

Regina D. MÖLLER, Peter COLLIGNON, Erfurt

## **Analysis unter einer postmodernen Perspektive**

### **1. Zum Begriff der Postmoderne**

Der Begriff „Postmoderne“ wird vorwiegend verwendet, um auf Veränderungen in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts hinzuweisen. Ziel ist es, bei gewissen Entwicklungen zu klären, ob es sich bei ihnen um fortgeführte moderne Phänomene handelt oder um kritische Reaktionen auf sie. Der Begriff der Postmodernen ist weder exakt definiert noch ist er auf bestimmte Phänomene begrenzt. Insbesondere bezieht er sich auf keine festen chronologischen Einordnungen. Er kann sich auf wissenschaftliche wie auf nichtwissenschaftliche Manifestationen beziehen.

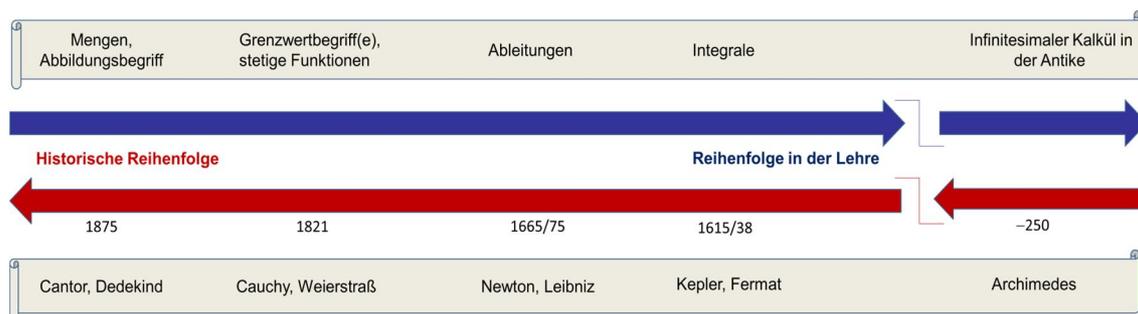
Nach dem französischen Philosophen Lyotard (1979) fasst der Begriff verschiedene Formen einer skeptischen Haltung gegenüber den Metanarrativen zusammen. Letztere stehen für „große Geschichten“ (big stories), die eine Erklärung für gesellschaftliche Phänomene bereitstellen. In der Soziologie wird unter Metanarrativen eine high-level-Theorie verstanden (z.B. eine Ideologie oder ein wissenschaftliches Paradigma). Unter einer soziologischen Perspektive sind beispielsweise der Funktionalismus, der Marxismus, der Interaktionismus und der Feminismus Metanarrative, weil sie für die verschiedensten Aspekte von Gesellschaft Theorien formulieren.

Auch die so genannten exakten Wissenschaften sind nicht frei von tradierten Paradigmen, die innerhalb der Fachdisziplinen als Theorien bezeichnet werden, und die in einem weiteren Rahmen als Metanarrative verstanden werden können. Beispielsweise zeigen sich bei der Entwicklung der Beschreibung der Naturgesetze Paradigmenwechsel, etwa durch die Weiterentwicklung vom geozentrischen zum heliozentrischen Weltbild, von der Newtonschen Mechanik zur Relativitätstheorie. In der Mathematik machte die Grundlagenkrise im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts deutlich, dass die naiven Grundlagen von Logik und Mengenlehre keine vollständige Basis sein können. Mathematiker wie Hilbert haben mit den Erkenntnissen von Gödel gerungen; letztendlich musste sich ein Paradigmenwechsel vollziehen.

Da verschiedene Bereiche, fachdisziplinär oder kulturell, sehr unterschiedlichen Aspekte des menschlichen Interesses im Fokus haben, die sich auch unterschiedlich historisch entwickelt haben, unterscheiden sich die Metanarrativen enorm voneinander. Um die beteiligten Metanarrativen zu analysieren, d.h. zu dekonstruieren, muss man auch die Abfolge historischer Entwicklungen betrachten.

