Miriam M. LÜKEN, Bielefeld

Rot, gelb, blau, rot, gelb, blau – und weiter?! Inhalte, Bedeutung und Unterrichtsideen für den Kompetenzbereich „Muster und Strukturen“

Dieser Artikel ist eine Zusammenfassung des Theorieteils eines Workshops am Lehrertag der GDM-Tagung. Ziel des Workshops war es, die anwesenden Lehrer für das Thema „Muster und Strukturen“ zu sensibilisieren.

Muster und Struktur – eine Begriffsschärfung

Die Begriffe Muster und Struktur werden häufig verwendet, sie lassen sich jedoch schwer voneinander trennen und werden oft synonym verwendet. Vielen Lehrern ist unklar, was genau – und auch was alles – mit Muster und Struktur gemeint ist und vor allem, welche Aspekte für das Mathematiklernen von Kindern wichtig sind.

In der Diskussion der Teilnehmer des Workshops wurde klar, dass sich in einem Muster etwas wiederholt und ihm eine Struktur zugrunde liegt. Unter einem mathematischen Muster soll deshalb das geordnete Ganze, jegliche numerische oder räumliche Regelmäßigkeit verstanden werden. Das Bildungsgesetz des Musters und damit die Beziehungen zwischen den verschiedenen Bestandteilen eines Musters stellen seine Struktur dar (vgl. auch Mulligan & Mitchelmore 2009). Die Teilnehmer des Workshops arbeiteten heraus, dass sich die Struktur eines Musters auf verschiedene Eigenschaften beziehen kann (Form, Farbe, Anzahl, …).

Inwiefern gehen Kinder aber mit Mustern und Strukturen um? Sie strukturieren und erkennen Muster. Mit „Muster erkennen“ sind zweierlei Aktivitäten gemeint: Zum einen bedeutet ein Muster zu erkennen, eine Regelmäßigkeit zu entdecken, eine Wiederholung gleichbleibender Merkmale. Zum anderen wird aber auch das Wiedererkennen einer bestimmten räumlichen Anordnung, beispielsweise eines Würfelmusters, als Mustererkennung bezeichnet (vgl. Lüken 2012a). Auch das Strukturieren kann in zwei Vorgehen unterschieden werden. Um die Struktur eines vorgegebenen Objekts zu erfassen, müssen die räumlichen Bestandteile dieses Objekts identifiziert, zu Untereinheiten zusammengefasst und miteinander in Beziehung gesetzt werden (vgl. Battista et al. 1998). Eine Menge „loser“ Objekte muss durch konkrete oder mentale Operationen miteinander in Beziehung und so in eine räumliche Ordnung gebracht werden, um die Anzahl und damit das Ganze erfassen zu können, ohne alle Elemente einzeln abzuzählen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 775–778). Münster: WTM-Verlag

Muster im Mathematikunterricht der Grundschule

Die Muster, denen Kinder in der Grundschule begegnen, können grob in vier Musterarten kategorisiert werden: sich wiederholende Musterfolgen, wachsende Musterfolgen, Muster als funktionale Beziehungen und räumliche Muster.

Eine *sich wiederholende Musterfolge* ist eine Folge aus Gegenständen, geometrischen Formen, farbigen Objekten oder Symbolen. Die kleinste Einheit der Elemente dieser Musterfolge, die sogenannte Grundeinheit, wird unverändert aneinandergereiht und erzeugt so die Musterfolge. Beim Arbeiten mit sich wiederholenden Musterfolgen geht es also um das Erkennen einer Regelmäßigkeit, die Regel ist in diesem Fall die Wiederholung der Grundeinheit in Form einer Translation. Die Musterfolge *ABABAB*… beispielsweise besitzt eine Grundeinheit der Länge 2 (*AB*), die Musterfolge *ABCABC*… hingegen hat eine Grundeinheit der Länge 3 (*ABC*). In einer *AB*-Musterfolge treten demnach abwechselnd zwei Objekte oder Symbole auf wie *Kreis, Dreieck, Kreis, Dreieck,* … oder *X, O, X, O,* …. Dieses grundlegende Prinzip eines periodischen Aufbaus hat Auswirkungen auf die Bestimmung eines weiteren Folgengliedes. Für eine sich wiederholende Musterfolge mit einer Grundeinheit der Länge 3 (*ABC*) bedeutet die periodische Struktur, dass jedes Element der Musterfolge einem der ersten drei Elemente gleicht und dass jedes Element der Musterfolge gleich dem Element drei Positionen vorher ist. Musterfolgen mit der gleichen Länge der Grundeinheit sind also miteinander „verwandt“: sie besitzen die gleiche Struktur. Die Musterfolge *ABAB*… ist z.B. verwandt mit *Kreis, Dreieck, Kreis, Dreieck,* …. Eine Übersetzung einer Musterfolge von einer Darstellungsform in eine andere verändert nicht ihre entscheidende strukturelle Beschaffenheit. (vgl. Liljedahl 2004) Bandornamente und Parkette sind spezielle und für den Grundschulunterricht typische Beispiele für sich wiederholende Musterfolgen.

Bei einer *wachsenden Musterfolge* wächst die Grundeinheit systematisch bei jeder Wiederholung. Hier liegt das Augenmerk weniger auf einer Einheit als Grundbaustein, sondern auf der Beziehung aufeinanderfolgender Folgenglieder und dem Vergleich ihrer Veränderung, um die Regel der Veränderung zu finden. Wachsende Musterfolgen sind z.B. Zahlenfolgen, strukturierte Aufgabenfolgen („schöne Päckchen“) oder geometrische Darstellungen elementarer Zahlenfolgen. Eine arithmetische Analyse der Folgenglieder ist bei wachsenden Musterfolgen unumgänglich.

