Sabine BAUM, Würzburg

Simulieren im Mathematiklabor – ein Beitrag zur Förderung des funktionalen Denkens

Das Mathematiklabor an der Universität Würzburg ist ein Schülerlabor, in dem Schülerinnen und Schüler in vorstrukturierten Lernumgebungen durch vielfältige Experimente selbständig zu mathematischen Erkenntnissen über interessante Phänomene aus Natur und Technik gelangen können. In diesem Beitrag wird das Mathematiklabor als eine Lernumgebung zur Förderung des funktionalen Denkens sowie die Arbeitsweise Simulieren vorgestellt. Weiter wird ein Beschreibungsmodell erläutert, das die Phasen des Mathematisierens mit den Aspekten des funktionalen Denkens verknüpft. Dieses Modell liefert die Grundlage für ein empirisches Untersuchungsvorhaben, in dem durch die Identifizierung verschiedener Schülerstrategien beim Simulieren Hypothesen über den Einfluss des Simulierens im Mathematiklabor auf das funktionale Denken generiert werden sollen.

1. Das Mathematiklabor – eine Lernumgebung zum funktionalen Denken

Zielgruppe des Mathematiklabors sind Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe, die in Kleingruppen ca. drei Stunden an einer Station zu einem interessanten Phänomen aus Natur, Kultur oder Technik arbeiten. Wesentliche Charakteristika des Labors sind die Phänomenorientierung, das explizite Ziel der mathematischen Durchdringung dieser Phänomene und das experimentelle Arbeiten (siehe zum Beispiel Baum 2012).

Die ersten beiden Wesensmerkmale des Mathematiklabors spiegeln zwei Ebenen wieder, durch die auch das funktionale Denken nach Vollrath (1989) charakterisiert ist.

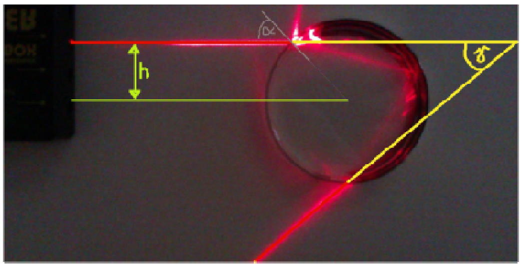

Abbildung 1: Umlenken eines Laserstrahls in einer wassergefüllten, halbverspiegelten Petrischale als Tropfenmodell. Die Einfallshöhe h ist definiert als der Abstand zwischen einfallendem Laserstrahl und einer Parallelen durch den Tropfenmittelpunkt, der Umlenkwinkel γ gibt den Winkel an, um den der Laserstrahl nach Brechung , Reflexion und erneuter Brechung insgesamt umgelenkt wird.

Phänomenebene

„Funktionales Denken ist […] bestimmt durch das Denken in Zusammenhängen, das sich in der Auseinandersetzung mit bestimmten Phänomenen entfaltet.“ [Vollrath 1989, S.39] Im Mathematiklabor setzen sich die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel mit dem Naturphänomen Regenbogen auseinander. Hierbei erkennen sie, dass es einen Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel sowie der Wellenlänge von Lichtstrahlen und dem Brechungswinkel gibt, wodurch sie sich die Phänomene Umlenkung und Dispersion des Lichts im Regentropfen erklären können.

Mathematische Modellebene

„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.“ [Vollrath 1989, S.3] Im Mathematiklabor beschreiben die Schülerinnen und Schüler die am Phänomen entdeckten Zusammenhänge mithilfe funktionaler Darstellungen und arbeiten mit diesen Funktionen.

Im Mathematiklabor wird auf und zwischen diesen beiden Ebenen des funktionalen Denkens gearbeitet. Die charakteristische Arbeitsweise ist dabei das Simulieren.

