

Marc ZIMMERMANN, Ludwigsburg; Daniel HERDING, Aachen

## **Entwicklung einer computergestützten Lernumgebung für bidirektionale Umformungen in der Mengenalgebra**

### **1. Motivation**

Durch den Einzug des Computers in die Hochschullehre entstehen immer mehr Anwendungen für den Lehr- und Lernbetrieb. Lernumgebungen werden verstärkt auch für das außerhochschulische Lernen und den Übungsbetrieb eingesetzt. Zwar wird der Computer von Studierenden als nützlich für die Vermittlung mancher Lerninhalte gesehen, außer in Fächern mit technischem Schwerpunkt (z.B. Informatik, Medizin oder Ingenieurwissenschaften) findet der Einsatz dieser Medien jedoch kaum Akzeptanz bei den Studierenden (vgl. Middendorff S.47ff).

In diesem Artikel sollen einige Probleme von eLearning-Anwendungen diskutiert werden, welche die Lernenden hindern, diese Programme zu nutzen. Anschließend soll anhand des Tools „SetSails!“ zur Übung von mengenalgebraischen Termumformungen eine Möglichkeit aufgezeigt werden, wie eLearning-Programme aussehen können, damit sie bei den Studierenden eine höhere Akzeptanz finden können.

### **2. Mathematisches Problemlösen und eLearning**

Betrachtet man Programme im Bereich eLearning, so lässt sich immer wieder feststellen, dass diese nur wenig mit dem mathematischen Problemlösen zu tun haben. Im Folgendem sollen nun drei Probleme kurz dargestellt werden, die Lernende eher dazu bewegen, Aufgaben lieber mit Stift und Papier zu lösen, anstatt die Hilfe eines Computerprogramms zu nutzen.

Der Prozess des (mathematischen) Problemlösens ist gekennzeichnet von verschiedenen Phasen (vgl. z. B. Polya 1967, Oser und Baeriswyl 2001). In der ersten Phase muss zunächst das Problem, z. B. mit Hilfe von Beispielen, greifbar gemacht werden. Dabei werden schon erste Ideen gewonnen und die Problembarrieren sichtbar. Das Lösen des Problems ist dann meistens „unlogisch und ungeordnet (und manchmal höchst merkwürdig)“ (Malle 1978, S. 46). Anwendungen hingegen haben im Hintergrund meistens nur einen korrekten Lösungsweg. Diesen starren Weg muss der Lerner „ablaufen“ oder er wird dementsprechend gelenkt. Eigene Ideen oder neue Lösungsansätze sind nicht zugelassen, da das Programm diese dann nicht mehr überprüfen kann.

Ein häufiges Problem für Lerner ist, dass diese kein Feedback zu ihrem Lösungsprozess erhalten. Zwar machen die meisten eLearning-Programme die

Benutzer aufmerksam, wenn sie ein falsches (Teil-)Ergebnis haben. Kommt der Lerner allerdings an einer Stelle nicht weiter, kann das Programm keine individuelle Rückmeldung geben. Stattdessen gibt die Anwendung als Tipp dann den nächsten Schritt der Lösung komplett vor. Fox (1991) stellte jedoch fest, dass es vermieden werden sollte, dass auftretende Probleme sofort und vollständig von Tutoren behoben werden sollten.

Das Zeigen der Äquivalenz von Termen oder das Führen von (direkten oder indirekten) Beweisen lässt sich beim Bearbeiten am Computer meist nur in eine Richtung ausführen. Es kann zum Beispiel nur ein Term einer Gleichung umgeformt oder vereinfacht werden, bis er dem der anderen Seite entspricht. Beim Lösen derselben Aufgabe per Hand wird sehr häufig die heuristische Strategie des Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten angewandt (vgl. Fischer und Malle 1989). Diese Möglichkeit der Bearbeitung ist aber noch kaum in Programmen implementiert.

Während die ersten beiden Schwierigkeiten bereits unter dem Stichwort des *Intelligent Assessment* intensiv in der wissenschaftlichen Community diskutiert und bearbeitet werden (vgl. Müller et al. 2006), findet man kaum Anwendungen, die heuristische Prinzipien des Aufgabenlöses berücksichtigen. Entwickelt man eine eLearning-Anwendung für die Lehre, sollte aber die Möglichkeit auf Benutzung dieser Strategien implementiert werden. Es macht ansonsten wenig Sinn, diese in der Lehre einzusetzen, da Lernende immer auf die „traditionelle“ Form mit Stift und Papier zurückgreifen werden.

