

Matthias ZELLER, Bärbel BARZEL, Freiburg

Der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht - zum Stand der Forschung

Computeralgebrasysteme (CAS) zeichnen sich dadurch aus, dass symbolische Ausdrücke mit und ohne Variablen verarbeitet und ausgegeben werden können, häufig verbunden mit der Möglichkeit, Graphen und Tabellen zu erzeugen. Im Rahmen einer Expertise für das Ministerium in Thüringen wurden Veröffentlichungen zum Einsatz von CAS gesichtet, ausgewertet, kategorisiert und zusammengefasst. Von ca. 250 aktuellen Texten (nach 2000) aus mathematikdidaktischen und technologiespezifischen Zeitschriften (z.B. JMD, ZDM; IJCML, IJTME), Monographien, Sammelwerken, Metastudien und Tagungsbänden wurden ca. 150 Texte näher betrachtet. Die empirischen und theoriebasierten Ergebnisse sind in elf Kernaussagen zusammengefasst, die vielfach belegt werden können. Die Kernaussagen sind in die Bereiche ‚CAS beim Lernen‘, ‚beim Lehren‘ und ‚in der Leistungsmessung‘ gegliedert. Im Folgenden werden pro Bereich eine wichtige Kernaussage an einem Beispiel diskutiert und die weiteren Kernaussagen kurz vorgestellt.

1 CAS beim Lernen

1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden: Mit CAS können Ein- und Ausgaben algebraischer Ausdrücke sofort (ohne Unterbrechung durch regelgeleitete Umformungen mit Papier und Stift) in Bezug gesetzt und vergleichend untersucht werden. Diese lokale Zeiteinsparung ermöglicht es den Fokus auf den Bezug zwischen eingegebenem und ausgegebenem Term zu legen, wobei der Erwerb von konzeptuellem Wissen angeregt wird. Zudem entstehen global, also im gesamten Lösungsprozess, Zeiteinsparungen, die mehr Raum für konzeptuelle Tätigkeiten geben (Abdullah 2007). Dies soll an einem Beispiel aus einer Studie von Kieran und Drijvers (2006) verdeutlicht werden: Lernende untersuchten Polynome der Form x^n-1 , wobei für n unterschiedliche Werte einzusetzen sind. Jedes der Polynome enthält den Faktor $(x-1)$; Polynome mit geradem n haben zusätzlich den Faktor $(x+1)$. CAS dient hier zum Generieren von Beispielen für verschiedene n . Zentral dabei ist nicht das Prozedurale (z.B. Polynomdivision), da dies mit CAS automatisch durchgeführt wird, sondern es geht vielmehr um das Untersuchen der einzelnen Polynome und ihrer gegenseitigen Bezüge. Termstrukturen müssen dabei gezielt erzeugt werden und punktuell für einzelne Termabschnitte als auch insgesamt erkannt und miteinander in Beziehung gesetzt werden. Alle x^n-1 -Polynome lassen sich in folgender

Form darstellen: $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$. Um diese Struktur zu erkennen, müssen die CAS-Ausgaben teilweise, entweder mit Papier und Stift oder mit CAS ausmultipliziert werden. In beiden Fällen wird eine symbolische Darstellung in eine andere übersetzt (Greefrath 2007), was ein wichtiger Bestandteil der für CAS charakteristischen Kompetenz ‚algebraic insight‘ ist (Ball und Stacey 2005). Dabei wird der Erwerb von konzeptuellem Wissen gefördert, CAS wird als Beispielgenerator zum mathematischen Labor und die Arbeitsweise der Lernenden gleicht der der Naturwissenschaften (Cuoco und Levasseur 2003).

1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden: Dieser Erwerb kann durch die bewusste Integration von rechnerfreien Phasen sowohl mit Papier und Stift, als auch mit umfassender Kopfmathematik in Bezug zu CAS geschehen. (Kieran und Yerushalmy 2004, Ingelmann 2009, Artigue 2004, Lagrange 2003)

1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden: Hierbei spielt zum einen die Kommunikation zwischen Nutzer und CAS eine Rolle, zum anderen regt die unterschiedliche Notation in traditioneller Sprache und CAS-Sprache zur Reflektion an. (Drijvers 2003, Greefrath 2007, Ball und Stacey 2005, Zeller und Barzel 2010)

1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen: Im Rechner muss explizit angegeben werden, nach welcher Variable aufgelöst werden soll. Der Aspekt, dass Gleichungen sich nach verschiedenen Variablen auflösen lassen wird damit stark betont. (Fuglestad 2005, Ball und Stacey 2005, Zbiek 2001, Drijvers und Trouche 2007)

