Jürgen ROTH, Würzburg

Figuren verändern – Funktionen verstehen

Die Auseinandersetzung mit Funktionen ist einer der wichtigsten Themenstränge des Mathematikunterrichts der Sekundarstufen. Schülerinnen und Schüler sollen im Laufe ihrer Schulzeit den Funktionsbegriff erfassen, wichtige Funktionstypen und ihre Eigenschaften kennen lernen und schließlich Funktionen benutzen, um Zusammenhänge zu erkennen, zu beschreiben oder herzustellen.[1] Um den Funktionsbegriff zu erfassen ist es notwendig geeignete Grundvorstellungen aufzubauen, auf die beim individuellen Rekonstruktionsprozess des Funktionsbegriffs immer wieder zurückgegriffen werden kann. Diese Grundvorstellungen sollten Erfahrungen zu den drei wesentlichen Aspekten des Funktionsbegriffs Zuordnung, Änderungsverhalten (Kovariation) und Sicht als Ganzes umfassen.

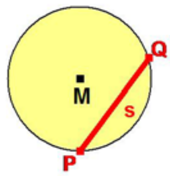
Verbindung von Geometrie und Algebra

Im Hinblick auf das Verständnis des Funktionsbegriffes wird in der Literatur immer wieder herausgestellt, dass es fruchtbar ist, eine Verbindung zwischen Geometrie und Algebra zu suchen bzw. herzustellen.[2] Der Hintergrund dafür ist die Hoffnung, dass durch die im Wortsinn anschaulichen geometrischen Figuren ein leichterer Zugang möglich ist, auf den man die Entwicklung von Verständnis aufbauen kann. Bei der Verbindung von Geometrie und Algebra spielen im Wesentlichen zwei Aspekte eine Rolle: Einerseits werden (funktionale) Zusammenhänge geometrisch dargestellt bzw. veranschaulicht (Man denke etwa an die geometrische Darstellung der binomischen Formeln der S I.[3]), andererseits werden Zusammenhänge in geometrischen Konfigurationen algebraisch-analytisch untersucht. Beides kann unter Umständen für die Entwicklung eines Grundverständnisses für funktionale Zusammenhänge problematisch sein. Bei der Darstellung durch (statische) geometrische Konfigurationen kann der zugrunde liegende funktionale Zusammenhang evtl. sogar verdeckt werden, wenn der Kovariationsaspekt nicht explizit herausgestellt und z. B. mit Hilfe dynamischer Geometriesoftware (DGS) untersucht wird. Werden dagegen geometrische Zusammenhänge untersucht, so wird leider oft zu schnell auf eine analytische Beschreibung der Zusammenhänge hinge-

[1] Vgl. VOLLRATH (2003), S. 14
[2] Hier seinen mit GOLDBERG ET AL (1992), SCHUMANN (2000) und ROTH (2002) stellvertretend nur drei von sehr vielen Beispielen in der Literatur erwähnt.
[3] DynaGeoX-Applets zu dieser Darstellung der binomischen Formeln findet man unter http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → B → Binomische Formeln.

arbeitet und damit das anschauliche Potential von geometrischen Figuren nicht ausgeschöpft. Dieser Artikel ist folglich ein Plädoyer dafür, die Anschaulichkeit geometrischer Figuren zu nutzen, um die Aspekte des Funktionsbegriffs intuitiv zu erfassen. Verständnisgrundlagen zum Funktionsbegriff fußen auf konkreten und prägnanten Erfahrungen mit funktionalen Zusammenhängen. Solche Erfahrungen lassen sich gut mit Hilfe von Funktionsgraphen darstellen, die experimentell gewonnen (konstruiert) werden können und so selbst eine Verbindung zwischen Geometrie und Algebra herstellen.

Beispiel „Sehnen“[4]



Bereits am einfachen Beispiel einer Kreissehne [*PQ*] lassen sich wesentliche Aspekte des Funktionsbegriffs erarbeiten. Bewegt man z. B. den Punkt *Q* (bei festem *P*) im Gegenuhrzeigersinn entlang der Kreislinie, so ändert sich u. a. die Länge der Sehne *s*. Der *Zuordnungsaspekt* ist hier dadurch ersichtlich, dass jeder Lage von *Q* auf der Kreislinie eine Länge der Sehne *s* zugeordnet ist. Er lässt sich etwa durch die Frage vertiefen, für welche Lagen von *Q* die Sehne *s* die größte bzw. die kleinste Länge annimmt.

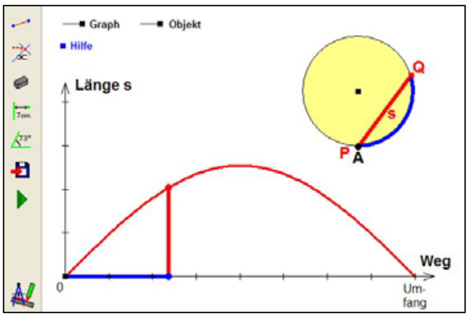
Durch die Art der Problemstellung (Bewegung von *Q*!) rückt der Aspekt der *Kovariation* deutlich in den Fokus des Betrachters. Hier kann die Frage interessant sein, ob es bei einer gleichmäßigen Bewegung[5] des Punktes *Q* auf der Kreisperipherie Bereiche der Kreislinie gibt, in denen die Bewegung von *Q* zu einer besonders starken Längenänderung der Sehne *s* führt und andere, in denen die Sehne ihre Länge nur sehr wenig ändert. Als Verständnisgrundlage für diese Frage kann das „Gummibandmodell“ (vgl. Kasten) dienen. Damit lässt sich das Änderungsverhalten der Sehnenlänge für die gesamte Kreisbewegung von *Q* qualitativ vorhersagen.

