Markus RUPPERT, Würzburg

Analogiebildung – eine grundlegende mathematische Denkweise

Das Auffinden und Herstellen von Analogien gilt als eine wichtige heuristische Strategie, deren Anwendung nicht zuletzt in der Mathematik herausragende Ergebnisse, wie z. B. die Entdeckung des Grenzwerts für die unendliche Summe reziproker Quadratzahlen durch L. Euler (vgl. z. B. Pólya, 1962), zu verdanken sind. Um diese Strategie im Mathematikunterricht gewinnbringend einsetzen und für Schüler zugänglich machen zu können, ist es zunächst notwendig, mathematische Inhaltsbereiche und Lernsituationen zu identifizieren, in denen Analogiebetrachtungen besonders fruchtbar sind. Dazu muss die Bedeutung des Analogiebildungsprozesses als mathematische Tätigkeit im Rahmen des Lernens von Mathematik eingeordnet werden. Dies wiederum kann nur unter Berücksichtigung kognitionspsychologischer Erkenntnisse geschehen.

1 Von der Verhältnisgleichheit zur Strukturabbildung

Ziel einer Analogiebildung ist es, einen unerschlossenen Sachverhalt in einem Bereich (Zielbereich) durch den Vergleich mit einem bekannten Sachverhalt in einem anderen Bereich (Ausgangsbereich) zugänglich zu machen. Die einfachste Form der Analogiebildung entspringt dem Begriffsverständnis der antiken griechischen Mathematik (z. B. bei Archytas von Tarent; αναλογία = Verhältnis, vgl. Tiemann, 1993). Analogiebildung wird hier verstanden als das Herstellen einer Verhältnisgleichheit der Form „A verhält sich zu B wie C zu D“. Im engeren Sinne sind hier tatsächlich Zahlen- oder Größenverhältnisse gemeint. In einem weiter gefassten Verständnis der Verhältnisgleichheit werden jedoch auch Objekte zueinander in Beziehung gesetzt, die nicht im obigen, streng mathematischen Sinne zueinander proportional sind. Die Verhältnisgleichheit basiert dann einerseits auf dem Vergleich von Objektattributen, vor allem aber auf dem Vergleich der Beziehungen zwischen den beteiligten Objekten. Eine so verstandene Analogie muss jedoch nicht unbedingt eindeutig sein (Beispiel: Quadrat verhält sich zu Würfel wie Dreieck zu Tetraeder – oder auch wie Dreieck zu dreiseitigem Prisma). Eine Überprüfung des Analogieschlusses ist also notwendig und muss die Ziele der Analogiebildung berücksichtigen. Welche Relationen im konkreten Fall zur Analogiebildung herangezogen werden, hängt dabei neben dem verfolgten Ziel der Analogiebildung auch vom Vorwissen ab (vgl. English, 2004).

In Grundintelligenztests zum Messen von Analogiebildungsfähigkeiten (z. B. Culture Fair Test CFT, CFT20) werden häufig Aufgaben verwendet, bei denen die Vervollständigung einer Verhältnisgleichung im obigen Sinn verlangt ist. Dennoch sind es beim Lernen von Mathematik nicht allein die hierzu notwendigen Fähigkeiten, die den Wert eines Analogiebildungsprozesses ausmachen. Vielmehr möchte man erreichen, dass Schüler in der Lage sind, eine vorgegebene unbekannte Situation zu analysieren und mit bereits Bekanntem zu vergleichen, um schließlich aufgrund gemeinsamer Strukturen bekannte Methoden und Strategien auf die unbekannte Situation zu übertragen („Kennst du eine verwandte Aufgabe?“, Pólya, 1949). Diese Fähigkeit wird in der jüngeren Kognitionsforschung durch das Konzept der Strukturabbildung beschrieben (vgl. Gentner, 1983). Der Prozess der Analogiebildung lässt sich dabei als folienartiges Übereinanderlegen und Vergleichen relationaler Strukturen veranschaulichen und der Analogieschluss kann in beiden beteiligten Bereichen als „Auffüllen“ fehlender Entsprechungen unter dieser Abbildung verstanden werden (ebd.). Im Zuge dieser Vervollständigung können zunächst Objekte und Relationen abgebildet (analogisiert) werden. Durch die Beziehung zwischen den Objekten werden Regeln festgelegt, wie mit diesen Objekten operiert werden darf (Methoden, Strategien). Die strukturelle Ähnlichkeit der beiden beteiligten Bereiche legt nun die berechtigte Hoffnung nahe, dass sich auch diese Regeln analogisieren lassen (man denke hier beispielsweise an die Analogie der Rechengesetze für Addition und Multiplikation oder an die Regeln für Konstruktionen im Zwei- bzw. Dreidimensionalen).

