

Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale

Mathematische Begabungen (im jungen Schulalter)

Mathematische Begabung – was ist das? Ein klassischer Definitionsvorschlag stammt von Karl Kießwetter, der 1985 formulierte: „*Mathematische Hochbegabung ist ein Konglomerat von (abtestbaren) Eigenschaften und Fähigkeiten eines Individuums, aufgrund dessen die Voraussage gemacht werden kann, daß dieses Individuum später und mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit ganz besondere, innerhalb der Mathematik wertvolle Leistungen erbringen wird (wenn es im mathematischen Bereich tätig wird)*“ (Kießwetter, 1985, S.302). Natürlich lassen sich an eine solche Definition immer auch Fragen richten. Zwei zentrale, die in den vergangenen Jahrzehnten immer wieder gestellt wurden, formulierten Wilhelm Wiczerkowski und Kollegen. Erstens: *Ist mathematische Begabung ein Ausdruck spezifischer kognitiver Merkmale oder ist sie, zumindest zum wesentlichen Teil, Ergebnis einer hohen allgemeinen Intelligenz?* Und zweitens: *Ist mathematische Begabung ein monolithisches Konstrukt oder gibt es verschiedene Begabungsprofile?* (Wiczerkowski, Cropley, & Prado, 2000, S.413) Wegen des beschränkten Umfangs dieses Beitrags ist es mir lediglich möglich, ausgewählte Antwortversuche auf die erste Frage zusammenzutragen.

Bereits Wiczerkowski wies auf die – gelegentlich allerdings außer Acht gelassene – Selbstverständlichkeit hin, dass Antworten und Ansätze, solche Antworten zu finden, vor allem auch davon abhängig sind, was unter Mathematik verstanden wird. Erfasst man mathematische Leistungen beispielsweise durch Aufgaben, die sich kaum von den in Intelligenztests verwendeten Items unterscheiden und bei denen es in erster Linie darauf ankommt, sie schnell und fehlerfrei zu lösen – wobei letzteres ausschließlich am Erwartungshorizont der Testentwickler gemessen wird (Kießwetter, 1992) –, so überrascht es nicht, wenn sich Dimensionen mathematischer Leistung kaum von denen der allgemeinen (Test-) Intelligenz unterscheiden (Zimmermann, 1992).

Zumindest stärkere fachliche Bezüge haben spezifische Schulleistungs- oder Studierfähigkeitstests. Ein häufig auch zur Identifikation dann jüngerer mathematisch oder auch sprachlich begabter Schülerinnen und Schüler genutzter ist der amerikanische SAT. Anhand dieses Tests wurden in einer schon etwas älteren Untersuchung von Benbow und Minor (1990) zunächst knapp 300 mathematisch begabte und etwas mehr als 150 sprachlich begabte 13-Jährige identifiziert – sie gehörten zu den besten 0,01% ihrer Altersgruppe –; anschließend wurden ihre Leistungen in verschiedenen Intelligenz- und Fähigkeitstests, unter anderem angelehnt an Thurstones Primär-

faktoren verglichen. Nur 16 Jungen und zwei Mädchen gehörten zu beiden Gruppen, bei den anderen zeigten sich signifikante Gruppenunterschiede in fast allen Fähigkeitsbereichen, wobei die Gruppenzugehörigkeit und nicht beispielsweise das Geschlecht den stärksten Einfluss auf die Testergebnisse hatte. Damit kann bereits auf der Grundlage des SAT das Konzept einer allgemeinen intellektuellen Hochbegabung, die mathematische Begabung umfassen könnte, nicht gehalten werden.

Allerdings lässt sich kritisch fragen, ob solche Tests wie der SAT Mathematik als problemlösender und theoriebildender Tätigkeit gerecht werden. Darüber hinaus besitzen ausschließlich produktorientierte, eindimensionale Punktbewertungen – mit denen auch der SAT arbeitet – wohl kaum Potenziale zur detaillierten Beschreibung von Begabungen (Kießwetter, 1992). Waldmann und Weinert sehen diese dagegen vor allem in Antworten auf die Frage, „durch welche *Denkprozesse* diese hohen Leistungen zustande kommen und in welchen *kognitiven Prozessen und Strukturen* sich Individuen mit hohen und geringen Leistungen voneinander unterscheiden“ (Waldmann & Weinert, 1990, S. 22, Hervorhebungen T. F.).

