Astrid BRINKMANN, Münster, Thomas BORYS, Karlsruhe

Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“

Im Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der GDM, gegründet 2009, wird eine altbekannte und zentrale Forderung an das Lernen von Mathematik neu betrachtet: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voreinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

Die Sitzung des Arbeitskreises auf der GDM-Tagung 2013 wurde durch einen Bericht von Astrid Brinkmann zu den Aktivitäten des Arbeitskreises eröffnet. Dabei hat Regina Bruder zur 5. Tagung des Arbeitskreises einschließlich Lehrerfortbildung in Darmstadt eingeladen.

Es folgten zwei Vorträge von Winfried Müller und Matthias Brandl zu geplanten Artikeln der Schriftenreihe „*Mathe vernetzt*“.

Wir geben im Folgenden Kurzfassungen zu den Tagungsordnungspunkten eins, zwei und vier; der Beitrag zum TOP 3 wurde von *Winfried Müller* verfasst.

Top 1. Astrid Brinkmann: Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“

Die Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (Verlag Aulis) ist eine Publikation des GDM-Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“. Herausgeberin der Reihe ist Astrid Brinkmann. Nachdem Anfang 2011 der erste Band der Reihe erschienen ist, wurde nun auch der dritte Band pünktlich vor der Didacta fertiggestellt. Die Herausgeber des dritten Bandes sind Matthias Brandl, Astrid Brinkmann und Michael Bürker.

Die Schriftenreihe richtet sich an Mathematiklehrende an Schulen. Die einzelnen Artikel sind daher so aufbereitet, dass Lehrende sie möglichst unmittelbar und gewinnbringend in ihrem Unterricht einsetzen können. Ein Materialband mit kopierfähigen Unterrichtsmaterialien zu den Beiträgen in Band 1–3 ist im Druck.

Wir möchten ausdrücklich auch Nicht-Mitglieder unseres Arbeitskreises ermuntern, uns passende Beiträge für die Schriftenreihe einzureichen! (An: astrid.brinkmann@math-edu.de)

Top 2. Regina Bruder:
Einladung zur 5. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung an der Universität Darmstadt, 03. – 04. Mai 2013

Die fünfte Tagung des Arbeitskreises wird von Regina Bruder organisiert. Das Tagungsprogramm und weitere Informationen zur Tagung werden auf der Homepage (siehe: http://www.math-edu.de) veröffentlicht.

Top 3. Winfried Müller:
„Schöne Dreiecke, Mittelwerte und mehr“

Zu den bekannten Pythagoräischen Tripeln, die rechtwinklige Dreiecke liefern (s. z. B. [3]), gibt es zwei weitere „*schöne*“ Dreiecke, d. h. Dreiecke, für die die *Seitenlängen ganzzahlig* sind *und ein Winkel* im Gradmaß ebenfalls. Beispiele: Das Grundtripel [ggT(x,y,z) = 1] (x;y;z) = (5;8;7) liefert ein Dreieck mit einem 60°-Winkel gegenüber z, das (abgeleitete) (6;10;14) eines mit 120°. Dahinter steckt der Kosinus-Satz in der Form $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ wegen cos(60°) = 0,5 bzw. cos(120°) = -0,5.

Versuchen wir weitere solche Dreiecke zu finden (z. B. mit Tabellenkalkulation), so erhalten wir für 60°, also für $z^2 = x^2 + y^2 - xy$ bzw. für 120°, also $z^2 = x^2 + y^2 + xy$ und jeweils Grundtripeln $(x;y;z) \in \mathbb{N}^3$ die Tabellen (links 60°, rechts 120°, beschränkt auf Werte < 100):

x	y	z	x	y	z
3	8	7	5	8	7
7	15	13	8	15	13
5	21	19	16	21	19
11	35	31	24	35	31
7	40	37	33	40	37
13	48	43	35	48	43
16	55	49	39	55	49
9	65	61	56	65	61
32	77	67	45	77	67
17	80	73	63	80	73
40	91	79	51	99	79
11	96	91	85	96	91
19	99	91	80	99	91

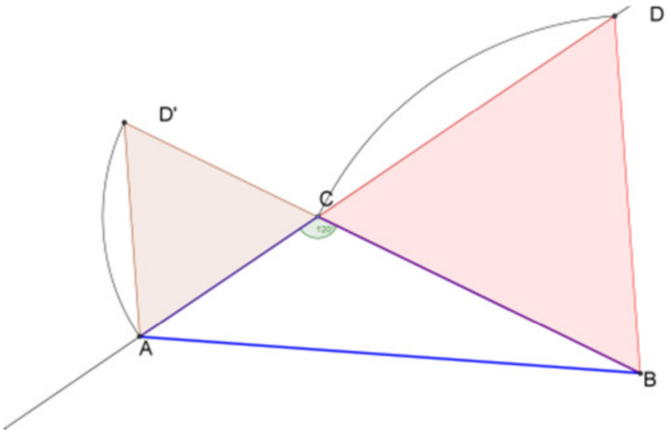
x	y	z
3	5	7
7	8	13
5	16	19
11	24	31
7	33	37
13	35	43
16	39	49
9	56	61
32	45	67
17	63	73
40	51	79
11	85	91
19	80	91

Der Zusammenhang ist offensichtlich und lässt sich *algebraisch* formulieren durch

$$x^2 + y^2 - xy = z^2 \Leftrightarrow (y - x)^2 + x^2 + (y - x)\cdot x = z^2$$

Erinnern wir uns der *geometrischen* Herkunft der Tripel, so erhalten wir die nachstehende Figur, die die Existenz zweier 60°- Lösungen zu einer mit

120° demonstriert, natürlich nicht nur für ganzzahlige Seitenlängen. Die Vernetzung von Geometrie, Algebra und Arithmetik bzw. Zahlentheorie bei unserem Thema wird plastisch!



