Andrea SCHINK, Dortmund

Vom flexiblen Umgang mit dem Ganzen – Eine Studie zu Vorstellungen von Brüchen

1. Vorstellungsorientierter Umgang mit Brüchen als Ausgangspunkt

In empirischen Studien wird immer wieder festgestellt, dass der Umgang mit Brüchen Lernenden häufig schwer fällt: So wird z.B. der Kalkül in der Regel technisch gut beherrscht, während inhaltliche Vorstellungen häufig nur unzureichend mit Brüchen und Operationen verbunden werden (vgl. z.B. Prediger 2008, Padberg 2009).

Ausgangspunkt für die hier dargestellte Studie war eine Vorstudie zum Anteil vom Anteil im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA (vgl. Hußmann / Leuders / Barzel / Prediger in diesem Band). Hier erwies sich das Problem der unklaren Bezugsgröße / die Frage nach dem Ganzen als ein epistemologisches Hindernis für ein inhaltliches Verständnis der Multiplikation (vgl. Schink 2008). Die Bedeutung des Ganzen, des relativen Anteils und des damit verbundenen Operierens mit Einheiten als Voraussetzungen für einen flexiblen Umgang mit Brüchen sind dabei keine völlig neuen Erkenntnisse (vgl. z.B. Lamon 1996, Mack 2000). Die Notwendigkeit eines inhaltlichen Verständnisses für die Wahl des Ganzen, sowie dessen flexible Interpretation – auch vor der Multiplikation – zeigte sich in der Vorstudie jedoch besonders eindringlich.

2. Eine Studie zum flexiblen Umgang mit Brüchen

Für die sich anschließende Studie wurden sowohl halbstandardisierte Interviews mit 18 Lernenden aus Klasse 6 einer Gesamtschule, als auch ein schriftlicher Test mit 153 Schülerinnen und Schülern aus Klasse 7 verschiedener Schulformen durchgeführt. Die Wahl für die Interviews fiel auf Klasse 6, da diese Lernenden zwar bereits Erfahrungen zum Teil eines Ganzen gesammelt, den relativen Anteil jedoch noch nicht systematisch erarbeitet hatten und so noch über keine Standardverfahren zur Lösung der Aufgaben verfügten. Der Forschungsfokus lag daher auf den *Prozessen des Strukturierens*. Für den Test wurde Klasse 7 gewählt, da Lernende hier bereits vielfältige Erfahrungen zu Brüchen gemacht haben. Der Forschungsfokus lag hier auf der *Vielfalt der Bearbeitungen auf Produktebene*.

Es stellten sich die folgenden Forschungsfragen:

Wie gehen Lernende in unterschiedlichen Konstellationen mit Teil, Anteil und Ganzem um?

Inwiefern kann der Fokus auf den Umgang mit Teil, Anteil und Ganzem helfen, Hürden (im Lernprozess) zu erkennen und flexibel mit Brüchen umzugehen?

Für die Studie wurden Aufgaben eingesetzt, die sich in Anlehnung an die drei Grundaufgaben der Prozentrechnung jeweils einer *Konstellation* zuordnen lassen (vgl. z.B. Vollrath / Weigand 2007): Von den drei Größen Teil, Anteil und Ganzem sind jeweils zwei gegeben und die dritte gesucht. Zusätzlich wurden auch Aufgaben eingesetzt, bei denen der Vergleich zwischen zwei Konstellationen zentral war. Dabei dienten die Konstellationen hier nicht wie in der Prozentrechnung als Lernstoff für Lernende, sondern der didaktischen Analyse der Aufgaben und der Bearbeitungsprozesse.

