Hermann KAUTSCHITSCH
Universität Klagenfurt

Zins - Immunisierungsstrategien im Analysisunterricht*

1. Problemstellung und Bezeichnungen

Es geht um die Frage, wie ein bestimmter Geldbetrag für einen bestimmten Zeitpunkt gegenüber unvermutet auftretenden Zinssatzänderungen abgesichert werden kann. Dabei soll der Investitionsaufwand natürlich klein sein. Eine Investition in Aktien ist für manche zu riskant, Sparbücher dagegen haben eine zu geringe Rendite, deshalb wird eine Investition in Anleihen (gesamtfällige Obligationen) besprochen. Anleihen sind festverzinsliche Wertpapiere mit einer festen Laufzeit n. Jährlich erhält man am Ende des Jahres einen vertraglich festgelegten Geldbetrag G_k (Kupon), $1 \leq k \leq n$. Am Ende der Laufzeit erhält man die letzte Kuponzahlung und das investierte Kapital (sicherer nachschüssiger Zahlungsstrom). Bezeichnet $r = 1+i$ den Aufzinsungsfaktor und $v = 1/(1+i)$ den Abzinsungsfaktor zum aktuellen Marktzinssatz i, so gilt für den
Barwert (Present value) $PV = B = \sum_{k=1}^{n} G_k v^k$, für den
Endwert (Future value) $FV = E = \sum_{k=1}^{n} G_k\, r^{n-k} = B \cdot r^n$.

2. Experimentelle Beobachtungen und anschauliche Begründungen

Folgende Experimente werden mit EXCEL durchgeführt. Eine ausführliche Darstellung findet man auf der CD-Version.

1. Experiment: Einfluss von Zinsänderungen $\triangle i$
Modellannahme: Die Zinssatzänderung erfolge unmittelbar nach Beginn des Kaufes ($t = 0^+$), dann kann die ganzjährige Zinseszinsformel verwendet werden.
1. Beobachtung: Bei ein und demselben Zahlungsstrom ändern sich Bar- und Endwerte gegenläufig.

2. Experiment: Zeitpunkt t_D der Wertgleichheit
Variiere $\triangle i$ und vergleiche die Wertverläufe $V(t)$ zum Zinssatz $i + \triangle i$ mit dem geplanten Wert $\bar{V}(t)$ zum anfänglichen Marktinssatz i.
2. Beobachtung: Für jeden Zahlungsstrom existiert ein Zeitpunkt $t = t_D$, in dem der geplante Wert $\bar{V}(t)$ mit dem tatsächlichen Wert $V(t)$ übereinstimmt. Bezeichnet $B + \triangle B$ den Barwert zum veränderten Zinssatz $i + \triangle i$, so erhält man aus
$B(1+i)^{t_D} = (B + \triangle B)(1 + i + \triangle i)^{t_D}$ die *Gleichgewichtsformel*:

$$t_D = \frac{ln((B + \triangle B)/B)}{ln((1+i)/(1+i+\triangle i))}$$

Aus dem 2. Experiment ist auch abzulesen:

	$\triangle i < 0$	$\triangle i > 0$
$t < t_D$	$V > \bar{V}$	$V < \bar{V}$
$t = t_D$	$V = \bar{V}$	$V = \bar{V}$
$t > t_D$	$V < \bar{V}$	$V > \bar{V}$

Abb. 1

3. Experiment: Beobachte die Gleichwertigkeitszeitpunkte t_D für verschiedene Zinssatzänderungen $\triangle i$.
3. Beobachtung und 1. Überraschung: Selbst große Zinssatzänderungen in beliebiger Richtung bewirken nur kleine Änderungen von t_D.

$\triangle i$	t_D	
+ 6 %	4,6008	früher
+ 1 %	4,6251	
-1 % < $\triangle i$ < + 1 %		
- 1 %	4,6346	
- 3 %	4,6440	später

Abb. 2

4. Beobachtung und 2. Überraschung: Je stärker die Zinsen steigen, umso *früher* tritt t_D ein. Je stärker die Zinsen *fallen*, umso *später* tritt t_D ein.
Beide überraschende Beobachtungen ermöglichen einen Schutz vor unerwünschten Folgen aus Zinssatzänderungen (*Zinssatzimmunisierung*):

4. Experiment: Halte den Gleichwertigkeitszeitpunkt $t^\star$ für $\triangle i = -1\%$ fest und betrachte Zinssatzänderungen $\triangle i$ a) für $|\triangle i| > 1\%$ und b) für $|\triangle i| < 1\%$.
t_D bezeichne den Gleichwertigkeitszeitpunkt zu diesen Zinssatzänderungen $\triangle i$.

