

Jürgen ROTH, Würzburg

## **Geometrie und der Bagger – Anschauung, Begriffe und Ideen vernetzen**

Kant stellt in seiner „Kritik der reinen Vernunft“ fest: „... alle menschliche Erkenntnis (fängt) mit Anschauung an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen“ (vgl. Hilbert 1999). Dieser Dreisprung ist aber keine Einbahnstraße, vielmehr bleibt es eine ständige Aufgabe des Mathematikunterrichts und darüber hinaus jedes selbstständig denkenden Menschen, diese Aspekte miteinander zu vernetzen und in Beziehung zu setzen. Das Produkt dieses Vernetzungsprozesses gilt es bei Problemlöseprozessen konstruktiv zu nutzen und im Sinne Piagets durch Assimilation und Adaption weiterzuentwickeln. Für eine vertiefte Diskussion des häufig wenig reflektiert verwendeten Begriffs „Vernetzung“ sei auf Hischer (2009) in diesem Band verwiesen.

Vernetzung spielt im (Mathematik-)Unterricht eine zentrale Rolle. Lehrkräfte sollten ihren Unterricht so gestalten, dass Beziehungen zwischen den Unterrichtsinhalten erfasst werden. Schülerinnen und Schüler sollen lernen, wie man Wissensnetze aufbaut, sowie vorhandene Wissensnetze nutzt und weiterentwickelt. Vernetzung ist aber auch bei anderen Prozessen, wie etwa der Mediennutzung ein wesentlicher Aspekt. So kann ein geeigneter und individuell verantworteter Einsatz verschiedenster Medien eine entscheidende Komponente bei Problemlöseprozessen sein (vgl. Roth 2009).

Hier soll gezeigt werden, wie geometrische Ideen und Anschauung durch vernetzendes Vorgehen voneinander profitieren. Ideen können aus der Anschauung heraus verstanden werden, Anschauung lässt sich mit Hilfe von Ideen relativieren und reflektieren. Beides kann bei Problemlöseprozessen helfen. Beim Problemlösen können aber auch die Anschauung geschärft und die Entwicklung von Ideen angestoßen werden. Konkret werden hier ausgehend von Aspekten der Bewegung eines Baggerarms geometrische Überlegungen angestellt, Vermutungen aufgestellt, untersucht und schließlich bewiesen. Es zeigt sich, dass man, bei derartiger Herangehensweise an die Geometrie, Grundverständnis aufbauen, Zusammenhänge erkennen und so Wissen vernetzen kann.

### **1. Geometrie am Bagger entdecken – Die Anschauung nutzen**

Im Alltag trifft man immer wieder auf Bagger, haben Sie sich aber schon einmal gefragt, wie die Bewegungen eines Baggerarms gesteuert werden? Betrachtet man einen Bagger bei der Arbeit (das Original, ein Video davon oder eine wirklichkeitsgetreues Funktionsmodell), so können einige Aspek-

te direkt aus der Anschauung erschlossen werden (vgl. Abb. 1). Die Bewegung wird über spezielle Gelenkdreiecke, sogenannte Krandreiecke, gesteuert, bei denen zwei Seiten starr sind und eine Seite (der Kolben) in der Länge veränderlich ist. Die Längenänderung des Kolbens bewirkt eine Bewegung eines Eckpunkts des Krandreiecks auf einem Kreisbogen. Durch die Kopplung mehrerer derartiger Dreiecke, wie am Baggerarm, lassen sich auch komplexe Bewegungen steuern.

