Michael MARXER, Freiburg

Von der Arithmetik zur Algebra – Wege zu einem inhaltlichen Verständnis von Variablen, Termen und Termstrukturen

Konzepte, die in der Arithmetik entwickelt werden, sind häufig auch in der Algebra tragfähig – und sie können helfen, diese besser zu verstehen: In diesem Beitrag sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, wie *Terme* (zunächst noch ohne Variable) als knappe Darstellungen für mehrschrittige Rechnungen zu strukturellen Überlegungen anregen können und erste Vorerfahrungen für algebraische Konzepte ermöglichen (Prediger u. a. 2012).

Gefördert wird diese Sicht auf den Zusammenhang zwischen Arithmetik und Algebra durch geeignete Aufgabenstellungen, die deutlich machen, dass algebraisches Denken nicht mit dem Umformungskalkül beginnt, sondern viel früher beim Verstehen arithmetischer Operationen und ihrer Wirkungen („operatives Prinzip", Wittmann 1981)

Terme können als Sprachelement verstanden werden, um die Struktur eines Problems knapp und prägnant darzustellen, die Berechnung erfolgt erst anschließend. Durch die Trennung dieser Schritte werden Unterschiede zwischen verschiedenen Ansätzen besser sichtbar als am Wert des ausgerechneten Terms (Prediger u. a. 2012).

Zwei zentrale Vorgehensweisen dazu sollen erläutert werden:

1. Die Verwendung von Aufgabenformaten, bei denen (neben dem „Ausrechnen") die konkreten Werte eines Zahlenterms durch Zusatzfragen so variiert werden, dass die prinzipielle Austauschbarkeit dieser Werte erkannt und dadurch die Bedeutung von Variablen erfahren wird.

2. Die Betrachtung von Termen unter dem Blickwinkel, wie sich die Struktur einer Situation in der Struktur des Terms widerspiegelt, und wie sich eine geänderte Situation in einer Änderung des Terms ausdrücken lässt. Dies wird als *Arithmetisches Modellieren* bezeichnet.

Inhaltliches Denken steht also vor dem reinen Kalkül (Prediger 2009).

Arithmetische Terme: Im konkreten Beispiel das Allgemeine erkennen

Bereits bei der Bearbeitung von Aufgaben, die mit Hilfe der Arithmetik gelöst werden können, werden verallgemeinernde Überlegungen angestellt: Lernende, denen noch keine Algebra zur Verfügung steht, nehmen die prinzipielle Variierbarkeit eines Wertes manchmal bewusster wahr als die im formalen Umgang mit algebraischen Werkzeugen routinierten Lehrkräfte. Neben dem reinen „Ausrechnen“ von Termen stellt somit die Verallgemeinerung und fortschreitende Formalisierung mathematischer Muster und Strukturen eine wichtige Grundlage für Aufgaben dar.

Im folgenden Aufgabenbeispiel werden die Zahlen durch Zusatzfragen „in Bewegung“ gesetzt. Sie treten damit als konkrete Zahlen in den Hintergrund, die Sichtweise verlagert sich darauf, wie sich die Änderung an anderen Stellen – insbesondere beim Termwert – auswirkt. Damit können schon im Bereich der Arithmetik Vorerfahrungen gesammelt werden, die das Verständnis für den späteren Umgang mit algebraischen Termen erleichtern.

Fünf Freunde planen einen Ausflug nach Hamburg.

Benzinkosten (PKW mit max. 5 Personen) 120 €	Eintritt Modellbahnausstellung 8 € pro Person

Kosten pro Person [in €]: $\frac{120}{5} + 8$

(a) Was ändert sich, wenn die Benzinkosten auf 130 € steigen?

(b) Was ändert sich, wenn zwei Freunde krank werden?

(c) Was ändert sich, wenn insgesamt sechs Freunde mitfahren?

(d) Was ändert sich, wenn es in der Ausstellung eine Gruppenkarte zu 36 € für bis zu sechs Besucher gibt?

(e) Mit welchem Term kann man die Gesamtkosten für alle ausrechnen?

Eine Änderung an der Sachsituation macht also weitere Überlegungen erforderlich:

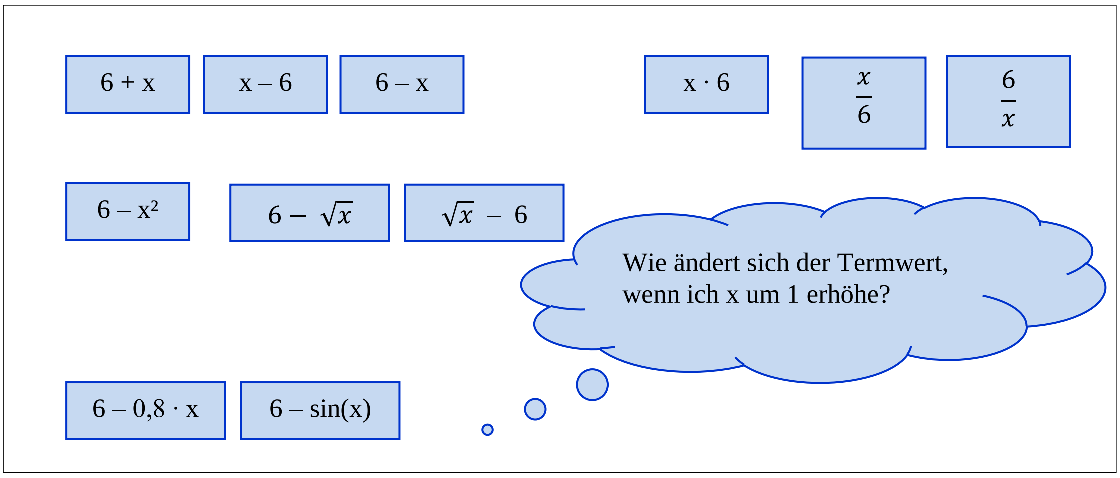
- An welcher Stelle des Terms muss ein Zahlenwert geändert werden?
- Führt diese Änderung zu einer Erhöhung oder einer Verminderung des Termwertes?
- Genügt die Änderung eines einzelnen Wertes oder muss der gesamte Term neu strukturiert werden?

