Inge SCHWANK, Anke ARING, Kathrin BLOCKSDORF, Osnabrück

Betreten erwünscht – die Rechenwendeltreppe

Zahlreiche Überlegungen zur Fundierung der Arithmetik legen nahe, sich verstärkt um den Ordinalzahlaspekt und damit den zugrunde liegenden Aufbau der natürlichen Zahlen zu kümmern (herausragende Arbeiten stammen von Dedekind [1887/1969]). Brainerd [1979] konnte zeigen, dass die Förderung eines ordinalen Verständnisses Kindern den Einstieg in die Anwendung von Rechenoperationen ebnet und sie in Folge zu größerem Erfolg führt. Wir selbst wissen, dass es Unterschiede in den Fähigkeiten von Menschen gibt, sich Sachverhalte einerseits hinsichtlich ihrer prädikativen Struktur bzw. andererseits hinsichtlich ihres funktionalen Wirkgefüges zurechtzulegen [Schwank 2003, 2004]. Eine Schwäche im funktionalen Vorstellungsvermögen erschwert es, in Zahlen Ergebnisse von Umformungsoperationen zu erkennen: den geforderten Eingriffsmaßnahmen zum Arrangement von Zahlen fehlt die grundlegende Einsicht. Eine zentrale Ursache liegt in unzureichend entwickelten mentalen Handhabungsmöglichkeiten von Konstruktionsprinzipien.

Dieserlei Überlegungen führten uns zur Konzeption und Erprobung einer sogenannten Rechenwendeltreppe (**RWT)** für den Erstrechenunterricht [Aring & Blocksdorf 2003; Schwank 2003, 2005]. Orientierung bei der Entwicklung gab neben der fundamentalen Ordinalzahlidee die formal-technisch versierte Darstellung von Zahlen im Positionssystem, hier speziell im Dezimalsystem, wie sie die bekannte, im indisch-arabischen Kulturraum erfundene, heute weltweit gebräuchliche Zahldarstellungsweise bietet. Dem Aufbau der RWT verwandt sind Zähler wie der Kilometerzähler: es gibt null bis neun Einer, danach erfolgt ein Schnitt, erst nach diesem ist die Zehn erreichbar und das Zählen beginnt von Neuem und zwar wie gehabt bei den Einern. Es versteht sich, dass hierbei weniger das Denken in mentalen Bildern als vielmehr mentale Funktional-Motorik angeregt, gefördert und gefordert werden soll.

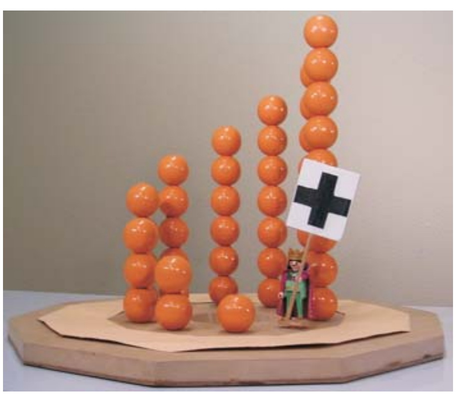

Abb. 1: Die "kleine" Rechenwendeltreppe.

Abb. 1 zeigt den inneren Kreis der RWT. Im Sinne der **dedekindschen Ordinalzahlen** können die Kinder die Anordnung der Stangen und die Anzahl der zunächst lose vorliegenden Kugeln auf den jeweiligen Stangen durch eine Nachfolgerbildung konstruieren. Die Zahl der Kugeln wird, ausgehend von null Kugeln, mit jeder weiteren Stufe um eins größer.

