Grozio STANILOV, Sofia

KANONISIERUNG DER KURVEN ZWEITER ORDNUNG

Wir lösen mit Hilfe von Maple, die folgende wichtige Aufgabe der analytischen Geometrie der Ebene:
Es sei eine nichtausgeartete Kurve zweiter Ordnung bezüglich des Koordinatensystems $Oxy = Oe_1e_2$ gegeben:

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

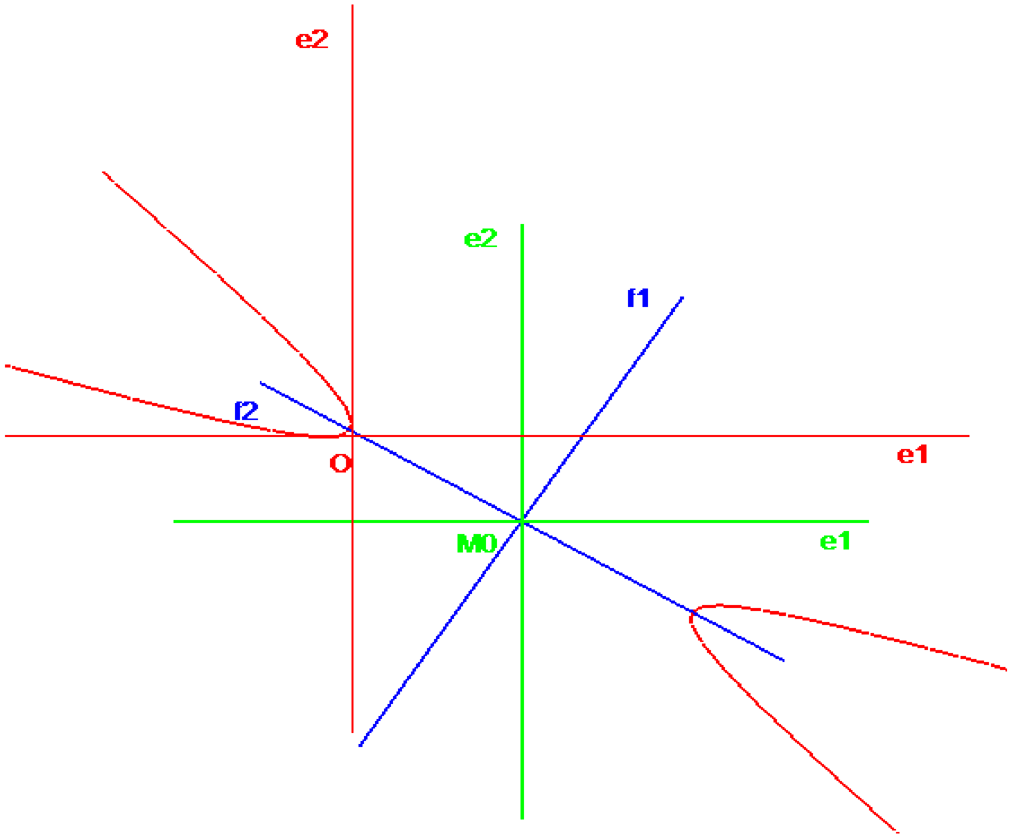
a/ Finde die kanonische Gleichung der Kurve!
b/ Finde die Koordinatentransformationen, die zur kanonischen Gleichung der Kurve führen!
c/ Zeichne die Kurve!
Um diese Aufgabe zu lösen, entwickeln wir zwei computerunterstützte Programme mit Hilfe von Maple.

1. Teil. Mittelpunktskurven (Ellipsen, Hyperbeln)

Schreibe die linke Seite der Kurvengleichung im Maple-Format:
```
F:=a11*x^2+a22*y^2+2*a12*x*y+2*a13*x+2*a23*y+a33;
```
Die Eigenwerte der zugehörigen Matrix sind
```
s1:=1/2*a11+1/2*a22+1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2);
s2:=1/2*a11+1/2*a22-1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2);
```
Maple berechnet die Koordinaten des ersten normierten Eigenvektors:
```
p1:=2*a12/(8*a12^2+2*(a11-a22)^2-2*(a11-a22)*
        ((a11-a22)^2+4*a12^2)^(1/2))^(1/2);
p2:=-2*(1/2*a11-1/2*a22-1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2))
        /(8*a12^2+2*(a11-a22)^2-2*(a11-a22)*
        ((a11-a22)^2+4*a12^2)^(1/2))^(1/2);
```
Maple findet auch die Koordinaten des Mittelpunkts $M_0(x_0,y_0)$ der Kurve:
```
x0:=-(a12*a23-a13*a22)/(-a11*a22+a12^2);
y0:=-(-a11*a23+a12*a13)/(-a11*a22+a12^2);
```
Berechne noch die Konstante in der kanonischen Gleichung:
```
k:=simplify(eval(F,[x=x0,y=y0]));
```

