Grozio STANILOV, Slavka SLAVOVA, Dobrich

Eine Anwendung der Computer Algebra bei der Modellierung einer geometrischen Aufgabe

In der vorliegender Arbeit zeigen wir die grosse Moeglichkeiten,die uns die Computer Algebra und Computer Graphik vorbieteten. Die Computer Algebra ist zum Rechnungen benutzt und Computer Graphik – zum Zeichnungen. Alles macht Spass und bringt Vergnugung.
Anfangspunkt ist ein Dreieck ABC mit festen Punkten A und B.Wir waehlen ein Koordinatensystem Oxy ,so dass $A(a,0), B(b,0), C(c_1,c_2)$ mit $c_2 \quad 0$ .Die Hoehe durch C hat Gleichung $x = c_1$,und die Hoehe durch A -parametrische Gleichungen $x = a + c_2 u, y = (b - c_1)u$, u -parameter.Um das Orthocentrum $H(h_1, h_2)$ zu finden, wir loesen das System:

```
solve({h1=c1,(h1-a)*(b-h1)=c2*h2},{h1,h2});
```

$$h1 := c1 \text{ , } h2 := -\frac{(b - c1)(-c1 + a)}{c2}$$

Offensichtlich $c_2 \quad 0$ .Eliminiere c_1,bekommen wir die Gleichung

(1) $$F = (a - h_1)(b - h_1) + c_2 h_2 = 0 .$$

Es sei $g : y = kx + n$ eine beliebige Gerade ist,die C enthaelt,also $c_2 = kc_1 + n$ .Da $c_1 = h_1$ ist, ersetze c_1, c_2 in F ,bekommen wir

(2) $$f = (a - h_1)(b - h_1) + (kh_1 + n)h_2 = 0 .$$

Daraus folgt: das Orthocentrum $H(h_1, h_2)$ beschreibt eine Kurve zweiter Ordnung,die A und B enthaelt. Nun wollen wir diese Kurve untersuchen.

```
with(LinearAlgebra):
M:=Matrix([[1,k/2,-(a+b)/2],[k/2,0,n/2],[-
(a+b)/2,n/2,a*b]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} & -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 & \frac{n}{2} \\ -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} & \frac{n}{2} & a\,b \end{bmatrix}$$

```
d:=Determinant(M);A33:=1*0-(k/2)^2;
```

$$d := -\frac{n^2}{4} - \frac{k\,n\,a}{4} - \frac{k\,n\,b}{4} - \frac{k^2\,a\,b}{4} \text{ ,}$$

Loese das System

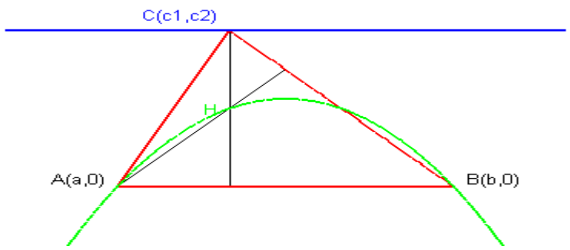

Fig.1

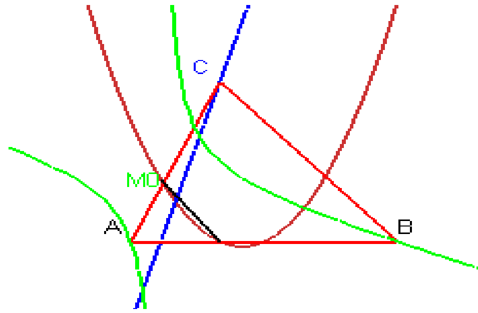

Fig.2
($a=-1, b=2, c_2=2, k=3, n=2$)

```
solve({x0+k/2*y0-1/2*(a+b)=0,k/2*x0+n/2=0},{x0,y0});
```

$$\{y0 = \frac{k\,a + k\,b + 2\,n}{k^2},\ x0 = -\frac{n}{k}\}$$

man findet das Mittelpunkt der Kurve $M_0(x_0, y_0)$. Loese die Gleichung

