

Daniela AßMUS, Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale, Frank FÖRSTER, Braunschweig

Analogieerkennung im Problemlöseprozess – ein Verlaufsmodell

Ein Blick in die Geschichte zeigt Analogiebildung als ganz wesentliche heuristische Strategie für die Entwicklung neuer Mathematik (Zimmermann, 2003), nach Pólya (1954) gab es vielleicht keine mathematische Entdeckung, bei der das Analogieprinzip keine Rolle gespielt hat. Dessen Bedeutung – auch für die Elementarmathematik – steht der damit verbundene hohe kognitive Anspruch gegenüber. Dass Analogieprozesse auch mathematisch begabten Grundschulkindern schwer fallen, zeigen beispielsweise Ergebnisse der von uns durchgeführten Video-Studie zum Analogen Denken (ViStAD, Aßmus & Förster, 2013a, 2013b), deren Hauptziel es ist, Fähigkeiten zum Konstruieren und Nutzen von Analogien beim mathematischen Problemlösen als potenzielles Begabungsmerkmal zu überprüfen. Dafür schien es hilfreich, ein Modell zur Verortung von Analogieprozessen im Problembearbeitungsverlauf zu entwickeln, wobei wir zum einen theoriebasiert vorgegangen sind und zum anderen qualitativ gewonnene Ergebnisse der Studie genutzt haben. Ein erster Entwurf soll im Folgenden vorgestellt werden.

Analogien im Problembearbeitungsprozess

Eine klassische Modellierung zum Problemlösen stammt von Pólya (1945), sie umfasst die Phasen (1) „Understanding the problem“, (2) „Devising a plan“, (3) „Carrying out the plan“ und (4) „Looking back“. Diese werden so oder in ähnlicher Form auch in anderen Verlaufsmodellen aufgegriffen (vgl. z. B. Rott, 2013). Bei Mason u. a. (1982) verschmelzen im Wesentlichen die Phasen (2) und (3) zu „Attack“, weil Planung und Umsetzung in der Regel eng miteinander verwoben sind. Gerade im Grundschulalter sind längere explizite Planungsphasen auch sicher kaum zu beobachten.

Phase (1) gilt u. a. aus Sicht der Denkpsychologie, der Expertiseforschung und der Mathematikdidaktik als besonders anspruchsvoll; gerade auch für das Grundschulalter. Aus einer integrativen Sicht – die Problemlösen und Modellieren miteinander verbindet – scheint es insbesondere auch im Hinblick auf den Forschungsfokus Analogieerkennung/-konstruktion (AE) und Analogienutzung (AN) vielversprechend, die Hauptaufgabe in der ersten Phase darin zu sehen, ein passendes (dynamisches) kognitives Modell der Problemsituation zu entwickeln und gegebenenfalls vorgegebene Fragen zu verstehen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 113–116).
Münster: WTM-Verlag

Für die weitere Problembearbeitung scheint uns mit Blick auf Analogieprozesse entscheidend, ob dem Bearbeiter die Nutzung mathematischer Strukturen gelingt, oder ob er (zunächst oder ausschließlich) situationsgebunden vorgeht. Sich von der konkreten Situation zu lösen und auf mathematische Strukturen zu rekurren ist ein keineswegs selbstverständlicher (Gray, Pitta, & Tall, 1997), für Analogieprozesse jedoch wesentlicher Schritt.

Mit dem folgenden Modell sollen diese Akzentuierungen herausgearbeitet werden:

