Andrea SCHINK, Dortmund

Strukturelle Zusammenhänge bei Brüchen herstellen – Diagnose und Förderung für Lernende mit Schwierigkeiten

Einigkeit besteht darüber, dass Lernende über vielfältige inhaltliche Vorstellungen zu Brüchen und ihren Operationen verfügen sollten (z.B. Padberg 2009). Daneben ist auch das Erfassen struktureller Zusammenhänge für einen flexiblen Umgang mit Brüchen zentral (Schink 2013), womit jedoch gerade schwächere Lernende oft Schwierigkeiten zu haben scheinen.

Im von der „Deutsche Telekom Stiftung“ initiierten und geförderten Projekt „Mathe sicher können“ werden daher die diesbezüglichen individuellen Vorgehensweisen und kognitiven Hürden im Rahmen von Diagnose- und Fördereinheiten untersucht und gezielt bearbeitet (Deutscher, Prediger, Selter 2013). Vorgestellt werden der methodologische Rahmen und das Design des großen Projekts sowie der theoretische Hintergrund und empirische Befunde einer ihm zugehörigen Studie zum Herstellen struktureller Zusammenhänge beim Vergröbern und Verfeinern von Brüchen.

1. Lernprozessfokussierende Fachdidaktische Entwicklungsforschung

Den methodologischen Rahmen bildet das Modell der Lernprozessfokussierenden Fachdidaktischen Entwicklungsforschung mit seinen iterativen Zyklen der Entwicklung und Erforschung (Prediger, Link 2012): Das Diagnose- und Fördermaterial wird zu jeder Kompetenz in mehreren Lerngruppen zeitlich versetzt erprobt. Die Fördersitzungen werden videographiert und begleitend analysiert, um das Material sukzessive zu überarbeiten. So ergeben sich mehrere Zyklen pro ca. sechswöchiger Fördereinheit.

2. Die Lernumgebung: Gleichwertigkeit verstehen

Die Studie bezieht sich auf zwei aufeinander aufbauende Kompetenzen zur Gleichwertigkeit von Brüchen. Die erste *Ich kann zu einem Anteil in Bildern und Situationen gleichwertige Anteile finden* widmet sich dabei dem konsequenten Aufbau inhaltlicher Vorstellungen, während die zweite *Ich kann gleichwertige Brüche finden durch Erweitern und Kürzen* von den inhaltlichen Vorstellungen ausgehend den Kalkül als Denkentlastung entwickelt. Als Darstellungsmittel dienen gleichlange Bruchstreifen, die systematisch in der „Streifentafel“ (vgl. Abb. 1) untereinander angeordnet sind, so dass sich gleichwertige Anteile vertikal ablesen lassen: 1/2 = 2/4, da beide Anteile gleich lang sind (Prediger 2013).

Strukturiert wird die Lernumgebung in fünf Etappen: Gleichwertige Anteile (1) in Streifen einzeichnen / ablesen (qualitativ), (2) in der Streifentafel finden (Muster erkennen / nutzen), (3) in Streifen untersuchen (Verfeinern / Vergröbern), (4) im Kopf finden (Ablösung vom Material), (5) über Erweitern / Kürzen finden (verständnisorientiert üben).

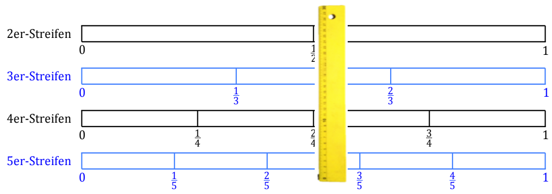

Abb. 1: Die Streifentafel (Ausschnitt)
aus Mathewerkstatt 6, Cornelsen Verlag

Nach dem ersten qualitativen Einstieg zum Kennenlernen der Bruchstreifen als geeignetem Darstellungsmittel zum Reden über gleichwertige Brüche, wird den Lernenden mit der Streifentafel ein Darstellungsmittel bereit gestellt, das die für das Finden gleichwertiger Brüche notwendigen Strukturen bereits beinhaltet (Etappen 1-2). Im weiteren Verlauf der Förderung sollen die Lernenden diese Strukturen jedoch zunehmend im Sinne einer fortschreitenden Schematisierung selbst herstellen und als Grundlage für die Argumentation über Gleichwertigkeit nutzen (Etappen 3-4).