Beispiel 1.
```
a11:=1; a22:=3; a12:=2; a13:=4; a23:=-5; a33:=8;
```
Man verwende das Paket:
```
with(plots):
t1:  =textplot([0,-4,O],align={LEFT},color=red):
t10:=textplot([75,-2.5,e1],align={LEFT},color=red):
t11:=textplot([-2.9,60,e2],color=red,align={LEFT}):
t12:=textplot([x0+43,y0-2.5,e1],color=green,align={LEFT}):
```

```
t13:=textplot([x0-3,y0+43,e2],color=green,align={LEFT}):
t14:=textplot([x0+p1*40-4,y0+p2*40,f1],color=blue,align={LEFT}):
t15:=textplot([x0-p2*40,y0+p1*40-4,f2],color=blue,align={LEFT}):
t2:  =textplot([x0-3,y0-3,M0],align={LEFT},color=green,thickness=4):
t3:  =plot([t,0,t=-45..80],thickness=1):
t4:  =plot([0,t,t=-45..80],thickness=1):
t5:  =plot([x0+t,y0,t=-45..45],thickness=2,color=green):
t6:  =plot([x0,y0+t,t=-45..45],color=green,thickness=2):
t7:  =plot([x0+p1*t,y0+p2*t,t=-40..40],color=blue,thickness=2):
t8:  =plot([x0-p2*t,y0+p1*t,t=-40..40],color=blue,thickness=2):
t9:  =implicitplot(F=0,x=-45..85,y=-60..40,color=red,thickness=2,
        numpoints=3000):
display([t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12,t13,t14,t15],
        view=[-45..85,-65..65]);
```



Das erste Koordinatensystem $Oxy = Oe_1e_2$ ist rot[1] gezeichnet, das zweite $M_0e_1e_2$ grün und das dritte $M_0f_1f_2$ blau, wobei $f_1(p_1,p_2)$. Die Translation ist $Oe_1e_2 \rightarrow M_0e_1e_2$ oder $Oxy \rightarrow M_0x_1y_1$, die Rotation $M_0e_1e_2 \rightarrow M_0f_1f_2$ oder $M_0x_1y_1 \rightarrow M_0XY$.

[1] Die Farben sind nur in den elektronischen Versionen (online beziehungsweise CD), aber nicht in der Hardcopy erkennbar.

Die Transformationsformeln sind für die Translation:

```
x:=x0+x1; y:=y0+y1;
```

