View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Eldorado - Ressourcen aus und für Lehre, Studium und Forschung

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Thomas GAWLICK, Hannover, Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Heurismen- und Argumentationstraining im Unterricht, explizit oder implizit?

1. Hintergrund

Argumentieren und Beweisen sowie Problemlösen sind wesentliche Tätigkeiten professioneller Mathematiker. Daher finden sich diese Tätigkeiten auch im Kompetenzkanon der Schulcurricula (vgl. Niedersächsisches KC 2006, S. 17 f.). Defizite speziell beim Problemlösen können gemäß dem Kompensationsprinzip von Bruder (Bruder & Collet, 2011, S. 36) durch ein gezieltes Heurismentraining z. T. ausgeglichen werden. Folglich stellt sich die Frage, wie ein solches Training auszusehen hat. Wir haben aus der Literatur zwei mögliche Herangehensweisen abgeleitet:

Pólya (1949, S. 18) fordert vom Lehrer, den Schülern die Fragen aus seinem berühmten Problemlösekatalog so oft vorzulegen, „wie er das ungezwungen tun kann. [...]. Dank dieser Führung wird der Schüler schließlich hinter den rechten Gebrauch dieser Fragen und Anregungen kommen“. Diese Vorgehensweise bildet den Kern für das, was wir *implizites Training* nennen: Heurismen werden an Hand des aktuellen Schulstoffes im laufenden Unterricht vom Lehrer akzentuiert.

König (1992, S. 24) dagegen behauptet, dass „ein nur implizites Vermitteln etwa durch Vorbildwirkung“ nicht ausreicht und fordert ein „explizites Abheben von methodologischen Erkenntnissen“. In unserem *expliziten Training* geschieht dies im Rahmen separater Unterrichtsphasen zu Heurismen Zu den in unserem Training vermittelten Heurismen gehörten Hilfsmittel (Hilfslinien, Tabellen, Gleichungen), Strategien (Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten) und Prinzipien (Analogie).

In Bezug auf das Beweisen durchliefen die Schüler in beiden Trainings an vielen Stellen des Unterrichtes komplette Beweisprozesse, die sensu Boero (1999) aus den Phasen a) Satzfindung, b) Satzformulierung, c) Beweisfindung, d) Beweisorganisation und e) Beweisdarstellung bestehen[1]. Die Phasen a) und c) wurden durch den Einsatz von elektronischen, interaktiven Arbeitsblättern (EIWOS) flankiert, die aus dem Bestand von Elschenbroich & Seebach (2002) weiterentwickelt wurden.

[1] Boero beschreibt mit dem *Erreichen mathematischer Strenge* noch eine sechste Phase, zitiert aber Thurston, der sagt, dass diese Phase praktisch unerreichbar und für die Arbeit von Mathematikern nicht wichtig ist.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 249–252). Münster: WTM-Verlag

2. Analogie – Beispiel für einen trainierten Heurismus

Als Beispiel für einen in beiden trainierten Klassen eingeführten Heurismus stellen wir hier das Analogieprinzip vor. Im Folgenden wird kurz umrissen, wie dieses Prinzip im Rahmen des *expliziten* bzw. *impliziten Trainings* behandelt wurde:

2.1 Das Analogieprinzip im impliziten Training

Das Analogieprinzip wurde inhaltlich an die Einführung der quadratischen Funktionen geknüpft. Im Rahmen des impliziten Trainings wurden im laufenden Unterricht unter anderem Analogien zwischen den Eigenschaften quadratischer Funktionen *(Aktuelle Aufgabe)* und linearer Funktionen *(Ähnliche Aufgabe)* herausgearbeitet. Das folgende Beispiel stammt aus der Einführungsphase in die Thematik, weitere Analogien bezogen sich auf das Arbeiten mit den Funktionsgleichungen quadratischer und linearer Funktionen (Werteberechnungen, Äquivalenzumformungen etc.) bis hin zu quadratischen respektive linearen Regressionen.

