

Hans HUMENBERGER, Wien

Nash-Gleichgewicht und Minimax-Konzept – eine Gegenüberstellung

Die Spieltheorie ist ein Thema, das im Schulunterricht nicht sehr weit verbreitet ist. Aber insbesondere im Lichte fächerübergreifender Aspekte (Wirtschaft, Psychologie: Gefangenendilemma, Biologie etc.) hat die elementare Spieltheorie auch für den Schulunterricht einiges zu bieten (vgl. die letzte Seite dieses Beitrags). Dabei muss natürlich „elementar“ betont werden, denn Spieltheorie als Forschungsdisziplin wird natürlich schnell sehr schwierig. Aus Platzgründen wird hier kaum mehr etwas über das Nash-Konzept¹ gesagt, wir wollen primär das Minimax-Konzept vorstellen, es dem (als bekannt vorausgesetzten) Nash-Konzept gegenüberstellen und zum Schluss einige Aspekte erwähnen, die aus fachdidaktischer Sicht für die Einbeziehung von Spieltheorie in den Schulunterricht sprechen.

Das Minimax-Konzept ist sehr risikoscheu, man trachtet dabei ungeachtet aller anderen Umstände, den eigenen *worst case* abzufedern: Wenn man mehrere Möglichkeiten zur Auswahl hat, wird jene gewählt, bei der der *worst case* am wenigsten schlimm ausfällt.

Ganz abgesehen von moralischen Bedenken gegenüber dem verwerflichen *Nichtbezahlen in öffentlichen Verkehrsmitteln* wollen wir dies am „Schwarzfahrerspiel“ kurz erläutern. Zwei Personen, Fahrgast Franz (FF) und Kontrollor Karl (KK) haben je zwei verschiedene Möglichkeiten:

FF: schwarzfahren / bezahlen?

KK: kontrollieren / nicht kontrollieren?

		KK	
		kontroll. kontroll.	nicht kontroll.
FF	schwarz fahren	-8 3	1 -2
	zahlen	0 -1	-1 0

Hier sind die (subjektiven!) „Auszahlungen“ an die Beteiligten in einer „Bimatrix“ dargestellt. In jedem Feld steht links unten die Auszahlung an FF und rechts oben die an KK. Die Kombination der Strategien *schwarzfahren/kontrollieren* ist dabei natürlich die schlechteste für FF und die beste für KK.

Aus der Sicht von FF: bei *schwarzfahren* ist mein *worst case* – 8, bei *zahlen* nur – 1, also werde ich wohl *zahlen*.

¹ Siehe die Beiträge von C. Ableitinger und P. Hauer-Typpelt in diesem Tagungsband.

Aus der Sicht von KK: Bei *kontrollieren* ist mein *worst case* – 1, bei *nicht kontrollieren* – 2, also werde ich *kontrollieren*.

Nun können sich aber beide fragen: Kann ich die *worst case*-Werte durch „Mischen der Strategien“ sogar noch verbessern? Wir machen dies am Beispiel von KK deutlich.

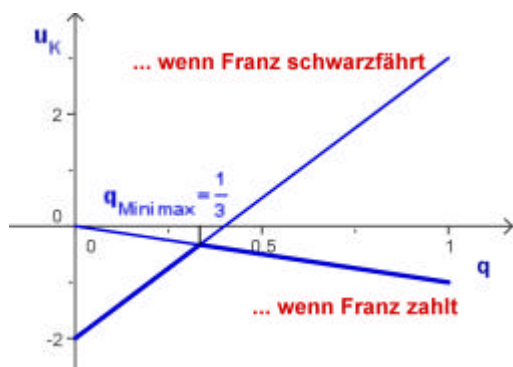
Kann KK seine beiden Möglichkeiten in einem bestimmten Verhältnis $q:(1-q)$ „mischen“, so dass seine durchschnittliche Auszahlung auf lange Sicht doch mehr als – 1 ist? Im Sinne des Minimax-Konzepts ist also ein Mischungsverhältnis gefragt, bei dem der *worst case* möglichst wenig schlimm ist (d. h. das durchschnittliche Auszahlungsminimum maximal).

Wenn KK mit dem Verhältnis kontrollieren : nichtkontrollieren = $q:(1-q)$ spielt (Entscheidung jeweils z. B. durch ein Zufallsexperiment), so beträgt seine durchschnittliche Auszahlung $u_K(q)$ auf lange Sicht:

wenn FF schwarzfährt: $u_K(q) = 3 \cdot q + (-2) \cdot (1 - q) = 5q - 2$

wenn FF zahlt: $u_K(q) = (-1) \cdot q + (0) \cdot (1 - q) = -q$

Diese beiden Geraden können gezeichnet und zum Schnitt gebracht werden, sie schneiden einander beim Wert $q_{\text{Minimax}} = 1/3$.



Die unteren beiden „Äste“ dieser einander schneidenden Geraden sind etwas dicker gezeichnet, sie stellen bei gegebenem q das jeweilige Minimum der durchschnittlichen Auszahlung an KK, den jeweiligen *worst case* auf lange Sicht für KK dar. Da dieser möglichst wenig schlimm, dieses Minimum also möglichst groß werden soll, ist klar:

KK soll am besten $q_{\text{Minimax}} = 1/3$ wählen. Damit ist sein durchschnittliches Auszahlungsminimum nicht nur möglichst groß, sondern die durchschnittliche Auszahlung an ihn ist auch fixiert (gleichgültig, ob FF zahlt oder schwarzfährt), es beträgt – 1/3, dies ist besser als der obige Wert – 1.

Ganz analoge Überlegungen könnte auch FF anstellen: „Wie soll ich meine beiden Strategien mischen schwarzfahren : zahlen = $p:(1-p)$, so dass mein erwartetes Auszahlungsminimum möglichst groß wird (*worst case* möglichst wenig schlimm)? Er käme zu einem Wert $p_{\text{Minimax}} = 1/10$.

