad der Aufgabe berechnet werden. Durch Bewertung der Schülerlösungen ergab sich die durchschnittlich erreichte Punktzahl (Score) und Mittelwertbildung, unter zusätzlichem Einbezug der nicht zielführenden Lösungen, führt zum jeweiligen Score einer Aufgabe. Vergleicht man Aufgabenschwierigkeit mit Score der Gesamtaufgabe so ist ein deutlicher Trend zu erkennen. Die theoretisch schwierigste Aufgabe (Tennis) wurde am schlechtesten gelöst (34%) und die theoretisch leichteste (Cola) am besten (43%).

	Cola			**Kartoffel**				**Tennis**		
Lösungsansatz	Zylinder	Quader	Zerlegung	Volumen	Schicht	Fläche	Zylinder	Rechteck	Messen	Funktional
Schwierigkeitsgrad	6,00	5,00	8,00	9,00	8,00	9,00	7,00	5,00	27,00	10,00
Schwierigkeit Mittelwert	6,33			8,25				14,00		
Score	73%	72%	83%	63%	77%	57%	47%	69%	19%	36%
Score Mittelwert	43%			37%				34%		

Tabelle 1: Auswertung der Modellierungsaufgaben mit Denkstruktur, Schwierigkeitsgrad und durchschnittlich erreichter Punktzahl

Der Zusammenhang der einzelnen Lösungsansätze mit dem Schwierigkeitsgrad wird in Abb. 3 deutlich. Der nahezu antiproportionale Fit deutet darauf hin, dass sich der durchschnittlich erreichte Score, bei Verwendung des jeweiligen Lösungsansatzes, bei einer Verdopplung des Schwierigkeitsgrads halbiert.

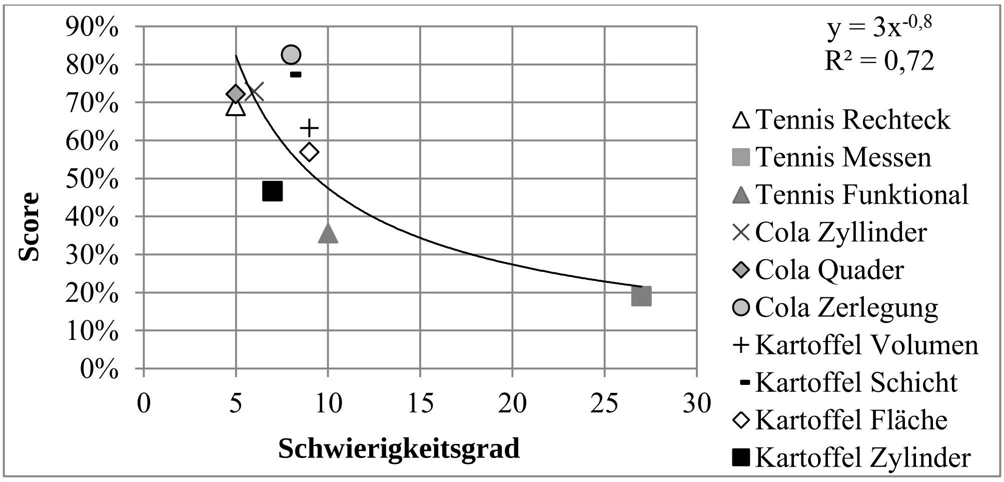


Abb.3: Score der Lösungsansätze in Abhängigkeit des theoretischen Schwierigkeitsgrads

Ausblick

Die bisher ausgewerteten Aufgaben geben Grund zur Annahme einer guten Anwendbarkeit des Denkstrukturmodells. Die theoretische Aufgabenschwierigkeit lässt sich in Übereinstimmung mit dem Score in eine auf- bzw. absteigende Reihenfolge bringen. D.h. je leichter die Aufgabe theoretisch ist, desto besser wird sie von den Schülerinnen und Schülern gelöst. Die Auswertung der letzten 3 Modellierungsaufgaben bleibt abzuwarten. Zusammenfassend ermöglichen Denkstrukturen einen tieferen Einblick in die Aufgabe, ermöglichen einen gezielteren Einsatz und schaffen einen Orientierungsrahmen.

Literaturverzeichnis

Breidenbach, W. (1969). *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen. Band 1 - Rechnen.* Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., et al. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In M. Prenzel, & L. Allolio-Näcke, *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule* (S. 54-82). Münster: Waxmann.

Schmidt, B. (2010). *Modellieren in der Schulpraxis : Beweggründe und Hindernisse aus Lehrersicht.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Sweller, J. (2010). Cognitive Load Theory: Recent Theoretical Advances. In J. L. Plass, R. Moreno, & R. Brünken, *Cognitive Load Theory* (S. 29-47). Cambridge: Cambridge University Press.