2 Analogiebildung als Prozess

Sternberg (1977) unterscheidet aufgrund seiner Beobachtungen beim Lösen von Analogieaufgaben sechs Phasen des Analogiebildungsprozesses: Encoding, Inferring, Mapping, Applying, Justification, Response. Um die Bedeutung des Analogiebildungsprozesses für das Lernen und Betreiben von Mathematik einordnen zu können, liegt ein Vergleich mit anderen dabei maßgeblich beteiligten Prozessen nahe. Bereits Pólya (1949) hat Analogiebildung als Problemlösestrategie erkannt. Zusammen mit den Betrachtungen aus dem ersten Abschnitt kann Analogiebildung sogar insofern als eine übergeordnete Problemlösestrategie bezeichnet werden, als durch sie Strategien von einem Bereich auf einen anderen übertragen werden können. Weiter lässt sich Analogiebildung im Sinne Hadamards (1949) als kreativer Prozess identifizieren und die Beschreibung des Strukturabbildungskonzepts zeigt, dass durch Analogiebildung neue Begriffe und Begriffsstrukturen geprägt werden, Analogiebildung also einen Beitrag zur mathematischen Begriffsbildung leisten kann.

Eine besondere Stellung nimmt der Analogiebildungsprozess beim Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsformen im Allgemeinen und im Zusammenhang mit Modellbildungsprozessen im Speziellen ein. Darstellungen von Objekten auf verschiedenen Repräsentationsebenen können durch Analogiebildung aufeinander bezogen werden. Dabei entscheidet die Art der Repräsentation über den Blickwinkel unter dem ein mathematisches Objekt erscheint und kann so Wege zu weiterführenden Erkenntnissen eröffnen (vgl. Ruppert, 2010). Für den Prozess der mathematischen Modellbildung ist der ständige Perspektivwechsel zwischen Realsituation und mathematischem Modell charakteristisch. Die in der zu modellierenden Realsituation maßgeblich beteiligten Objekte und deren gegenseitige Beziehungen müssen mittels Analogiebildung in mathematische Objekte und Beziehungen übersetzt werden. Erkenntnisse, die bei der Arbeit mit dem mathematischen Modell gewonnen werden, müssen umgekehrt auf ihre Bedeutung für die Realsituation überprüft werden – auch dies geschieht durch Analogiebildung. Ebenso wichtig ist in diesem Zusammenhang der folgende Aspekt: Kann für zwei Situationen auf der realen Ebene eine Analogie hergestellt werden, so liegt die Vermutung nahe, dass diese durch dasselbe mathematische Modell beschrieben werden können. Bruder (2006) spricht hier von gemeinsamen Mathematisierungsmustern. Soll sichergestellt werden, dass der Transfer bei derartigen Aufgabenstellungen gelingt, so muss dieser Zusammenhang gezielt bewusst gemacht werden.

