Torsten FRITZLAR, Halle, Frank HEINRICH, Braunschweig

Doppelrepräsentation und mathematische Begabung – Theoretische Aspekte und praktische Erfahrungen

Weitgehend geteilt wird die Annahme, dass es in verschiedenen, hinreichend komplexen (intellektuellen, sozialen, künstlerischen etc.) Bereichen spezifische Begabungen gibt. Besonders wichtig für die Charakterisierung mathematischer Begabungen im Hinblick auf unsere Thematik scheinen uns die folgenden Ansätze.

Krutetskii erkundete in den 50er und 60er Jahren des 20. Jahrhunderts die Struktur mathematischer Fähigkeiten in einer Gruppe von Schülerinnen und Schülern der fünften bis zehnten Schuljahrgangsstufe mit unterschiedlich ausgeprägten mathematischen Kompetenzen. Davon ausgehend entwickelte er eine Charakterisierung mathematischer Begabung im Schulalter und beschrieb verschiedene Ausprägungstypen, von denen sich der harmonische, in Abgrenzung zu den anderen, in gewisser Weise eingeschränkten Typen durch ein relatives Gleichgewicht von begrifflichen und bildhaft-anschaulichen Komponenten auszeichnet (Krutetskii, 1976).
Kießwetter formuliert auf der Grundlage seiner Überlegungen zu Theoriebildungsprozessen als wesentlichen Elementen des Tätigseins eines forschenden Mathematikers und seiner langjährigen Arbeit mit mathematisch begabten Jugendlichen „Kategorien mathematischer Denkleistungen“, zu denen unter anderem das Wechseln der Repräsentationsebene, das Erkennen und Verwenden vorhandener Muster und Gesetze in „neuen“ Bereichen gehört (Kießwetter, 2006).
Auch Käpnick, der in seiner grundlegenden mathematikdidaktischen Arbeit zu mathematischen Begabungen im Grundschulalter ein Merkmalsystem für mathematisch potenziell begabte Dritt- und Viertklässler formuliert und empirisch untermauert, zählt die Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen zu den mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen. Dieses ergibt sich für ihn auch aus der besonderen Bedeutung der gegenständlichen und anschaulichen Ebene im Mathematikunterricht der Grundschule und der erst allmählichen Entwicklung des sprachlich-begrifflichen Denkens in diesem Alter (Käpnick, 1998).
Aßmus untersucht derzeit die Möglichkeit, bereits für Zweitklässler ein Merkmalsystem mathematischer Begabungen zu formulieren. In dessen vorläufiger Version ist die „Fähigkeit zum Aufbau verschiedener interner Repräsentationen und zum Umgehen mit unterschiedlichen Repräsentationsformen“ als Teil einer allgemeinen „Fähigkeit zu flexiblen Denkprozessen“ enthalten (Aßmus, 2007, S. 249). Die von Aßmus explizierte Unter-

scheidung scheint uns wichtig. Sicher ist es gerade für junge Schüler nicht anspruchslos, zwischen verschiedenen Darstellungsweisen zu wechseln und dabei den mathematischen Inhalt jeweils wiederzuerkennen bzw. zu übertragen; eine diesbezügliche Flexibilität kann auf eine besondere Begabung hinweisen. Mindestens ebenso aussagekräftig ist unseres Erachtens jedoch die Fähigkeit, selbstständig zwischen strukturell verschiedenen mentalen Repräsentationen und dabei oft zwischen der begrifflichen und bildhaft-anschaulichen Modalität zu wechseln, um im Kießwetterschen Sinne neue mathematische Zusammenhänge und Bezüge zu finden, die sich für die weitere Problembearbeitung nutzen lassen (vgl. auch Nolte, 2004)

Die Vorteile einer solchen multimodalen Repräsentation und damit deren Indikatorfunktion für Begabung lassen sich auch denkpsychologisch begründen (vgl. insbesondere Klix, 1992).