## 2. Historische Perspektiven

Aus der Graphik ist ersichtlich, dass sich die Entwicklung der Analysis nicht in den aktuellen Unterrichtswerken widerspiegelt. Ganz im Gegenteil entspricht die Abfolge der Themen weitgehend der didaktischen Inversion (Freudenthal, 1983). Beispielsweise wird die Behandlung der reellen Zahlen häufig an den Anfang einführender Lehreinheiten zur Analysis gestellt, während sie erst sehr spät, im 19. Jahrhundert, axiomatisch grundgelegt wurden (Cauchy, Cantor, Dedekind u.a.).



Die Zeitstrahlen bilden natürlich nicht die historische Entwicklung mit all ihren Verzweigungen ab. Sie ordnen jedoch die Ideen, die sich schließlich durchgesetzt haben, zeitlich ein.

Bereits in der Antike wurden infinitesimale Berechnungen durchgeführt, die sich auf Flächen und Volumina bezogen. Beispielsweise hat Archimedes zu diesem Zweck Exhaustionen (Ausschöpfungen von Kreisen bzw. von Parabeln begrenzten Flächen) unternommen. Vor Newton und Leibniz wurden immer wieder infinitesimalen Berechnungen vorgenommen, die sich auf geometrische Objekte bezogen. Das Interesse an dynamischen Fragestellungen förderte erste Konzepte der Differentialrechnung. Dabei stand neben der Untersuchung statischer Kurven immer häufiger die Interpretation als Bahnkurve eines Objektes im Mittelpunkt der Betrachtung. Diese Verlagerung der Perspektive auf kinematische Aspekte war ein wichtiger Schritt hin zu einem Differentialkalkül. Leibniz und Newton haben unabhängig voneinander infinitesimale Überlegungen ohne den heute üblichen Funktionsbegriff angestellt. Dabei hat Leibniz mit sogenannten infinitesimalen Größen gearbeitet, die nicht von allen seiner Zeitgenossen akzeptiert wurden, deren Idee im 20. Jahrhundert im Rahmen in der Non-Standard-Analysis aber wieder aufgegriffen und präzisiert wurde.

Die Bindung des infinitesimalen Kalküls an den heutigen Funktionsbegriff nahm ihren Anfang mit Euler, auch wenn eine mengentheoretische Defini-

tion erst im 19. Jahrhundert erfolgte. Euler war zunächst der Sinn einer funktionalen Zuordnung wichtig, auch weil er in der Tradition derer stand, die sich mit naturgegebenen Abhängigkeiten befassen; hier insbesondere mit den Abhängigkeiten von Ort und Zeit, allgemeiner mit der Formulierung physikalischer Naturgesetze.

Für lange Zeit wurden infinitesimale Berechnungen eher unter einem pragmatischen Gesichtspunkt ausgeführt, wobei auch Reihen eine größere Rolle spielten. Die „exakte“ Grundlegung der reellen Zahlen ist Mathematik des 19. Jahrhunderts und hat für die Infinitesimalrechnung die Bedeutung einer theoretischen Fundierung zusammen mit der heute üblichen „Epsilonantik“, die vorwiegend auf Weierstraß zurückgeht.

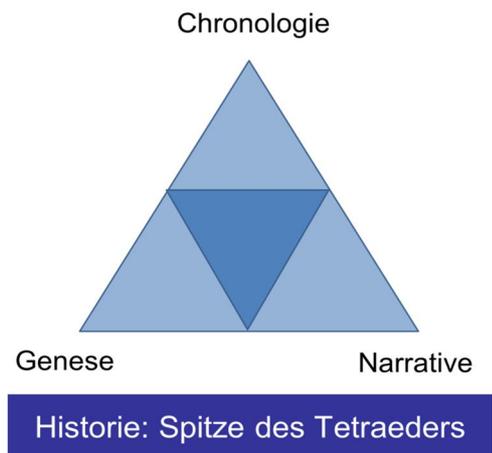
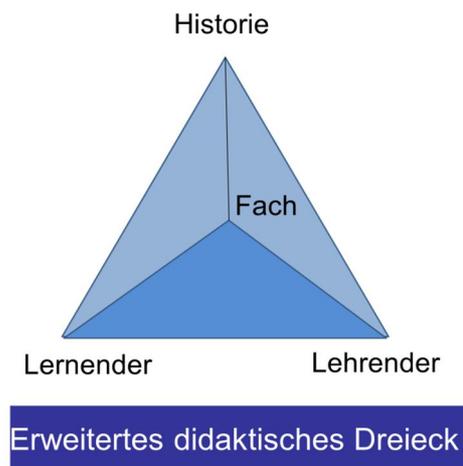
Mit einem postmodernen Blick stellen sich jetzt verschiedene Fragen: Welche Bedingungen haben zum heutigen Erscheinungsbild der Analysis beigetragen? Hätte es andere Entwicklungen geben können? Wann? Welche Einflüsse waren bestimmend? Welche Metanarrativen werden mit der heutigen Darstellung der Analysis transportiert? Sie zielen ab auf ein Verständnis dafür, dass das heutige Erscheinungsbild der Analysis von vielen Entscheidungen im historischen Verlauf bestimmt wird.