2 CAS beim Lehren

2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen: Bei einem fachsystematischen Lernweg wird die Thematik in Schritte zerlegt und sequentiell erarbeitet. Der Einsatz von CAS wird dabei oft ‚verdient‘; d.h. erst wenn ein Verfahren rechnerfrei beherrscht wird, wird es an das CAS abgetreten und beispielsweise in Anwendungsaufgaben genutzt. Der Wert von CAS liegt dabei alleine in der globalen Verkürzung des Lösungsprozesses bei einer Aufgabe (Abdullah 2007), nicht jedoch in individueller kognitiver Anregung, durch die Möglichkeit CAS experimentell einzusetzen. Bei einem genetischen Lernweg werden Schülerinnen und Schüler anhand geeigneter Problemstellungen angeregt, neue Begriffe und Zusammenhänge selbstständig zu erschließen. Dabei können unter CAS-Einsatz unbekannte mathematische Verfahren zu Beginn des Lernprozesses als ‚Black-Box‘ genutzt werden (Buchberger 1990, Kendal & Stacey 2001). Später im

Lernprozess geht es um die Erarbeitung und das Durchdringen dieser Verfahren, auch rechnerfrei - sie werden dann zur ‚White Box‘. Bei einer eigenständigen Begriffsgenese mit CAS können zu Beginn gleichzeitig angesprochene mathematische Felder quasi parallel behandelt und nach und nach einzeln vertieft werden. Den Lernenden gibt dies die Möglichkeit die ‚großen Gedanken‘ eines mathematischen Gebietes bereits zu Beginn zu entwickeln und immer weiter zu verfolgen (Goldenberg 2003). Dadurch können Bezüge zwischen mathematischen Feldern erkannt und verschiedene Bereiche miteinander verknüpft werden.

2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt: Einzelne Schritte offener Aufgaben (z.B. Modellierungsaufgaben) wie die Repräsentationswahl oder das Durchführen von Rechenverfahren werden von CAS unterstützt, womit der Fokus auf den charakteristischen Tätigkeiten, wie dem Bewerten von Modellen und Lösungen liegt. (Challis & Gretton 2002, Doerr & Zangor 2000, Böhm et al. 2004, Zeller & Barzel 2010)

2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege: Untersuchungen zeigen, dass unter freier Medienwahl Lösungswege oft mehrere Repräsentationen und sehr individuelle CAS-Arbeitsweisen beinhalten. (Heid & Blume 2008, Drijvers 2003, Laakman 2008, Leng 2003)

2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht: In Frontalphasen können Rechnerbildschirme projiziert werden und die technische CAS-Bedienung regt Klassendiskussionen an. In selbstständigen Phasen können Ergebnisse mit CAS überprüft werden. (Drijvers und Trouche 2007, Lagrange 2007, Ball & Stacey 2005, Barzel 2006)

3 CAS in der Leistungsmessung

3.1 CAS kann zu neuen Prüfungsformaten anregen: Tätigkeiten wie Argumentieren und Begründen, auf welchen im CAS Unterricht der Schwerpunkt liegt, lassen sich oft nur schwer schriftlich messen. Hierfür können mündliche Prüfungen oder Projektreferate mit CAS-Integration herangezogen werden (Thomas et al. 2004). Wird schriftlich geprüft, so muss nicht unbedingt CAS zur Verfügung stehen, denn es soll nicht die technische Bedienung abgeprüft werden (Neil 2009). Vielmehr ist es möglich, Lernenden die rein technische Arbeit abzunehmen, also in Aufgaben Lösungen anzugeben und diese von Lernenden in Bezug zu CAS bewerten und reflektieren zu lassen (Kieran & Drijvers 2006).

3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen: Werden Tätigkeiten wie Argumentieren und Begründen schriftlich geprüft, so beinhalten die Lösungen von CAS-Lernenden mehr frei geschriebene

Erklärungen in individueller Sprache und Notation als streng mathematische Aussagen und traditionelle Notation. (Bardini et al. 2004, Weigand 2006, Brown 2003, Bradford et al. 2009, Bichler 2007)

3.3 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen: Wenn sich der Schwerpunkt von Unterricht verschiebt, so muss sich dies in neuen Prüfungsformaten widerspiegeln. Routiniertes Ausführen von Verfahren darf also nur in rechnerfreie Prüfungsteile integriert werden, der Schwerpunkt von Prüfungen liegt auf konzeptuellen Tätigkeiten. (Bichler 2007, Brown 2003, Thomas et al. 2004, Weigand 2006)

4 Reflektion und Ausblick

Während in quantitativen Erhebungen oft nur geringe Effekte von CAS nachgewiesen werden (z.B. Barzel 2006, Neumann 2010, Weigand und Bichler 2009), wird in vielen qualitativen Studien deutlich, welche Bereiche durch CAS wie beeinflusst werden (z.B. Drijvers 2003, Ball und Stacey 2005, Bruder und Ingelmann 2009). Demnach kann Lehren und Lernen durch CAS unterstützt werden und das Potential von CAS wird durch eine kognitiv aktivierende Unterrichtsgestaltung mit Fokus auf konzeptionellem Wissen besonders ausgeschöpft. Dazu sind aber die verpflichtende Integration von CAS, um die Unterrichtsentwicklung voranzutreiben, Fortbildungen und Lehrernetzwerke zur Unterstützung und öffentliche Akzeptanz von CAS nötig.

Literatur

Quellen sind in der Expertise aufgeführt (Veröffentlichung 2011)