Entsprechende kognitionspsychologische Arbeiten können auf fachspezifische oder auf eher basale, möglichst materialunabhängige Prozesse bzw. Prozesseigenschaften fokussieren. Für letztere Richtung steht beispielsweise Friedhart Klix, der anhand zahlreicher experimenteller Beispiele und Analysen phylogenetischer Entwicklungen belegt, dass u. a. die folgenden Prozesseigenschaften menschlichen Denkens allgemeine Aussagen hinsichtlich dessen Qualität bzw. der kognitiven Leistungsfähigkeit des Individuums ermöglichen: *multiple Klassifikation, Analogiebildung, multimodale Repräsentation, Komplexitätsreduktion, strukturelle Flexibilität* (Lösen von bisherigen Wissensstrukturen), *Informationsverhalten* (Verringerung von Unbestimmtheit durch Informationssuche und –nutzung) (zusammengefasst in Seidel, 2004).

An dieser Stelle kann ich exemplarisch lediglich auf die multimodale Repräsentation und deren neuronale Grundlagen eingehen, für die beispielsweise Michael O’Boyle (2008) zahlreiche Vergleichsstudien aus jüngerer Zeit zwischen unselektierten und (gemäß SAT oder SCAT) mathematisch begabten Kindern und Jugendlichen zusammenfasst. Deren Ergebnisse stützen sich gegenseitig und weisen bei mathematisch Begabten auf eine gesteigerte Entwicklung und Nutzung der rechten Gehirnhälfte – die insbesondere auch räumlich-visuelles Operieren ermöglicht – hin, auf eine verstärkte Kommunikation und Kooperation zwischen beiden Hemisphären sowie darauf, dass die Aktivierung kortikaler Netzwerke und Areale insgesamt stärker ist als bei mathematisch durchschnittlich leistungsstarken Kin-

dern und Jugendlichen. In einer kürzlich in Spanien durchgeführten Vergleichsstudie, bei der die mathematisch begabten Teilnehmer mit dem von Kießwetter entwickelten Hamburger Test für mathematische Begabung identifiziert wurden, zeigte sich noch etwas differenzierter, dass Gruppenunterschiede zwischen mathematisch begabten und durchschnittlich leistungsstarken Schülerinnen und Schülern bezüglich der neuronalen Aktivität dann besonders groß sind, wenn anspruchsvolle Aufgaben bearbeitet werden (Desco et al., 2011).

Vor etwa zehn Jahren wurde in Jena eine ähnliche Studie durchgeführt, in der sich mathematisch begabte und durchschnittlich leistungsstarke Oberstufenschüler mit mathematisch reichhaltigen Problemstellungen auseinandersetzten, die sowohl in der symbolischen, als auch in der bildhaft-anschaulichen Modalität bearbeitet werden konnten. Die erwartungsgemäßen Leistungsunterschiede zwischen beiden Schülergruppen waren durch traditionelle Maße der Experimentalpsychologie nicht erklärbar. Allerdings konnte durch EEG-Aufzeichnungen nachgewiesen werden, dass bei mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern bereits innerhalb der ersten Sekunde nach dem Instruktionsverstehen Hirnregionen sowohl der begrifflichen als auch der bildhaft-anschaulichen Modalität aktiviert waren, wohingegen bei den mathematisch durchschnittlich leistungsstarken Schülern eine solche doppelte Aktivierung nicht nachweisbar war (Krause, Seidel, & Heinrich, 2004).

