Elke KURZ-MILCKE, Laura MARTIGNON, Ludwigsburg

Stochastische Urnen und Modelle in der Grundschule

Urnen sind aus der Stochastik nicht wegzudenken. Im Zusammenhang mit einer Didaktik der Stochastik ist das Konzept der Urne zweifach *generativ*. Es kann (1) die Herstellung von Beispielen aus Modellklassen anregen, sowie (2) die Herstellung von Aufgabensystemen (Steinbring, 1991).

1. Das Konzept der stochastischen Urne

Wir verstehen Konzepte hier nicht im Sinne von notwendigen und hinreichenden Bedingungen, sondern „as sets of constraints [Bestim-mungen] for generating members of classes of models“ (Nersessian 2002, p. 137). Für die *stochastische Urne* ergeben sich die folgenden Bestimmungen:

- eine klare Abgrenzung zwischen Innen und Außen, zwischen den eingeschlossenen Fällen und den nicht-eingeschlossenen Fällen

- eine Situation, in der diskrete Variablen anzutreffen sind; im einfachsten Fall Alternativeigenschaften oder auch zwei Alternativeigenschaften (auch vorstellbar als Vierfeldertafel oder als Baumdiagramm, s. unten)

- Beliebigkeit hinsichtlich der absoluten und relativen Anzahlen für die einzelnen Merkmale; das „Hinzufügen“ und „Herausnehmen“ von „Fällen“ ist beliebig realisierbar

- eine Variabilität hinsichtlich der Transparenz; „offene“ Urnen zur Analyse des Inhaltes und „verdeckte“ Urnen zur Realisierung eines Zufallsgenerators

- die Möglichkeit zu einem Vorgang der „blinden Ziehung“ einer beliebigen Anzahl nach einem beliebigen Verfahren (z.B. sukzessiv oder simultan)

Im Zusammenhang mit Überlegungen zur Didaktik stellen wir stochastische Urnen in einen Zusammenhang mit frequentistischen Auffassungen von Wahrscheinlichkeit (vgl. Sedlmeier & Köhlers 2001; Wollring 1994). Diese Ausrichtung, die das Objekt der stochastischen Urne nicht primär als Zufallsgenerator, sondern als Instrument der Modellierung betrachtet, betont die Komplementarität von „Daten und Zufall“ (vgl. Biehler, 1994). Daraus ergibt sich:

- frequentistische Urnen sind ineinander „verschachtelt“, d.h. gehorchen einer „Baumstruktur“ im Sinne von *natürlichen Häufigkeiten* (Gigerenzer & Hoffrage 1995).

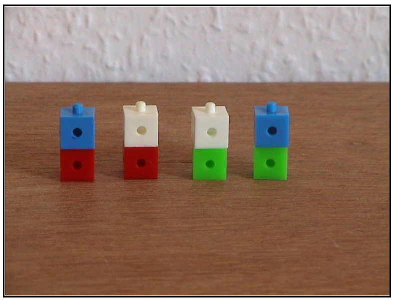
- Urnen „provozieren“ weitere Urnen: Urnen legen Fragen der Art „was passiert wenn...“ nahe und damit simulatives Denken. Impliziert in diesem

Denken ist letztlich auch die Frage nach der Günstigkeit von Urnen im Vergleich.

Auf diesem Hintergrund können Aufgabensysteme für den Unterricht in der Grundschule entwickelt werden (Kurz-Milcke & Martignon 2006). Dabei werden in der Regel nicht alle der genannten Bestimmungen im konkreten Modell, bzw. der konkreten Modellsituation realisiert sein. Nach Steinbring (1991) zeichnen sich Aufgabensysteme durch ein gemeinsames Objekt aus. Konkrete Urnenmodelle als spezifische Beispiele für Klassen von Modellen eignen sich in diesem Sinne als Kristallisationsobjekte für Aufgabensysteme.

2. Urnenmodelle in der Grundschule

Die "Wir-Urne"



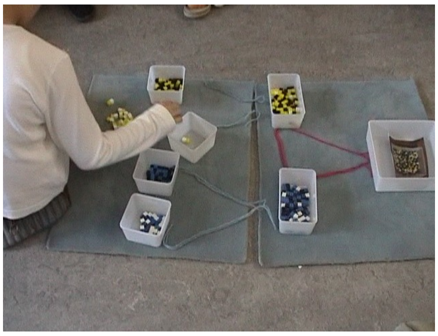
Wir verwenden Türmchen aus Steckwürfel zur Modellierung von Verteilungen von Merkmalen (s. Martignon & Kurz-Milcke 2006). Die Abbildung links zeigt vier Konjunktionen, welche die möglichen Kombinationen der Ausprägungen in zwei Alternativmerkmalen darstellen.

Je nach Situation, die im einzelnen Fall modelliert werden soll, können die Anzahlen der einzelnen Konjunktionen in der Grundgesamtheit variieren. Zum Beispiel, in einer Klasse der Jahrgangsstufe 4 zogen die SuS (Schülerinnen und Schüler) zu Beginn der Arbeit mit stochastischen Urnen Namenskärtchen in zwei Farben. Zusammen mit einem zweiten Steckwürfel für jedes Kind, der das Geschlecht kodierte, ergab sich daraus eine Verteilung an Konjunktionen für eben diese Kodierung der Schulklasse. Eine Schülerin taufte die entsprechende Urne daraufhin: die „Wir-Urne". Diese Form der Modellierung wurde dann mit den SuS für die Beispielsituationen „Kino" (Kinder und Erwachsene, Film A und Film B) und „Stadion" (Spieler und Zuschauer, Mannschaft A und Mannschaft B) bearbeitet (Kurz-Milcke & Martignon 2006). Hierbei wurden auch die sprachlichen Differenzierungen in der Bezeichnung von Anteilen mit den SuS entwickelt, z.B. wie viele Spieler sind an diesem Tag im Stadion? und wie viele der Spieler im Stadion spielen für Mannschaft A?

