Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ, Landau

Der Kovariationsaspekt von Funktionen in der Sekundarstufe I

1. Die Bedeutung des Kovariationsaspekts

Zwei Aspekte von funktionalen Zusammenhängen werden in der mathematikdidaktischen Forschung herausgestellt (Malle, 2000; Thompson, 1994; Vollrath, 1989). Beim Aspekt der Zuordnung wird jedem Wert des Definitionsbereichs genau ein Wert des Wertebereichs zugeordnet. Beim Aspekt des Änderungsverhaltens – auch Kovariationsaspekt genannt – wird die Sicht des funktionalen Zusammenhangs um eine dynamische Komponente ergänzt: In welcher Weise verändert sich der Wert der abhängigen Variable, wenn der Wert der unabhängigen Variable systematisch verändert wird?

Bei der Behandlung von Funktionen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I wird vorwiegend die Zuordnungssicht angewendet (Malle, 2000). Es ist aber fraglich, ob ein adäquates mentales Modell des Konzepts der Funktion ohne Berücksichtigung des Kovariationsaspektes erzeugt werden kann (Vogel, 2006). Außerdem ist ein Verständnis des Kovariationsaspektes für die Infinitesimalrechnung – als dominantes Themengebiet der Oberstufe – unerlässlich. Dieses führt zu der Frage, ob Verständnisprobleme in der Analysis nicht auch in der zu späten schulischen Anbahnung des Kovariationsaspektes zu suchen sind.

Neben der Relevanz für den Erfolg in der Schule und ggf. Hochschule kann ein Grundverständnis für Änderungsverhalten auch als Element der mathematischen Grundbildung angesehen werden. Gerade in der modernen Industriegesellschaft ist der Mensch einer Vielzahl von dynamischen Vorgängen ausgesetzt, die ein Denken in Veränderungen erforderlich machen: In welcher Weise muss der CO_2-Ausstoß verringert werden, damit ein globaler Temperaturanstieg aufgehalten wird? Reduziert sich mit einer sinkenden Neuverschuldung auch der Schuldenstand?

In den Standards des National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) wurde der Bedeutung des Denkens in Veränderungen dadurch Rechnung getragen, dass der Aspekt *Analyze change in various contexts* als eine von vier Unterkategorien des Themengebietes Algebra für alle Jahrgangsstufen aufgenommen wurde (NCTM, 2000). In den deutschen Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss ist der Kovariationsaspekt hingegen nicht explizit erwähnt. Untersuchungen, in welcher Form der Kovariationsaspekt in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I implementiert werden kann und welche Schwierigkeiten hierbei bei den Lernenden entstehen, sind nur in Ansätzen vorhanden (z.B. Hahn, 2008).

2. Problembereich verbale Repräsentationen

Soll der Kovariationsaspekt in der frühen Sekundarstufe I verstärkt implementiert werden, so ist die formal-symbolische Algebra nur eingeschränkt hilfreich. Als Alternative bietet sich an, Änderungsverhalten mit Hilfe von verbalen Repräsentationen zu analysieren und zu beschreiben.

Eine verbale Repräsentation für die Behandlung des Kovariationsaspekts ist der Begriff der *Steigung*. Der Begriff hat den didaktischen Vorteil, dass die Lernenden auf Alltagserfahrungen (z.B. aus dem Straßenverkehr) zurückgreifen können. Andererseits ist er aber an eine graphische Sichtweise gebunden, da an einer Wertetabelle die Steigung nicht direkt ersichtlich ist. Erst wenn die Werte der Tabelle in einen Graph übertragen werden, erhält die Bezeichnung Steigung eine visuell fassbare Bedeutung.

Darüber hinaus zeigen Zaslavski, Sela und Leron (2002), dass der Begriff der Steigung auf Grund seiner visuellen Grundlegung Probleme bereiten kann. Falls die Abszisse und die Ordinate nicht gleichartig skaliert sind, kann eine visuell flache Gerade durchaus eine sehr große Steigung aufweisen. Gerade durch den zunehmenden schulischen Einsatz von graphischen Taschenrechnern und Computerprogrammen ist dieses Problem des Steigungsbegriffs nicht zu unterschätzen.