2. Simulieren im Mathematiklabor

Unter Simulieren versteht man das Experimentieren mit Modellen [Greefrath/Weigand 2012]. Mit Experimentieren soll eine Arbeitsweise bezeichnet werden, bei der allgemein Beispiele hergestellt und untersucht werden, um daraus Hypothesen zu generieren und/oder zu überprüfen. Im Mathematiklabor wird mit unterschiedlichen Arten von Modellen experimentiert: Realmodelle, mathematische Modelle und Computermodelle. In der Laborstation „Regenbogenmathematik“ fungieren als Realmodelle unter anderem Laserstrahlen und wassergefüllte Petrischalen (vgl. Abb.1). Beim Experimentieren mit den Realmodellen werden relevante Einflussgrößen identifiziert, die dann im mathematischen Modell als unabhängige und abhängige Variablen (und Parameter) abgebildet werden. Beim Umlenken des Laserstrahls im Tropfenmodell ist der Umlenkwinkel γ abhängig von der Einfallshöhe h (Erläuterung in Abb.1). Ein entsprechendes mathematisches Modell zeigt diesen Zusammenhang in verschiedenen Darstellungsarten, in der wörtlichen Beschreibung, tabellarisch, graphisch (vgl. Abb.2) oder algebraisch. Bei den Computermodellen handelt es sich um GeoGebra-Applets (Beispiele unter www.mathematik-labor.org; vgl. auch Abb.3), in denen hauptsächlich über Schieberegler Manipulationen möglich sind. Der Mehrwert dieser Computermodelle besteht in der Verknüpfung zwischen der Repräsentation des Realmodells und der symbolischen mathematischen Repräsentation, in der einfachen Herstellung von Beispielen und in der Möglichkeit von systematischen Variationen über den Schieberegler. Das Experimentieren mit den Computermodellen soll durch das Arbeiten auf und zwischen der Phänomen- und der mathematischen Modellebene das funktionale Denken unterstützen.

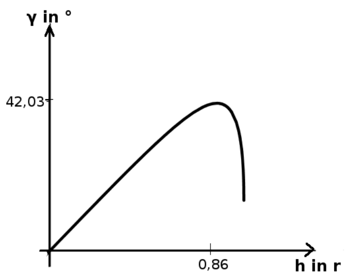

Abbildung 2: graphische Darstellung als mathematisches Modell für den Zusammenhang zwischen Einfallshöhe und Umlenkwinkel

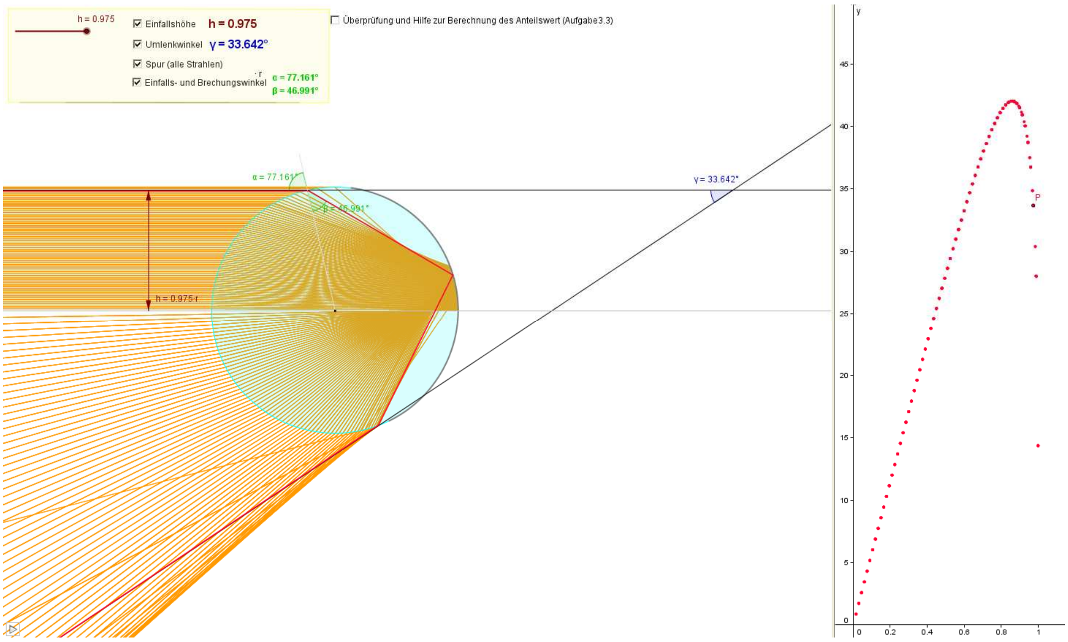

Abbildung 3: GeoGebra-Applet als Computermodell, das den Zusammenhang zwischen Einfallshöhe und Umlenkwinkel gegenständlich und mathematisch veranschaulicht (www.mathematik-labor.org).

3. Mathematisieren im Mathematiklabor und die Aspekte des funktionalen Denkens – ein Beschreibungsmodell

Das Mathematisieren mit Funktionen im Mathematiklabor soll durch 3 Phasen charakterisiert werden. In Phase 1 werden die im Experiment beobachteten Zusammenhänge funktional dargestellt und dadurch abstrahiert. Mit diesem mathematischen Modell wird in Phase 2 gearbeitet. Das Interpretieren der funktionalen Darstellungen und der mathematischen Ergebnisse in Hinblick auf das Realphänomen beschreibt Phase 3.

