

Gert KADUNZ, Klagenfurt

## **Zeichen und Visualisierung**

Seit mehr als 10 Jahren ist die Theorie der Zeichen nach C.S. Peirce ein Teil der theoretischen Fundierungen mathematikdidaktischer Überlegungen. Die Vielfältigkeit der Anwendungen dieser Zeichentheorie zeigt beispielhaft Sammelband des GDM Semiotik Arbeitskreises der GDM (Kadunz, 2010). Ein wesentlicher Punkt bei der Verwendung dieser Zeichentheorie ist die Konzentration auf das Sichtbare, also auf die für den Sehsinn Zeichen und die damit verbundenen Aktivitäten der Lehrenden und Lernenden. Innerhalb der Mathematikdidaktik hat die Hinwendung zum Sichtbaren und damit das vor Augen führen von Mathematik eine lange Tradition. Eine Anfrage bei der ZDM-Datenbank unter dem Stichwort „Visualisierung“ liefert mehr als 300 Treffer. In den folgenden Ausführungen werde ich auf wenige Ansätze zur Visualisierung, die aus entsprechenden Publikationen gefiltert werden können, eingehen und diesen Ansätzen die eben erwähnte Zeichentheorie zur Seite stellen. Dabei werde ich zu zeigen versuchen, dass die Zeichentheorie bei ihrer mathematikdidaktischen Verwendung (im Rahmen der Visualisierung) im Wesentlichen in der Welt des Sichtbaren bleibt und sich durch ein konsistentes Begriffssystem auszeichnet. Im Vergleich dazu sind andere Ansätze zur Beschreibung von Fragen der Visualisierung neben der visuell wahrnehmbaren Mathematik auch z.B. durch Rückgriff auf Mentales oder bestimmte Sprachfiguren mitbestimmt. Dies sehe ich nicht als Mangel, sondern als eine andere Zugangsweise, einen anderen theoretischen Ansatz um Visualisierungen von Mathematik erfolgreich beschreiben zu können.

### **Ein lernpsychologischer Standpunkt**

Einer der zentralen lernpsychologischen Ansätze, der in der Mathematikdidaktik ab den 70er Jahren des vergangenen Jahrhunderts Verbreitung fand, war die Psychologie der Erkenntnis des Jean Piaget. Mit Piagets Ansatz verbunden sind zwei Stichworte: Operativ und Genese. In seinem Ansatz fühlt sich Piaget mit seinen Ausführungen zur Theorie der Entwicklung der menschlichen Erkenntnis der Biologie nahe. Er meint, dass die Struktur der menschlichen Intelligenz und bestimmte Formen der organischen Natur von gleicher natürlicher Herkunft sind und dabei „eine in Entwicklung begriffene Organisation des Lebendigen“ darstellen (Piaget, 1972, S. 20). Die Organisationsentwicklung, also der Treibstoff zur Entwicklung von Erkenntnis, wird von Piaget als eine Funktion der menschlichen Intelligenz gesehen. Diese Funktion ist stets um die Aufrechterhaltung eines Gleichgewichtes zwischen Individuum und Umwelt bemüht. Ich erinnere an die

