

Mathias HATTERMANN, Gießen

## **Kegelschnitte: Ein alter Hut im neuen Gewand? Möglichkeiten eines umstrittenen Lehrinhalts in Schule und Hochschule**

Das Thema „Kegelschnitte“ hat, wie kaum ein anderer Unterrichtsinhalt, die didaktische Diskussion in den letzten 200 Jahren geprägt. Im Folgenden werden zahlreiche Argumente genannt, die die Bedeutung des Themas unterstreichen und die Verbindlichkeit im Lehrplan fordern. Die Möglichkeiten der Nutzung von dreidimensionalen Geometriesystemen wie Archimedes Geo 3D und Cabri 3D werden ebenfalls aufgezeigt. Der Artikel schließt mit einem Vorschlag, wie das Thema Kegelschnitte im Curriculum der analytischen Geometrie eingebettet werden kann und stellt in Aussicht, wie man von einer Papierstreifenkonstruktion der Ellipse zu Kurven sechsten Grades gelangt.

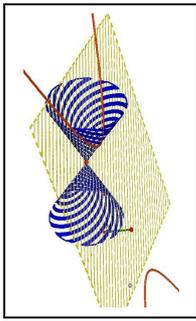
### **Warum Kegelschnitte als Lehrinhalt?**

Die verschiedenen nichtentarteten Kegelschnittformen Ellipse, Parabel und Hyperbel sind anschauliche Gebilde, die uns in vielfältigen Formen im Alltag begegnen. Man denke an den schräg angeschnittenen Holzstamm, die angeschnittene Eistüte, die Kurve, welche eine Wasserfontäne beschreibt, die Wurfparabel oder einfach die Oberfläche eines schräg gehaltenen Wasserglases. Weitere Beispiele hierzu finden sich in [5]. Desweiteren ist die Behandlung von Kegelschnitten mit unterschiedlichen Methoden möglich. Eine erste Begegnung mit Kreis und Ellipse ist bereits auf rein enaktiver Ebene in der Grundschule denkbar. Das Hantieren mit dem Ellipsenzirkel oder die Durchführung einer Gärtnerkonstruktion, mit Hilfe zweier Reißzwecke und eines Fadens, ist für Viertklässer durchaus praktikabel. Mit den Mitteln der Mathematik der zehnten Klasse ist es ebenso möglich, die nichtentarteten Kegelschnitte mit Hilfe der Koordinatenmethode algebraisch zu beschreiben. In der Oberstufe spielen im momentanen Curriculum vektorielle Methoden im Bereich der analytischen Geometrie eine wesentliche Rolle, die zur Berechnung von Schnittkurven eines Kegels mit einer Ebene ebenso eingesetzt werden können. Zur Beschreibung und Berechnung der Schnittkurven werden keine Kenntnisse und Verfahren benötigt, die über elementare vektorielle Methoden hinausgehen. Die Visualisierung von Kegelschnitten, als Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene, wird mit Hilfe von Modellen oder Geometriesystemen auf jeden Fall zur Einsicht und zum Verständnis beitragen. Somit sind Kegelschnitte äußerst geeignet für die Anordnung im Spiralcurriculum, das sich von der Grundschule, über Mittel- und Oberstufe bis in den universitären Bereich hin erstreckt, in dem differentialgeometrische oder projektive Methoden zum Einsatz kommen und weitere Perspektiven auf das Thema eröffnen.