Ähnliche Aufgabe		Lehrer-impulse		*Aktuelle Aufgabe*
Wie lautet die Funktionsgleichung einer Normalparabel, deren Scheitelpunkt um zwei Einheiten auf der Ordinate nach oben verschoben ist.	→	Kennst du Aufgaben, bei denen etwas Ähnliches gesucht wird wie hier? (…)	→	Wie lautet die Funktionsgleichung einer linearen Funktion, deren Graph um zwei Einheiten auf der Ordinate nach oben verschoben ist.

2.2 Das Analogieprinzip im expliziten Training

Hier wurde das Analogieprinzip außerdem im Rahmen einer separaten Doppelstunde kontextunabhängig unterrichtet. Diese separaten Unterrichtsphasen bestehen aus drei Säulen:

a) Im Rahmen einer vorbereitenden Hausaufgabe erinnern oder informieren sich die Schülerinnen und Schüler, wo und wann sie den fraglichen Heurismus im (Mathematik-)Unterricht oder außerhalb der Schule zuvor schon verwendet haben und warum er in jener Situation hilfreich war.

b) Während der separaten Unterrichtsphase erstellen die Schüler gemeinsam einen Metaplan unter der Fragestellung: Wie kann mir der Heurismus hilfreich sein?

c) Der Lehrer stellt den Schülern stoffübergreifende Aufgaben, für deren Lösung der Heurismus hilfreich ist. Nachfolgend findet sich ein Beispiel für eine solche stoffübergreifende Aufgabe:

Aufgabe 1 *(Ähnliche Aufgabe)*:	**Aufgabe 2** *(Aktuelle Aufgabe)*:
Ein Rechteck hat den Umfang 60cm. Eine Seite ist 5cm länger als die benachbarte Seite. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?	Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit der Fläche 22,5 cm^2 unterscheiden sich die Längen der Katheten um 4cm. Bestimme die Längen der Katheten.
Die Schüler bearbeiten die *ähnliche Aufgabe* zunächst im Plenum.	Danach bearbeiten die Schüler die *aktuelle Aufgabe* im Rahmen einer Ich-Du-Wir Folge.

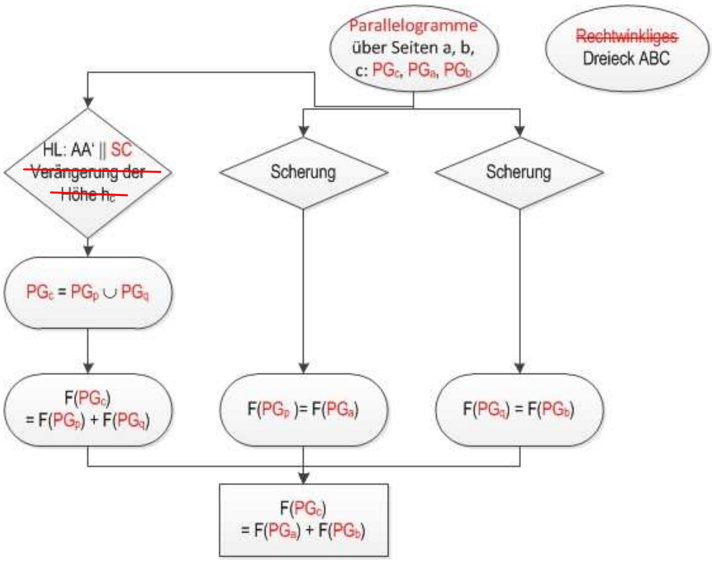
3. Beweisen im HeuRekAP Training

Im Laufe des HeuRekAP-Trainings sollten die Schülerinnen und Schüler an möglichst vielen Stellen den gesamten Beweisprozess sensu Boero 1999 durchlaufen. Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick über die Phasen dieses Prozesses für die Unterrichteinheit „Satz des Pythagoras". Eine ausführliche Beschreibung des Beweisprozesses für die Einheit „Satz des Thales" findet sich bei Brockmann-Behnsen 2013.