5. Beobachtung: a) Für $|\triangle i| > 1\%$ ist der geplante Wert $\bar{V}(t^\star)$ *immer* kleiner als der tatsächliche Wert $V(t^\star)$. Jede Zinssatzänderung, *unabhängig* von *Richtung* und *Ausmaß*, führt zu einem höheren Endwert.
b) Für $|\triangle i| < 1\%$ kann es passieren, dass $V(t_D) < \bar{V}(t^\star))$, dass also der tatsächlich erzielte Wert kleiner als der geplante Wert ausfällt.
Anschauliche Begründung von a):
1. Fall: Wenn $\triangle i > +1\%$, dann tritt nach Abb. 2 t_D früher ein, also ist $t^\star$ ein späterer Zeitpunkt als $t_D : t^\star > t_D$. Nach Abb. 1 gilt für diesen Zeitpunkt $t^\star : V(t^\star) > \bar{V}(t^\star)$.
2. Fall: Wenn $\triangle i < -1\%$, dann tritt nach Abb. 2 t_D später ein, $t^\star$ ist ein früherer Zeitpunkt $(t^\star < t_D)$, nach Abb. 1 ist wieder $V(t^\star) > \bar{V}(t^\star)$.
Es gibt also nur eine Unsicherheitszone für $|\triangle i| < 1\%$. Diese kann systematisch verkleinert werden $(\triangle i \to 0)$, so dass es praktisch keine Unsicherheit mehr gibt.

5. Experiment: Führe das 4. Experiment für $|\triangle i| < 0,1\%, |\triangle i| < 0,01\% \cdots$ nummerisch durch. Verwende dabei die Spalten:

$$\mid \triangle i \mid \frac{B+\triangle B}{B} \mid A = ln(\frac{B+\triangle B}{B}) \mid \frac{1+i}{1+i+\triangle i} \mid B = ln(\frac{1+i}{1+i+\triangle i}) \mid t_D = \frac{A}{B} \mid$$

6. Beobachtung: Für $\triangle i \to 0$ werden A und B immer kleiner, trotzdem scheint der Quotient $t_D = \frac{A}{B}$ einen bestimmten Wert D anzunehmen ($\triangle i \to 0 \Rightarrow t_D \to D$).

Damit hat man experimentell erhalten:
Zu jedem Zahlungsstrom $(G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots, G_n)$ gibt es einen Zeitpunkt $t = D$, in dem der tatsächliche Wert des Zahlungsstromes immer größer oder gleich dem geplanten Wert ist, ungeachtet wie groß und in welche Richtung eine Zinsänderung erfolgt: $\bar{V}(D) \leq V(D)$.
D heißt die *Duration* des Zahlungsstromes. Damit kennt man schon zum Zeitpunkt $t = 0$, welchen Wert der Zahlungsstrom zum Zeitpunkt $t = D$ mindestens haben wird (immunisierende Wirkung der Duration). Dies rechtfertigt den Namen "Duration": Zeitspanne, bis zu der der Zinssatz "eingefroren" ist ([1]).

3. Theoretische Begründungen

Im Folgenden wird der Grenzwert des obigen unbestimmten Ausdruckes aus den Bestimmungsstücken G_k und i des Zahlungsstromes ermittelt. Dabei wird der Barwert B als eine Funktion $B(i)$ der Variablen i angenommen (*Kontinuierliches* Modell).
Für den "neuen" Barwert $B + \triangle B$ für den Zinssatz $i + \triangle i$ erhält man:
$B + \triangle B = B(1 + \frac{\triangle B}{B})$ und $ln(\frac{B+\triangle B}{B}) = ln(1 + \frac{\triangle B}{B}) \approx \frac{\triangle B}{B} = \frac{\triangle B}{\triangle i} \cdot \frac{\triangle i}{B}$
Damit: Kann man $\frac{\triangle B}{\triangle i}$ abschätzen, dann auch $ln(\frac{B+\triangle B}{B})$ und damit D.
Linearisierung des Modells durch: $\frac{\triangle B}{\triangle i} \approx \frac{dB}{di}$
Mittels Summen- und Kettenregel und $\frac{dv}{di} = -v^2$ erhält man:
$\frac{dB}{di} = \sum kG_k v^{k-1}(-v^2) = (\sum kG_k v^k) \cdot v$
Damit ist: $\frac{\triangle B}{B} \approx \frac{dB}{di}\frac{\triangle i}{B} = -\frac{\sum kG_k v^k}{B} v\triangle i = -Dv\triangle i$ wenn man $\mathbf{D} = \frac{\sum \mathbf{kG_k v^k}}{\mathbf{B}}$ setzt.