Allerdings sind unterschiedliche Ausprägungen der Klix'schen Basiskomponenten allein wohl nicht ausreichend zur Beschreibung mathematischer Begabungen, was auch in einer kürzlich veröffentlichten Studie von Manja Foth deutlich wurde. Sie untersuchte Möglichkeiten, überdurchschnittliche mathematische Leistungsfähigkeit in der Oberstufe Berliner Spezialgymnasien vorherzusagen. Als wichtiger möglicher Prädiktor galt dabei die fluide Intelligenz nach Cattell, auch weil sie zahlreiche Korrespondenzen zu den Überlegungen von Klix aufweist. Allerdings erwies sich diese allein als nicht hinreichend für eine zuverlässige Vorhersage, vielmehr war die fachspezifische intrinsische Lernmotivation (ermittelt über das Interesse für Mathematik) neben der Intelligenz entscheidender Prädiktor mathematischer Leistungen im Hochleistungsbereich (Foth & van der Meer, 2013). Mir scheint es in diesem Zusammenhang naheliegend, dass das Interesse an Mathematik vor allem über die Akkumulation fachspezifischen Wissens und die zunehmende Spezifizierung von Fähigkeiten wirksam wird.

Vadim Krutetskii gehörte wohl zu den ersten Psychologen, die sich aus kognitionspsychologischer und zugleich stärker fachspezifischer Perspektive mit mathematischen Begabungen und ihren Grundlagen beschäftigten.

Gemeinsam mit seiner Arbeitsgruppe unternahm er bereits in den 1950er und 1960er Jahren einen auch für heutige Forschungsarbeiten noch grundlegenden Versuch der Beschreibung mathematischer Begabungen im Schulalter. Dazu wurden umfangreiche empirische Untersuchungen mit mehr als 200 Schülerinnen und Schülern der zweiten bis zehnten Klassenstufe durchgeführt, die aufgrund ihrer Noten, vor allem aber auch auf der Basis von Lehrerurteilen als mathematisch leistungsstark, durchschnittlich oder relativ leistungsschwach eingeschätzt wurden. Um vor allem auch die qualitativen Aspekte mathematischer Lösungsprozesse zu erfassen, wurden den Schülerinnen und Schülern bis zu 26 Aufgabenserien vorgelegt, die jeweils aus mehreren Subtests und diese wiederum aus einer Folge von Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad bestanden. Die Analysen der Bearbeitungsprozesse und –ergebnisse wurden durch mehrjährige Beobachtungen, Befragungen von Eltern und Lehrern, von Mathematikdidaktikern und Mathematikern ergänzt sowie durch biografische Forschungen weiter angereichert (Krutetskii, 1976).

Die in der Untersuchung herausgearbeiteten spezifischen Fähigkeiten und Merkmale, in denen sich mathematisch erfolgreiche von weniger erfolgreichen Schülerinnen und Schülern unterscheiden, lassen sich sehr knapp und orientiert am Modell der Informationsverarbeitung etwa auf folgende Weise zusammenfassen, wobei die beschriebenen Komponenten eng miteinander verknüpft sind und sich individuell unterschiedlich zu einer Struktur mathematischen Denkens verbinden können (S. 350 f.):

- *Gewinnen mathematischer Informationen:* Fähigkeit zur formalisierten Wahrnehmung mathematischer Materials, zum Erfassen der formalen Struktur eines Problems
- *Verarbeiten mathematischer Informationen:* Fähigkeit zum bereichsspezifischen logischen Denken; Fähigkeit zum Denken in mathematischen Symbolen; Fähigkeit zur schnellen und breiten Generalisierung mathematischer Objekte, Beziehungen und Operationen; Fähigkeit zur Verkürzung von Prozessen mathematischen Schlussfolgerns; Fähigkeit zum Denken in verkürzten Strukturen; Beweglichkeit des Denkens im mathematischen Bereich; Streben nach Klarheit, Einfachheit, Ökonomie und Rationalität von Lösungsprozessen; Umkehrbarkeit mentaler Prozesse beim mathematischen Schlussfolgern
- *Speichern mathematischer Informationen:* mathematisches Gedächtnis (verallgemeinertes Wissen über mathematische Beziehungen, Typen von Aufgaben und Problemen, Argumentations- und Beweisschemata, Problemlösemethoden, grundsätzliche Zugangsweisen)
- *allgemeine synthetische Komponente:* mathematische Gerichtetheit