### **3. Konzeption einer Lernumgebung für die Mengenalgebra**

Mengenlehre an sich wird in der Mathematik nur noch selten gelehrt. Es soll an dieser Stelle nicht das Wiederaufleben der Mengenlehre gefordert werden, ein Grundverständnis von Mengenoperationen ist aber für das mathematische Verständnis grundlegend. Sie findet sich nicht nur in der Funktionsanalysis (z. B. Definitions- und Wertemenge). Auch in für die Lehramtsausbildung relevanten Bereichen der Mathematik wie der Arithmetik (Vielfach- und Teilmengen), der Algebra (Zahlbereiche und deren Verhältnisse zueinander) oder auch der Stochastik (Ergebnismengen mehrerer Ereignisse) spielt der Mengenbegriff eine Rolle.

SetSails! ist eine eLearning-Anwendung, mit der Studierende lernen und üben, Terme in der Mengenalgebra geschickt umzuformen. Die Aufgabe ist es, mittels algebraischer Gesetze und Regeln die Korrektheit einer Äquivalenz, z. B.  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$ , zu zeigen. Für jede Umformung muss zunächst das anzuwendende Gesetz (z. B. Assoziativgesetz, De Morgan'sche Regel) ausgewählt werden. Anschließend muss aus einer Auswahl

von angebotenen Umformungen entschieden werden, welcher Term sich durch Anwendung dieser Regel ergeben soll.

Bei den auszuwählenden Umformungen werden zusätzlich auch falsche Umformungsmöglichkeiten angeboten (sogen. Distraktoren). Dabei werden entweder Operatoren ( $A \setminus B$  wird zu  $A^c \cap B$ ) oder oft verwechselte Gesetze miteinander vertauscht (es wird eine Umformung nach dem Kommutativgesetz angeboten, obwohl das Assoziativgesetz ausgewählt wurde). Es kann den Benutzern also passieren, dass sie dieselben Fehler machen, die sie auch bei der Bearbeitung auf dem Papier machen würden.

Im Gegensatz zu anderen Umformungsprogrammen hat der Anwender bei SetSails! immer die Möglichkeit verschiedene, individuelle Lösungsstrategien zu verfolgen. So ist es z.B. möglich, Umformungen auch beidseitig, nach der Vorwärts und Rückwärtsstrategie, vorzunehmen. Der linke Term der Gleichung ist bei Beginn der Aufgabe immer oben, der rechte Term immer unten im Bearbeitungsfeld zu sehen (vgl. Abb. 1). Der Anwender kann die Äquivalenz zeigen, indem er „top-down“ oder „bottom-up“ vorgeht. Steht in der oberen und unteren Tabelle der identische Term, so können beide Beweisstränge miteinander verbunden werden.

Es stehen dem Lernenden jederzeit verschiedene Möglichkeiten des Feedbacks bei fehlerhaften Umformungen oder zu ihrem Lösungsprozess zur