Für den Zeitpunkt t_D der Gleichwertigkeit folgt aus
$ln(\frac{B+\triangle B}{B}) = ln(1 + \frac{\triangle B}{B}) \approx \frac{\triangle B}{B} \approx -Dv\triangle i$ und
$ln(\frac{1+i}{1+i+\triangle i}) = ln(1 + \frac{-\triangle i}{1+i+\triangle i}) \approx \frac{-\triangle i}{1+i+\triangle i}$:
$t_D \approx \frac{-Dv\triangle i(1+i+\triangle i)}{-\triangle i} = -Dv(1 + i + \triangle i)$

Damit: Wenn $\triangle i \to 0 \Rightarrow t_D \to D$ ("Nummerische" Konvergenz).

Für diesen Zeitpunkt D gilt nach Beobachtung 6: Der tatsächliche Wert $V(D)$ ist stets größer oder gleich dem geplanten Wert $\bar{V}(D)$, man ist zum Zeitpunkt D also immun gegenüber Zinssatzänderungen.

Bemerkung: Exakt erhält man D mittels der Regel von De L'Hospital oder aus dem ersten Glied in der Taylorentwicklung von $B(i)$. Berücksichtigt man auch das zweite Glied, erhält man den finanzmathematischen Begriff der Konvexität ([2]).

In der Regel ist es jedoch schwierig, eine Anleihe mit vorgegebener Duration zu finden. Eine einfache Rechnung zeigt (siehe CD-Fassung), dass man schon mit zwei Anleihen A_1 mit Duration D_1 und A_2 mit Duration D_2 durch eine Konvexkombination ein Portefeuille PF mit einer Duration $D_{PF} = wD_1 + (1-w)D_2 \in [D_1, D_2]$ erzeugen kann. Dabei ist w der Prozentsatz, mit dem in Anleihe A_1 investiert wird. Nach Rechnung gilt: $w = \frac{D_2 - D_{PF}}{D_2 - D_1}$.
Damit erhält man folgende *Immunisierungsstrategie* zur Absicherung eines Geldbetrages V in D Jahren:

1. Barwertprinzip: Ist i der aktuelle Marktzinssatz, dann beträgt das Investitionsvolumen $B = V(1+i)^{-D}$.
2. Suche zwei Anleihen A_1 und A_2 mit Durationen D_1 und D_2 so, dass: $D_1 < D < D_2$.
3. Durationsprinzip: Bilde ein Portefeuille aus A_1 und A_2 mit Duration $D_{PF} = D$. Investiere in A_1 $w\%$ von B und in A_2 mit $(1-w)\%$ von B, wobei $w = \frac{D_2 - D}{D_2 - D_1}$.

Dann wird zum Zeitpunkt $t = D$ mindestens der Betrag V vorhanden sein (siehe Experiment 8 auf der CD-Version).

4. Didaktischer Nutzen

An Hand dieses wirklichkeitsnahen Beispiels aus der Finanzmathematik können einige formale Qualifikationen und zentrale Begriffe aus der Analysis motiviert, angewendet oder geübt werden. Insbesondere entspricht das Vorgehen einer experimentellen und anschaulichen Mathematik ([3]). Folgende Nutzungsmöglichkeiten gibt es

- *im Modellierungsprozess*: Diskrete Prozesse durch kontinuierliche beschreiben, Linearisieren ($\frac{\triangle y}{\triangle x} \approx \frac{dy}{dx}$, $ln(1+x) \approx x$), Vereinfachen (Keine Berechnung von Transaktionskosten, keine mehrfachen Zinsänderungen, sondern nur eine knapp nach Kauf).
- in der *Analysis*: Ableitung und deren Regeln, einschließlich Kettenregel, Exponential- und Logarithmusfunktion, Grenzwerte, unbestimmte Ausdrücke, Regel von De L'Hospital, Taylorreihe, Auswirkungen des Abbruchs einer Taylorreihe nach dem ersten bzw. zweiten Glied.
- in der *experimentellen Mathematik*: Erzeugen und Interpretation von Tabellen und Graphen, Beobachten von Zuwächsen und Abnahmen und deren Interpretation, Finden von Vermutungen und deren anschauliche Begründungen, Arbeiten mit vorformatierten Arbeitsblättern.

Literatur

[1] Uhlir, H. / Steiner, P. (1994). *Wertpapieranalyse*. Heidelberg: Physika-Verlag.

[2] Bühlmann, N. / Berliner B. (1992). *Einführung in die Finanzmathematik*. Bern-Stuttgart-Wien: Haupt Verlag.

[3] Kautschitsch, H. / Metzler, W. (1994). *Anschauliche und Experimentelle Mathematik II.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.