Wird jedem Folgenglied einer wachsenden Musterfolge eine Position zugeordnet, entsteht ein neues Muster im Sinne einer *funktionalen Beziehung*. Für jede beliebige Position n kann das Folgenglied t der Musterfolge in

Abhängigkeit voneinander bestimmt und in einer allgemeinen Form ausgedrückt werden. Wachsende Musterfolgen und Muster als funktionale Beziehungen werden häufig mit einem Verständnis von Funktionen und dem Lernen von Algebra in Verbindung gebracht (vgl. Warren & Cooper 2006; Steinweg 2006).

Gerade der mathematische Anfangsunterricht nutzt Muster auch, um Zahlen mit Hilfe spezieller geometrischer Anordnungen zu veranschaulichen. Bei solchen *räumlichen Mustern* sind die Elemente in der Ebene durch unterschiedliche Abstände, Farben oder andere äußere Merkmale gegliedert. Zahlbilder wie Würfelbilder, Fingerbilder, Gitter, Punktefelder, etc. sind räumliche Muster. Sie versuchen, die den Zahlen innewohnenden Strukturen abzubilden. Dies gilt auch für die dekadisch gegliederten Anschauungsmittel des sich erweiternden Zahlenraumes (Zwanzigerfeld, Hunderterfeld, Zahlenstrahl …), die besonders dekadische Strukturen veranschaulichen. Mit Hilfe der Zahlbilder sollen Kinder innere Vorstellungsbilder von Zahlen als geeignet gegliederte Quantitäten entwickeln. Indem die Kinder sinnlich wahrnehmbare Mengen gliedern, erhalten sie die Gelegenheit, Zahlen als strukturierte Ganzheiten anstatt ausschließlich als Zählreihe wahrzunehmen (vgl. Gerster 2005). Zahlbilder besitzen eine regelmäßige, geometrische Anordnung. Sie sind so aufgebaut, dass sie quasi-simultan erfassbar sind, also leicht in überschaubare Teilportionen zerlegt werden können. Das Erkennen der vorgegebenen Gliederung und das eigene Strukturieren der Zahlbilder ist damit eine Voraussetzung für die Ausbildung strukturierter mentaler Mengenvorstellungen. Im Zusammenhang mit räumlichen Mustern geht es also um das Mustererkennen im Sinne von bekannten Bildern, dem Erkennen einer räumlichen Ordnung.

Bedeutung von Muster und Strukturen für das Mathematiklernen

Warum ist das bewusste Umgehen von Kindern mit mathematischen Mustern und Strukturen so wichtig? In der mathematikdidaktischen Literatur findet man viele gute Gründe, die im Folgenden übersichtsartig aufgelistet sind (für die Primärquellen siehe Lüken 2012a, 80ff.).

Die Auseinandersetzung von Kindern mit mathematischen Mustern und Strukturen fördert allgemeine (mathematische) Kompetenzen wie Sortieren, Ordnen, Vergleichen, Beziehungen erkennen, Regelmäßigkeiten wahrnehmen, Regeln abstrahieren, Verallgemeinern, Vorhersagen treffen, ein Verständnis abstrakter zeitlicher und räumlicher Sequenzen, mathematisches und logisches Denken, die Entwicklung heuristischer Strategien beim Problemlösen, mathematisches Modellieren und geometrisches Denken.

Ein Muster- und Strukturverständnis ist *Voraussetzung* für die quasi-simultane Zahlerfassung, den Umgang mit mathematischen Anschauungsmitteln, das Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen Zahlen, Einsicht in das dekadische Zahlsystem, Verständnis von Zahleigenschaften und mathematischen Gesetzmäßigkeiten, die Ablösung vom zählenden Rechnen, das Teil-Ganzes-Verständnis, Zählen in Schritten, ein Verständnis von Multiplikation, Zahlenfolgen, Algebra und Funktionen.

Muster- und Strukturfähigkeiten stehen darüber hinaus in einem Zusammenhang mit der arithmetischen Leistung (vgl. Lüken 2012a), Leistung in allen anderen mathematischen Inhaltsbereichen (Mulligan & Mitchelmore 2009) sowie dem späteren Schulerfolg (vgl. Burton 1982).

Aufgaben zur Förderung kindlicher Muster- und Strukturfähigkeiten

Für die im Workshop besprochenen und durchgeführten Übungen sei auf Lüken 2011 und 2012b verwiesen.

Literatur

Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K. & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532.

Burton, G.M. (1982). Patterning: Powerful Play. *School Science and Mathematics, 82*(1), 39-44.

Gerster, H.-D. (2005). Anschaulich rechnen – im Kopf, halbschriftlich, schriftlich. In M. von Aster & J.H. Lorenz (Hg.), *Rechenstörungen bei Kindern* (S. 202-236). Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: the distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(3), 24-42.

Lüken, M.M. (2011). Wie geht's weiter? Zur Kompetenz des Fortsetzens eines geometrischen Musters. *Mathematik differenziert*, H.1, S. 36-40.

Lüken, M.M. (2012a). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern.* Münster: Waxmann.

Lüken, M.M. (2012b). Welcher Teil wiederholt sich? Geometrische Muster entdecken und herstellen – Unterrichtsideen für Klasse 1 und 2. *Grundschulunterricht Mathematik,* H.1, S. 4-7.

Mulligan, J.T. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Steinweg, A.S. (2006). Kinder deuten geometrische Strukturen und Gleichungen. „Ich sehe was, was du auch sehen kannst …". In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hg.), *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht* (S. 71-86). München: Oldenbourg.

Warren, E. & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9-14.