Marion GEIGER, Ulm, Ulrike, STRADTMANN, Ulm, Markus VOGEL, Heidelberg, Tina SEUFERT, Ulm

Transformationen zwischen mathematischen Repräsentationen: Welche Fähigkeiten haben Lernende?

1. Einführung

In der Mathematik werden unterschiedliche Darstellungen, wie Diagramme, Graphen, Tabellen und Funktionsterme verwendet und in den Bildungsstandards (KMK; 2003) wird ein flexibler Umgang mit diesen Repräsentationsformen gefordert. So sollen Schülerinnen und Schüler beispielsweise „Lösungswege beschreiben und begründen" oder „unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln" können (KMK; 2003, S.10). Diese Anforderungen erfordern das Verständnis sowie das Übersetzen zwischen verschiedenen Repräsentationen. Allerdings zeigen empirische Studien, dass das Lernen mit multiplen Repräsentationen nicht einfach ist und mitunter nicht zum Erfolg führt (Ainsworth, 1999). Probleme sind insbesondere bei der Transformation von Informationen aus einer Repräsentation in eine andere dokumentiert: So wird beispielsweise vom sogenannten „Graph-als-Bild-Fehler" (Janvier, 1978; Vogel 2006) berichtet, bei dem abstrakte Informationen aus einem Graphen direkt in die reale Welt projiziert werden. Weitere bekannte Probleme sind der height-for-slope-Fehler (Clement, 1989), linearity-smooth-prototyps und andere, welche bei Hadjidemetriou und Williams (2002) nachzulesen sind. Um herauszuarbeiten, woraus diese Probleme möglicherweise resultieren könnten, werden im Folgenden zunächst die Eigenschaften unterschiedlicher Repräsentationen theoretisch betrachtet.

2. Theoretische Grundlagen

Repräsentationen können hinsichtlich der verwendeten Zeichen und deren Verbindung untereinander in Depiktionen und Deskriptionen (Schnotz, 2001) eingeteilt werden. Unter dem Begriff Deskriptionen werden Texte, algebraische Strukturen und weiteres Wortmaterial zusammengefasst, welche mit dem von ihnen repräsentierten Gegenstand über vorauszusetzende Konventionen verbunden sind (Schnotz & Bannert, 1999; Schnotz, 2010). Im Gegensatz hierzu zählen zu den Depiktionen die Repräsentationen, welche bildhafte und ikonische Zeichen verwenden und Informationen über alle einzelnen Elemente des repräsentierten Sachverhalts sowie alle Relationen zwischen diesen beinhalten (Seufert, 2003; Schnotz, 2001). Abgesehen von dieser Einteilung auf der Symbolebene, lassen sich Repräsentationen auch hinsichtlich des Informationsgehalts unterscheiden. So können

Repräsentationen einerseits rein mathematische Inhalte transportieren und andererseits neben den mathematischen Informationen zusätzlich Informationen über den Kontext und somit einen Bezug zum Alltag liefern. In der Diskussion um mathematische Modellierungsprozesse wird zwischen der mathematischen und der realen Modellebene unterschieden (Blum et al., 2004). Diese Unterscheidung erlaubt eine Einteilung hinsichtlich der Abstraktion. Gemeinsam mit der Einteilung auf der Symbolebene kann eine Differenzierung der Abstraktionsebenen in einer Modell-Repräsentationsebenen-Matrix (Vogel, 2006) zusammengeführt werden Jede Repräsentation kann in eine Zelle dieser Matrix eingeordnet werden, wie Vogel (2006) am Beispiel des Mathematisierens funktionaler Abhängigkeiten ausgeführt hat (vgl. Abb. 1).

		Symbolebene	
		Deskriptionale Repräsentationen	**Depiktionale Repräsentationen**
Abstraktionsebene	**Mathematische Modellebene**	Funktionsterm, Wertetabelle	Funktionsgraph
	Reale Modellebene	Datentabelle, Sachtext	Abbildung, Datendiagramm

Abbildung 1: Modell-Repräsentationsebenen-Matrix (Vogel, 2006)

An Hand dieser Matrix lassen sich mögliche Transformationsprozesse erläutern: Es kann sowohl auf der Abstraktionsebene von der mathematischen zur realen Modellebene und umgekehrt gewechselt werden als auch auf der Symbolebene von Deskriptionen zu Depiktionen und umgekehrt. Als Beispiel für eine Transformation auf der Abstraktionsebene, bei der die Symbolebene nicht gewechselt wird, kann folgende Aufgabe betrachtet werden: Eine alltagsnahe Situation wird auf der realen Modellebene durch einen Text (Deskription) beschrieben. Sollen die Schülerinnen und Schüler hierzu einen Funktionsterm erstellen, wechseln sie bei dieser Aufgabe die Abstraktionsebene verbleiben aber hinsichtlich der Symbolebene bei den Deskriptionen. Es ist auch der umgekehrte Prozess denkbar, bei dem die Informationen eines Funktionsterms (oder beispielsweise auch einer Wertetabelle) in einen situativen Kontext hineingelesen werden müssen. Eine solche Aufgabenstellung würde eine Transformation von der mathematischen zur realen Modellebene erfordern. Eine Aufgabe, bei der die Abstraktionsebene beibehalten wird und eine Transformation auf der Symbolebene vollzogen werden muss, wäre beispielsweise, wenn zum gegebenen Funktionsterm ein Funktionsgraph erstellt werden soll, oder umgekehrt. In diesem Fall wäre eine Deskription auf der mathematischen Modellebene gegeben und die Aufgabe besteht darin eine Depiktion auf der mathematische Modellebene zu erstellen. Über diese Aufgaben hinaus, bei denen jeweils nur eine der beiden Ebenen gewechselt werden muss, sind auch prinzipiell Aufgaben möglich, bei denen sowohl die Abstraktionsebene als auch die Symbolebene zu wechseln sind.

