Bernhard BURGETH, Florian KERN, Saarbrücken

Mathematik besser einsehen mit Bildverarbeitung

Der Mensch als visuelles Wesen kommuniziert mit seiner Umwelt über Zeichen und im modernen Medienzeitalter in hohem Maße über Bilder. Schüler haben oft schon wie selbstverständlich Zugriff auf Computer und Digitalkamera integriert im Handy. Damit sind ihnen die Möglichkeiten gegeben, Bilder zu machen, zu speichern und, vor allem, zu verändern. Diese Manipulation von Bildern geschieht mit mathematischen Methoden, und deswegen ist es naheliegend die Wirkungsweise elementarer Mathematikkonzepte an Bildern zu veranschaulichen, mit Bildern einsehbar zu machen.

Darum soll es in diesem Beitrag gehen. Wir werden uns auf folgende Fragen beschränken: Was sind Bilder, wie können sie mathematisch beschrieben werden? Wie werden sie im Computer repräsentiert (Stichworte: Diskretisierung und Quantisierung)? Mit welchen einfachen mathematischen Methoden kann man Bilder untersuchen, analysieren und auf einfache Weise gezielt verändern?

Die Verarbeitung aller Bilder und die Erstellung sämtlicher Graphiken in diesem Beitrag ist mit Hilfe des Computeralgebrasystems Maple 15 geschehen, das mit seinem ImageTools Package eine einfache Möglichkeit bietet, verschiedene Bildfile-Formate, wie z. B. das .jpg-Format und das .tif-Format, als Files ein- und auszulesen und ins ascii-Format umzuwandeln. Es ist Zufall, dass die Wahl der Autoren auf Maple fiel.

1. Bilder als Funktionen

Wir betrachten ein so genanntes Grauwertbild, das als Funktion von zwei Veränderlichen betrachtet werden kann, d.h. als Abbildung f des Definitionsbereichs $\Omega = [0, a] \times [0, b]$in den Zielbereich $\mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

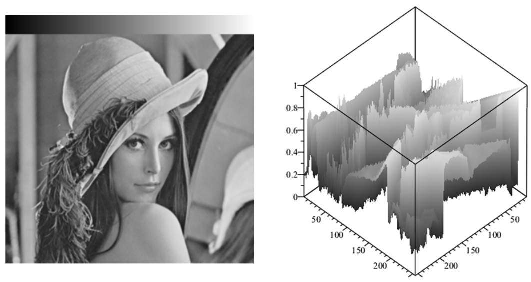

Abbildung 1: Lena, als Grauwertbild & 3D-Graph

Ihre Definitionsmenge, der rechteckige Bereich Ω heißt Bildbereich. Der Wertebereich dieser Funktion ist die Menge aller Grauwerte des Bildes. Dabei werden niedrige Grauwerte dunkel, hohe Grauwerte hell dargestellt (vgl. Abb.1).

2. Bilder als Matrizen

Man kann keine Funktion angeben, deren Graph das Bild von Lena darstellt. Das Bild wird nur in Form einer recht umfangreichen Wertetabelle im Computer abgespeichert. Das Erstellen dieser Wertetabelle nennt man Abtasten und meint die Diskretisierung des Bildbereiches. Die Bilddaten sind dann nur auf den Punkten *(i,j)* eines Rechteckgitters in Ω gegeben und wir haben auf diese Weise ein **digitales Bild** erzeugt,

$$\{f_{i,j} = f(i,j) \big| i = 1..N, j = 1..M\},$$

das auch als Matrix angesehen werden kann:

$$(f_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0{,}38 & 0{,}48 & 0{,}51 & 0{,}73 & 0{,}43 & 0{,}55 & 0{,}91 & 0{,}20 \\ 0{,}38 & 0{,}75 & 0{,}44 & 0{,}72 & 0{,}81 & 0{,}67 & 0{,}19 & 0{,}63 \\ 0{,}39 & 0{,}82 & 0{,}57 & 0{,}46 & 0{,}73 & 0{,}69 & 0{,}65 & 0{,}59 \\ 0{,}44 & 0{,}58 & 0{,}30 & 0{,}41 & 0{,}74 & 0{,}25 & 0{,}62 & 0{,}50 \\ 0{,}45 & 0{,}60 & 0{,}63 & 0{,}61 & 0{,}81 & 0{,}14 & 0{,}57 & 0{,}81 \\ 0{,}48 & 0{,}34 & 0{,}25 & 0{,}36 & 0{,}25 & 0{,}61 & 0{,}45 & 0{,}19 \\ 0{,}58 & 0{,}18 & 0{,}40 & 0{,}55 & 0{,}68 & 0{,}56 & 0{,}86 & 0{,}36 \\ 0{,}37 & 0{,}29 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}61 & 0{,}46 & 0{,}29 & 0{,}42 \end{pmatrix}$$

Die Gitterpunkte (man spricht auch von Gitterzellen) *(i,j)* heißen **Pixel**. Wie in der Bildverarbeitung üblich ist der Abstand der Gitterpunkte auf 1 normiert. Dies erlaubt eine vereinfachte Speicherung der Bilder auf dem Computer. Wenn man einen Ausschnitt eines digitalen Bildes stark vergrößert, tritt die Pixelstruktur deutlich hervor (vgl. Abb.2).