3. Theoretischer Rahmen: Strukturelle Zusammenhänge verstehen

Die Gleichwertigkeit von Brüchen lässt sich unter drei miteinander verbundenen Perspektiven betrachten: einer inhaltlichen mit Fokus auf notwendige Vorstellungen (Padberg 2009), einer kalkülhaften mit Fokus auf Rechenregeln (ebd.) und einer relational-strukturellen (Schink 2013).

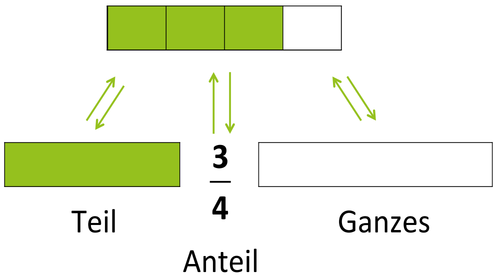

Abb. 2: Teil, Anteil, Ganzes

Für das Verständnis von gleichwertigen Brüchen und der Verfahren, sie zu erzeugen (inhaltlich: Verfeinern und Vergröbern; syntaktisch: Erweitern und Kürzen) wird in der Lernumgebung die Anteilsvorstellung von Brüchen aktiviert. Dabei müssen für den Umgang mit Brüchen stets triadische Zusammenhänge gedeutet werden, die sich im Zusammenspiel dreier Komponenten ergeben (Schink 2013): So bezieht sich ein Anteil immer auf ein bestimmtes Ganzes und erzeugt eine Strukturierung, aus der sich der Teil ergibt. Der Anteil ergibt sich als Beziehung zwischen dem Teil und dem zugehörigen Ganzen. Das Ganze ergibt sich aus der Rekonstruktion des Teils durch die Nutzung des Anteils (Abb. 2).

Um diese strukturellen Zusammenhänge herstellen und das Vergröbern und Verfeinern flexibel verstehen zu können, ist das Bilden und Umbilden von Einheiten zentral: Unter dem Bilden von Einheiten versteht man das sogenannte „unitizing“, das Beschreiben von Zahlen und Mengen über ihre Zerlegung in Teilmengen, die als neue Einheiten verstanden werden (Lamon

1994). Dabei werden bei Brüchen multiplikative Einheiten gebildet, wie beim Zählen in Schritten für natürliche Zahlen. Komplexer wird es dadurch, dass neue Beziehungen zwischen *Mengen* in Form von Zuordnungen betrachtet werden können, z.B. *pro Quadrat kommen 4 Seiten hinzu (und nicht bloß eine)*.

Für das Erweitern und Kürzen als Verfeinern und Vergröbern werden Einheiten durch Anteile geschaffen, wobei eine gemeinsame Strukturierung des Teils *und* des Ganzen gefunden werden muss (Abb. 3): Wird 1/4 im 12er-Streifen betrachtet, so werden alle Viertel (die die Einheiten im 4er-Streifen bilden) in neue Einheiten umgebildet (zerlegt), von denen drei so groß wie 1/4 sind. Mit diesen neuen Einheiten werden Teil und Ganzes neu beschrieben. So wird plausibel, wieso 3/4 genauso groß ist wie 9/12 und wie diese beiden Brüche strukturell zusammen hängen. Diese Zusammenhänge liegen schließlich den kalkülhaften Verfahren Erweitern und Kürzen zu Grunde. In diesem Kontext ergeben sich folgende Forschungsfragen:

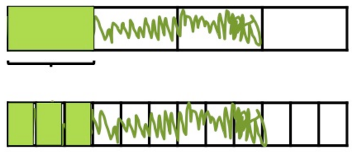

Abb. 3: Einheiten bilden

(1)/(2): Welche Vorgehensweisen nutzen Lernende zum Herstellen und Beurteilen gleich großer Anteile? Und inwiefern stellt das Verständnis des Bildens und Umbildens von Einheiten für Lernende eine Hürde dar?

(3): Wie können Lernende darin unterstützt werden, ein tragfähiges Verständnis von Erweitern und Kürzen zu erwerben?

