Michael MARXER

Flexibel mit Dezimalbrüchen rechnen – Dezimalbrüche verstehen

Dezimalbrüche werden von Schülerinnen und Schülern bisweilen nicht als Brüche (an)erkannt, weil sie nicht die äußere Form haben, die sich für einen Bruch „gehört“. Gleichwohl knüpft ein Verständnis von Dezimalbrüchen und der erweiterten Stellenwerttafel an Grundvorstellungen für Brüche an. Der Beitrag stellt typische Aufgabenformate vor, die auf die Verbindung von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen fokussieren, indem der flexible Wechsel zwischen diesen Darstellungen Vorteile beim Rechnen erbringt.

Wo liegt das Problem?

Die Aufgabe 2,4 · 0,5 erscheint auf den ersten Blick als sehr einfach, weil sie problemlos im Kopf gelöst werden kann – die Hälfte von 2,4 ist 1,2. Die Realität liefert jedoch ein anderes Bild: Einer Untersuchung (Wittmann 2012) zufolge wird diese Aufgabe von weniger als 40 % der Schülerinnen und Schüler an Haupt- und Realschulen richtig gelöst.

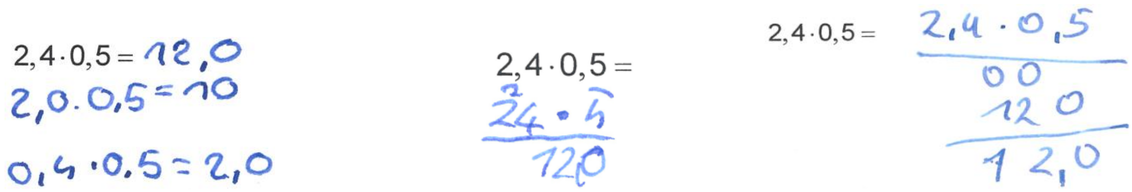

Abb. 1

Es dominieren schriftliche oder halbschriftliche Lösungen (Abb.1), obwohl andere Lösungsansätze viel nahe liegender sind, sei es, dass 0,5 auch als ½ geschrieben werden kann, dass · 0,5 gleichbedeutend ist mit : 2 oder dass das Ergebnis kleiner sein muss als 2,4. Sie rechnen automatisiert und dementsprechend mit *Ziffern*, wodurch ihnen der Blick auf die *Zahlen* verstellt wird, so dass deren spezifische Eigenschaften nicht zum Tragen kommen.

Den betreffenden Schülerinnen und Schülern hilft es nun wenig, wenn nur die *Anzahl* der Übungsaufgaben erhöht wird. Im Gegenteil: Auftretende Fehler können sich sogar einschleifen und verfestigen. Vielmehr muss die *Qualität* der Aufgaben geändert werden: Es bedarf eines Angebots variantenreicher und kognitiv aktivierender Aufgaben, die den Blick auf die gegebenen Zahlen und ihre besonderen Eigenschaften lenken. Auf diese Weise sollen die Schülerinnen und Schüler sowohl ein flexibles, aufgabenadäquates Rechnen erlernen als auch ein konzeptuelles Verständnis von Dezimalbrüchen erwerben.

Die Dezimalbruchschreibweise verstehen

Jeder Dezimalbruch kann im Sinne der Grundvorstellung *Bruch als Teil eines Ganzen* unmittelbar als gemeiner Bruch gelesen werden. 0,6 beispielsweise lässt sich interpretieren als 6 von 10 Teilen oder 0,63 als 63 von 100 Teilen. So verstanden erscheinen Dezimalbrüche lediglich als eine andere Schreibweise für Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist. Anders als bei gemeinen Brüchen ist bei Dezimalbrüchen die Gesamtzahl der Teile, in die das Ganze zerlegt wird, jedoch nur implizit gegeben: Sie muss indirekt aus der Anzahl der Nachkommastellen erschlossen werden. Während das Wissen um die Gesamtzahl der Teile bei einfachen Brüchen wie 0,6 oder auch noch 0,63 häufig automatisiert und damit abrufbar ist, können vorangestellte Nullen oder Endnullen wie bei 0,063 oder 0,630 erhebliche Probleme bereiten (und zu den bekannten Fehlern beim Umwandeln von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche führen, vgl. Padberg 2009, Wartha/Wittmann 2009).

Eine zweite Möglichkeit, Dezimalbrüchen eine Bedeutung zu geben, erfolgt über die Stellenwerttafel. Wird 0,526 als Summe von Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln,… in der Form gemeiner Brüche geschrieben, so ergibt sich jeweils unmittelbar die Darstellung in der Stellenwerttafel. Auf diese Weise erhalten die Ziffern eines Dezimalbruchs eine inhaltliche Bedeutung. Hierbei werden die Nachkommastellen *einzeln* betrachtet, sie werden wirklich *stellenweise* gedeutet, was auch die Sprechweisen „null Komma fünf zwei sieben“ oder „null Komma null sechs drei“ widerspiegeln. Diese Betrachtung ist universell tragfähig, hat aber den Nachteil, dass durch das ziffernweise Arbeiten der Blick auf die Nachkommastellen als Gesamtheit verlorengehen kann. So lassen sich die Größenordnung eines Dezimalbruchs und allgemeiner seine Beziehung zu gemeinen Brüchen häufig nicht mehr auf den ersten Blick ausmachen.

Aufgabenformate

Bei den im Folgenden vorgestellten Aufgaben erbringt das Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen einen massiven (Zeit-)Gewinn und bewahrt gegenüber dem ziffernweisen Rechnen den Blick für die Größenordnungen von Zahlen und Ergebnis.