3. Methodik

Um zu untersuchen, welche der Transformationsprozesse für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe mit Schwierigkeiten verbunden sind, wurden 19 Aufgaben entwickelt. Inhaltlich waren diese dem Bereich der linearen Funktionen zuzuordnen, da hier bei den Schülerinnen und Schüler mit ausreichend Vorwissen zu rechnen ist. Um Informationen über verschiedene Altersstufen und Schularten zu erhalten, bezogen wir Personen mit unterschiedlichem Bildungsstand ein (Realschule n = 46 8. Klasse; Gymnasium n = 43, 9. Klasse; Studenten im 3. Semester der Universität Ulm n = 40, gesamt n = 129), welche die Aufgaben innerhalb von 90 Minuten bearbeiteten. Zusätzlich wurde das repräsentationsspezifische Vorwissen erhoben (Stradtmann, 2010).

4. Ergebnisse

Ohne an dieser Stelle auf Grund des gegebenen Rahmens auf Details eingehen zu können (ausführlicher siehe Stradtmann, 2010), lässt sich zusammenfassend sagen, dass Lernende größere Schwierigkeiten damit haben, ausgehend von einer depiktionalen Repräsentation eine deskriptionale Repräsentation zu erstellen: In dieser Studie traten insbesondere dann Probleme auf, wenn Informationen aus Depiktionen entnommen und mit eigenen Worten wiedergegeben werden sollten. Hinsichtlich des Abstraktionsebenenwechsels erwies sich die Transformation von der mathematischen zur realen Modellebene als schwierig: Die Lernenden hatten Probleme damit, rein mathematische Informationen in einen sinnvollen realen Kontext einzubetten. Die Analyse, welche Repräsentation für die Lernenden am schwierigsten zu erstellen war, ergab, dass sich die Repräsentation „Text“ als die herausforderndste darstellte.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend ergab sich aus der vorgestellten Studie, dass Lernende Schwierigkeiten damit haben, die Aussage von mathematischen Repräsentationen zu verstehen und in eigenen Worten zu erläutern. Des Weiteren gelang es ihnen kaum, diese rein mathematischen Sachverhalte in ihre alltägliche Lebenswelt zu übertragen. Daher wird in weiteren Studien zunächst der Prozess des Verbalisierens näher betrachtet und daraufhin analysiert, worauf die Defizite der Lernenden zurückzuführen sind. Im Anschluss an diese Analyse soll dann durch gezielte Förderprogramme den aufgezeigten Problemen entgegengewirkt werden, sodass diese auf längere Sicht behoben werden können.

Literatur

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education*, (33), 131–152.

Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Jordan, M., Uflig, F., & Carstensen, C. H. (2004). Mathematische Kompetenz. In M. Prenzel (Ed.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland ; Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Münster: Waxmann.

Clement, J. (1989). The concept of varation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(2), 77-87.

Hadjidemetriou, C. & William, J. (2002). Children`s graphical conceptions. *Research in Mathematics Education,* 4.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian gaphs: Studies and teaching experiments*. Nottingham: Universtity

KMK. (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Matheamti, für den Mittleren Schulabschluss: Beschluss vom 4.12.2003*. Retrieved from http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf

Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Mulitmedia. *Unterrichtswissenschaft*, (4), 292–318.

Schnotz, W., & Bannert, M. (1999). Einflüse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. *Zeitschrift für Experimentelle Psychologie*, *46*(3), 217–235.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffe, E. Corte, J. Elen, & T. Jong de (Eds.), *Use of External Representations in Reasoning and Problem Solving.* (pp. 11–35). Amsterdam: Elsevier.

Seufert, T. (2003). *Wissenserwerb mit multiplen Repräsentationen: Wirksamkeit von Kohärenzbildungshilfen* (1st ed.). Berlin: Logos Verlag Berlin.

Stradtmann, U. (2010). *Analyse der Fähigkeiten zur Überstetzung zwischen verschiedenen Darstellungsformen in der Mathematik*. Ulm.

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. *Texte zur mathematischen Forschung und Lehre: Vol. 49*. Hildesheim: Franzbecker.