Häufigkeits-Bäume

Konkrete Urnen-Modelle öffnen Räume der Re-repräsentation. Mit einer Klasse der Jahrgangsstufe 4 wurden sog. *Urnen-Bäume* entwickelt und im Anschluss reguläre Baumdiagramme (Kurz-Milcke & Martignon 2006). Für Urnen-Bäume werden Container und Steckwürfel zur frequentistischen

Analyse von Urnen-Modellen im Sinne von *natürlichen Häufigkeiten* (Gigerenzer & Hoffrage 1995) eingesetzt.



Jede Ebene des Urnenbaums enthält eine Kopie der Grundgesamtheit. Die Urnen auf der nächst höheren Stufe können durch „Zusammenschütten" der zugeordneten Urnen auf der nächst unteren Stufe hergestellt werden; umgekehrt entstehen die zugeordneten Urnen auf der nächst unteren Stufe durch Sortieren nach einem Merkmal.

Äquivalente bzw. ähnliche Urnen

Urnenvergleiche sind ein klassisches Thema für die Didaktik der Stochastik (e.g., Fischbein, Pampu, & Manzat 1970, Martignon & Wassner 2005). Äquivalente Urnen spielen hierbei eine herausragende Rolle. Auch für diese können Modellsituationen mit konkreten Urnen hergestellt werden, z.B. die Kodierung der Zutaten in einem Kochrezept (s. Kurz-Milcke & Martignon 2006). Dabei steht nicht das Pizza-Rund im Mittelpunkt, sondern die Grundgesamtheit (z.B. Pizzateig für 3, 6 oder 12 Personen).

Urnenmodelle in der Grundschule

Als Objekte öffnen stochastische Urne Räume der Re-repräsentation, die im Unterricht mit verschiedenen Medien (z.B. Steckwürfel und Container, konkrete Urnen-Bäume, Baumdiagramme, symbolisch-numerische Darstellungen) gestaltet werden können (vgl. Engel, Varga, Walser 1974). Urnenmodelle sprechen ein bedeutsames und weit reichendes Thema des Mathematikverständnisses, insbesondere auch in der Grundschule, an: Das „Sichtbare" und das „Unsichtbare". Das Ziehen aus stochastischen Urnen kann als eine Modellsituation für Entscheidung unter Unsicherheit genutzt werden, in denen wir charakteristischerweise die Situation und die kognitiven Bestimmungsgründe zum Zeitpunkt der Ziehung/Entscheidung zu berücksichtigen haben (vgl. Luhmann, 1991). Die vorgeschlagenen und andere Aufgabensysteme zu stochastischen Urnen (s. Kurz-Milcke & martignon 2006) und verwandten Modellsituationen stellen im Weiteren eine besonders gute Grundlage für den Aufbau des Verständnisses von Normalisierung im Anschluss an die Grundschulmathematik dar.

Literatur

[1] Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes—Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? In J. Garfield (Ed.), *Research papers from ICOTS 4, Marrakesch, Juli 1994.* University of Minnesota.

[2] Engel, A. Varga, T., Walser, W. (1974). *Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe*. Stuttgart: Klett.

[3] Fischbein, E. Pampu, I., & Manzat, I. (1970). Comparison of ratios and the chance concept in children. *Child Development, 41*, 377-389.

[4] Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, *102*, 684-704.

[5] Kurz-Milcke, E. & Martignon, L. (2006). Lebendige Urnen und ereignisreiche Bäume: Überlegungen und Versuche zu einer Didaktik der Stochastik in der Grundschule. *Arbeitsbericht 2004/2005 des Arbeitskreises Stochastik (GDM)* (pp. 181-203). Hildesheim: Franzbecker

[6] Luhmann, N. (1991). Soziologie des Risikos. Berlin: W. de Gruyter.

[7] Martignon, L. & Kurz-Milcke, L. (2006). Bunte Steckwürfel und Kärtchen in Haufen. *Arbeitsbericht 2004/2005 des Arbeitskreises Stochastik (GDM),* (pp. 204-223) . Hildesheim: Franzbecker

[8] Martignon, L. & Wassner, C. (2005). Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. *Z. für Erziehungswissenschaft, 8*, 202-222.

[9] Nersessian, N. J. (2002). Maxwell and "the method of physical analogy: Model-based reasoning, generic abstraction, and conceptual change. In D.B. Malament (Ed.), *Reading natural philosophy* (129-166). Chicago, IL : Open Court.

[10] Sedlmeier, P. & Köhlers, D. (2001). *Wahrscheinlichkeiten im Alltag: Statistik ohne Formeln*. Braunschweig: Westermann.

[11] Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education*, 135-167.

[12] Wollring, B. (1994). Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern. Habilitationsschrift, Westphälische Wilhelms-Universität Münster.