Regina D. MÖLLER, Erfurt

Gibt es Mathematik im Rest der Welt?

1. Zum Modell des Modellierungskreislaufes

Seit mehreren Jahren wird für den idealtypischen Modellierungskreislauf ein Diagramm verwendet, das der Mathematik einen weiteren Bereich, nämlich den Rest der Welt (oder Reale Situation, Realität, Realwelt, Wirklichkeit), gegenüberstellt. Unter Rest versteht man im Allgemeinen das, was übrig bleibt. Was bleibt also übrig, wenn Mathematik als Werkzeug zum Modellieren verwendet wird? Und woraus besteht dieser Rest? Das Diagramm und die Wortwahl suggerieren, dass es sich um zwei voneinander verschiedene Bereiche handelt, selbst wenn in der Literatur (oft in Fußnoten) erwähnt wird, dass dem so nicht sei (z.B. Holzäpfel, 2014).

Aufschluss über die Verwendung der Begriffe „Mathematik" und „Rest der Welt" könnten einschlägige Modellierungsbeispiele geben, so z.B. die seit langem zitierte Tankaufgabe (Blum, 2005) und der Adenauerkopf (Herget, u.a., 2001). Bei der Tankaufgabe geht es mathematisch um das Aufstellen zweier linearer Funktionen, deren gemeinsamer Schnittpunkt angibt, ab wann sich die Fahrt für günstigeres Benzin lohnt würde. Gegeben sind gewisse Größen; Zeitangaben und Benzinverbrauch fehlen. Zum Modellierungsprozess gehören einerseits das Identifizieren weiterer relevanter Größen und andererseits das Finden konkreter Maße durch Recherche. Der Modellierungsprozess der Schüler ist dadurch charakterisiert, dass sie die gegebene Situation wie durch einen mathematischen Filter so zu fassen suchen, dass sie zu einer mathematischen Lösung durch Größen und Zahlen kommen. Schüler geben allerdings auch Antworten, die ahnen lassen, dass ihnen eine andere Sichtweise nicht fremd ist: "… angenommen Herr Stein hat viel Zeit…. z. B. als Rentner".

Beim zweiten Beispiel ist die hypothetische Nachbildung eines Körpers Gegenstand und Ziel des Modellierens. Auch in diesem Fall ist die sogenannte Realproblemstellung bereits (vor-) mathematisiert. Es sind nämlich für die Größe „Länge" verschiedene Daten gegeben, aus denen andere Daten für die Gesamtlänge zu ermitteln sind. Auch hier soll vermittels der zu bestimmenden eine Antwort gefunden werden, die der „realen" Welt zuzuordnen sind.

Auf der Suche nach Modellierungsbeispielen, die den „Rest der Welt" näher beleuchten könnten, bieten Landkarten reichhaltige und sehr unterschiedliche Modellbeispiele zum Charakterisieren von Modellierungsprozessen. Landkarten stellen die Erdoberfläche (oder andere Himmelskörper) analog (klassische Landkarten) oder digital (im Raster- oder Vektorformat) dar, sind

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 819–822). Münster: WTM-Verlag

ein verkleinertes mit Beschreibungen und Zeichen versehenes Abbild und dienen ganz verschiedenen Zwecken. Karten sind das Ergebnis sehr komplexer Arbeits- und Modellierungsprozesse und basieren auf geologischen Basisdaten wie Raumphänomenen (z.B. Gelände, Meerestiefen, Küstenverläufe, Verkehrswege) und weiteren Eigenschaften (wie Bodenarten und -nutzung, Niederschlagsmengen und Wasserständen). Karten unterscheiden sich thematisch: z.B. Luftfahrt-, See- oder Wirtschafts- Karten mit ihren typischen deskriptiven Merkmalen. Unter der Perspektive mathematischer Modellierungsaufgaben für den Mathematikunterricht stellen Karten verschiedene Modelle mit diversen Abstraktionen für verschiedene Zwecke und dementsprechend auch für verschiedene Lösungen dar. Sie repräsentieren für jegliche, auch nicht mathematischen Zwecke, Modellierungen. Auch anhand dieser Beispiele wird deutlich, wie problematisch eine Trennung ist.

Nimmt man weiter solche Entscheidungsprobleme in den Fokus, die nun vordergründig nichts mit Mathematik zu tun haben, etwa „Soll eine Brücke über einen Fluss gebaut werden?“ oder „Soll Frau X die Leitung einer bestimmten Abteilung übernehmen?“, wird die Situation mindestens durch Codierungen so mathematisiert, dass sie sich nicht „im Rest der Welt“ und keineswegs außerhalb der Mathematik befindet.

Aus den in den Blick genommenen Modellierungsaufgaben wird ersichtlich, dass der „Rest der Welt“ in einem hohen Maße mathematikhaltig ist. Sie zeigen insbesondere, dass eine Trennung von Mathematik und der sogenannten Realität kein sinnvolles Konzept darstellt.

2. Bemerkungen zum Modell

1. Es ist weiterhin erstaunlich, dass in der einschlägigen Literatur bei diesem Diagramm ganz verschiedene Begriffe der Mathematik gegenübergestellt werden. Was könnte ihnen gemeinsam sein? Der Begriff der Realität, ein weitgehend etablierter Begriff in Philosophie und Wissenschaftstheorie, kann je nach Lesart die Mathematik vollständig enthalten. Weiter wird als Abwandlung auch der Begriff der Realwelt verwendet. Dass allen Begriffen Gemeinsame besteht darin, dass man sie der Mathematik gegenüberstellt. Offen bleibt, warum unterschiedliche Begriffe verwendet werden, obwohl sie Unterschiedliches bedeuten. Deshalb ist die Verwendung des Begriffes „Realität“ im Modellierungskreislauf weil genügend umfassend angebracht.