```
solve({d=0},{n});
```

man findet die Faelle wann die Kurve entartet ist.Aus der Gleichung von g folgt das $g = BC$ (Fig.3) oder $g = AC$.
Aus A_{33} folgt: ist $k=0$ die Kurve eine richtige Parabel ist. Dann die Gerade g ist parallel zu AB (Fig.1).In anderen Faellen die Kurve ist eine Hyperbel (Fig.2)

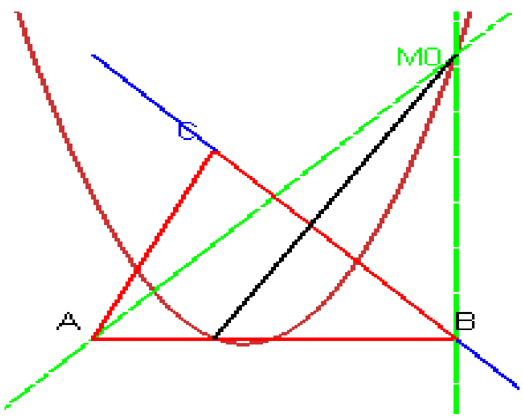

Fig. 3 ($a=-1, b=2, k=-1, n=2$)

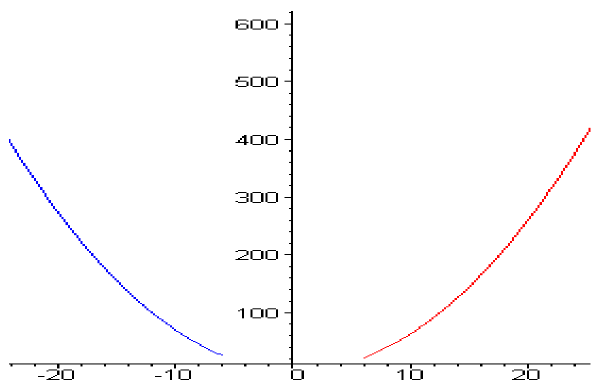

Fig.4

Ein besonderen Fall ist auch wenn die Gerade g (durch C) steht orthogonal zu AB.Dann der Punkt H beschreibt dieselbe Gerade g.Damit haben wir bewiesen :

Behauptung 1. *Es sei ABC ein Dreieck mit festen Punkten A und B. Wenn der Punkt C beschreibt eine Gerade g ,dann der Orthocentrum H bescheribt eine Kurve zweiter Ordnung, die :1. Ist die Gerade g parallel zu AB, dann bekommt man eine Parabel durch die Punkte A und B .2. Wenn die Gerade g schneidet die Gerade AB dann bekommt man eine durch A und B Hyperbel,die entartet ist,genauer, wenn 3. Die Gerade g ist entweder AC oder BC genauer: a).ist g BC ,die Kurve besteeht aus zwei Geraden durch M_0 ,eine geht durch B und ist orthogonal zu AB ,die andere durch A ; b).ist g AC ,die Kurve besteeht aus zwei Geraden durch M_0 ,eine geht durch A und ist orthogonal zu AB ,die andere durch B ;und 4. Ist die Gerade g orthogonal zu AB ,dann die Kurve ist wieder g .*

Bemerkung. Ein Teil dieser Behauptung ist bewiesen in [1].

Nun wollen wir den geometrischen Ort des Punktes M_0 charakterisieren.Dafuer aus beiden Koordinaten von M_0 schliessen wir zunaechst k als Parameter aus. Es folgt:

(3) $$y_0 = \frac{2}{n}x_0^2 - \frac{a+b}{n}x_0$$

Offenbar ,diese Gleichung bestimmt eine Parabel (Fig. 2 , Fig. 3, und Fig. 4).
Wir koennten auch n als Parameter ausschliessen: es folgt (Fig.5)

(4) $$ky_0 + 2x_0 - (a+b) = 0 .$$

```
with(plots):p1:=plot([eval(x0,[a=-1,b=2,n=3]),eval(y0,[a=-1,b=2,n=3]),k=-0.5..-0.1]):
p2:=plot([eval(x0,[a=-1,b=2,n=3]),eval(y0,[a=1,b=2,n=3]),k=0.1..0.5],color=blue):
display([p1,p2]);
```

```
plot([eval(x0,[a=-1,b=2,k=3]),eval(y0,[a=-1,b=2,k=3]),n=-2..2]);
```

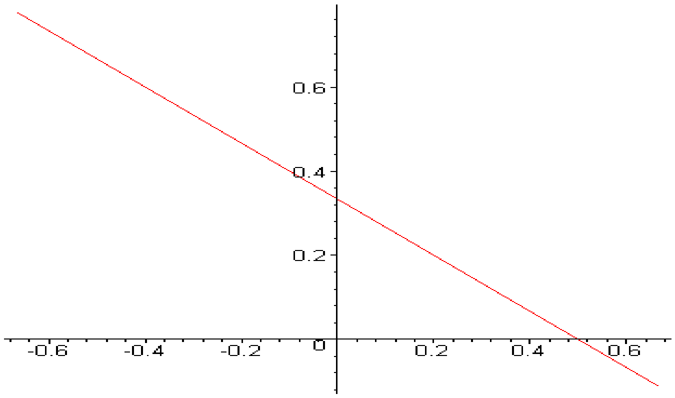

Fig. 5

Damit haben wir bewiesen

Behauptung 2 .*Der geometrische Ort von den Mittelpunken* M_0 *der induzierten von den Geraden* g *Hyperbeln wenn man die Gerade* g *um den Punkt* $N(0,n)$ *gedreeht wird, ist die Parabel (3). Der geometrische Ort von den Mittelpunken* M_0 *der induzierten von den Geraden* g *Hyperbeln wenn man die Gerade* g *parallel zum vector mit koordinaten* $(2,k)$ *orthogonal bewegt wird, ist die Gerade (4).*

Literatur

[1] Stanilov G.: Konstruktionen von Parabeln und Hyperbeln, Mathematik und Physik, 1962, 233-234(bulgarisch).