4. Empirische Einblicke in individuelle Strukturierungen

Sven soll in einer mündlichen Diagnose einen gleich großen Anteil zu 6/8 im 4er-Streifen angeben (Abb. 4). Er argumentiert: „hier *[zeigt die 6 gefärbten Felder im 8er-Streifen]* ist ja mehr als da *[die 2 ungefärbten Felder]*. Also, da sind ja mehr *[...]*“. Auf Kalkülebene, als Sven symbolisch einen gleich großen Anteil zu 3/4 bestimmen soll, gibt er die Anteile 8/9 und 1/2 an, mit der Begründung, dass dann ein Kästchen frei bleibt. Svens Argumentation zeigt somit die Schwierigkeit, den Blick von der Anzahl der Teile weg auf die Relation der Teile zueinander hin zu legen: Er schaut auf die Anzahl der Teile und nicht auf die Beziehung von Teil und Ganzem. Dabei löst der Anteil 1/2, der durch das Freilassen von zwei Kästchen im 4er-Streifen ent-

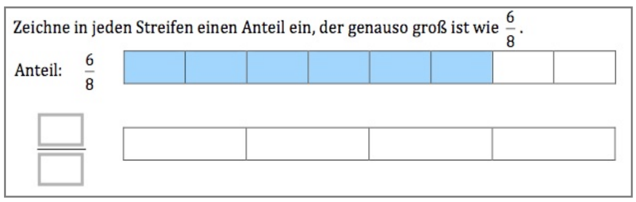

Abb. 4: Gleichgroße Anteile zu 6/8 finden

stehen würde, im Bild einen kognitiven Konflikt aus; in symbolischer Realisierung hingegen nicht.

In der noch andauernden Auswertung weiterer Fälle zeigen sich folgende erste Befunde zu den Forschungsfragen:

Zu (1)/(2): Lernende gehen vielfältig vor, um Anteile zu vergleichen und gleichwertige Anteile herzustellen. Dabei bereiten vielen insbesondere *relationale Bezüge* Schwierigkeiten. So wird etwa die *Anzahl der Einheiten* verglichen und *nicht gleichzeitig auch ihre Größe*, d.h. additive Zerlegungen stehen im Fokus.

Zu (3): Gerade schwächere Lernende müssen im Erkennen und Nutzen von Strukturen unterstützt werden, um den Fokus von absoluten und additiven Sequenzen auf das Bilden von (multiplikativ nutzbaren) Einheiten zu verschieben, die sich im Bezug von Teil und Ganzem ergeben. Die Schwierigkeit liegt hierbei in der *gleichzeitigen Betrachtung von Teil und Ganzem* bei *gleichzeitiger Strukturierung durch zwei Anteile*, die es zu vergleichen bzw. herzustellen gilt. Diese Perspektive und das Verstehen der Zusammenhänge kann durch die Struktur der Streifentafel unterstützt werden, denn diese lässt sie gleichzeitig betrachten und miteinander vergleichen.

Dank: Der Dank für die Initiative und Unterstützung des Projekts „Mathe sicher können" (www.mathe-sicher-koennen.de) unter Leitung von S. Prediger und C. Selter geht an die Deutsche Telekom Stiftung.

Literatur

Deutscher, T., Prediger, S. & Selter, C. (2013): Mathe sicher können – Sicherung mathematischer Basiskompetenzen in der unteren Sekundarstufe I. BzMU.

Lamon, S. J. (1994): Ratio and proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In: G. Harel & J. Confrey (Hrsg.): The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany: SUNY, 89-120.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum.

Prediger, S. (2013): Focussing structural relations in the bar board – a design research study for fostering all students' conceptual understanding of fractions. In: M.A. Mariotti & B. Ubuz (Hrsg.): Proceedings of CERME 8, Antalya 2013.

Prediger, S. & Link, M. (2012): Fachdidaktische Entwicklungsforschung - Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In: H. Bayrhuber et al. (Hrsg.): Formate Fachdidaktischer Forschung. Band 2. Münster et al: Waxmann, 29-46.

Schink, A. (2013): Flexibler Umgang mit Brüchen – Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem. Wiesbaden: Springer.