

Angela und Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Fächerübergreifender Unterricht in Mathematik und Musik

1. Das Verhältnis von Musik und Mathematik

Was haben Musik und Mathematik gemeinsam? Oder: Gibt es überhaupt Gemeinsamkeiten? Wenn ja, worin liegen sie? Mit dieser Fragestellung beschäftigt sich nur eine geringe Anzahl von Spezialisten. Ist es dadurch sinnvoll, Schüler/innen mit dieser Frage zu konfrontieren? Unserer Überzeugung nach, kann diese Frage nur mit ja beantwortet werden. Schließlich gibt es vielfältige Beziehungen, die im schulischen Kontext bearbeitet und für Schüler/innen lernwirksam werden können. *Smith* meint sogar: „Es gibt auf der ganzen Welt kein Phänomen, bei dem Mathematik keine Rolle spielt, also ist auch die Musik nicht ohne Mathematik zu denken.“[3] So verschieden sich diese beiden Disziplinen auch präsentieren, Mathematik und Musik sind keine Gegensätze, sondern eher zwei Aspekte ein und derselben Sache. „Am besten können Sie das sehen, wenn Sie eine Partitur oder ein Notenblatt aufschlagen. Da ist ein mathematisches Koordinatensystem; in dem einen sind die Töne und die Akkorde angegeben und im anderen ist die Zeit und der Rhythmus angezeigt.“[3] Ein Koordinatensystem eignet sich als gutes Beispiel, eine Kunstform mathematisch auszudrücken, wobei nicht versucht werden soll, der Musik ein mathematisches Schema aufzuzwingen. In diesem Zusammenhang ist es auch interessant, was bedeutsame Persönlichkeiten über die Verbindung Mathematik-Musik gemeint haben. So bezeichnet zum Beispiel *Leonardo da Vinci* die Musik als „Mathematik der Seele“. *Wolfgang Amadeus Mozart* soll nach eigenen Äußerungen gewisse Prinzipien aus der mathematischen Disziplin der Kombinatorik beim Komponieren bewusst angewandt haben und er hat gemeint, dass ihm dadurch das Setzen der Töne viel rascher und leichter von der Hand gehe. Ab der 7. Schulstufe lässt sich Mozarts Würfelwalzer gut in den Unterricht integrieren. In seiner Klaviersonate KV 333 kann man überdies den ‚goldenen Schnitt‘ im Verhältnis Exposition zu Durchführung/Reprise erkennen. Allerdings liegt die Vermutung nahe, dass Mozart den goldenen Schnitt nicht bewusst verwendet hat, sondern ihm nur intuitiv nahe gekommen ist.

2. Die Geschichte der Mathematik- eine Musikgeschichte? Mögliche Unterrichtsbeispiele

Um an den Ursprung der Beschäftigung mit Zahlen zu gelangen, ist eine Reise an den Beginn der Menschheit nötig. Die Anfänge der Musik genau zu datieren, ist unmöglich, vermutlich findet man sie in den frühen Hochkulturen Mesopotamiens und Ägyptens. Um 550 vor Christus beginnt