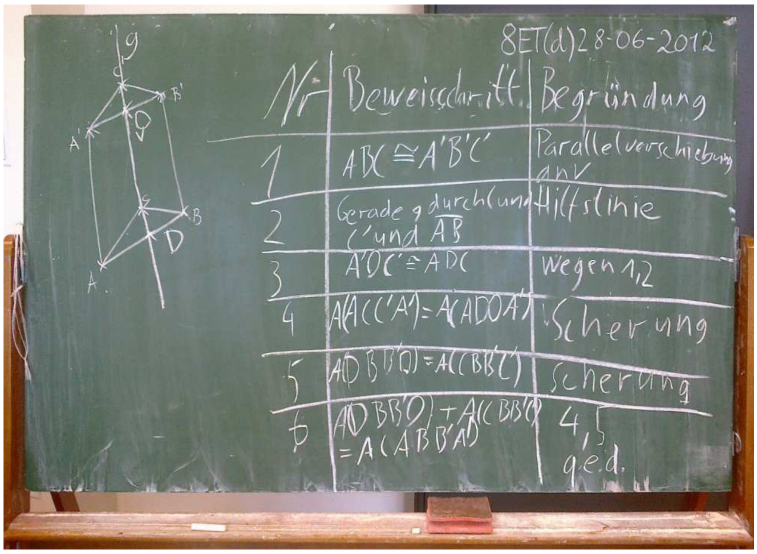
Phase	**Inhalte**	**Soz.-F.**	**Medien**
1 Satzfindung	Untersuchung des Scheitelwinkels eines Dreieckes, Entdeckung des SdP, Tabelle zur Unterscheidung der Fälle: C außerhalb, innerhalb und auf dem Umkreis von AB	Einzeln PA Plenum	EIWOS 1 Lerntagebuch Tafel
2 Satzformulierung	Gemeinsame Formulierung des Satzes für den Fall: $\gamma = 90°$. (C auf dem Umkreis um AB)	Plenum	Tafel
3 Beweisfindung	Lehrerimpulse: Was wissen wir schon in Bezug auf Flächen, Quadrate etc. Welche heuristischen Hilfsmittel sind uns bekannt?	Plenum	EIWOS 2
4 Beweisorganisation	Erstellen und Zusammenführen von Argumentationsteilen	Einzeln PA	Beweispuzzle Lösungsgraph mit Lücken
5 Beweisdarstellung	Niederschrift des Beweises in einem Zweispaltenbeweis	Einzeln PA Plenum	Tafel Lerntagebuch

4. Übertragen der Beweisidee

Der Satz des Pythagoras wurde mit einem Scherungsbeweis bewiesen. Im Anschluss wurde den Schülerinnen und Schülern der Satz des Pappus vorgelegt. Diese erkannten im Spezialfall (Translation des Dreiecks ABC auf A'B'C') die Analogie zwischen den beiden Sätzen und übertrugen die zentrale Beweisidee des Kathetensatzes auf die neue Situation. Die dafür erforderlichen Umstrukturierungen können auch anhand eines Lösungsgraphen verdeutlicht werden, was im Unterricht häufig geschah:



In den Voraussetzungen müssen für den Satz des Pappus nun die Quadrate aus dem Satz des Pythagoras durch Parallelogramme ersetzt werden. Das betrachtete Dreieck bleibt auch nicht auf den rechtwinkligen Fall beschränkt. Die grundsätzliche Idee der Flächentrennung und –verwandlung durch Scherung bleibt aber unter der Analogie erhalten. Nachstehend sieht man die Niederschrift des Beweises dieser Pappus–Variante von Schüler D13 aus dem oberen Leistungsdrittel als Zweispaltenbeweis. Interessanterweise ist der formal übertragene Schritt 3 redundant, was Schülerin D03 aus dem mittleren Leistungsdrittel auffiel und Anlass zu einer guten Diskussion lieferte.



Literatur

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematical education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Juli / August 1999

Brockmann-Behnsen, D. (2013). The process of proving Thales' Theorem. In: Scottish Mathematical Council Journal 43 (2013), 26-31

Bruder, R. & Collet, Chr. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin, Cornelsen Scriptor

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2002): Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Euklid DynaGeo, Lehrerhandbuch, 8. Klasse, co.Tec-Verlag

König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen, in: Der Mathematikunterricht Jg. 38, 3/1992

Pólya, G. (1949): Schule des Denkens, Francke, Tübingen