Doppelrepräsentation

Bezüglich des Wechselns von mentalen Repräsentationen bleiben die bisher geschilderten Ansätze allerdings phänomenologisch begründet. An dieser Stelle können neurowissenschaftliche Untersuchungsmethoden weitere Anhaltspunkte bereitstellen. So konnte bisher in verschiedenen Untersuchungen gezeigt werden, dass Hochbegabte (beispielsweise in Musik) oder Hochtrainierte (beispielsweise im Kopfrechnen) bei der Bewältigung entsprechender komplexer Anforderungen verstärkt mehrere Repräsentationen aufbauen oder zusätzliche Hirnareale aktivieren (Winner, 1998).

Seidel ging in ihrer Untersuchung mit 12 (nach Lehrerurteil) mathematisch begabten und 12 normalbegabten Gymnasiasten der Frage nach, ob mathematisch Begabte zur Bewältigung komplexer mathematischer Anforderungen in stärkerem Maße sowohl begriffliche als auch bildhaft-anschauliche Repräsentationen – also eine Doppelrepräsentation – aufbauen als Normalbegabte. Dabei verwendete sie Probleme, die für die Schülerinnen und Schüler unter Berücksichtigung ihrer Erfahrungen und Vorkenntnisse sowohl algebraisch als auch anschauungsgeometrisch lösbar waren. Erwartungsgemäß zeigten die mathematisch Begabten bessere Leistungen, sie konnten mehr Probleme und diese schneller lösen als die Normalbegabten. Allerdings waren die besseren Leistungen durch die traditionellen Maße der Experimentalpsychologie nicht erklärbar; bezüglich IQ, Visualisierungsfähigkeit oder Gedächtniskapazität waren Unterschiede zwischen den beiden Versuchspersonengruppen nicht signifikant. Mittels EEG-Analysen konnte jedoch nachgewiesen werden, dass bei mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern bereits innerhalb der ersten Sekunde nach dem Instruktionsverstehen jene Hirnregionen aktiviert sind, die für die begriffliche und bildhaft-anschauliche Modalität verantwortlich gemacht werden, wohingegen bei Normalbegabten eine solche doppelte Aktivation nicht nachweisbar war. Bei einzelnen Schülern aus der Versuchsgruppe konnten außerdem bereits innerhalb der ersten 10 Sekunden der Problembearbeitung mehrfache Wechsel der Aktivation zwischen Arealen der begrifflichen und der bildhaft-anschaulichen Modalität nachgewiesen werden, Gruppenunterschiede waren allerdings nicht signifikant (Krause, Seidel, & Heinrich, 2004).

Schlussfolgerungen

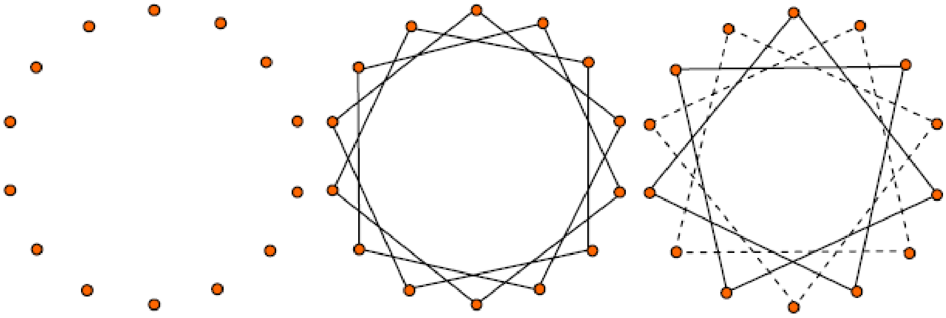
Es liegt nahe, die beschriebene Doppelrepräsentation als hirnphysiologisches Korrelat zum Wechseln der Repräsentationsebenen zu betrachten. Damit unterstützen die in der beschriebenen Fallstudie gewonnenen Befunde die Bedeutung dieser Fähigkeit als Indikator für mathematische Begabungen.