die Schaffensperiode des Griechen *Pythagoras von Samos*. Er war ein vielseitiger Gelehrter und Gründer der pythagoreischen Schule. Neben dem berühmten Satz von Pythagoras wird ihm auch die Erkenntnis zugeschrieben, dass die Musik mathematische Grundlagen hat und die konsonanten Intervalle Oktave, Quint und Quart auf einfache Zahlenrelationen zurückzuführen sind. Dazu erfand er das Monochord, das ihm half herauszufinden, dass auch die Intervalle in der Musik nicht ohne Zahl entstehen. Aus diesen und weiteren Experimenten entwickelte *Pythagoras* nicht nur ein System von Proportionen, sondern auch das klassische griech. Tonsystem mit dem Tetrachord als Grundlage und dem diatonischen, chromatischen und enharmonischen Tongeschlechtern. Dieses Thema eignet sich in fachgerechter Aufbereitung für die 6./7.-11. Schulstufe. Zahlenverhältnisse gab es für *Pythagoras* aber nicht nur in der Musik, sondern auch im Aufbau des gesamten Kosmos. Pythagoras war der Meinung, dass der Kosmos singe und musikalisch zusammengesetzt sei. Die Bewegungen der sieben Gestirne könne man auf Rhythmus und Melodie zurückführen. Diese faszinierende Idee einer ‚Sphärenmusik‘ wurde zu Beginn der Neuzeit durch *Johannes Kepler* in seinem berühmten Werk ‚*Harmonices mundi*‘ ausgebaut. Er suchte in den Gestirnen nach Gesetzen der musikalischen Harmonie, nach einer Theorie der Musik, die mit den in ihren Bahnen gleitenden Gestirnen wie Sonne, Mond und Planeten erzeugt werden sollte. In der 10./11. Schulstufe lässt sich dieses Thema fächerübergreifend mit den Fächern Musik, Mathematik und Physik anschaulich präsentieren. Eine wichtige Persönlichkeit, am Beginn des Zeitalters der modernen Mathematik war *Leonhard Euler*, der die Buchstaben e, Pi und i einführte und erstmals den Begriff der Funktion in den Mittelpunkt der Betrachtungen rückte. Er war es auch, der beachtliche Neuansätze der Verbindung von Musiktheorie und Mathematik aufbrachte. Euler versuchte die ästhetischen Phänomene der Musik mathematisch zu erfassen. Nach *Euler* ist das Tongeschlecht die Zusammenfassung aller Tonverhältnisse, die sich aus dem Ausdruck $2^n 3^p 5^q$ ($n \in \mathbb{N}, q=1, p=3$) ergeben. Im Unterricht der 10./11. Schulstufe würde es sich anbieten, mit den Schüler/innen dieses Thema aufzugreifen und im Rahmen des Unterrichts selbstständig Musikinstrumente mit nur einer Saite (Bruchteile der Grundsaiten c, vgl. auch Monochord) zu bauen.

Die Begriffe Schall, Schwingungen, Ton, Klang, Geräusch, etc. finden im Bereich der Physik, sowohl als auch im Lehrstoff der 9. Schulstufe im Musikunterricht (Akustik) ihren Niederschlag (Stereoэффект, Experimente mit Schall, Schwingungen,...etc.) und liefern sinnvolle Verknüpfungen der musikalischen und physikalischen Fachsprache. Für die Schallmessung ist wichtig, dass die subjektive Empfindung der Lautstärke etwa logarithmisch mit der Intensität verläuft. Das ist der Inhalt des Weber-Fechnerschen

Gesetzes. Der Schallpegel wird deshalb in Dezibel [dB] angegeben, errechnet aus dem Logarithmus des Quotienten aus der Intensität der Schallwelle und der Intensität an der Hörschwelle. Mit Hilfe von Weingläsern, die man unterschiedlich hoch mit Wasser füllt, können Schwingungen (Wellen) sichtbar gemacht werden. Dieses Experiment macht nicht nur Spaß, sondern dient auch im Rahmen des Musikunterrichts dazu, eine Tonleiter aufzustellen und damit zu musizieren. Will man nun eine bestimmte vorgegebene Schwingungsform erzeugen, so kann man sich der Fourierreihen bedienen. Der frz. Mathematiker *Jean Baptiste Fourier* hat gezeigt, dass es möglich ist jede beliebige Schwingung als eine (unendliche) Summe von Sinus- und/oder Cosinusschwingungen darzustellen. Der österr. Physiker *Christian Doppler* erkannte, dass jede Art von Wellenbewegung ihre Frequenz ändert, wenn sich Beobachter und Wellenerreger relativ zueinander bewegen. Mit Hilfe des gehörten Intervalls kann man aus der entsprechenden Doppler-Formel die Geschwindigkeit eines vorbeifahrenden Autos berechnen. Dieser Themenkomplex kann ab der 9. Schulstufe einer AHS-Oberstufe behandelt werden.