und für die Rotation:

```
x1:=simplify(p1*X-p2*Y); y1:=simplify(p2*X+p1*Y);
```

Die kanonische Gleichung ist

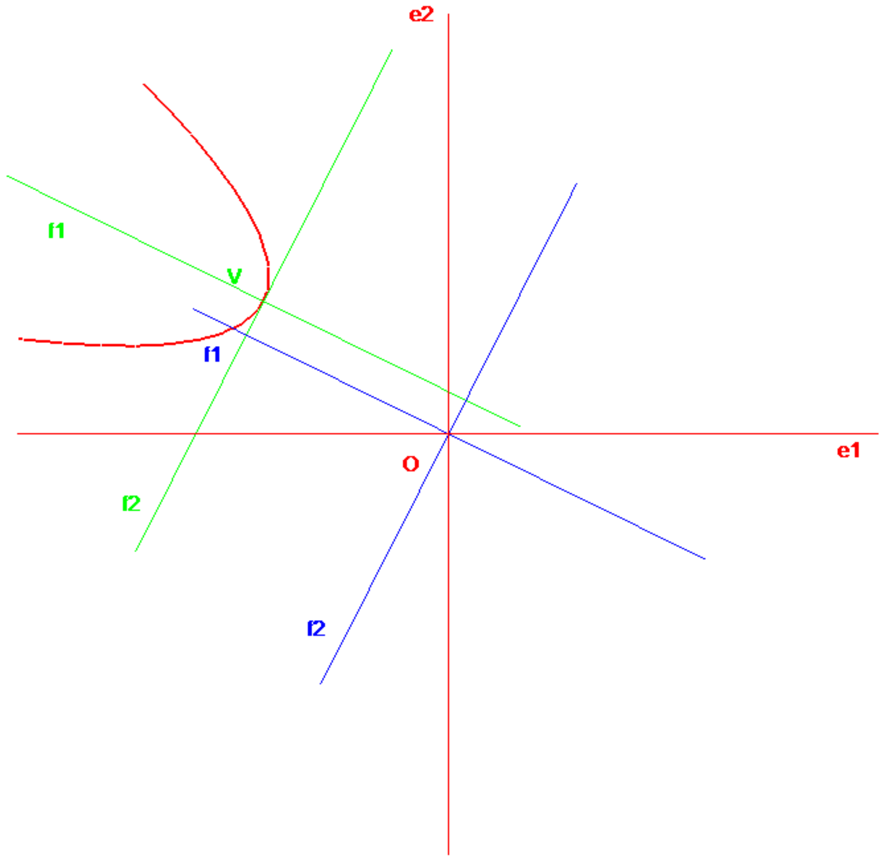
```
KanGleich:=s1*X^2+s2*Y^2+k=0;
```

2. Teil. Kurven ohne Mittelpunkt (Parabeln)

Hier stellen wir ein Programm für die Kanonisierung von Parabeln in klassischer Art vor. Zunächst wird eine Rotation durchgeführt, dann kommt eine Translation. Das Program wird gleich in dem Beispiel 2 vorgeführt.

Beispiel 2.

```
a11:=1; a22:=4; a12:=2; a13:=1; a23:=-2; a33:=6;
F:=a11*x^2+a22*y^2+2*a12*x*y+2*a13*x+2*a23*y+a33;
G:=eval(F,[x=m,y=n]); s1:= 0; s2:=a11+a22;
p2:=(1/sqrt(a12^2+a11^2))*a11; p1:=-a12*1/sqrt(a11^2+a12^2);
x:=x1*p1-y1*p2; y:=x1*p2+y1*p1;
F1:=simplify(eval(F,[a22=a12^2/a11]));
F2:=collect(F1,[x1,y1],recursive); x1:=X+a; y1:=Y+b;
a:= (a33*(a11^2+a12^2)^2-a11*(a11*a13+a23*a12)^2)/2/
        (a12*a13-a11*a23)/(a12^2+a11^2)^(3/2);
b:=a11*(a11*a13+a23*a12)/(a12^2+a11^2)^(3/2);
KanGleich:=collect(simplify(F2),[X,Y],recursive)=0;
v1:=eval(x,[x1=a,y1=b]); v2:=eval(y,[x1=a,y1=b]);
with(plots):
t1:  =textplot([-0.2,-0.2,O],align={LEFT,DOWN},color=red):
t2:  =plot([t,0,t=-3..3]):
t10:=textplot([2.8,-0.1,e1],color=red, align={DOWN}):
t3:  =plot([0,t,t=-3..3]):t11:=textplot([-0.1,3,e2],color=red,align={LEFT}):
t4:  =plot([p1*t,p2*t,t=-2..2],color=blue):
t5:  =plot([-p2*t,p1*t,t=-2..2],color=blue):
t6:  =textplot([v1-0.2,v2+0.13,V],align={WRITE,ABOVE},color=green):
t12:=textplot([p1*1.6-0.2,p2*1.6-0.2,f1],color=blue,align={ABOVE}):
t13:=textplot([-p2*1.6-0.2,p1*1.6,f2],color=blue,align={ABOVE}):
t14:=textplot([v1+p1*1.6,v2+p2*1.6-0.2,f1],align={WRITE},color=green):
t7:  =plot([v1+p1*t,v2+p2*t,t=-2..2],color=green):
t8:  =plot([v1-p2*t,v2+p1*t,t=-2..2],color=green):
t15:=textplot([v1-p2*1.6-0.2,v2+p1*1.6,f2],align={DOWN},color=green):
t9:=implicitplot(G=0,m=-3..3,n=-2..2.5,color=red,thickness=2):
display([t1,t2,t3,t4,t5,t7,t6,t8,t9,t10,t11,t12,t13,t14,t15]);
```



Bemerkung 1. Diese Arbeit ist eine Bearbeitung von Stanilov, G., Slavova, S. (2007).
Bemerkung 2. Ich bedanke mich für finanzielle Unterstützung bei der Alexander von Humboldt Stiftung.

Literatur

Stanilov, G. (2007). *Analytische Geometrie*, 5.Auflage. Sofia: SofTeh – bulgarisch.

Stanilov, G., Slavova, S. (2007). Canonization of Curves of Second Order by Computer Methods. In *Proceedings of the 36. Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Albena, April 02-06, 2007* (S. 410-416) – bulgarisch, englischer Abstrakt.