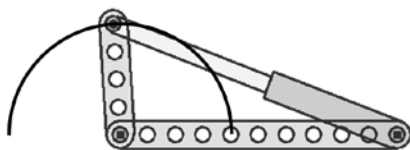


**Abb. 1: Baggerarmsteuerung**

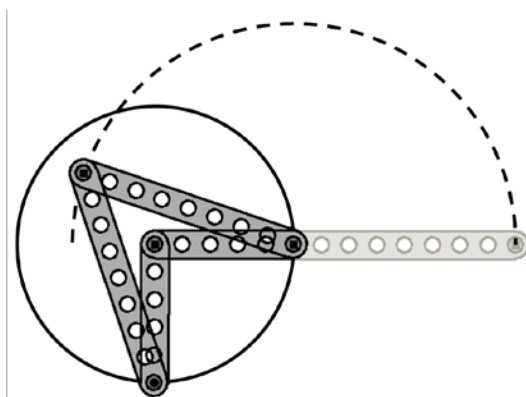


**Abb. 2: Gelenkviereck (Baggerschaufel)**

Zur Steuerung der Bewegung der Baggerschaufel gibt es zusätzlich zu einem Krandreieck auch noch ein Gelenkviereck (vgl. Abb 2). Die Funktion dieses Gelenkvierecks lässt sich erahnen, wenn man einen Bagger beobachtet, der nur die Schaufel bewegt. Mit Hilfe eines Gelenkvierecksmodells aus zusammengeschaubten Lochblechen und (noch besser) mit einer DGS-Simulation eines Gelenkvierecks lässt sich dieses Phänomen erforschen. Ein Krandreieck (vgl. Abb. 3) ermöglicht über die Längenänderung des Kolbens eine Drehbewegung eines Eckpunktes um maximal  $180^\circ$ .



**Abb. 3: Krandreieck**



**Abb. 4: Gelenkviereck**

Bei einem geeignet dimensionierten Gelenkviereck (vgl. Abb. 4) kann man durch Drehung eines Eckpunkts um  $180^\circ$  eine Bewegung eines anderen Eckpunkts um  $360^\circ$  erreichen. Dies lässt sich unter der Internet-Adresse <http://www.juergen-roth.de/dynageo/lochstangen/viereck.html> an Hand ei-

nes DynaGeoX-Applets überprüfen. Durch Variation der Seitenlängen kann dort ein entsprechendes Gelenkviereck experimentell erzeugt und dessen Funktionsweise getestet werden. Dabei wird schnell klar, dass nur bei speziellen Gelenkvierecken durch die Drehung einer Seite um  $180^\circ$  eine Drehung der gegenüberliegenden Seite um  $360^\circ$  erreicht werden kann.

## 2. Zusammenhänge beweisend erschließen

Welche Vierecke haben aber die genannte Eigenschaft? Gibt es evtl. sogar verschiedene Viereckstypen die diese Bedingung erfüllen? Diese Fragen lassen sich durch geeignete Vernetzung der experimentell gewonnenen Erfahrungen mit einer mathematisch-systematischen Herangehensweise beantworten. Um eine derartige Bewegung zu realisieren, muss ein Außenwinkel  $\beta'$  (in Abb. 5 der bei B) zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  variiert werden können und dabei ein Innenwinkel des Gelenkvierecks – hier und im Folgenden der Winkel  $\alpha$  beim Eckpunkt A – den vollen Winkelbereich zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  durchlaufen.

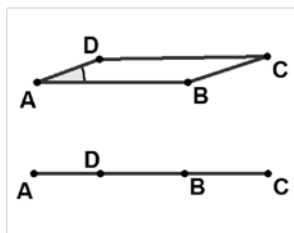


Abb. 5:  $\alpha = 0^\circ$

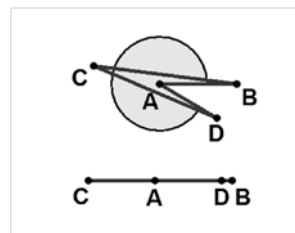


Abb. 6:  $\alpha = 360^\circ$

Eine Grenzlage, nämlich  $\alpha = 0^\circ$  und  $\beta' = 0^\circ$  lässt sich nur dann erreichen, wenn alle Punkte des Vierecks ABCD auf einer Geraden, hier AB liegen. Damit liegen sowohl D als auch B *zwischen* A und C. Für die Seitenlängen folgt daraus (vgl. Abb. 5):

$$(I) \quad |AB| + |BC| = |CD| + |DA|$$

Die zweite Grenzlage mit  $\alpha = 360^\circ$  und  $\beta' = 180^\circ$  wird in Abb. 6 dargestellt. Diese kann sich nur ergeben, wenn A sowohl *zwischen* C und D als auch *zwischen* C und B liegt. Dies ergibt zwei weitere Bedingungen für die Seitenlängen des gesuchten Gelenkvierecks, nämlich:

$$(II) \quad |CD| = |CA| + |AD| \quad \text{und} \quad (III) \quad |CB| = |CA| + |AB|$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich die Beziehungen

$$|CD| = |BC| \quad \text{und} \quad |AB| = |DA|$$

und damit die Erkenntnis ableiten, dass ein Gelenkviereck mit den gewünschten Eigenschaften notwendig ein *symmetrisches Drachenviereck* sein muss.