Ein weiteres Kriterium für die Aufgaben war die *Qualität des Ganzen*. So wurden die Grundvorstellungen zu Brüchen (vgl. Padberg 2009), die Konstrukte vielfältiger möglicher Vorstellungen aus Vorschauperspektive sind, hinsichtlich des Ganzen betrachtet (vgl. auch Lamon 1996): diskret als Vereinigung einzelner Elemente (z.B. Bonbons), kontinuierlich unstrukturiert (z.B. Kreis) und kontinuierlich strukturiert als Zwischenweg (z.B. geschnittene Torte, bei der man die Fläche oder die Stückanzahl betrachten kann). Diese Unterscheidung erwies sich als fruchtbar, da ein Wechsel zwischen Sichtweisen häufiger beobachtbar war und Einfluss auf die Bearbeitungsprozesse der Lernenden nahm.

Der Fokus der sequenzanalytischen *Interviewanalysen* lag auf der Prozesshaftigkeit und den Strukturierungen von Teil, Anteil und Ganzem, die Lernende erarbeiteten, weiterentwickelten und nutzten. Sie wurden durch operative Vorgehensweisen beschrieben (vgl. z.B. Wittmann 1985), die sich als ein faszinierendes und tragendes Element der Bearbeitungsprozesse erwiesen. Bei der *Analyse der Testdaten* lag der Fokus auf der Untersuchung von Lernständen bzw. verpasster Lernchancen: Die Lösungen wurden hinsichtlich der Strukturierungen qualitativ theoretisch codiert und anschließend quantifiziert.

Beide Datenarten wurden aufeinander bezogen: Der Test diente sowohl zur Verbreiterung der Datenbasis, als auch zur Schärfung des Blicks für die Interviewanalyse. Die Interviews lieferten Ansätze für ein tieferes Verständnis der Strukturierungen auch in den schriftlichen Bearbeitungen.

3. Nutzen operativer Vorgehensweisen zur Bestimmung des Ganzen

Im Folgenden wird mit einem Interviewausschnitt zu der Aufgabe „6 Bonbons sind 2/3, was ist das Ganze?“ eine Schlüsselstelle im Bearbeitungsprozess zweier Sechstklässlerinnen Laura (L) und Melanie (M) dargestellt:

21 L Also 1/3, wenn das 1/3 wärn, wärns 6 mal 3 dann wären das 18´ - Dann wärn das 18 Bonbons - und - wenn das 2/3 wären – *[Pause 3 sec]*, wären das nicht eigentlich auch 18 Bonbons? Das würd auch nicht gehen.

…

29 L Joa aber es sollen ja, also er soll ja <u>2</u> /3. Also wenn das, wenn diese 6 Orangenbonbons da 3, 2/3 wären - dann …

30 M … Aber wenn man …

31 L …Würde man, würde man doch rein theoretisch die Hälfte *[leicht gedehnt]* von 18 nehmen; aber das würde wiederum gar nicht gehen, die Hälfte von 18 geht ja gar nicht.

32 M Die Hälfte von 18 ist 9.

In diesem Prozess sind die operativen Vorgehensweisen der Mädchen zur Erschließung der Lösung zentral: Vor allem Laura variiert die Konstellation immer wieder – sowohl zum Finden, als auch später zum Überprüfen des Ergebnisses. Dabei ist der Austausch des Anteils 2/3 in 1/3 ihre zentrale Vorgehensweise. Für diesen Stammbruch kann sie ein Verfahren zur Bestimmung des Ganzen aktivieren, das sie bereits zuvor im Interview für den Teil 6 und den Anteil 1/4 angewendet hat.