3 Zwei Dimensionen der Analogiebildung

Die bisherigen Ausführungen legen ein Studium des Analogiebildungsprozesses nahe, das sich auf dem Feld zwischen den beiden Dimensionen „Gegenstand der Analogiebildung“ (vgl. Abschnitt 1) und „Phase der Analogiebildung“ (vgl. Abschnitt 2) bewegt. Dabei sind zunächst die Fragen interessant, ob sich konkret beobachtete Analogiebildungsprozesse einerseits und die Entwicklung der Analogiebildungsfähigkeit andererseits innerhalb dieses Feldes beschreiben lassen.

Um solche Beobachtungen durchführen zu können, bedarf es eines geeigneten Beobachtungsrahmens. Dabei liegt es zunächst nahe nach geeigneten Inhaltsbereichen zu suchen, die einen solchen Rahmen bieten können. Besonders häufig wird die Bedeutung der Analogiebildung beim Übergang von der ebenen Geometrie zur Raumgeometrie herausgestellt (vgl. z. B. Becker, 1982). Vor allem durch die Entwicklung dynamischer Raumgeometriesoftware hat dieser Blickwinkel auf die Verzahnung innerhalb der Geometrie wieder an Aktualität gewonnen. Schumann (2006) beispielsweise spricht in diesem Zusammenhang von interaktiver Analogisierung. Weitere Möglichkeiten zur Analogiebildung ergeben sich auch dann, wenn gemeinsame mathematische Strukturen (z. B. Gruppe, Vektorraum, Symmetrie) oder allgemeine mathematische Prinzipien (z. B. Permanenzprinzip, Invarianzprinzip, Schubfachprinzip) zugrunde liegen.

Insgesamt zeigt sich jedoch, dass die genannten Inhaltsbereiche und die meisten bekannten Beispiele zur Analogiebildung weitgehend unverbunden nebeneinander stehen und sich, isoliert betrachtet, weder zum Studium von Analogiebildungsprozessen noch zur Beobachtung einer Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeit eignen. Die obigen Ausführungen zur Bedeutung von Analogiebildungsprozessen im Zusammenhang mit Modellbildungsaufgaben können jedoch einen von den betrachteten Inhalten unabhängigen Rahmen bieten, der eben dies erlaubt. Ziel der weiteren Überlegungen ist es deshalb, innerhalb dieses Rahmens Aufgaben zu entwickeln, die eine Beobachtung von Analogiebildungsprozessen und der Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeit auf der Grundlage des obigen Dimensionsmodells erlauben. Ausgehend von diesen Beobachtungen könnten sich Überlegungen anschließen, wie die Analogiebildungsfähigkeit im Mathematikunterricht gefördert werden kann.

Literatur

Becker, G. (1982). *Integration ebener und räumlicher Geometrie durch Bildung von Analogien*. Mathematica didactica, 15(1). S. 5-14.

Bruder, R. (2006). *Grundlagen für Analogieschlüsse: Mathematisierungsmuster und Vorgehensstrategien in Anwendungssituationen*. Der Mathematikunterricht, 52 (6). S. 5-18.

English, L. (2004). Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood. In: English, L. (Ed.) *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Gentner, D. (1983). *Structure-Mapping: A theoretical framework for analogy*. Journal of cognitive science, 7. S. 155-170.

Hadamard, J. (1949). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Bern: A. Francke.

Pólya, G. (1962). *Mathematik und Plausibles Schliessen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik.* Basel: Birkhäuser.

Tiemann, A. (1993). *Analogie – Analyse einer grundlegenden Denkweise in der Physik*. Thun, Frankfurt a. M.: Harri Deutsch.

Ruppert, M. (2010). *Würfelbetrachtungen – Drei Wege zu höheren Dimensionen*. Der Mathematikunterricht, 56(2). S. 34-53.

Schumann, H. (2006). *Interaktives Analogisieren ebener Geometrie im virtuellen Raum*. Der Mathematikunterricht, 52 (6). S. 37-60.

Sternberg, R. J. (1977). *Component Processes in Analogical Reasoning*. Psychological Review, 84. S. 353-378.