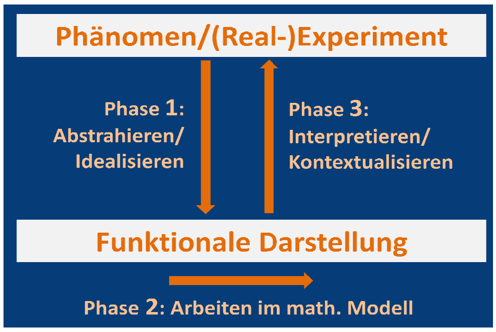

Abbildung 4: Mathematisieren im Mathematiklabor

Vollrath (1989) unterscheidet 3 Aspekte des funktionalen Denkens: Den Zuordnungsaspekt (einer Größe wird genau eine abhängige Größe zugeordnet), den Änderungsaspekt (die Auswirkungen von Änderungen einer Größe auf die abhängige Größe werden untersucht) und den Objektaspekt (Arbeit mit der Funktion als neues/eigenständiges Objekt). Unterstellt man, dass mit der Verortung des funktionalen Denkens auf Phänomen- und mathematischer Modellebene implizit die 3 Phasen des Mathematisierens angesprochen sind, lassen sich die Aspekte des funktionalen Denkens für jede Phase des Mathematisierens konkretisieren und es ergibt sich eine 3x3-Matrix als Beschreibungsmodell:

	Phase 1 Phänomen ↓ Funktion	Phase 2 → Arbeit auf der math. Ebene der Funktionen	Phase 3 Phänomen ↑ Funktion
Zuordnungs-aspekt	Herstellen/Betrachten bestimmter (Phänomen-) Zustände, die dann z.B. in einer Messwerttabelle festgehalten werden.	Arbeiten mit Wertepaaren in den funktionalen Dar-stellungen, z.B. Markie-ren bestimmter Werte-paare aus der Tabelle auf einem Funktionsgraphen.	Z.B. wird ein Wertepaar aus der funktionalen Darstellung im Hinblick auf die Bedeutung im Experiment ausgewertet.
Änderungs-aspekt	Ein am Phänomen beobachtetes Wachstums- oder Änderungsverhalten wird funktional beschrieben.	Es wird z.B. das Monotonie- oder Änder-ungsverhalten eines Funktionsgraphen beschrieben.	Mithilfe des Monotonie- und Steigungsverhaltens einer Funktion wird das Phänomen erklärt.
Objekt-aspekt	Ein Phänomenzusammen-hang lässt sich durch eine bestimmte Funktionen-klasse beschreiben.	Ein qualitativ skizzierter Graph wird mithilfe einer bestimmten Funktionenklasse quantifiziert.	Es werden andere Naturphänomene gefun-den, die sich ebenfalls durch die Funktionen-klasse beschreiben lassen.

Mithilfe dieses Beschreibungsmodells können die Arbeitsaufträge, die Schüleräußerungen und die Schülerlösungen aus dem Mathematiklabor klassifiziert werden.

4. Empirisches Untersuchungsvorhaben

Ziel der empirischen Untersuchung ist es Hypothesen über den Einfluss des Simulierens im Mathematiklabor auf das funktionale Denken zu generieren, indem Schülerstrategien beim Simulieren identifiziert werden. In der Untersuchung liegt der Fokus auf dem Experimentieren mit Computermodellen. Die Strategien sollen hauptsächlich durch Videoaufzeichnungen sichtbar gemacht werden. Sie können mehr oder weniger statisch bzw. dynamisch ausgeprägt sein, die Schülerinnen und Schüler können systematisch oder intuitiv mit den Computermodellen experimentieren und es ist zu untersuchen, ob die Lernenden die Verknüpfung von Phänomen- und mathematischer Modellebene nutzen oder bei ihren Argumentationen auf einer der Ebenen bleiben. Anschließend sollen Zusammenhänge zwischen den Strategien beim Simulieren und den nach dem Beschreibungsmodell klassifizierten Schülerlösungen auf für das funktionale Denken relevante Muster untersucht werden.

Literatur

Baum, S. (2012):Mathematik im Scheibenwischer. Wie Simulieren das Mathematisieren unterstützt. In: mathematik lehren, Heft 174, 15-19

Greefrath, G., Weigand, H.-G. (2012): Simulieren: Mit Modellen experimentieren. In: mathematik lehren, Heft 174, 2-6

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: Journal der Mathematikdidaktik, 3-37