Eine alternative verbale Repräsentation stellt der Begriff der *Änderungsrate* dar. Er ist nicht an eine bestimmte Repräsentationsform gebunden, sondern sowohl in situativen Beschreibungen, als auch in Wertetabellen, Diagrammen und Graphen erfassbar. Allerdings ist die Verknüpfung von Änderungsrate und Steigung nicht selbstverständlich, wie Postelnicu (2011) in einer Untersuchung zeigt. So sollten Schüler der Klassenstufen 8 bis 10 die Geschwindigkeit und die Steigung eines linearen Zeit-Weg-Graphen bestimmen. Etwa 45% der Probanden bestimmten die Geschwindigkeit richtig. Von diesen Personen konnte allerdings nur rund die Hälfte die Steigung richtig bestimmen, obwohl sie denselben numerischen Wert wie die Änderungsrate (hier die Geschwindigkeit) hat. Aus diesem empirischen Ergebnis lässt sich folgern, dass Steigung und Änderungsrate für viele Schüler als unterschiedliche Konzepte wahrgenommen werden und die Änderungsrate das intuitiv zugänglichere Konzept sein könnte.

Die mehrdeutige Verwendung des Begriffs Änderungsrate stellt allerdings eine nicht zu unterschätzenden Problematik dar. So werden sowohl *absolute* Änderungsraten (z.B. Geschwindigkeit, Benzinverbrauch oder Ableitung) als auch *relative* Änderungsraten (z.B. Inflationsrate, Wirtschaftswachstum oder Zinssatz) im Alltag und in der Mathematik verwendet. Thompson (1994) präsentierte Mathematiklehrern und -dozenten einen

Graphen mit der Preisentwicklung in den USA zwischen 1928 und 1992 (Abb. 1) und fragte die Versuchsteilnehmer nach dem Zeitraum der höchsten Inflationsrate. Viele Teilnehmer nannten hierbei den Zeitraum der größten absoluten Änderungsrate in den achtziger Jahren und nicht den Zeitraum der größten relativen Änderungsrate nach dem Ende des Zweiten Weltkriegs. Obwohl die Versuchsteilnehmer eine intensive mathematische Vorbildung aufwiesen, verwechselten sie die relative und die absolute Änderungsrate. Es ist davon auszugehen, dass dieses Problem bei Schülern der Sekundarstufe I noch stärker auftritt. Da bereits in den Klassenstufen 7 und 8 mit absoluten Änderungsraten (Steigung einer linearen Funktion) und relativen Änderungsraten (Zinssatz) gearbeitet wird, kann dieser Unterschied nicht ignoriert werden.

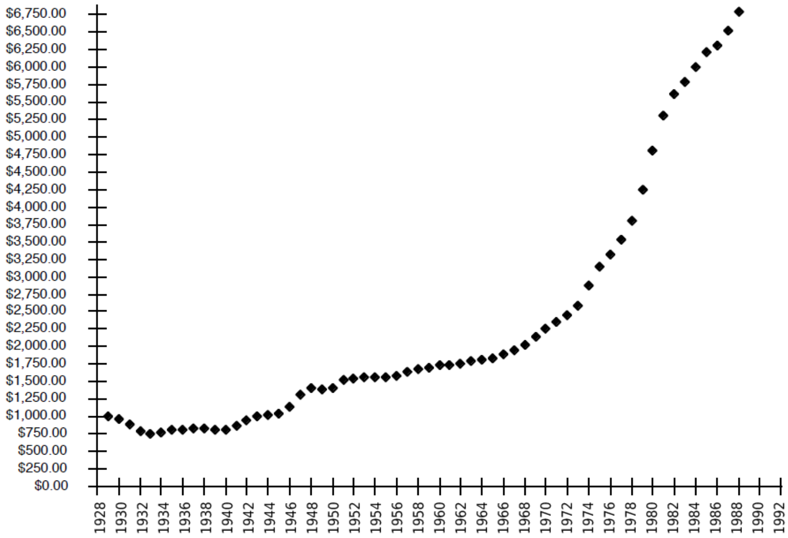

Abb. 1: Zeitraum der höchsten Inflationsrate? (Thompson, 1994)