Die **Idee der Null** wird in vielen Schulbüchern gesondert, häufig vor der Behandlung der Neun oder der Zehn, eingeführt und damit nicht dem Aufbau des Zahlraums folgend. Anders bei der RWT: wie beim Zahlenstrahl ist zum Rechnen mit der Null ein fester Platz vorgesehen; so ist von der Null zur Eins der gleiche Schritt notwendig wie bei den anderen benachbarten Zahlen. Das Bauprinzip der Nachfolgerbildung trägt an jeder Stelle. Den Kindern im Projektunterricht, die die Null zuvor nur im Rahmen des Ziffernschreibkurses kennen gelernt hatten, bereitete diese Umsetzung der Idee Null keinerlei Schwierigkeiten, im Gegenteil, sie war für sie sehr logisch.
Wanderungen im Zahlraum wie beim **Addieren oder Subtrahieren** werden in der RWT mit Figuren (z.B. König oder Königin) gespielt, denen Zauberschilder helfen, sich auch in größeren Schritten als einstufig fortzubewegen. Ist beispielsweise eine einfache Additions- oder Subtraktionsaufgabe mit zwei Argumenten gegeben, liefert das erste Argument der Figur die Ausgangssäule, das Rechenzeichen bestimmt die Auswahl des Zauberschildes und damit ihre Bewegungsrichtung, das zweite Argument wie weit sie vom Schild getragen wird. Dabei muss die Figur die Stufen nicht mühsam einzeln steigen sondern kann sich – je nachdem, wie gut sie sich auf der Treppe auskennt – auch mehrere Stufen weiter wünschen oder die Strecke gar in einem Schritt bewältigen. An der schließlich erreichten Kugelsäule kann das Ergebnis abgelesen werden; dies zunächst zählend, bei größerer Vertrautheit mit dem Aufbau durch geschickte Überlegungen wie z.B. die Figur steht auf der vorletzten Kugelsäule, also auf acht Kugeln, oder die Figur steht auf der Kugelsäule, von der aus es gleich weit bis zur letzten wie zur ersten Säule ist, also auf fünf Kugeln. Durch die Möglichkeit des spielerischen Erwanderns in Abhängigkeit der gegebenen Argumente sowie der Rechenoperation wird der **funktionale Aspekt** heraus gestellt. Mit den Zauberschildern werden die Rechenoperationen in der Spielumgebung – anders als bei den üblichen Materialien – vor, während und auch nach der Handlung dingfest gemacht. Die Addition ist unmittelbar als Umkehroperation der Subtraktion erlebbar, beide Operationen können gleichwertig und in unmittelbarem Zusammenhang eingeführt werden.
Abb. 2 zeigt den erweiterten Aufbau der RWT zur systematischen Behandlung der Zahlen von zehn bis neunzehn eingefangen in einer Dezimalstruktur: parallel zur inneren Runde sind jeweils zehn grüne Kugeln mit null bis neun orangenen Kugeln errichtet. Wie zur Einläutung der neuen Runde, nämlich, dass es, wenn auch mit einem Überbau, wieder von vorne los geht, ist zwischen der Neuner- und Zehnerkugelsäule eine Tür eingebaut, die die Figur auf ihrem Rechenweg durchschreiten muss, falls bis dahin ein Auftrag noch nicht erledigt werden konnte.
Die durch die **Dezimalstruktur** bedingte Parallelität bei der Berechnung von

sogenannten **Analogieaufgaben** wie z.B. a) 3+4; b) 13+4 wird in der RWT offenkundig beim Spielen mit zwei Partner-Figuren, die sich synchron auf Parallelstangen bewegen. Die Anzahl der orangenen Kugeln unter beiden ist beim Start, unterwegs und am Ende jeweils die gleiche. Weiß man das Ergebnis der einen Aufgabe, kann man das Ergebnis der anderen Aufgabe voraussagen.

Abb. 2: Die "große" Rechenwendeltreppe.

Durch die Tür zwischen den Runden ist für die Kinder in der RWT ein Ort markiert, der ihnen hilft, schwierige Aufgaben in leichtere umzuformen. Sie erspielen sich dabei den sogenannten **Zehnerübergang**. Ist beispielsweise die Aufgabe 14-6 zu berechnen, steht die Spielfigur zu Beginn auf der Vierzehnersäule, bekommt das Minus-Zauberschild in die Hand und schwebt mühelos zunächst auf die Zehnersäule, die sich als Partnersäule zur Null auszeichnet, d.h. als einzige Säule in der äußeren Runde keine orangenen Kugeln aufweist und sich direkt an der Tür befindet. Dabei, und das ist der Clou, verliert sie um so viele orangene Kugeln an Höhe, wie sie anfangs unter sich hatte: vier. Es verbleibt, den einfachen Höhenunterschied von nur noch zwei zu bewältigen. Statt 14-6 muss nur noch 10-2 gerechnet werden, das ist leicht zu überblicken. Diese Vereinfachung macht den Kindern den Zehnerübergang sehr attraktiv. Da bei der Subtraktion der erste Schritt der einfache ist, bei der Addition aber der zweite Schritt, macht es Sinn, den Zehnerübergang zunächst anhand von Subtraktionsaufgaben zu erkunden.

