Hans HUMENBERGER, Wien

Elementarmathematische Betrachtungen zur gerechten Pizzateilung

Das wirklich gerechte Teilen einer Pizza ist – genau genommen – gar nicht so einfach, und zwar schon dann, wenn nur zwei Personen beteiligt sind (und man sich die Pizza klassischerweise kreisförmig denkt). Mit einem geraden Messer muss man dabei immerhin den Mittelpunkt treffen, so dass der Schnitt ein Durchmesser ist. Näherungsweise klappt das sicher gut, so dass man i. A. keinen Streit nach der Teilung erwarten wird. Aber was ist, wenn man es wirklich genau machen will? Solche Überlegungen haben naturgemäß eher theoretischen als praktischen Charakter, können aber trotzdem mathematisch und fachdidaktisch sehr wertvoll sein. In der Mathematik geht es eben nicht nur um Praxis, sondern auch um Theorie.

Das Phänomen der gerechten Pizzateilung („Pizzatheorem")

Es gibt eine Möglichkeit, mit einem Pizzamesser, das aus vier geradlinigen Klingen bzw. Messern mit „Zentrum" P besteht (P teilt jedes Messer in zwei Teile), so dass benachbarte Klingen einen Winkel von 45° einschließen, eine immer gerechte (auch in der Theorie!) Pizzateilung zu erhalten. Wir stellen uns dieses Messer als „Stanze" vor, die irgendwo (das Stanzzentrum P liege beliebig auf der Kreisfläche) auf die Pizza gedrückt wird, so dass dadurch 8 Teile entstehen (Abb. 1). Diese Teile haben eine zu Kreissektoren verwandte Form, sind aber keine wirklichen (außer in jenem Fall, in dem man mit dem Kreuzungspunkt des Stanzmessers genau den Kreismittelpunkt trifft), trotzdem sollen sie der Einfachheit halber im Folgenden „Sektoren" heißen.

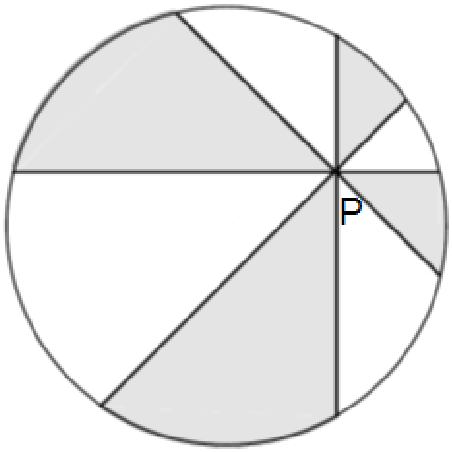

Abbildung 1 „Pizzastanze"

Wenn sich nun die erste Person jeden 2. „Sektor" nimmt, z. B. die in Abb. 1 weiß dargestellten, und die zweite Person die anderen (die grau dargestellten), so ist die Pizza gerecht geteilt! Dieses Phänomen ist sicher überraschend und passt irgendwie nicht zu den Symmetrieverhältnissen des Kreises, kaum jemand würde dies intuitiv vermuten! Im Gegenteil, als Frage formuliert würden sicher die meisten verneinen, dass dadurch wirklich eine gerechte Teilung gegeben ist.

Heutzutage mit DGS kann man sich zumindest phänomenologisch davon überzeugen: Jede DGS kann Flächeninhalte messen und solche addieren (es handelt sich nicht um echte Sektoren, aber man kann sie zerlegen in Dreiecke und Kreissegmente und diese Typen von Figuren können einfach gemessen werden). Hier könnten Schülerinnen und Schüler ein entsprechendes Applet konzipieren, das dies leistet (P verschieben und die Flächensumme der grauen und weißen „Sektoren“ bleibt jeweils gleich). Enaktiv kann man sich auch dadurch überzeugen, dass man ein (großes) kreisrundes Stück Karton so wie angegeben in Stücke teilt und die weißen bzw. grauen Flächenstücke zusammen abwiegt.

Sekundarstufe 1

In der Sekundarstufe 1 könnte ein analoges Phänomen mit einem Quadrat statt eines Kreises behandelt werden, durchaus als selbständig zu lösende Problemaufgabe, je nachdem auch mit kleinen möglichen Hinweisen durch die Lehrkraft.