Dreiteilung Adaption, Akkomodation und Assimilation. Die damit beschriebenen Anpassungsvorgänge sind durch Handlungen bzw. Operationen mitbestimmt. Die Konzentration auf Handlungen kann als „operativer Standpunkt“ gesehen werden, der vom Pädagogen Hans Äbli und durch die Mathematikdidaktiker Arnold Fricke und Heinrich Besuden für das Lernen von Mathematik aufbereitet wurde. Akzeptanz in der Mathematikdidaktik erlangte dieser operative Standpunkt unter dem Titel operatives Prinzip, das vor allem mit Erich Wittmann und auch Äbli assoziiert wird. Ein Bsp., wie Wittmann seine Sicht auf das operative Prinzip verwendet, um Visualisierung von Mathematik zu interpretieren, stellt sein Beitrag „Anwendung des operativen Prinzips bei der Produktion mathematischer Filme“ (Wittmann, 1987) dar. Wittmann beschreibt durch Verweis auf den Film von Nicolet Beziehungen zwischen drei Punkten und einem frei variierbaren Kreis. Die Operationen, die mit den Objekten durchgeführt werden, sind auf Operationen mit dem Kreis eingeschränkt. Die Punkte selbst bleiben fest. Jeder Punkt, der bei Variation des Kreises gefangen wird, schränkt die Freiheit des Kreises ein. Verläuft der Kreis durch einen Punkt, indizieren Kreis und Punkt, so wird der Kreis unbeweglicher. Betrachtet man die gesamte Konfiguration aus Kreisen und Punkten, so erlaubt sie bei zunehmenden Inzidenzen immer weniger Bewegungen. Gleichzeitig steigt die Anzahl der Beziehungen zwischen dem Kreis und den Punkten. Wittmann stellt fest, dass sich Operationen herauschälen, welche die Inzidenzen zwischen den Punkten und dem Kreis invariant lassen. Verläuft der Kreis durch zwei Punkte, so beobachtet man, dass sein Mittelpunkt nur mehr auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte bewegt werden kann. Die Bewegungen des Kreises und das Fangen führen Punkte und Kreis zu einem neuen Objekt zusammen. Dieses neue Objekt ist durch eine neue Beziehung (Punkt indiziert mit Kreis) bestimmt und verliert im gleichen Augenblick an Beweglichkeit. Es entsteht ein unbeweglicher Kreis, der durch die drei Punkte bestimmt ist. Bei dessen Herstellung wechseln Variation und Inzidenzfindung solange ab, bis keine Variation mehr möglich ist. Ein neues Objekt entsteht.

### **Metapher und Bild**

Ein alternativer Ansatz, der in Publikationen zur Mathematikdidaktik zu finden ist, kann als Bild-Metapher Ansatz beschrieben werden. Ein erläuterndes Beispiel findet sich Abraham Arcavi (2003). In „The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics“ berichtet Arcavi über die Lösungsversuche eines Lernenden zu folgender Aufgabe: Gegeben sei eine arithmetische Folge mit  $a_{10}=20$  und der Summe der ersten zehn Folgeelemente  $s_{10}=65$ . Wie lautet das Bildungsgesetz dieser Zahlenfolge?

Der Lösungsansatz des Lernenden wird wesentlich von visuellen Elementen bestimmt, die der Proband zu einer metaphorischen Beschreibung der Konfiguration verwendet, um mit deren Hilfe eine Lösungsidee zu generieren. Die Verwendung der elementaren Arithmetik, die gleichfalls Teil des Lösungsprozesses ist, dient der algorithmischen Ausführung dieses Vorschlags. Welche theoretischen Ansätze bieten sich hier an, um die Erfindung und Verwendung von Metaphern zu beschreiben? Der Lernende gewann seine metaphorische Beschreibung aus den von ihm konstruierten Inskriptionen. Er verwendete diese Inskriptionen als im Sinne des Philosophen Nelson Goodman als Bild. Diese Verwendungsweise zeichnet sich durch den Umstand aus, dass unterschiedliche Beziehungen in ein Bild hinein gesehen werden können. In einem Urlaubsfoto kann man sich auf Schönheit der Landschaft oder auf die Farben der Kleider der abgebildeten Personen konzentrieren. Es ist der Betrachter des Bildes, der selbst entscheidet (unbewusst, aufgrund von Erfahrung und Vorlieben), worauf er sich konzentriert und auch, wie er die Relation, die ihn interessiert, verwendet. Warum entscheiden wir uns für eine spezielle Sichtweise? Goodman meint, dass die Wahl wohl eine Folge einer speziellen Ähnlichkeit ist, welche uns Teile eines Bildes ähnlich zu einer uns bekannten Situation erscheinen lässt. Und diese Ähnlichkeit, die ja keine Gleichheit ist, kann Anstoß zu einer metaphorischen Beschreibung sein. Bögen sind Sprünge kann sich der Lernende gedacht haben. Es ist eine Eigenschaft von Metaphern, so welche die Verwendung eines Wortes in einen neuen Zusammenhang hinüber tragen. So entstehen neue ungewohnte Verwendungsweisen, die, wie im obigen Beispiel, durch arithmetische Operationen geprüft werden. Kurz gesprochen: Bilder (im Sinne von Goodman) sind mögliche Quellen von Metaphern – also Elementen der gesprochenen Sprache – die bekanntes Wissen (z.B. die Verwendung von Algorithmen – in neue Situationen tragen. Erinnern wir uns abschließend an die vor einigen Jahren lebhaft geführte Diskussion zum Verhältnis von Metapher und der Entwicklung mathematischen Wissens (Lakoff, 1997).