Abbildung 2

Tastet man die Funktion auf einem gröberen Gitter ab, so erhält man eine kleinere Matrix, die als ein „verpixeltes“ Bild interpretiert wird, bei dem viele Details verloren gehen (vgl. Abb.3).

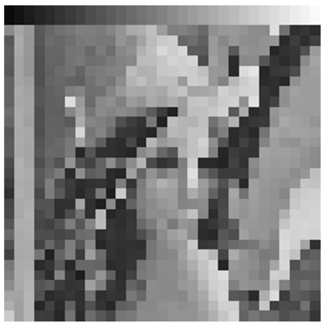

Abbildung 3

Mit **Quantisierung** meint man in der Bildverarbeitung die Diskretisierung des Wertebereichs Ω. Das führt im Extremfall zu binären Bildern, also Schwarz-Weiß-Bildern: $f(\Omega) = \{0,1\}$. 256 Graustufen sind Standard, oft findet man heute sogar einen quasikontinuierlichen Wertebereich bei Bildern: $f(\Omega) = [0,1]$.

An einem Bild mit z.B. 256 Graustufen $f{:}\,\Omega \longrightarrow \{c_0, .., c_{255}\} \subset [0,1]$ kann man gut den für Schüler oft schwierigen Begriff der **Niveaumenge** $\{(i,j) \subset \Omega | f(i,j) = c_k\} = f^{-1}(c_k)$ zum Grauwert c_k gut veranschaulichen.

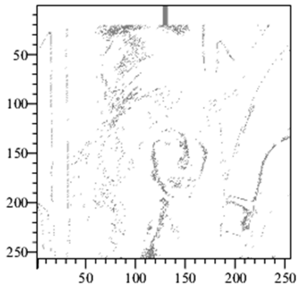

Abbildung 4:Niveaumenge

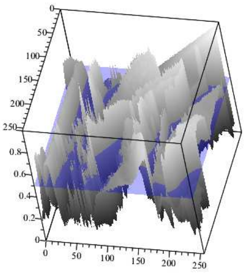

Abbildung 5: Niveaubild

Die Betrachtung der **Häufigkeitsverteilung der Grauwerte** bietet einen anwendungsnahen Einstieg ins Thema **Histogramme**. Die Zuordnung $H: c \longmapsto |f^{-1}(c)| = Anzahl(f^{-1}(c))$ liefert das Histogramm H zur Verteilung der Grauwerte und erlaubt Aussagen, wie oft ein Grauwert in einem diskreten Bild $f: \Omega \longrightarrow [0,1]$ vorkommt. Die räumliche Anordnung der Pixel in Ω ist ohne Bedeutung für das Histogramm. Die Chance, an einem Objekt, dem Bild, diese beiden Aspekte von „Verteilung“ gegenüber stellen zu können, macht den Reiz dieser Betrachtungsweise aus.

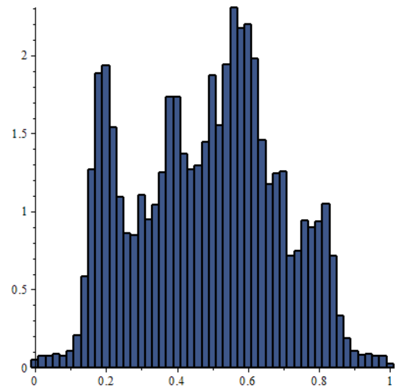

Abbildung 6: Lena, Histogramm

3. (Einfaches) Verarbeiten von Bildern

Eine einfache Art der Bildverarbeitung besteht in der Anwendung reellwertiger Funktionen $T: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ auf Bilder, um sie auf diese Art zu transformieren. Dies geschieht durch Verknüpfung von T mit der Funktion f, deren dreidimensionaler Graph G_f das Bild darstellt. Ist das Bild repräsentiert durch $f: \Omega \longrightarrow [0,1]$, so liefert die Verknüpfung $T \circ f$ von Transformation T und Bild f das **transformierte Bild**: $T \circ f: \Omega \longrightarrow [0,1]$.

Das erste Beispiel zeigt: Der Begriff des „Negativs“ ist nicht ganz korrekt.