Beim Nash-Konzept **RE**agieren die Spieler immer auf den jeweiligen „Fremdparameter“ (aus der Erfahrung als bekannt): Aus der Sicht von FF ist das die relative Häufigkeit q des Kontrollierens durch KK, aus der Sicht

von KK relative Häufigkeit p des Schwarzfahrens von FF. In unserem Spiel würde dies sinngemäß bedeuten:

FF: „Wenn KK häufig genug kontrolliert, werde ich wohl besser bezahlen.“

KK: „Wenn FF häufig genug schwarzfährt, werde ich wohl besser kontrollieren“

Was hier genau „häufig genug“ heißt, wird durch den so genannten „Nash-Wert“ bestimmt, ein „kritischer Vergleichswert“ in diesem Zusammenhang: $q > q_{\text{Nash}} = 1/5$ bzw. $p > p_{\text{Nash}} = 1/6$ (Werte hier ohne Begründung).

Im Gegensatz dazu drehen die Spieler/innen beim Minimax-Konzept aktiv an der Schraube „eigener Parameter“, ganz unabhängig davon, wie sich der/die Gegner/in verhält – natürlich unter einem anderen Gesichtspunkt bzw. mit einem anderen Ziel.

Im Folgenden eine prägnante Gegenüberstellung der beiden Konzepte:

Nash-Konzept	Minimax-Konzept
Ziel: Der/die Spieler/in wählt jedes Mal die „beste Antwort“ auf den bisher gespielten Fremdparameter (REaktion). Langfristig stellt sich als <i>Folge</i> davon der eigene Nash-Wert „von selbst“ ein ² .	Ziel: Der/die Spieler/in will den <i>worst case</i> „abfedern“ (risikoscheu!) und wählt dazu „bewusst“ (Aktion) den Minimax-Wert beim eigenen Parameter.
Das durchschnittliche fremde Auszahlungsmaximum wird dabei minimiert ³ . Dieser für den Gegner etwas unerfreuliche Aspekt ist hier nicht das Kriterium, sondern eine „unschuldige“ Folgerung!	Das durchschnittliche eigene Auszahlungsminimum wird dabei maximiert. Dies ist der primäre Gedanke und das eigentliche Kriterium!
Die durchschnittliche Fremdauszahlung wird fixiert ⁴ .	Die durchschnittliche Eigenauszahlung wird fixiert.

Die Spieltheorie in dieser elementaren Form bietet eine Fülle von positiven fachdidaktischen Aspekten, einige ausgewählte werden im Folgenden (manchmal nur stichwortartig) aufgezählt:

² Vgl. den Beitrag von C. Ableitinger in diesem Tagungsband.

³ Vgl. Abb. 5 und 6 im Beitrag von P. Hauer-Typelt in diesem Tagungsband.

⁴ Vgl. Abb. 5 und 6 im Beitrag von P. Hauer-Typelt in diesem Tagungsband.

- **Gute Vernetzungsmöglichkeit:** Lineare Gleichungen, Zeichnen und Schneiden von Geraden, Relative Häufigkeiten, Durchschnittswerte („auf lange Sicht“), etc. Je nach Klassenstufe kann dabei auch von „Wahrscheinlichkeiten“ bzw. „Erwartungswerten“ gesprochen werden. Dadurch ergibt sich eine
- **Breite Einsatzmöglichkeit:** Verschiedene Klassenstufen (9 – 12) und Schulformen, verschiedene Schwerpunkte (z. B. „Ökonomie“ in Wirtschaftsgymnasien)
- **Trotzdem nur wenige innermathematische Voraussetzungen:** Die involvierte Mathematik ist auf diesem Niveau „relativ bescheiden“ und „technisch leicht“.
- **Darstellen:** Bimatrix, Graphen – Diagramme
- **Interpretieren:** Was *bedeuten* die Geraden? Welche Auszahlungswerte sollen in der Bimatrix stehen? (Diskussionen!) Was passiert, wenn diese verändert werden?
- **Im Vordergrund steht dabei der verständige Umgang:** Semantik wichtiger als Syntax; Herausarbeiten der Charakteristika bzw. Unterschiede; nicht: „Einpauken“ des jeweiligen „Algorithmus“
- **Angemessenes Bild von Mathematik, Realitätsbezüge:** Spieltheoretische Modelle sind wichtig in Wirtschafts-, Sozial-, Politikwissenschaften (auch Evolutionstheorie).
- **Realisierung der „Fundamentalen Idee“ Optimieren:** Beide Konzepte (Nash und Minimax) sind nach ihren (verschiedenen) Kriterien jeweils „optimale“ Lösungen.
- **Nicht-Eindeutigkeit von „Lösungen“:** Von Modellierungsaufgaben ist man ja gewohnt, dass es verschiedene Modelle („Lösungen“) geben kann, bei Optimierungsaufgaben wohl eher nicht. Aber auch „beste Strategie“ kann hier verschieden interpretiert werden, je nachdem welche Kriterien (Nash, Minimax) man anlegt.
- **Mathematik als Prozess ist dabei gut möglich:**
 - relativ hohe Eigenaktivität der Lernenden möglich
 - Intuitive Versionen der Lösungskriterien liegen in beiden Fällen sehr nahe und können auch **selbst** erarbeitet werden:
 - 1) Nash: „Ab einer gewissen Kontrollhäufigkeit ist zahlen besser . . .“
 - 2) Minimax: „Ich wähle jene Strategie, bei der mir am wenigsten passieren kann.“
- **Computereinsatz:** Plot der Graphen (auch 3D, Sattelfläche)