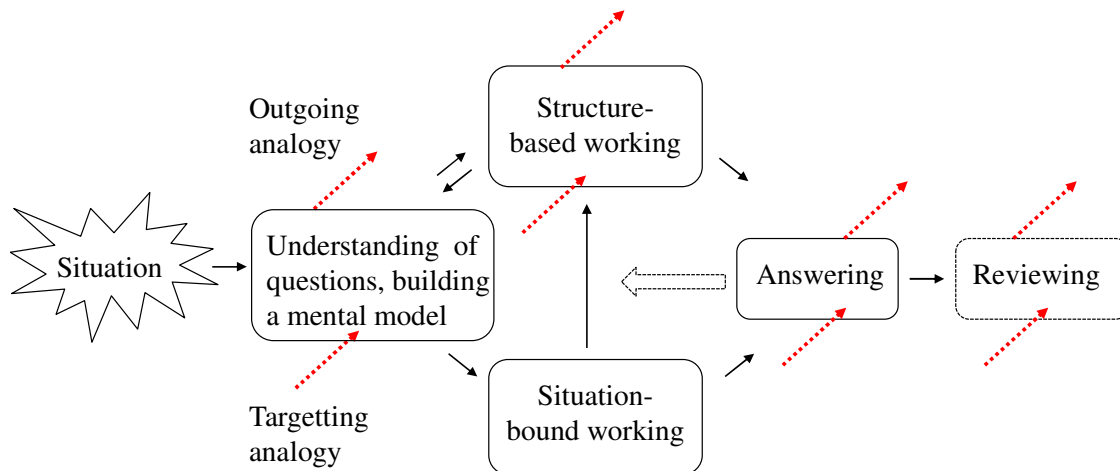


Abb. 1: Modellierung zur Analogiekonstruktion und -nutzung beim Problemlösen

Im Modell werden mit Hilfe der gestrichelten Pfeile zum einen mögliche Stellen für Analogieprozesse aufgezeigt, wobei bei der AN unterschieden wird, ob die aktuell bearbeitete Situation als Quellproblem dient und Vorstellungen, Vorgehensweisen oder Ergebnisse von dieser ausgehend auf eine andere Situation übertragen werden („outgoing analogy“) oder ob Erfahrungen aus einer bereits zuvor bekannten mathematischen Situation für die Bearbeitung der aktuellen (Ziel-) Situation genutzt werden („targetting analogy“). Die Phase „Reviewing“ ist im Modell durch einen punktierten Rahmen gekennzeichnet, weil sie bei eigenständigen Problembearbeitungsprozessen im Grundschulalter sicher selten beobachtbar ist, in dem von uns genutzten Untersuchungsdesign jedoch gegebenenfalls von außen initiiert wurde, um AE anzuregen.

Zum anderen sollen mit dem Modell notwendige Voraussetzungen für eine erfolgreiche AE verdeutlicht werden, die somit einen Teil des besonders hohen kognitiven Anspruchs dieser heuristischen Strategie begründen. So müssen vom Problembearbeiter zunächst die Fragestellung verstanden und ein passendes kognitives Modell der zu bearbeitenden Situation aufgebaut werden. Solange im Anschluss ausschließlich mit situativen Merkmalen und Elementen gearbeitet wird, ist höchstens die Konstruktion von Pseudo-Analogien möglich, die sich lediglich an der Situationsoberfläche – bei-

spielsweise an gleichen Zahlen – orientieren. Gelingt es dem Bearbeiter dagegen, zur Situation passende mathematische Strukturen – also ein mathematisches Modell – zu konstruieren, wird auch eine Erkennung bzw. Konstruktion und Nutzung von strukturellen Analogien, d.h. von Entsprechungen in den Situationen zugrunde liegenden Tiefenstrukturen, möglich. Allerdings können ähnliche Oberflächenmerkmale, ähnliche Vorgehensweisen oder gleiche (Teil-)Ergebnisse auch Auslöser zur Erkennung von strukturellen Analogien sein, insbesondere in den Phasen „Answering“ und „(initiated) Reviewing“.

Wird tatsächlich eine Analogie genutzt, werden möglicherweise nicht alle Phasen des Modells in Abb. 1 durchlaufen, es könnten aber auch weitere Rücksprünge stattfinden. In diesem Sinne können diese Phasen als deskriptive Module aufgefasst werden, die sich für den jeweiligen Einzelfall sowohl in ihrer Art als auch in ihrer Reihenfolge spezifisch ausprägen.