Anders als bei herkömmlichen Zugängen in Schulbüchern werden beim Einsatz der RWT Ergebnisse zu Additionsaufgaben nicht „rückwärts“ über eine vorherige Zerlegung von Anzahlen in zwei Anteile erschlossen. Der Gefahr des Verweilens beim sogenannten zählenden Rechnen begegnen wir nicht dadurch, dass wir das den Zahlen zu Grunde liegende Bauprinzip der Nachfolgerbildung ausklammern oder dieses gar als schlecht ansehen sondern dass wir anregen, auf dem Fundament dieses Bauprinzips elegantere, weiter reichende Bewegungen im Zahlraum auszuüben. Der Zahlraum soll dabei funktional erschlossen und **strategisch geschicktes Rechnen** ins Visier genommen werden. Ausgehend vom Arbeitsauftrag an die Kinder von verschiedenen Positionen aus den Nachfolger bzw. Vorgänger um eins zu bilden, stellt sich die Frage, was passiert, wenn die Figur um zwei, drei oder

auch mehr hoch oder runter geht. Plus vier erweist sich z.B. als dasselbe wie plus zwei und noch mal plus zwei oder plus zwei, plus eins, plus eins. Weitergehen per gleichmäßiger Schrittlänge zieht die Aufmerksamkeit auf sich. Welche Säulen sind erreichbar, wenn die Figur immer um z.B. drei, vier oder fünf Stufen weitergeht? Startet die Figur bei der Nullerstelle zeigt sich dahin gehend eine Verwandtschaft zwischen drei, sechs, neun usw. bzw. vier, acht, zwölf usw. oder aber fünf, zehn, fünfzehn. Eine Überlegung wert ist auch, die Figur von verschiedenen Positionen der RWT aus mit wiederholt angewendeter gleicher Schrittlänge genau die Nullerstelle erreichen zu lassen. Dabei erkennen die Kinder, dass es spezielle Höhen gibt, von denen aus die Figur tatsächlich zahlreichere Möglichkeiten hat, genau die Nullerstelle zu erreichen, z.B. von der Achtzehnersäule aus. Es gibt aber auch Säulen von denen aus sich der Figur nur die beiden extremen Möglichkeiten bieten, entweder in kraftlosen Einerschritten oder aber in einem fulminanten Riesensatz zur Nullerstelle zu gelangen, alle anderen Schrittweiten funktionieren nicht.
Die Kinder werden durch die verschiedenen Aufträge auch dazu angeregt die RWT gedanklich weiterzubauen. Hierbei stellt sich in natürlicher Weise die Frage, an welcher Stelle eine neue Farbe für die Kugeln gebraucht wird. Anders als die hier zu Lande gebräuchlichen Hundertertafeln es nahe legen, die unter Auslassung der Null von Eins bis Hundert reichen, erfolgt im Dezimalsystem die nächste Zäsur nach der Neunundneunzig: die Hundert benötigt in diesem Zahlschreibsystem als erste Zahl eine dritte Stelle. Auf dem Funktionieren der Dezimalschreibweise basiert das schriftliche Rechnen. Es erscheint naheliegend, dass eine strikte Umsetzung und Behandlung der Ideen der Dezimalschreibweise die Einsicht in die schriftlichen Rechenverfahren begünstigen und damit ihre fehlerfreiere Ausführung besser sicherstellen.
Die RWT lässt sich gedanklich nicht nur in der Höhe weiterbauen. Vorstellbar ist auch, dass es unter dem Nullerplatz noch einen Keller gibt und die Figuren noch weiter nach unten gehen können. Zur Diskussionsanregung ist in der Mitte der Grundplatte ein kleines Zehneck ausgeschnitten. Der Projektunterricht zeigt, dass Kinder sich auf erste Vorstellungen zu „Zahlen im Keller“ leicht und mit Neugierde einlassen können.

Aring, A. & Blocksdorf, K. (2003): Rechnen im 1. Schuljahr: Betritt die Rechenwendeltreppe! Staatsarbeit Universität Osnabrück.
Brainerd, C. (1979): The origins of the number concept. New York: Praeger.
Dedekind, R. (1887/1969): Was sind und was sollen die Zahlen? 2. Nachdruck der 10. Aufl. Braunschweig: Vieweg.
Schwank, I. (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. ZDM 35/3, 70-78.
Schwank, I. (2004): eLearning: Individualität als Herausforderung – Kognitionsdidaktiksche Notizen. In M. Franzen (Hrsg.), Die Zukunft von eLearning. Neue Ergebnisse aus Gehirnforschung, Pädagogik und Wirtschaft. Zürich: EMPA-Akademie. 47-65.
Schwank, I. (2005): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. v. Aster, J.-H. Lorenz (Hrsg.): Rechenstörungen von Kindern. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.