Krutetskii's Charakterisierung mathematischer Begabungen gilt in dieser Allgemeinheit für Mittelstufenschüler. Spezifische Untersuchungen mit Grundschulkindern zeigten, dass sowohl das Streben nach ökonomischem Denken als auch ein mathematisches Gedächtnis im Grundschulalter noch nicht zum Ausdruck kommen, darüber hinaus sind Flexibilität und Reversibilität des Denkens allenfalls in „Keimform“ zu beobachten. Auch die Verkürzung von Denk- und Verarbeitungsprozessen kommt erst gegen Ende der klassischen Grundschulzeit über elementare Formen hinaus, dagegen ist das zügige Erfassen der formalen Struktur einer mathematischen Situation für begabte Kinder bereits früher möglich; gegen Ende der Grundschulzeit können sie auch mit komplexeren Strukturen umgehen. Von allen Komponenten tritt im Grundschulalter nach Krutetskii „am klarsten die Fähigkeit zur Verallgemeinerung des Mathematikstoffes hervor, verständlicherweise in relativ einfacher Form als Fähigkeit, das Gemeinsame in verschiedenen Aufgaben und Beispielen zu erfassen und entsprechend auch das Unterschiedliche im Gemeinsamen zu sehen“ (Krutetzki, 1968, S. 52).

Für Krutetskii sind die beschriebenen Fähigkeiten spezifische oder spezifizierte Fähigkeiten (Krutetskii, 1976, S. 360), auch für ihn existieren Fähigkeiten nicht an sich, sondern immer nur an bestimmten Inhalten, mit denen sie eine untrennbare Einheit bilden (Lompscher & Gullasch, 1977).

Für den Grundschulbereich wurde das Themenfeld „Mathematische Begabung“ in Deutschland wesentlich durch eine in den 1990er Jahren durchgeführte Studie von Friedhelm Käpnick erschlossen, die u. a. das Ziel hatte, spezifische Merkmale für Dritt- und Viertklässler mit einer „potenziellen mathematischen Begabung“ zu bestimmen. Das zunächst theoretisch begründete Merkmalsystem umfasste neben mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen erstmals explizit auch begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften. Zu ersteren entwickelte und erprobte Käpnick „Indikatoraufgaben“, der daraus schließlich konstruierte Test wurde in einer Vergleichsuntersuchung mit 70 als potenziell mathematisch begabt benannten und 44 weiteren Dritt- und Viertklässlern eingesetzt. Die Ergebnisse des Indikatortest bestätigten die zuvor theoretisch gewonnenen mathematikspezifischen Begabungsmerkmale ganz überwiegend. Zur empirischen Absicherung möglicher begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften wurden 38 Lehrerinnen gebeten, 91 potenziell mathematisch begabte Dritt- und Viertklässler aus ihren Schulklassen anhand eines Fragebogens einzuschätzen (Käpnick, 1998).

Das auf diese Weise entwickelte und im Folgenden knapp zusammengefasste Merkmalsystem (vgl. Käpnick, 1998, S. 119) konnte darüber hinaus in Einzelfallstudien und zwischenzeitlich in weiteren Untersuchungen be-

stätigt werden, es wurde später von Friedhelm Käpnick und Mandy Fuchs zu einem „Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter“ (Käpnick, 2006) erweitert:

- *Mathematikspezifische Begabungsmerkmale*: mathematische Sensibilität; Originalität und Fantasie bei mathematischen Aktivitäten; Gedächtnisfähigkeit für mathematische Sachverhalte; Fähigkeit zum Strukturieren; Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen; Fähigkeit zur Reversibilität und zum Transfer
- *Begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften*: hohe geistige Aktivität; intellektuelle Neugier; Anstrengungsbereitschaft, Leistungsmotivation; Freude am Problemlösen; Konzentrationsfähigkeit; Beharrlichkeit; Selbstständigkeit; Kooperationsfähigkeit.

Inwieweit diese Merkmale und die von Krutetskii beschriebenen Fähigkeiten mathematikspezifisch und zugleich charakterisierend für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler sind, hängt selbstverständlich auch von der mathematischen Reichhaltigkeit der Anforderungssituationen ab, in denen sie gezeigt werden (können). In dieser Reichhaltigkeit unterscheiden sich psychologische und mathematikdidaktische Untersuchungen in der Regel ganz erheblich.