### **Ein semiotischer Standpunkt**

Zum Abschluss meiner Ausführungen zur knappen Besprechung des Verhältnisses von Visualisierung und einer speziellen Zeichentheorie. Anders gesprochen: Welche Position nimmt ein semiotische Standpunkt zur Verwendung sichtbarer Zeichen ein? Die Semiotik (nach Peirce) konzentriert sich in mathematikdidaktischer Verwendung wesentlich auf das Sichtbare. Als Bsp. für diese Konzentration – also ohne jede „Spekulation, was im Mentalen ablaufen könnte“ verweise ich auf Christof Schreibers Untersuchung „Semiotische Prozesskarten“ (2010). Das Setting zur Datengewin-

nung war so bestimmt, dass ein wesentlicher Teil der Kommunikation ausschließlich per visuell sichtbaren Inskriptionen erfolgte. Die Interpretation der Daten erfolgte mit Mitteln der Semiotik. Als Zweites nenne ich das Vorliegen eines konsistenten Theoriegebäudes, das uns Peirce zur Verfügung gestellt hat. Das betrifft sowohl die Klassifikation der Zeichen z.B. in Ikon, Index und Symbol (mit den entsprechenden Unterkategorien) als auch die Beschreibung der Zeichenentwicklung insbesondere deren Verwendung bei der Erstellung neuen Wissens. Ich verweise auf den Dreischritt Abduktion, Induktion und Deduktion. Darüber hinaus bietet die Peirce'sche Theorie auch Begriffe an, um über die Qualität der Erweiterung von Erkenntnis sprechen zu können. Ich verweise auf die Unterscheidung von theorematischem und korollarischem Schließen. Beispiele und Erläuterungen findet man beispielhaft im oben angeführten Sammelband. Als Drittes sehe ich das Aufkommen der Semiotik in der Mathematikdidaktik – gerade mit Blick auf die Visualisierung – als eine (unbewusste) Reaktion auf eine Entwicklung in den Kulturwissenschaften. Dort wird auf die (epistemische) Geringschätzung der Anschauung, der Bildverwendung, die eine mögliche Ursache in der platonistischen Sicht auf Bild und Bildverwendung haben könnte, in aktiver Weise eingegangen. Neben den in den Kulturwissenschaften schon seit langer Zeit bestehenden theoretischen Kunstbetrachtung haben die Entwicklungen in den Naturwissenschaften und in der Technik zu einem verstärkten Interesse an Bildern und an bildgebenden Verfahren geführt (vgl. Heßler, 2009) In der Mathematikdidaktik kann die Theorie der Zeichen die Aufgabe der theoretischen Reflexion bei der Konzentration auf das Sichtbare – in Fragen der Visualisierung – übernehmen.

## Literatur

- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Heßler, M., & Mersch, D. (Hrsg.). (2009). *Logik des Bildlichen. Zur Kritik der ikonischen Vernunft*. Bielefeld: transcript Verlag.
- Kadunz, G. (Hrsg.). (2010). *Sprache und Zeichen Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik*. Hildesheim: Franzbecker.
- Lakoff, G., & Nunez, E. R. (2000). *Where Mathematics Comes From*. New York: Basic Books.
- Schreiber, C. (2010). *Semiotische Prozess-Karten - chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozesse*. Münster: Waxmann.
- Piaget, J. (1972). *Die Entwicklung des Erkennens I, Das mathematische Denken*. Stuttgart: Ernst Klett.
- Wittmann, E. C. (1987). Anwendung des operativen Prinzips bei der Produktion mathematischer Filme. In Metzler., W. und Kautschitsch H. (Hrsg.), *Medien zur Veranschaulichung von Mathematik*. Stuttgart, Wien: B.G.Teubner, hpt.