Typisch für diese Aufgabenformate ist, dass sie immer wieder andere kognitive Herausforderungen mit sich bringen. Die bekannten Probleme klassischer Automatisierungsübungen wie das Einschleifen falscher oder suboptimaler Lösungsverfahren (vgl. Wartha/Wittmann 2009) sollen damit vermieden werden.

Ergebnisgleiche Aufgaben finden:

$77777 \cdot 0{,}5$	$77777 \cdot \frac{1}{3}$	$77777 : 5$	$77777 \cdot 2$
$77777 \cdot 0{,}2$	$77777 : 2$	$77777 \cdot \frac{1}{5}$	$77777 \cdot 5$
$77777 \cdot 0{,}3$	$77777 : 3$	$77777 \cdot \frac{1}{2}$	$77777 \cdot \frac{3}{10}$

Das Suchen ergebnisgleicher Aufgaben beruht hier auf dem Erkennen wirkungsgleicher Operationen, weil der erste Faktor bei allen Aufgaben derselbe ist. Die relativ große Zahl 77777 soll die schriftliche Multiplikation unattraktiv machen. Wenn auch der Einsatz des Taschenrechners vermieden werden soll, kann diese Zahl auf 12 Stellen vergrößert werden.

Aufgaben nach günstigen Lösungswegen sortieren:

$0{,}5 \cdot 2$	$48 : 0{,}5$	$64 \cdot 1{,}5$	$\frac{3}{4} : 0{,}75$
$25 \cdot 0{,}73$	$0{,}25 \cdot 3$	$12{,}5 \cdot 7{,}3$	$1{,}5 : \frac{3}{4}$
$1 : 0{,}25$	$7{,}3 \cdot 6{,}9$	$0{,}25 \cdot 100$	$\frac{1}{2} \cdot 1{,}5$

Hier besteht das Ziel darin, einen aufgabenadäquaten - also die Besonderheiten der jeweils gegebenen Zahlen nutzenden – Rechenweg finden. Verhindert werden soll, dass voreilig ausschließlich auf die schriftlichen Multiplikation zurückgriffen wird. Es gilt, „den Rechendrang aufzuhalten“ (Schütte 2002). Ein Ansatz hierzu ist das Sortieren von gegebenen Aufgaben nach günstigen Lösungswegen:

- Ich „sehe“ das Ergebnis oder weiß es auswendig.
- Eine kleine Umformung hilft entscheidend weiter, damit die Aufgabe im Kopf gelöst werden kann. (Beispiele hierfür sind das Umwandeln eines Bruchs in einen Dezimalbruch oder umgekehrt, s. oben).
- Diese Aufgabe kann ich nicht anders lösen, hier muss ich wirklich (schriftlich) „rechnen“.

Den Wert des Produkts mit möglichst geringem Aufwand bestimmen:

$2{,}4 \cdot 0{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}05$	$2{,}4 \cdot 5$	$24 \cdot 0{,}5$	$0{,}24 \cdot 0{,}5$
$2{,}4 \cdot 0{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}25$	$2{,}4 \cdot 0{,}125$	$2{,}4 \cdot 2{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}375$

Der Wert einzelner Produkte kann mühelos im Kopf bestimmt werden. Die Ergebnisse weiterer Aufgaben lassen sich aus den Einstiegsaufgaben ableiten, ohne dass aufwändig halbschriftlich oder schriftlich gearbeitet werden müsste. Die Fragestellung lautet jeweils: Welche der Aufgaben kann ich besonders einfach lösen? Hierzu müssen die *Zahl*beziehungen innerhalb einer Aufgabe betrachtet werden. Auf welche Weise komme ich geschickt zu den Lösungen der anderen Aufgaben? Hierfür sind die Zahlbeziehungen zwischen den Aufgaben – also die *Aufgaben*beziehungen – relevant.

Förderung des Zahlenblicks

Den beschriebenen Aufgabenformaten liegt die Überzeugung zugrunde, dass das eigentliche *Rechnen* in Zeiten des Taschenrechners und anderer technischer Hilfsmittel auch bei Dezimalbrüchen nur eine geringe Alltagsbedeutung besitzt. Deshalb wird es hier anders akzentuiert: Das Rechnen mit Dezimalbrüchen bildet den Anlass, dass Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der für sie neuen Zahlen erfahren können. Beim Rechnen beschäftigen sie sich mit Dezimalbrüchen, sie können deren Eigenschaften erfahren und verstehen. Insbesondere können sie die Verbindungen zu gemeinen Brüchen und die dahinter stehenden Grundvorstellungen vertiefen.

Diese Sicht auf das Rechnen mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen wird auch als *Förderung des Zahlenblicks* verortet (vgl. Marxer/Wittmann 2011; 2012). Sie zielt weniger auf das Rechnen als solches, denn auf das *Reflektieren von Rechenwegen*, also auf eine Meta-Ebene zum eigentlichen Rechnen.

Literatur

Marxer, Michael / Wittmann, Gerald (2013): Auch Dezimalbrüche sind Brüche – Mit Dezimalbrüchen flexibel rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. Erscheint in: Praxis der Mathematik Juni 2013. Themenheft: Grundvorstellungen zu Brüchen.

Marxer, Michael / Wittmann, Gerald (2012): Den Stellenwerten eine Bedeutung geben. Dezimalbrüche multiplizieren jenseits der Kommaverschiebungsregeln. In: mathematik lehren 171, S. 44–48

Marxer, Michael / Wittmann, Gerald (2011): Förderung des Zahlenblicks – Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. In: Der Mathematikunterricht 57 (2), S. 25–34

Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (4. Auflage)

Wartha, Sebastian / Wittmann, Gerald (2009): Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Beltz, Weinheim, S. 73–108

Schütte, Sybille (2002): Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks. In: Praxis Grundschule 25 (2), S. 5–12