3. Problembereich graphische Repräsentationsform

In einer Unterrichtsdoppelstunde wurde vom Erstautor mit 27 Schülern einer 7. Klasse eines Gymnasiums eine Unterrichtseinheit zur Förderung des Denkens in Veränderungen durchgeführt. Nach etwa 40 Minuten Instruktion erhielten die Schüler einen Papier-und-Bleistift-Test. Hierbei enthielten zwei Aufgaben eine nahezu identische situative Beschreibung eines Wachstumsvorgangs, wobei einmal eine Wertetabelle und einmal ein Graph erzeugt werden sollte. Bei der quantitativen Auswertung zeigte sich, dass die Lösungsrate bei der Wertetabelle signifikant höher war als beim Graphen (Vorzeichentest, $p < .001$, $g = .35$).

Betrachtet man die Realität im Mathematikunterricht, so wird die Wertetabelle vielfach als Hilfsmittel für die Erzeugung eines Graphen verwendet, mit dem dann weitergearbeitet wird. Das dargestellte Ergebnis unterstreicht die Tatsache, dass die Wertetabelle eine wertvolle eigenständige Repräsentationsform für die Analyse des Änderungsverhaltens darstellt und als solche verstärkt genutzt werden sollte.

4. Diskussion

Angesichts der dargelegten Probleme mit dem Begriff der Steigung ist eine stärkere Verwendung des Begriffs der Änderungsrate im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I zu erwägen. So könnte z. B. bei Anwendungsaufgaben zu linearen Zusammenhängen eine bewusste Verknüpfung der Begriffe Steigung und Änderungsrate förderlich für die Entwicklung eines tragfähigen Grundverständnisses für das Änderungsverhalten sein.

Auf Grund der höheren Lösungsrate bei der Konstruktion einer Tabelle im Vergleich zum Graphen stellt sich die Frage, ob die Tabelle für Schüler bei bestimmten Typen von Kovariationsaufgaben leichter zugänglich ist als der Graph. Die hier verwendeten Aufgaben zielten auf die Konstruktion von Repräsentationsformen aus numerischen Angaben zu Änderungen. Es bleibt zu untersuchen, ob auch bei Interpretationsaufgaben im Hinblick auf den Kovariationsaspekt die Wertetabelle für Schüler leichter zugänglich ist als der Funktionsgraph. Darüber hinaus ist zu klären, ob bei qualitativen Analysen eventuell der Graph einen leichteren Zugang zum Änderungsverhalten ermöglicht. Die Klärung dieser Fragen ist wesentlich für ein Unterrichtskonzept zur Entwicklung eines Grundverständnisses für das Änderungsverhalten in der Sekundarstufe I.

Literatur

Hahn, S. (2008). *Bestand und Änderung: Grundlegung einer vorstellungsorientierten Differentialrechnung*. Oldenburg: Didaktisches Zentrum, Carl-von-Ossietzky Universität.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, (103), 8–11.

National Council of Teachers of Mathematics (Hg.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Postelnicu, V. (2011). *Student Difficulties with Linearity and Linear Functions and Teachers' Understanding of Student Difficulties*. Dissertation, Arizona State University. Verfügbar unter http://repository.asu.edu/attachments/56417/content/Postelnicu_asu_0010E_10384.pdf.

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Hg.), *Research in Collegiate Mathematics Education I* (S. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Heidelberg: Franzbecker.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10, 3–37.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49* (1), 119–140.