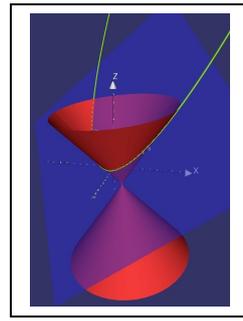
Kegelschnitte bieten eine hervorragende Umgebung, besonders bei der Behandlung mit dynamischen Geometriesystemen, zum Experimentieren, Argumentieren und Beweisen. Es bieten sich verschiedene Zugänge an, die sich sowohl mit der Klärung einfacher Sachverhalte als auch mit komplexen Fragestellungen auseinandersetzen. Ersetzt man in der Brennpunktsdefinition der Ellipse, das Wort „Summe“ durch das Wort „Differenz“ ergibt sich eine Hyperbel, bei Ersatz durch die Worte „Produkt“ oder „Quotient“ ergeben sich Cassinische Kurven bzw. der Apolloniuskreis. Siehe hierzu [6]. Bei solchen Fragestellungen ergeben sich zunächst die Schwierigkeiten der Implementation solcher Definitionen in zweidimensionale DGS-Systeme, wobei die Untersuchung der Konstruktion auf Korrektheit und die Analyse der Kurve keine trivialen Aufgaben darstellen und somit den Lernenden sowohl fordern als auch fördern. Es bieten sich weitere Möglichkeiten durch Vergleich von Hüllkonstruktionen und Brennpunktsdefinitionen, durch Analyse von Tangentenproblemen und das Herstellen des Bezugs zum tatsächlich durchgeführten Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene über Dandelin'sche Kugeln, an. Somit erfüllen Kegelschnittkurven viele, wenn nicht sogar alle, Anforderungen, die von Lehrenden in den letzten Jahren an ein „gutes“ Unterrichtsthema gestellt wurden. Vorschläge zur konkreten Behandlung von Kegelschnitten finden sich bei Meyer [2], Schumann [3], Schupp [5] und anderen.

### **Zum neuen Gewand**

Argumente, die einer Aufnahme der Kegelschnitte als obligatorische Unterrichtseinheit entgegenstehen, sind im Wesentlichen die Konkurrenz anderer Unterrichtsinhalte und somit der Zeitnot und das Problem der aufwändigen Darstellung der Schnittkurven, beim Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene. Mit Hilfe der dreidimensionalen Geometriesysteme Archimedes Geo 3D und Cabri 3D kann zumindest das zweite Argument entkräftet werden. Beide Systeme bieten bereits implementierte Beispieldateien, in denen mit Hilfe des Zugmodus die Variation der Schnittebene ermöglicht wird. So ist die Erzeugung aller Kegelschnittkurven möglich. Besteht das Ziel darin, die Programme nicht nur zur Visualisierung zu benutzen, sondern selbst einen Doppelkegel samt Schnittebene zu konstruieren, so ist die Konstruktion in Cabri 3D einfacher, da das Konstruktionsobjekt „Kegelmantel“ existiert, das zu vorgegebenem Kreis und Kegelspitze den Kegelmantel konstruiert. In Archimedes Geo 3D werden sowohl der Kegel als auch die Schnittkurven als Ortsflächen bzw. -linien erzeugt, was ein tieferes mathematisches Verständnis voraussetzt.

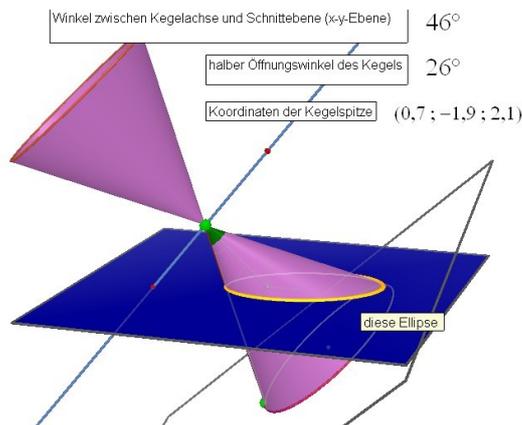


Datei „Kegelschnitt“ aus Cabri 3D



Datei „Kegelschnitt“ aus Archimedes Geo 3D

Cabri 3DV2 bietet zudem die Möglichkeit sowohl Winkel zwischen Ebene und Gerade als auch zwischen Gerade und Gerade zu messen. Somit ergeben sich für Schüler bzw. Studierende interessante Möglichkeiten der Nutzung, um die Abhängigkeit der Schnittkurve vom variablen Öffnungswinkel des Kegels und dem variablen Schnittwinkel von Kegelachse und Schnittebene zu untersuchen.