Besonders reichhaltige und offene Problemstellungen entwickelte Kießwetter für den „Hamburger Test für mathematische Begabung“, der sich an Schülerinnen und Schüler der sechsten Jahrgangsstufe richtet. Für deren erfolgreiche Bearbeitung ist dann nicht nur die Verfügbarkeit spezifischer Fähigkeiten, sondern auch von darauf aufbauenden, bereits komplexeren Denk- und Handlungsmustern bedeutsam. In diesem Sinne verstehe ich den folgenden, von Kießwetter formulierten Katalog, der allerdings ausdrücklich keine umfassende Beschreibung einer mathematischen Begabung sein soll, stattdessen gleichzeitig Orientierung geben möchte für die Förderung mathematisch begabter Mittel- und Oberstufenschüler (Kießwetter, 1985, S. 302): *Organisieren von Material; Sehen von Mustern und Gesetzen; Erkennen von Problemen, Finden von Anschlussproblemen; Wechseln der Repräsentationsebene (vorhandene Muster bzw. Gesetze in „neuen“ Bereichen erkennen und verwenden); Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten; Prozesse umkehren*. Für den Grundschulbereich formulierte Kießwetter später einen (unvollständigen) Katalog mathematischer Skizzen, in denen erfolgreich mathematisch agiert wird: *Zusammenhänge an Spezialfällen verifizieren, Begründen mit paradigmatischen Beispielen, Nutzen von Superzeichen* (Kießwetter, 2006).

Hinweise zum Zusammenhang zwischen mathematischen Begabungen und Intelligenz liefert auch das von Marianne Nolte geleitete Forschungs- und Förderprojekt an der Universität Hamburg, in dessen Rahmen seit mehr als zehn Jahren Förderveranstaltungen für mathematisch begabte Grundschul- kinder angeboten werden. Da aus Kapazitätsgründen unter den teilnahme- willigen Drittklässlern eine Auswahl erfolgen muss, bearbeiten die Interes- senten zunächst einen Intelligenz- sowie einen eigens entwickelten Mathe- matiktest, der sich an Instrumente und Ergebnisse von Käpnick und Kieß- wetter anlehnt. Nolte (2012) berichtet von einer statistischen Analyse der Testergebnisse aus neun Jahren bzw. von fast 1700 Kindern, die für die Er- gebnisse von Intelligenz- und Mathematiktest eine Korrelation von $-0,34$ ergab, wobei dieser Zusammenhang deutlich schwächer wurde für Kinder mit besonders guten Ergebnissen im Mathematiktest – beispielsweise sank der Korrelationskoeffizient für die Rangplätze 1 bis 15 auf $-0,14$. Der nicht sehr starke statistische Zusammenhang und dessen weitere Reduktion sind aufgrund der (zunehmenden) Selektivität und der (abnehmenden) Stichpro- bengröße zwar teilweise erwartbar, darin wird aber meines Erachtens auch noch einmal deutlich, dass eine besondere mathematische Begabung, die sich in der erfolgreichen Auseinandersetzung mit mathematisch reichhalti- gen Problemstellungen zeigt, nicht aus dem IQ abgeleitet werden kann bzw. nicht Bestandteil einer allgemeinen intellektuellen Begabung ist.