Die wahrscheinliche Existenz eines solchen hirnphysiologischen Korrelats darf nicht zum vorschnellen Schluss einer genetischen Determiniertheit verleiten. Dafür gibt es zu viele neurowissenschaftliche Untersuchungen, die die Plastizität des menschlichen Gehirns nachweisen. Allerdings deuten viele dieser Untersuchungen auch die Existenz von Zeitfenstern an, in denen hirnorganische und –funktionale Anpassungen durch eine „deliberate practice" erfolgen können (Winner, 1998). Für uns liegt daher der Schluss nahe, Schülerinnen und Schülern möglichst frühzeitig und kontinuierlich das Sammeln von Erfahrungen im Bearbeiten von mathematischen Problemstellungen zu ermöglichen, die zum Einnehmen beider Betrachtungsweisen und zu Wechseln zwischen diesen anregen bzw. bei denen solche Wechsel besonders nützlich sind, weil sie eine Lösung ermöglichen oder den damit verbundenen (kognitiven) Aufwand erheblich reduzieren.

Aus Platzgründen können wir hier nur ein Problemfeld ansatzweise vorstellen, das im Regelunterricht einer vierten Klasse eingesetzt werden kann, sich aber insbesondere auch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Viertklässler eignet. Diesen gelingt es nach unseren Erfahrungen häufiger, die an sich geometrische Situation nicht nur mithilfe von Zahlen zu beschreiben, sondern durch arithmetische Beziehungen auch Regelmäßigkeiten auszudrücken, Hypothesen zu formulieren und „prüfende Beispiele" zu konstruieren, die diese widerlegen oder glaubhafter machen können. Damit ordnen die Schülerinnen und Schüler die Sternfiguren in der begrifflichen Modalität in weiterführende Zusammenhänge ein und nutzen diese zur Problembearbeitung.

Sternfiguren

In der linken Abbildung sind 14 Punkte kreisförmig angeordnet. Wenn jeder Punkt nacheinander jeweils mit dem drittnächsten verbunden wird, so entsteht eine regelmäßige Sternfigur mit 14 Zacken. Sie ist im mittleren Bild zu sehen.



Verbindet man jeden Punkt des 14-Punkte-Kreises mit dem viertnächsten, so zerfällt der 14-Punkte-Kreis in zwei regelmäßige Sternfiguren. Im rechten Bild ist die zweite Sternfigur gestrichelt gezeichnet.

1. Zeichne weitere regelmäßige Sternfiguren am 14-Punkte-Kreis. Wann entstehen Sternfiguren mit 14 Zacken, wann zerfällt der Kreis in mehrere Sternfiguren?
2. Wie viele verschiedene regelmäßige Sternfiguren mit 14 Zacken können so gezeichnet werden?
3. Statt 14 kann auch eine andere Anzahl von Punkten im Kreis gezeichnet werden. Wie viele verschiedene regelmäßige, nicht zerfallende Sternfiguren gibt es dann jeweils?
4. Für welche Anzahlen gibt es besonders viele, für welche besonders wenige regelmäßige, nicht zerfallende Sternfiguren?

Literatur

Aßmus, D. (2007). Merkmale und Besonderheiten mathematisch potentiell begabter Grundschüler – aktuelle Forschungsergebnisse. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (pp. 246-249). Hildesheim: Franzbecker.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt am Main: Lang Verlag.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren – und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Eds.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (pp. 128–153). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Klix, F. (1992). *Die Natur des Verstandes*. Göttingen: Hogrefe.

Krause, W., Seidel, G., & Heinrich, F. (2004). Multimodalität am Beispiel mathematischer Anforderungen. In *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät. Band 64* (pp. 135-152). Berlin.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Nolte, M. (Ed.). (2004). *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans*. Hildesheim: Franzbecker.

Winner, E. (1998). *Hochbegabt. Mythen und Realitäten von außergewöhnlichen Kindern*. Stuttgart: Klett-Cotta.