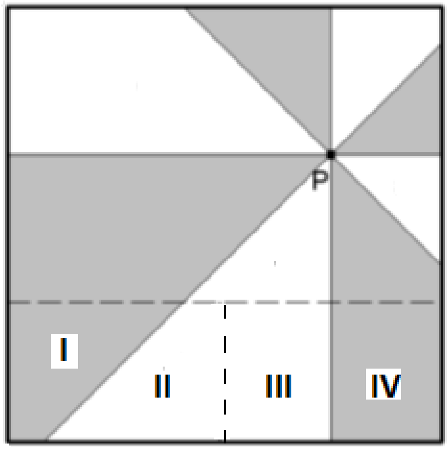

Abbildung 2 Quadrat

In einem Quadrat wird das Stanzmesser so angelegt, dass zwei Messer seiten- und die anderen beiden diagonalenparallel sind (Abb. 2). Warum ist dann die Flächensumme der weißen „Sektoren“ genau so groß wie jene der grauen (vgl. Kroll/Jäger 2010, 103f)? Hier sind schon hilfreiche gestrichelte Linien eingezeichnet (der obere Quadratrand an der Waagrechten durch P gespiegelt und ein Stück des rechten Quadratrandes an der Senkrechten durch P gespiegelt; dadurch reduziert sich das Problem auf: warum ist I kongruent zu II?), die man bei leistungsstärkeren Klassen auch weglassen könnte.

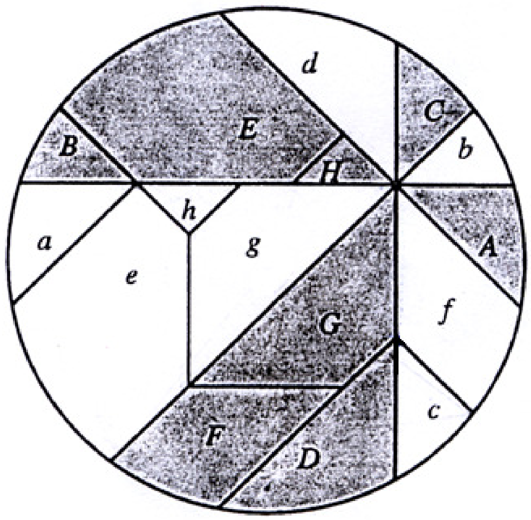

Abbildung 3 Zerlegung nach Carter/Wagon 1994

Auch die in Carter/Wagon 1994 unter dem Titel „Proof without words“ angegebene Zerlegung (die „Sektoren“ sind also nicht nur flächen- sondern sogar *zerlegungsgleich*!) kann Ausgangspunkt einer Analyse mit Schülerinnen und Schülern oder mit Studierenden sein (Abb. 3). Dabei stellt sich allerdings heraus, dass hier „Beweis ohne Worte“ vielleicht nicht ganz passend erscheint – es ist noch ein ganzes Stück „Arbeit“ zu begründen, warum/inwiefern die mit denselben Buchstaben bezeichneten Flächenstücke kongruent zueinander sind.

Ein inhaltlich frappierend einfacher, aber sehr viele Teile benötigender – und daher scheinbar etwas unübersichtlicher – Zerlegungsbeweis findet sich in Gallin 2011, S. 12. Wenn man sich aber von der Flut von Teilen nicht abschrecken lässt, so könnte die zugehörige Abbildung (Abb. 4) auch aus Sicht von Lernenden (Studierende oder Schülerinnen und Schüler) als ein „Beweis ohne Worte“ angesehen werden, z. B. mit folgendem erklärenden Text: Man spiegelt *P* mitsamt den vier Schnitten bzw. Messern an *M*, an den beiden Koordinatenachsen und an den Winkelhalbierenden des Koordinatensystems, so dass die Bildpunkte von *P* ein Achteck bilden (fett gezeichnet; durch diese Spiegelungen wird ein hoher Grad an Symmetrie hergestellt – in der ursprünglichen Situation nicht vorhanden). Nun kann man das Äußere und das Innere des Achtecks getrennt voneinander betrachten und die jeweilige Flächengleichheit (sogar Zerlegungsgleichheit) der gefärbten und ungefärbten Stücke fast unmittelbar sehen.