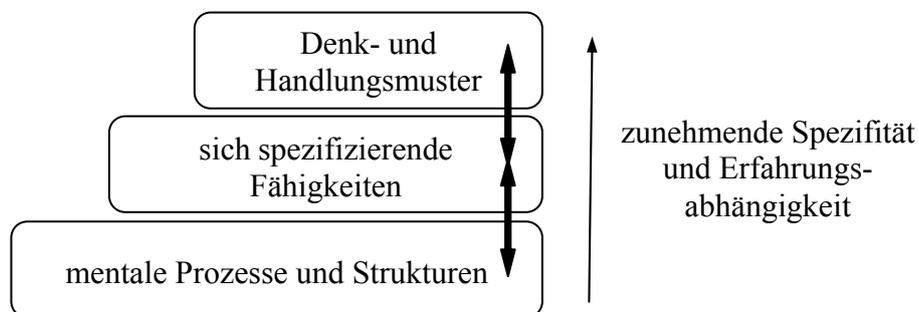


Abb. 1: Beschreibungsebenen zum Konstrukt „Mathematische Begabung“

Zusammenfassend lässt sich sagen: Geht man über einfache psychometri- sche Ansätze hinaus und sieht mathematische Begabungen als Begabungen zum mathematischen Tätigsein im engeren Sinne an, so sind diese sehr wohl auch Ausdruck *spezifischer* kognitiver Merkmale. Darüber hinaus scheint es mir wichtig zu berücksichtigen, welche Ebene der Beschreibung fokussiert wird: die Ebene der involvierten mentalen Prozesse und Struktu- ren, die Ebene der sich zunehmend spezifizierenden Fähigkeiten oder die der Denk- und Handlungsmuster – die selbstverständlich nicht unabhängig voneinander sind und bei denen Spezifität und Erfahrungsabhängigkeit von Ebene zu Ebene zunehmen.

Literatur

- Benbow, C. P., & Minor, L. L. (1990). Cognitive Profiles of Verbally and Mathematically Precocious Students: Implications for Identification of the Gifted. *Gifted Child Quarterly*, 34(1), 21–26.
- Desco, M., et al. (2011). Mathematically gifted adolescents use more extensive and more bilateral areas of the fronto-parietal network than controls during executive functioning and fluid reasoning tasks. *NeuroImage*, 57, 281–292.
- Foth, M., & Meer, E. van der (2013). Mathematische Leistungsfähigkeit: Prädiktoren überdurchschnittlicher Leistungen in der gymnasialen Oberstufe. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematische Begabungen. Denksätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven* (S. 211–240). Münster: WTM.
- Käpnick, F. (2006). Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschulkin-der. In *BzMU 2006* (S. 59–60). Hildesheim: Franzbecker.
- Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und inter-essierten Schülern – ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. *MNU*, 38(5), 300–306.
- Kießwetter, K. (1992). „Mathematische Begabung“ – über die Komplexität der Phäno-mene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen. *MU*, 38(1), 5–18.
- Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathema-tisch agieren? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), *Wie fördert man mathema-tisch besonders befähigte Kinder?* (S. 128–153). Offenburg: Mildenerger Verlag.
- Krause, W., Seidel, G., & Heinrich, F. (2004). Multimodalität am Beispiel mathemati-scher Anforderungen. In *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät. Band 64*. Berlin.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.
- Krutezki, W. A. (1968). Altersbesonderheiten der Entwicklung mathematischer Fähig-keiten bei Schülern. *Mathematik in der Schule*, 8(1), 44–58.
- Lompscher, J., & Gullasch, R. (1977). Die Entwicklung von Fähigkeiten. In APW der DDR (Hrsg.), *Psychologische Grundlagen der Persönlichkeitsentwicklung im päd-a-gogischen Prozess* (S. 199–249). Berlin: Volk und Wissen.
- Nolte, M. (2012). „High IQ and high mathematical talent!“ Results from nine years tal-ent search in the Prima-project Hamburg. In ICME 12 Pre-proceedings. Seoul.
- O'Boyle, M. W. (2008). Mathematically Gifted Children: Developmental Brain Charac-teristics and Their Prognosis for Well-Being. *Roepers Review*, 30, 181–186.
- Seidel, G. (2004). *Ordnung und Multimodalität im Denken mathematisch Hochbegab-ter*. Berlin: Wissenschaftlicher Verlag Berlin.
- Waldmann, M., & Weinert, F. E. (1990). *Intelligenz und Denken. Perspektiven der Hochbegabungsforschung*. Göttingen: Hogrefe.
- Wieczerkowski, W., Cropley, A. J., & Prado, T. M. (2000). Nurturing Talents/Gifts in Mathematics. In K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Hrsg.), *International Handbook of Giftedness and Talent* (2. Aufl., S. 413–425). Amsterdam: Elsevier.
- Zimmermann, B. (1992). Profile mathematischer Begabung. Fallstudien aus dem Ham-burger Projekt sowie aus der Geschichte der Mathematik. *MU*, 38(1), 19–41.