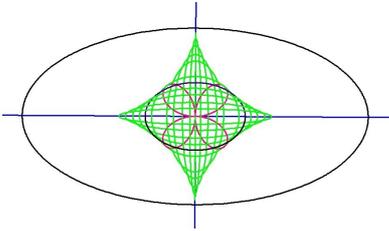
In nebenstehendem Bild sind in der Originalkonstruktion sowohl der Öffnungswinkel des Kegels als auch der Schnittwinkel zwischen Kegelachse und der blauen Schnittebene variabel, so dass auf verschiedene Art und Weise experimentiert werden kann.

Um konkrete Berechnungen mit vektoriiellen Methoden durchzuführen sei auf [1] verwiesen, in dem zunächst die Doppelkegelgleichung  $(\vec{SX} * \vec{a})^2 = |\vec{SX}|^2 \cos^2(\alpha)$  anschaulich hergeleitet wird. Sodann wird die x-y Ebene als Schnittebene festgehalten und verschiedene Kegel betrachtet und deren Schnittkurven mit der x-y Ebene berechnet. Die Ergebnisse können an obiger Konstruktion leicht verifiziert und veranschaulicht werden.

### Kurven sechsten Grades

Es ist bekannt, dass jeder Punkt eines Papierstreifens fester Länge eine Ellipse beschreibt, wenn die Endpunkte des Streifens auf der x- bzw. y-Achse gleiten. Zeichnet man jedoch die Ortsfläche des gesamten Papierstreifens auf, ergibt sich eine Kurve sechsten Grades, die Astroide. Fällt man das Lot des Ursprungs auf den Papierstreifen und zeichnet die Fußpunktcurve, ergibt sich als Ortslinie die Rosette. Diese Kurven basieren im Wesentlichen auf der Papierstreifenkonstruktion der Ellipse und bieten geeignete Themen für weiterführende Gedankengänge, Projekt- oder Facharbeiten. Inter-

essante Untersuchungsgegenstände sind Symmetrien, Winkelhalbierende, Inkreis, Umkreis und Flächeninhalte. Näheres hierzu in [4].



Ellipse, Astroide und Rosette als Ergebnis der Aufzeichnung von Ortslinien verschiedener Punkte, ausgehend von einer Papierstreifenkonstruktion.

Somit wurde gezeigt, dass Kegelschnitte, vor allem durch die Präsenz dreidimensionaler Systeme, im Unterricht implementiert werden können und müssen, da sie fundamentale Denkweisen vereinigen und Zugänge zu höheren Kurven ermöglichen.

### Literatur

- [1] H. Griesel, H. Postel, F. Suhr: Elemente der Mathematik-Leistungskurse. Schroedel - Verlag, 2001
- [2] J. Meyer: Kegelschnitte mit Geometrie-Software. In: Mathematik betrifft uns Heft 5/1996. Download als PDF-Datei unter: <http://www.mi.uni-erlangen.de/~tschach/ss2006/Kegelschnitt.html> (Zugriff: 12.4.2007)
- [3] H. Schumann: Behandlung der Kegelschnitte im virtuellen Raum mit Cabri 3D. In: Beiträge zum Computereinsatz in der Schule, Dynamische Raumgeometrie I, Pädagogische Hochschule Weingarten, Heft 2, Dezember 2004
- [4] H. Schupp, H. Dabrock: Höhere Kurven. Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Band 28, herausgegeben von N. Knoche und H. Scheid. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1995
- [5] H. Schupp: Kegelschnitte. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Band 12, herausgegeben von N. Knoche und H. Scheid. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1988
- [6] C. Zwerenz: Zugänge zu den Kegelschnitten und ihr fachdidaktische Analyse. Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades „Magistra der Naturwissenschaften“ an der Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Wien, Juni 2000