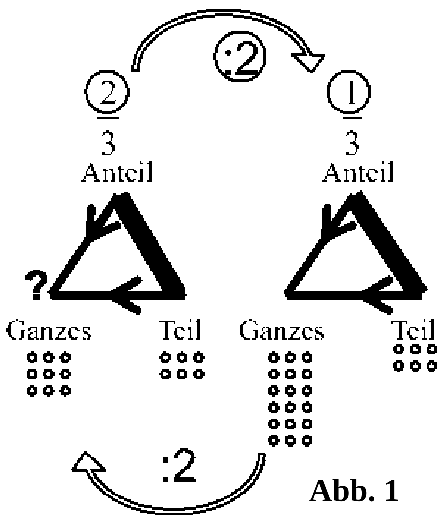

Abb. 1

Von dem Ganzen für 1/3 schließt sie zunächst auch für 2/3 auf das Ganze 18, d.h. sie nimmt keine weitere Veränderung der Konstellation vor (Z. 21). Das Ergebnis revidiert sie direkt selbst. Im Anschluss gelingt es ihr, das Ganze für den Anteil 2/3 korrekt aus der 18 durch Halbieren abzuleiten (Z. 29/31; vgl. Abb. 1). Laura „gleicht“ hier operativ die Konsequenz des Verdoppelns des Anteils durch ein Halbieren des Ganzen „aus“. Ihre Bemerkung, die Hälfte von 18 „ginge nicht“ (Z. 31), bezieht sich, wie der weitere Verlauf zeigt, lediglich auf die Teilbarkeit der 18 durch 2.

Im Test konnten 41 der 153 Lernenden zu dieser Aufgabe einen tragfähigen Rechenweg angeben. Die Hauptschwierigkeit scheint dabei in der notwendigen Strukturierung der Konstellation durch den Zähler zu liegen.

4. Flexibles Strukturieren – Flexibler Umgang mit dem Ganzen

Dieser kleine Einblick wiederholt sich in anderen Teilen der Untersuchung: Die Vielfalt der Strukturierungen, die Lernende vornehmen, ist enorm. Dabei erweisen sich operative Vorgehensweisen als besonders fruchtbar: Das gezielte Auffordern zum Explorieren von Zusammenhängen kann zur Reflexion über implizite Annahmen beitragen und Lernchancen eröffnen, die über das Beherrschen von „Standardverfahren“ hinausgehen. Allerdings können im Strukturieren für Lernende auch Hürden stecken, wenn Zusammenhänge wie z.B. die Rolle des Zählers anders gedacht werden.

Lernende bringen eine Fülle an Vorstellungen mit. So können alltagsweltliche Vorstellungen vom Ganzen helfen, Sinn zu stiften, sie können sich aber auch als zu eng erweisen, wenn z.B. das Ganze als „schöne“ oder „heile“ Form interpretiert wird. Einige Lernende verbinden verschiedene Qualitäten vom Ganzen und wechseln zwischen ihnen selbständig, was sich als sehr fruchtbar erweisen kann. Gleichzeitig können sich hier aber auch Übersetzungsprobleme ergeben.

Der flexible Umgang mit dem Ganzen erweist sich somit als wichtig für einen verständnisorientierten Umgang mit Brüchen und bedeutet in diesem Verständnis: nicht immer nur den Anteil suchen, sondern schon von Anfang an verschiedene Konstellationen bearbeiten, zwischen ihnen mit operativen Vorgehensweisen wechseln und mit verschiedenen Qualitäten vom Ganzen umgehen können.

Einige dieser Aspekte wurden bereits für das Design von Lernumgebungen genutzt (z.B. Prediger / Schink / Schneider / Verschraegen 2012).

Literatur

Lamon, S. J. (1996): The Development of Unitizing: Its role in children´s partitioning strategies. In: Journal for Research in Mathematics Education, 27(2), 170-193.

Mack, N. K. (2000): Long-term effects of building on informal knowledge in a complex content domain: the case of multiplication of fractions. In: Journal of Mathematical Behavior. 19(3), 307-332.

Prediger, S. (2008): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. In: Learning and Instruction, 18 (1), 3-17.

Prediger, S., Schink, A., Schneider, C. & Verschraegen, J. (in Vorbereitung 2012): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken. Erscheint in: S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Schink, A. (2008): Vom Falten zum Anteil vom Anteil – Untersuchungen zu einem Zugang zur Multiplikation von Brüchen. In: E. Vasarhelyi (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Münster: WTM Verlag, 697-700.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007[3]): Algebra in der Sekundarstufe. München: Spektrum.

Padberg, F. (2009[4]): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum.

Wittmann, E. C. (1985): Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: Mathematik lehren 11, 7-11.