Zahlen haben seit Jahrhunderten viele Kompositionen beeinflusst. *Johann Sebastian Bach*[6] schrieb keine Note unüberlegt oder zuviel und nützte die Zahlenbeziehungen, um vornehmlich Aussagen religiöser Natur mit seinen Kompositionen zu verbinden. Aber gerade auch in der Musik des 20. Jahrhunderts sind Zahlen als Kompositionsgrundlage u.a. bei *Tom Johnson* und *Alban Berg* vorzufinden. Andere Komponisten, z.B. *Béla Bartók*, komponierten mit Proportionen, die aus dem goldenen Schnitt abgeleitet sind. Die Zahlen der Fibonacci-Reihe findet man in Kompositionen von *Ligeti*, *Stockhausen*, *Nono*, *Sitsky*...Übrigens kann man auch in Keplers Sphärenmusik, in der pythagoreischen Stimmung, in den Kirchentönen und in der chromatischen Tonleiter Fibonacci-Zahlen finden. *Schönberg* und seine Schüler der Wiener Schule sind ein Beispiel des 20. Jahrhunderts, wie Zahlen in Form der Zwölftonmusik als Kompositionsprinzip genutzt werden können. Das Thema ‚Zahlen‘ lässt sich im Unterricht der 5.–12.Schulstufe immer wieder optimal einbringen.

Im Bereich der Musikpraxis verweisen Kompositionstechniken auf die Verwendung der Naturwissenschaft, als Beispiel Iannis Xenakis[1], der mathematische Verfahren aus den unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik als Hilfs- und Arbeitsmittel einsetzt, um seine kompositorischen Ideen umsetzen zu können. Am Beispiel der ‚stochastischen Musik‘ trifft sich die Themenwahl optimal mit den Forderungen im österreichischen Lehrplan[7], einerseits die Musikgeschichte des 20. Jahrhunderts im Musikunterricht und andererseits

die stochastischen Berechnungen in Mathematik, beide fallen in den Lehrstoff der 11. Schulstufe.

3. Zusammenfassung

Die vorgestellten Beispiele, verpackt in eine gemeinsame Geschichte, haben aufgezeigt, welche Verbindungen der beiden Unterrichtsgegenstände, Musik und Mathematik im AHS–Unterricht möglich sind. Die getroffene Auswahl stammt aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, ist mit den Inhalten des österreichischen Lehrplans verknüpft und ermöglicht eine vielseitige gebietsübergreifende Argumentation, wobei jedes der vorgestellten Themen auch unabhängig voneinander behandelt werden kann. Für einen offenen und modernen Musik- und Mathematikunterricht des 21. Jahrhunderts, der einer stark technik- und computerorientierten Schülergeneration entsprechen sollte, empfiehlt es sich, die Beziehungen der beiden Disziplinen in Form von interdisziplinären Arbeitsmöglichkeiten für den Unterricht auszunützen. Im Bereich beider Fächer, kann es dadurch zu einer gegenseitigen Bereicherung kommen, die einen Blick über die Fachgrenzen hinaus gestattet[2, 4, 5].

Literatur

- [1] Baltensperger, A.: Iannis Xenakis und die stochastische Musik, Komposition im Spannungsfeld von Architektur und Mathematik, Verlag Paul Haupt, Basel- Stuttgart- Wien 1996
- [2] Brüning, S.: Musik verstehen durch Mathematik (Dissertation), Verlag die blaue Eule, Essen 2003
- [3] Götze, H.; Wille, R.: Musik und Mathematik, Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 1985
- [4] Poltschak, A.: Interdisziplinäre Unterrichtsansätze in Musik und Mathematik, Theoretische Grundlagen und praktische Modelle (Diplomarbeit), Salzburg 2005
- [5] Siller, H.-St.: Modellbilden – eine zentral Leitidee der Mathematik (Dissertation), Salzburg 2006
- [6] Taschner, R.: Der Zahlen gigantischer Schatten, Verlag Vieweg, Wiesbaden 2004
- [7] Österreichischer AHS–Lehrplan: <http://www.bmbwk.gv.at> (Stand: 26.3.2007)