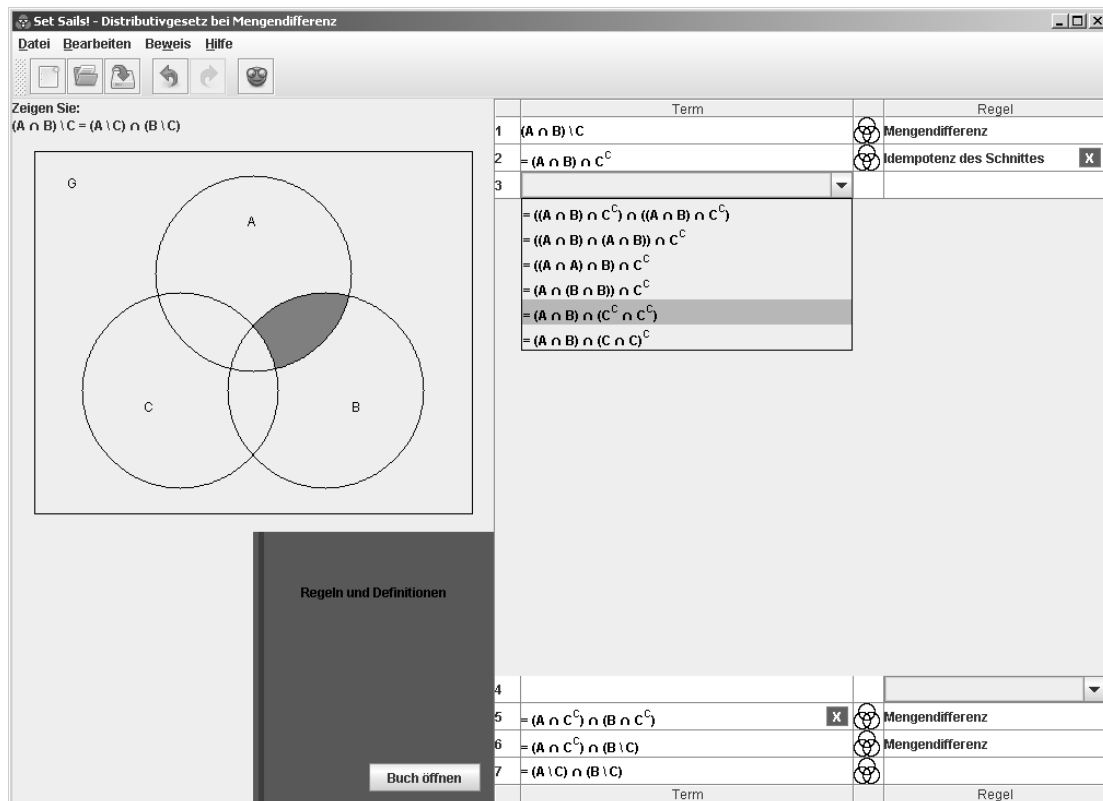


Abb. 1: Die Benutzeroberfläche von SetSails!

Verfügung. Er kann zum Beispiel in einem virtuellen Buch die Regeln und Definitionen– der Mengenalgebra nachschlagen (vgl. Abb. 1). Zudem finden sich neben jeder Umformung ein Icon, mit dem man sich das Mengendiagramm der Umformung anzeigen lassen kann. Dies kann mit der Aufgabenstellung verglichen werden. Automatisches Feedback zu seinen Umformungen und Tipps bei Schwierigkeiten können über das Smiley-Icon in der Kopfzeile eingeholt werden.

#### **4. Einsatz in der Praxis**

Die Lernumgebung SetSails! wurde in einer Betaversion erstmals im Wintersemester 2009/10 an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg eingesetzt. In dieser waren einige der Feedbackmöglichkeiten noch nicht implementiert. Diese Lernumgebung wird im Wintersemester 2010/11 nochmals eingesetzt und hinsichtlich ihrer Effekte auf die Lernmotivation und Akzeptanz der Studierenden evaluiert.

#### **5. Anmerkungen**

Die Arbeit, die in diesem Artikel beschrieben wurde, entstanden in dem Projekt SAiL-M<sup>1</sup>.

#### **Literatur**

- Fischer, R., Malle, G. (1989): *Mensch und Mathematik - eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Mannheim: B.I. – Wissenschaftsverlag.
- Fox, B. A. (1991): Cognitive and interactional aspects of correction in tutoring. In P. Goodyear, (Hrsg.): *Teaching Knowledge and intelligent tutoring* (S. 149 – 172). Norwood, NJ: Ablex.
- Malle, G. (1978): Problemlöseprozesse im Mathematikunterricht. *Didaktikheft Nr. 3 (Klagenfurt Leoben 1978-79)*, S. 45 – 60.
- Müller, W.; Bescherer, C.; Kortenkamp, U.; Spannagel, C. (2006): *Intelligent Computer-aided Assessment in Math Classrooms: State-of-the-Art and Perspectives*. IFIP WG 3 Conference on Imagining the future for ICT and Education, Alesund, Norway.
- Oser, F. & Baeriswyl, F. (2001): Choreographies of Teaching: Bridging Instruction to Learning. In: V. Richardson (Hrsg.), *Handbook of Research on Teaching*. 4. Ausgabe, S. 1031-1065. Washington: American Educational Research Association.
- Polya, G. (1995): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*, 4. Auflage, Tübingen und Basel: Francke.
- Middendorff, E. (2002): Computernutzung und Neue Medien im Studium. Technical report, Bundesministerium für Bildung und Forschung. <http://www.studentenwerke.de/se/2001/computernutzung.pdf>.

---

<sup>1</sup> SAiL-M: Semi-automatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik; gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF); [www.sail-m.de](http://www.sail-m.de)