### 3. Ideen erfassen – Axiome verstehen und nutzen

Die alles entscheidende Idee beim durchgeführten Beweis ist die *Zwischenbeziehung*. Deren Bedeutung für den axiomatischen Aufbau der Geometrie war Euklid nicht bewusst, wurde erst von Pasch vollständig verstanden und von Hilbert (1999) in seinen 1899 erstmals erschienenen „Grundlagen der Geometrie“ in den Axiomen der Anordnung verbreitet. Ein erster Zugang zum Verständnis der Axiome der Anordnung ist bereits im Mathematikunterricht über eine Vernetzung von Modellierungs- und Problemlöseaktivitäten mit der Reflexion von benutzten Ideen möglich. Diese Erkenntnis steht aber nicht am Ende sondern sollte wiederum genutzt werden, um eine neue Perspektive auf scheinbar offensichtliche Aspekte der Anschauung, zu gewinnen und diese kritisch zu reflektieren. Zu diesem Zweck ist etwa die Auseinandersetzung mit dem „Beweis“ hilfreich, dass jedes Dreieck gleichschenkelig ist. Dazu wird (vgl. Abb. 7) der Schnittpunkt D der Winkelhalbierenden des Winkels bei C mit der Mittelsenkrechten der Seite [AB] betrachtet. Mit Hilfe von Kongruenzsätzen lässt sich jeweils zeigen, dass entsprechende Dreiecke in der linken und rechten Hälfte des Dreiecks jeweils kongruent sind, deshalb  $|AC| = |BC|$  und damit das Dreieck ABC gleichschenkelig ist. Dies würde bedeuten, dass jedes Dreieck gleichschenkelig ist!

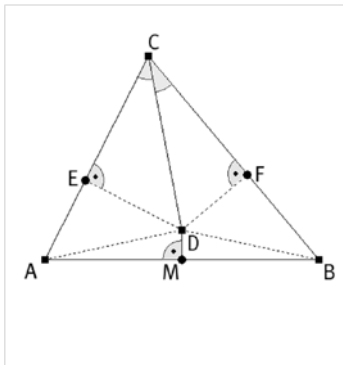


Abb. 7: Gleichschenkelig!?

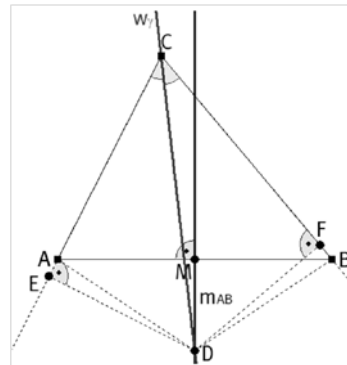


Abb. 8: Gleichschenkelig? – Nein!

Wie Abb. 8 zu entnehmen ist liegt der Fehler darin, dass D nicht im Inneren des Dreiecks und damit auch E nicht zwischen A und C liegt. Es gilt also: Vorsicht mit der Anschauung im Hinblick auf die Lage von Punkten!

### Literatur

- Hilbert, D. (1999). Grundlagen der Geometrie. Stuttgart, Leipzig: B.G. Teubner
- Hischer, H. (2009). Was sind und sollen Vernetzungen? In: GDM (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: Martin Stein Verlag
- Roth, J. (2009). Mathematik rund um den Bagger – Medien vernetzen, Modellieren erleichtern. Erscheint in U. Kortenkamp, A. Lambert (Hrsg.): *Medien vernetzen. Bericht über die 26. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" vom 26.-28. September 2008 in Saarbrücken*. Hildesheim: Franzbecker