Empirische Stützung des Modells

Zur empirischen Stützung des Modells dienten die im Rahmen von ViStAD erstellten halbstandardisierten Einzelinterviews. Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler (hauptsächlich Klasse 3 und 4) bearbeiteten jeweils nacheinander zwei zueinander analoge Problemstellungen (teilweise durch Störaufgaben unterbrochen) und wurden gebeten, dabei soweit möglich über ihr Vorgehen zu berichten (lautes Denken). Um Analogieprozesse zusätzlich anzuregen, wurden in den zu bearbeitenden Situationen dieselben Zahlen verwendet. Im Anschluss wurden die Schüler explizit zum Vergleich der Problemstellungen und Vorgehensweisen aufgefordert und nach Ähnlichkeiten und Unterschieden befragt, auch dann, wenn der Interviewer während der Problembearbeitungen keine AN erkennen konnte.

Erwartungsgemäß zeigten sich bei Kindern, die bei der Bearbeitung in der Situation verblieben, keine Analogieprozesse. Für alle anderen Phasen des Verlaufsmodells liefert die Studie geeignete Beispiele, wobei jedoch bei den AN bedingt durch das Studiendesign hauptsächlich „targetting analogies“ zu beobachten waren. Auch ist anzumerken, dass AN in den Phasen „Answering“ und „Reviewing“ vor allem zur Korrektur abweichender Ergebnisse auftraten, ansonsten jedoch selten vorkamen, da die Problembearbeitung in diesen Phasen in der Regel bereits abgeschlossen ist.

Umgekehrt ließen sich alle durch uns rekonstruierbaren Analogiesierungsfälle in das Modell einordnen. Dabei wurden die meisten Fälle den Phasen „Building a mental model“ und „Reviewing“ zugeordnet, wobei sich problemspezifisch starke Unterschiede in den Verteilungen ergaben. Nur selten zeigten sich AE und AN im (beobachtbaren) Arbeitsprozess.

Fazit und Ausblick

Das hier beschriebene Verlaufsmodell eignet sich in vielfältiger Art und Weise zur Analyse von AE und AN im Problemlöseprozess. Zum einen lässt es sich über alle eingesetzten Problemstellungen hinweg als Analyseinstrument für o. g. Studie anwenden. Unterschiede hinsichtlich der Stelle der AE im Bearbeitungsprozess werden fass- und beschreibbar. Darüber hinaus lassen sich ausgehend von den Phasen des Modells spezifische förderliche und hinderliche Bedingungen zur AE und AN im Problemlöseprozess herausarbeiten. Solche Bedingungen wurden bereits teilweise publiziert (Aßmus & Förster, 2013b), weitere Analysen stehen noch aus. Entsprechendes Wissen zur AE und AN stellt unseres Erachtens eine wichtige Basis dar, um Problemlöseleistungen von Schülern adäquat einschätzen zu können.

Zum anderen ermöglicht das Modell auch eine genauere Einordnung anderer Untersuchungen zur AN beim Problemlösen. Dies schließt sowohl die Ausrichtung der Studien als auch die Einschätzung der Studienergebnisse ein. Studien lassen sich gezielt dahingehend vergleichen, welche Phasen des Modells in der Studie abgebildet und unter welchem Blickwinkel AE und AN betrachtet werden.

Literatur

- Aßmus, D., & Förster, F. (2013a). ViStAD – Erste Ergebnisse einer Video-Studie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern. *mathematica didactica*, 36, 45–65.
- Aßmus, D., & Förster, F. (2013b). ViStAD – Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 92–95). Münster: WTM.
- Gray, E., Pitta, D., & Tall, D. (1997). The Nature of the Object as an Integral Component of Numerical Processes. In E. Pehkonen (Hrsg.), *Proceedings of the 21st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (S. 115–130). Lahti, Helsinki: University of Helsinki.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.
- Pólya, G. (1945): *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol I: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen: Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM.
- Zimmermann, B. (2003). On the genesis of mathematics and mathematical thinking - a network of motives and activities drawn from the history of mathematics. In L. Haapasalo & K. Sormunen (Hrsg.), *Towards Meaningful Mathematics and Science Education* (S. 29–47). Joensuu: University of Joensuu.