Der nächste logische Schritt müsste nun sein die Lösung der zwei (!) Gleichungen $x^2 + y^2 \pm xy = z^2$ mit $(x;y;z) \in \mathbb{N}^3$. Grundsätzlich sind dies Gleichungen vom PELLschen Typ, deren Lösung mittels Kettenbruchmethode zu leisten wäre [3].

Gottseidank hat P. Gallin in [4] durch elementare Überlegungen zeigen können, dass alle schönen 120°-Dreiecke (also mit $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ und $\gamma = 120°$) sich darstellen lassen durch

$$a = n(2m + n) \quad \text{und} \quad b = m(3m + 2n) \quad \text{mit } (m;n) \in \mathbb{N}^2 \text{ und } \mathrm{ggT}(m,n) = 1.$$

(Dass sich das „richtige“ z^2 für die dritte Dreiecksseite $c = \sqrt{z^2}$ ergibt, ist leicht nachzurechnen). Wir kommen also um die aufwändige Kettenbruchmethode herum!

Nach obigen Überlegungen über den Zusammenhang der 120°- und 60°-Lösungen erhalten wir damit zwei Erzeugungsformeln für die schönen 60°-Dreiecke (also mit $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ und $\gamma = 60°$):

(i) $(a =)\ x = 2mn + n^2$ und $(a + b =)\ y = 4mn + n^2 + 3m^2$

bzw.

(ii) $(a + b =)\ x = 4mn + n^2 + 3m^2$ und $(b =)\ y = 2mn + 3m^2$,
$(m;n) \in \mathbb{N}^2$ und $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.

Weitere schöne Dreiecke, d. h. für $\gamma \neq 60°/90°/120°$ sind übrigens nicht mehr zu erwarten wegen der Transzendenz der Kosinus-Funktion; wir können aber unsere Ergebnisse für Vierecke gut verwenden: So sind im Viereck ABCD mit der Diagonalen $\overline{AC} = 13$(cm) z. B. möglich

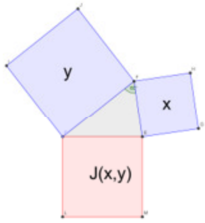
1. $a = 5$, $b = 12$, $c = 8$ und $d = 7$ mit $\beta = 90°$ und $\delta = 120°$,
2. $a = 7$, $b = c = 15$, $d = 8$ mit $\beta = 60° = \delta$,

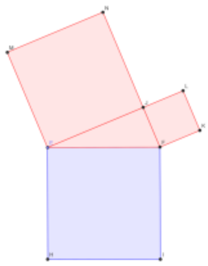
3. a = d = 7 und b = c = 15 und β = 60° = δ (Drachen!),
4. a = d = 7, b = 15 und c = 8, β = 60°, δ = 120°.

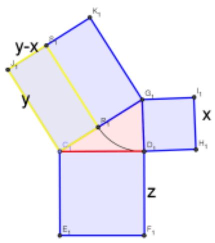
Diese 4. Variante zeigt, dass durch passende Dreieckskombinationen von 60°- und 120°-Dreiecken aus den beiden Tabellen „schöne“ Sehnenvierecke konstruierbar sind. Ebenso besitzt das gleichschenklige Trapez ABDD´ einen Umkreis, das durch Hinzufügung der Strecke $\overline{DD'}$ aus obiger Figur entsteht, und für das alle Seiten und die Diagonalen „auf Wunsch“ ganzzahlig sind!

Schließlich gibt es eine überraschende Vernetzung mit dem Thema Mittelwerte:

Zu den bekannten Mittelwerten arithmetisch, geometrisch und harmonisch hat JAHNKE kürzlich (s. [2]) ein weiteres hinzugefügt: $J(x,y) := x + y - \sqrt{xy}$. Dies können wir nun mittels der 60°-Dreiecke visualisieren; ebenso reizvoll ist damit die Visualisierung der Abweichung vom „Pythagoras“ ([1]):







Literatur:

[1] Baptist, P. (2000): Pythagoras und kein Ende? Leipzig.

[2] Herget, Jahnke, Kroll (2011): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Berlin.

[3] Scheid, H. (2003): Zahlentheorie, 3. Auflage, Heidelberg.

[4] Gallin, P. (2005): 51 weitere Mathematikaufgaben, Zürich/Köln.

TOP 4. Brandl, Matthias
„Die zwei- und dreidimensionale Schlagkraft der Mittelungleichung“

Eine elementare Alternative zur Ableitung findet sich in der Mittelungleichung. Mit ihr lassen sich diverse Extremwertprobleme sowohl in einer wie auch in mehreren Dimensionen elementar lösen. Gleichzeitig ergeben sich schöne Einsichten in den inhaltlichen Vernetzungsbereich zwischen Geometrie und Algebra.

Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. München: Aulis Verlag. http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html