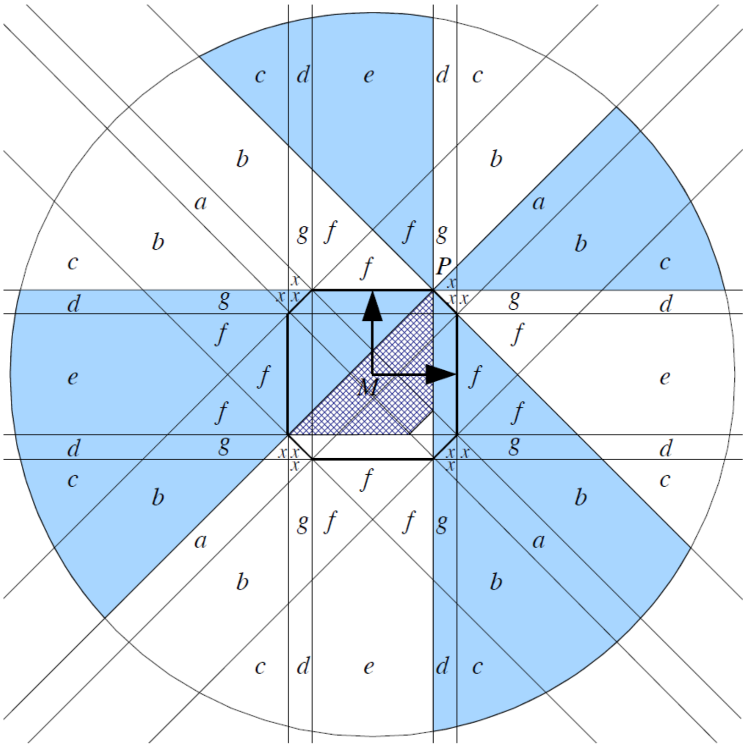

Abbildung 4 Zerlegung nach Gallin 2011

Lösung: Äußeres: Aus Symmetriegründen (diese brauchen hier wohl nicht näher erläutert zu werden) findet man kongruente Stücke im weißen bzw. gefärbten Bereich: In jedem Bereich zwei Stücke *a* und *e*; vier Stücke *b*, *c*, *d* und *g*; sechs Stücke *f* und *x*. Außerhalb des Achtecks ist daher die Flächengleichheit der gefärbten und ungefärbten Stücke nachgewiesen. Inneres: Das schraffierte Trapez gehört eigentlich zur weißen Fläche (gleich groß wie das im Achteck daneben liegende gefärbte Trapez) und die restlichen Flächen innerhalb des Achtecks sind auch leicht als zerlegungsgleich zu erkennen (ein kleines Trapez und vier Dreiecke).

In der Sekundarstufe 2 kann man mit analytischen Mitteln einen Beweis finden. Hier wäre Integralrechnung die entscheidende Technik, was aus Platzgründen hier entfallen muss. Es soll auch noch erwähnt werden, dass bei dieser Teilung nicht nur die Summen der Flächeninhalte der weißen und grauen „Sektoren" jeweils gleich sind, sondern auch die Summen der „Pizzaränder", auch der (bei manchen unbeliebtere weil trockenere) Pizzarand ist bei dieser Teilung also gerecht aufgeteilt. Bei der obigen Version wurde jeder „Quadrant" in zwei gleich große Teile (bezogen auf den Winkel) aufgeteilt. Die angesprochenen Phänomene bezogen auf die Flächeninhalte und die Ränder gelten auch für beliebige „gleichmäßige" Unterteilungen, d. h. auch wenn jeder Quadrant in drei, vier (siehe Abb. 5) oder mehr Teile unterteilt wird. Dies ist dann das eigentliche „Pizzatheorem".

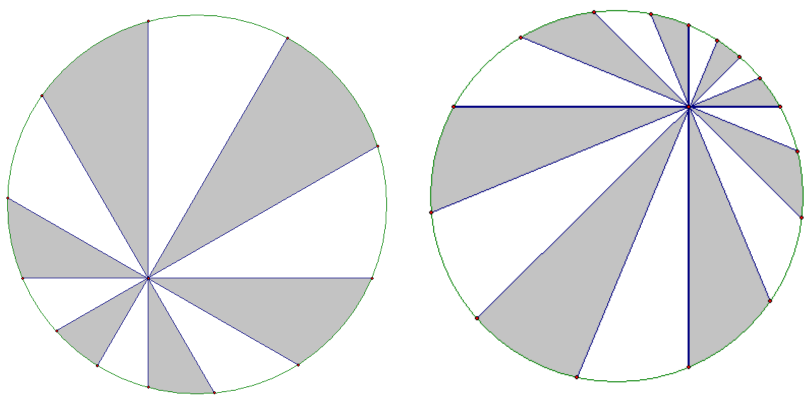

Abbildung 5 Andere Unterteilungen

Literatur

Carter, L, Wagon S. (1994): Proof without Words: Fair Allocation of a Pizza. Mathematics Magazine 67, 4, 267. Eine neuere farbige Darstellung dieses Beweises findet sich auf Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem

Gallin, P. (2011): Exzentrische Kuchenhalbierung. Bulletin des VSMP („Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte"), Nr. 116, Juni 2011, 11 – 19. Online: http://www.gallin.ch/KuchenhalbierungBulletin.pdf

Kroll, W., Jäger, J. (2010): Das Pizzatheorem. Ein Thema mit Variationen. mathematica didactica 33, 79 – 112. Online: http://www.mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2010/md_2010_Kroll_Jaeger_Pizzatheorem.pdf