2. Zu Beginn der Bemühungen, das Anwenden von Mathematik im Unterricht zu strukturieren, glaubte man, die Mathematik von „jener ‚Realität‘, [trennen zu müssen] auf die die Mathematik angewendet wird“ (Fischer/Malle, 1985, S.99). Dabei bezeichnen die Autoren den Verzicht auf die

Trennung als naiv: „Bei dieser ‚naiven' Auffassung ergeben sich mathematische Begriffe und Verfahren unmittelbar aus der außermathematischen Realität und werden unmittelbar in dieser interpretiert" (Fischer/Malle, 1985, S.104). Mehr Beachtung erfahren jedoch diejenigen Modellierungsschemata, welche eine Trennung von Mathematik und Realität voraussetzen. Allerdings ist diese Trennung nicht notwendige Voraussetzung für eine Strukturierung von Modellierungsprozessen.

3. Wenn an der Gegenüberstellung von Mathematik und der Realität festgehalten wird, welchen mathematikdidaktischen Zweck - im Mathematikunterricht (modellieren), in der Lehrerausbildung (Modellieren lehren) - soll sie erfüllen? Wenn es darum geht, die Modellierungsschritte zu differenzieren, dann wird aus dokumentierten Schülerverhalten ersichtlich, dass sie nicht dem im Diagramm angezeigten Verlauf stringent folgen. Hält man am Diagramm fest, dann kann es zur Orientierung dienen. Bei oberflächlichem Gebrauch hätte es die Rolle einer Schablone; sowohl für den Unterricht als auch in der Lehrerausbildung.

4. Schon bei Sachaufgaben wurden Lösungsschemata aufgestellt, die im Prinzip bereits zyklisch waren, primär aber zwei Ebenen (Sachebene, mathematische Ebene) voneinander unterschieden. Dabei sprach Winter (1989) vom Mathematisieren, wenn das in der Sachebene gestellte Problem auf die mathematisierte Ebene abstrahiert wurde. Bei diesem Prozess wurde die Mathematik nicht gegenübergestellt, sondern blieb Teil der Realität, wenn auch auf abstrakterem Niveau.

5. Beim Modellierungskreislauf spricht man von einem Prozess, der aus Teilprozessen besteht, nämlich den Übergängen zwischen den einzelnen Stadien z.B. Realität, Situationsmodell, mathematisches Modell. Prinzipiell besteht dabei das Problem, dass man Prozesse nur durch ihre „Produkte", d.h. Schülerhandlungen, registrieren kann.

3. Erweiterte Sichtweise des Modellierens

1. Obwohl Fischer/Malle die Sichtweise, Mathematik nicht von der Realität getrennt wahrzunehmen, als naiv bezeichnen, kann man diese auch als wohlbegründet ansehen. Eine prinzipielle Trennung zwischen der Mathematik und der Realität ist nicht aufrechtzuerhalten, denn das Mathematisieren und Modellieren setzt ja Mathematik in der Realität voraus. Ganz offensichtlich ist dies in den Fällen, in denen aufgrund vorgegebener Größen weitere Größen zu berechnen sind. Hier ist eine Vormathematisierung, gewissermaßen eine Vormodellierung, evident. In anderen Fällen muss dies nicht so offensichtlich sein, etwa wenn es um qualitative Kategorien geht. So sind zum

Beispiel Schulnoten ordinal skalierte Daten, die entsprechend geordnete (von sehr gut bis ungenügend) Qualifizierungen benennen. Die Grundannahme, dass Schülerleistungen vergleichbar sind, birgt bereits eine mathematische Struktur, hier im Sinne einer Ordnungsrelation. Weitere Beispiele sind solche, die auf eine Entscheidungsfindung abzielen. Das Entscheidungskriterium kann sowohl von Größen abhängen (Verkehrsfrequenz bei einer Ampelinstallation) als auch von abstrakteren Strukturen wie etwa Präferenzrelationen im Falle wirtschaftlicher Entscheidung. Hier müssen subjektive Kriterien - Präferenzen - formalisiert werden, mathematisch als Ordnungsrelation, bevor eine sinnvolle Problemstellung formuliert werden kann.

Das heißt: Jegliche Realität, auf die Mathematik angewendet werden kann, enthält per se mathematische Strukturen. Diese Sichtweise geht konform mit dem historischen Verhältnis zwischen mathematischem Wissen und der Realität.

2. Jedes Bild, was wir uns von der Realität machen können, kann als Modell angesehen werden, weil uns das Erkennen der gesamten Realität verwehrt ist. Ein solches Bild enthält zwangsläufig mathematische Strukturen: Die elementare Wahrnehmung des Raumes und der Gegenstände (Geometrie), die Möglichkeit des Zählens (Äquivalenzklassenbildung), das Messen mittels Größen (wobei beispielsweise Unterschiede beim Phänomen Zeit auftreten), das Ordnen und Klassifizieren, um nur Einiges zu nennen.

Daher beziehen sich die im Unterricht vorzunehmenden Modellierungen streng genommen stets auf „Vormodellierungen“. So können z.B. Größen ihrerseits als Resultate früherer Modellierungen der Realität aufgefasst werden. Wo also fängt Modellieren an?

Literatur

Blum, W., Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“- Aufgabe, mathematik lehren, 128, 18-21

Fischer R., Malle G. (1985): Mensch und Mathematik, BI, Zürich

Herget, Jahnke, Kroll (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, Berlin, Cornelsen

Winter, H.(1985): Sachrechnen in der Grundschule, Bielefeld: CVK (Neuauflage Frankfurt/M. 1992