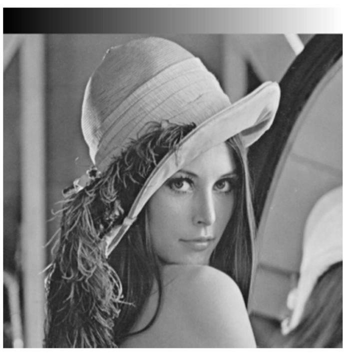

Abbildung 7: Lena

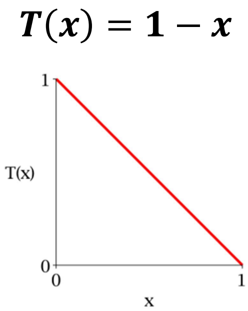

Abbildung 8: Transformation T

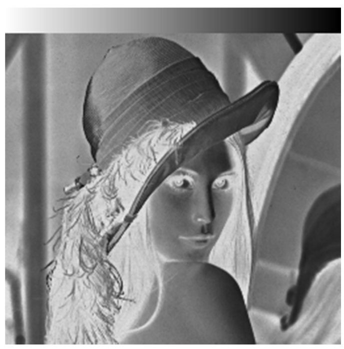

Abbildung 9: Lena, „negativ“

An den folgenden Beispielen wird „sichtbar“, wie sich Monotonie- und Stetigkeitseigenschaften von T im Ergebnisbild (v.a. am Balken an der Oberkante des Bildes) widerspiegeln:

$T(x) = x^2$ $\quad$ $T(x) = 1 - \sin(\pi x)$ $\quad$ $T(x) = \mathbf{1}_{[0,5;0,6]}(x)$

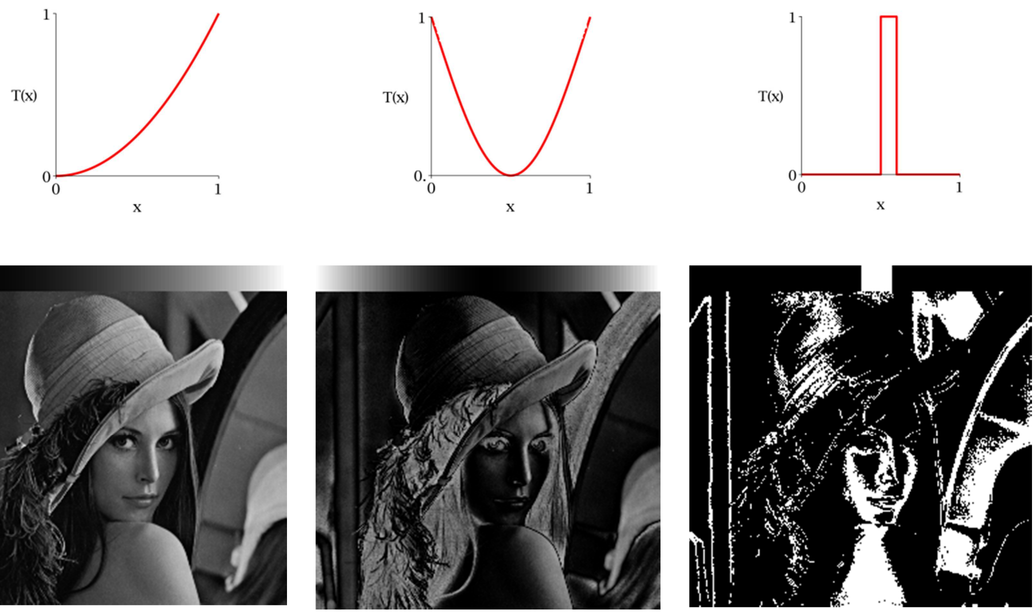

Abbildung 10: Beispiele von Transformationen

Man darf hoffen, dass die/der interessierte Schüler/in vielleicht von sich heraus versucht, mit verschiedenen, selbst gestalteten oder entwickelten, Transformationen T ansprechende Effekte zu erzielen.

Vielleicht gelingt es uns mit diesem Aufsatz wenigstens anzudeuten, welches Potenzial die mathematische Bildverarbeitung bietet, zahlreiche Zusammenhänge, Konzepte und Methoden der (Schul-)Mathematik vernetzt darzustellen und visuell erfahrbar zu machen.

Im nachfolgenden Literaturverzeichnis empfehlen wir zwei Bücher, die allgemein von Bildverarbeitung handeln und einen gut lesbaren Einstieg bieten.

Literatur

R.C. Gonzales und R.E. Woods (2008): Digital Image Processing.

M.Sonka C.Hlavac und R.Boyle (1999): Image Proc., Analysis and Machine Vision.

www.maplesoft.com: (zuletzt aufgerufen am 14.02.2013): MAPLE 15.