### **3. Folgerungen für die Lehrerausbildung**

In der didaktischen Diskussion spielen „fundamentalen Ideen“ die Rolle von Leitlinien (Dankwertz 2005, Vollrath, 1978). Die Inhalte der Analysis sind bestimmt durch Messen, funktionale Zusammenhänge, Änderungsraten, Approximation, Optimieren und den Grenzwertbegriff. In der Schulmathematik steht kalkülhaftes Arbeiten immer noch im Vordergrund. Mit diesem Verständnis kommen Studierende an die Hochschule und richten ihre Erwartungen entsprechend aus.

Hier gilt insbesondere für die Lehrerausbildung, dass das Kalkülhafte den Ideen und den Bedeutungen nachfolgt. Dazu sind einerseits Kenntnisse zur Genese der Analysis und der historischen Bedingungen notwendig. Zum anderen soll eine Sensibilisierung hinsichtlich des Wissenschaftsverständnisses erreicht werden, zumal auch heute noch bei vielen Lehrenden ein naiv-szientistisches Verständnis vorherrscht.

Die nachfolgende Graphik basiert auf dem bekannten didaktischen Dreieck, das den Stoff, die Lernenden und die Lehrenden zueinander in Beziehung setzt. Hier wird es um einen vierten Aspekt, die Historie, ergänzt zu einem Tetraeder. Wenn man diesen vierten Punkt weiter aufgliedert, nämlich in Chronologie, Genese und Narrative (tradierte Geschichte), dann erhält man die entscheidenden Teilaspekte für eine postmoderne Betrachtung.



Eine solche Sichtweise macht weiter deutlich, dass die Analysis seit langem mit den Naturwissenschaften, besonders der Physik, verwoben ist. Ihre Entwicklungen bedingen sich in großen Teilen gegenseitig. Ganz anders verhält es sich mit denjenigen Wissenschaften, die die Analysis wissenschaftshistorisch spät adaptiert haben (Ökonomie, Sozialwissenschaften). Eine postmoderne Sichtweise ermöglicht ein Erkennen eines solchen „Methodentransfers“ von den Naturwissenschaften zu anderen Disziplinen, welche *alleine* keinen hinreichenden Anlass geboten hätten, die Entwicklung der Analysis zu befördern. Hier liegen also nicht in demselben Maße genetische Prozesse vor.

Zwar stellt die Analysis einen Kalkül dar, der dank neuerer Technologien auch weiter im Vordergrund steht. In der Lehrerausbildung muss dieser Sichtweise jedoch ein Korrektiv im Sinne von Vollrath gegenübergestellt werden: Rettet die Ideen!

## Literatur

- Danckwerts, R., Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. München: Elsevier / Spektrum Akademischer Verlag.
- Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht [et al.]: D. Reidel Publishing Company.
- Jost, J. (2005): Postmodern Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Liotard, J. (1979). *La condition postmoderne: rapport sur le savoir*. Paris: Les Éditions de Minuit.
- Vollrath, H.-J. (1978): Rettet die Ideen! In: Der mathematische naturwissenschaftliche Unterricht, 31, 449 – 455.