Eine neue Sichtweise auf Terme rückt in den Vordergrund: Der einer Zahl zugewiesene Platz legt fest, wie sich eine Veränderung dieser Zahl auf den Termwert auswirkt. Dabei wird die Semantik von Termstrukturen erfasst: „Warum steht die Anzahl der Personen im Nenner, warum stehen die Benzinkosten im Zähler? Wieso schreibt man die Kosten für den Eintritt nicht in den Zähler des Bruchs, sondern als weiteren Summanden dahinter?“

Teilaufgabe (c) muss mit Vorsicht beantwortet werden: Bevor ein Automatismus bei der Bearbeitung einsetzen könnte, muss über die Gültigkeit des Terms neu nachgedacht werden. Im Modellierungskreislauf sind derartige Überlegungen dem Teilschritt „Validierung“ zuzuordnen (Maaß 2007).

Algebraische Terme unter dem Blickwinkel der Kovariation

Der durch die Variation bei Zahlentermen vertraute Blick auf die Auswirkungen beim Termwert bildet die Grundlage für die Betrachtung algebraischer Terme unter dem Kovariationsaspekt. Abhängig vom „Platz“, an dem die Variable innerhalb eines Terms steht, ergeben sich ganz unterschiedliche Auswirkungen auf den Wert des Terms, wenn für x unterschiedliche Zahlen eingesetzt werden.



Zunächst kann der Vergleich der Terme auf die Fragestellung eingegrenzt werden: „Wird der Termwert größer oder kleiner, wenn x um 1 erhöht wird?“ Anspruchsvoller wird die Betrachtung, wenn untersucht wird, bei welchen Termen eine lineare Zu- oder Abnahme vorliegt und wie sich die Zu- oder Abnahme bei den anderen Termen beschreiben lässt. Graphische Darstellungen können die Überlegungen unterstützen und schaffen den Zugang zum Denken in funktionalen Zusammenhängen.

Beim *arithmetischen* Modellieren wird durch geeignete Aufgabenformate erfahren, wie sich die Struktur einer Situationen in einem Zahlenterm darstellen lässt. Auf diese Erfahrungen aufbauend wird die Einführung von Variablen beim *algebraischen* Modellieren als eine erleichternde Formalisierung erlebt, mit der die Struktur wiederkehrender Situationen erfasst werden kann. Beides zielt darauf ab, Erfahrungen damit zu sammeln, wie die Struktur einer Sachsituation und die Struktur eines Terms einander entsprechen (Marxer 2012).

Typische Aktivitäten sind: Das *Aufstellen* von Termen zu gegebenen Sachsituationen, die *Modifizierung* von Situationen und Umsetzung in die Änderung eines Terms, und – umgekehrt – die Modifizierung des Terms und Umsetzung in eine geänderte Situation. Die mathematisierte Darstellung wird also durch Aufgabenformate erlernt, die sich nicht auf das Ausrechnen von Termwerten beschränken, vielmehr geht es darum, Lernende zu befähigen, arithmetische Konzepte zu verallgemeinern und Beziehungen und Strukturen zu erkennen (Carpenter & Franke 2001). Aufgaben sollten dabei so angelegt werden, dass

- durch Variation der *Ausgangsdaten* Konzepte zur Verwendung von (Quasi-) Variablen entwickelt werden,
- durch Variation der *Situation* Konzepte zur Anpassung oder (Um-) Gestaltung von Termen erlernt werden.

Im Verständnis eines Mathematikunterrichts, der genetisch angelegt ist, bedeutet dies: Schülerinnen und Schüler arbeiten über einen längeren Zeitraum mit Quasi-Variablen, lernen Regelmäßigkeiten und Gesetzmäßigkeiten kennen, werden vertraut mit spezifischen Notationsformen. Wenn dann in den folgenden Klassenstufen weiter führende Formen der Mathematisierung – Buchstabenvariable, algebraische Terme, Funktionsgleichungen – in den Unterricht Eingang finden, werden diese als Möglichkeit erlebt, die Arbeit mit bereits Vertrautem zu erleichtern, aber auch neue Horizonte zu öffnen.

Literatur

Carpenter, T. P. & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In: Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. & Vincent, J. (Hrsg.): The future of teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. Dordrecht: Kluwer, S. 155–162

Maas, K. (2007): Mathematisches Modellieren im Unterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Marxer, M. (2012): Arithmetisches Modellieren – Vorerfahrungen zu Variablen und Termen ermöglichen. Erscheint in: Mathematik lehren 171

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül. In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Weinheim: Beltz, S. 213–234.

Prediger, S.; Barzel, B.; Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.) (2012): Handbuch zu: mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen

Wittmann, E. Ch. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg (6.Auflage)