> **„Gummibandmodell“:** Man stelle sich die Sehne *s* als Gummiband vor, das man an einer Seite festhält und spannt. Wie (d. h. in welche Richtung) muss man am anderen Ende ziehen, damit sich die Länge des Gummibandes maximal bzw. überhaupt nicht ändert? Die maximale Längenänderung erfolgt offensichtlich, wenn man in die durch die aktuelle Lage des Gummibandes festgelegte Richtung weiter zieht. Keine Änderung erfolgt, wenn man das Ende senkrecht zur aktuellen „Sehnenrichtung“ bewegt.

---

[4] Das Beispiel kann hier aus Platzgründen nur ansatzweise skizziert werden. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in ROTH 2005. Die zugehörigen EUKLID DynaGeoX-Dateien können unter folgender Adresse heruntergeladen bzw. in Form von Online-Arbeitsblättern bearbeitet werden: http://www.juergen-roth.de

[5] Gemeint ist eine Bewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit.



Um die aktuelle Länge der Sehne für verschiedene Lagen besser vergleichen zu können ist es sinnvoll, in einem Diagramm über der Lage von Q (dargestellt durch den von Q auf der Kreisperipherie zurückgelegten Weg) die aktuelle Länge der Sehne s als „Balken“ anzutragen. Zeichnet man mit Hilfe einer DGS die Ortslinie des Endpunkts des „Balkens“ auf, so erhält man den Funktionsgraph. Die Eigenschaften des Graphen und der geometrischen Figur lassen sich nun wechselseitig interpretieren.

Der Aspekt der *Sicht als Ganzes* des Funktionsbegriffs kommt dann ins Spiel, wenn man sich die Frage stellt, welche Auswirkung es auf den Graph hat, wenn der andere Endpunkt *P* der Sehne *s* auf der Kreislinie bewegt wird.

Die hier nur angedeutete Unterrichtssequenz wendet die erarbeitete Verständnisgrundlage u. a. auf „Sehnen“ regulärer Polygone an und thematisiert die dabei notwendige innermathematische Modellbildung.

Einsatz von Werkzeugen

Im skizzierten Beispiel wird eine Reihe von Werkzeugen eingesetzt. Dies ist kein Selbstzweck sondern unterstützt das Ziel, Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff aufzubauen. Dazu ist eine kognitive Auseinandersetzung mit beobachteten Zusammenhängen notwendig, die mit Hilfe von Werkzeugen angeregt, unterstützt und erleichtert werden kann. Die verwendeten drei Werkzeugtypen erfüllen verschiedene Funktionen:

1. Bilder

Bilder können Werkzeuge sein, um Denkprozesse anzustoßen. Dazu sind eine intensive Auseinandersetzung mit der und das Hineindenken in die Problemstellung notwendig. Die hierzu erforderliche Muße stellt sich erfahrungsgemäß sehr viel leichter ein, wenn, wie bei einem Bild, zunächst keine Gelegenheit zur experimentellen Herangehensweise besteht. (Im Gegensatz dazu existieren z. B. bei DGS viele Möglichkeiten zur evtl. unreflektierten Variation.) Eine weitere Funktion von Bildern kann sein, Ergebnisse von Denkprozessen zusammenzufassen. Man denke hier etwa an die oben erstellten Funktionsgraphen, die wesentliche Aspekte des Funktionsbegriffs repräsentieren. Um diese Ergebnisse wieder aus dem Bild zu extrahieren, sind allerdings Denkleistungen notwendig, womit sich der Kreis schließt.

2. „Modelle“

Bei komplexeren Zusammenhängen kann es notwendig und hilfreich sein, die eigenen Überlegungen auf Verständnisgrundlagen zu stützen, die auf Handlungen basieren und dadurch unmittelbar einsichtig sind. Solche „Modelle“ (vgl. das oben genannte „Gummibandmodell“) fokussieren die Aufmerksamkeit auf den Kern eines Problems und dienen gleichzeitig als tragfähige Basis zur Problemlösung.

3. Computerwerkzeuge

Die bisher betrachten Werkzeuge werden primär am Anfang bzw. am Ende eines kognitiven Prozesses eingesetzt, während Computerwerkzeuge und hier insbesondere DGS ihr Potential prozessbegleitend entfalten. Sie dienen als

- *Kontrollinstanz*, wenn „im Kopf“ abgelaufene Denkprozesse mit ihrer Hilfe auf ihre Tragfähigkeit hin überprüft und kritisch hinterfragt werden,
- *Kommunikationsmittel* um die Aufmerksamkeit zu fokussieren und insbesondere das Änderungsverhalten durch „Vorführen“ von Veränderungen veranschaulichen und damit erst kommunizierbar machen zu können,
- *„Denkzeug“* mit dessen Hilfe die Komplexität eines Phänomens reduziert, das Gedächtnis entlastet und so die Konzentration auf Planung, Analyse und Argumentation erleichtert werden kann.

Grundsätzlich bleibt festzuhalten, dass Werkzeuge dosiert und überlegt eingesetzt werden müssen. Nur unter dieser Voraussetzung können sie zum Denken anregen und führen nicht zum „Auslagern“ des Denkens oder zum planlosen Agieren.

Literatur:

GOLDBERG, Paul; LEWIS, Philip; O’KEEFE, James: Dynamic Representation and the Development of a Process Understanding of Function. In: Dubinsky, Harel (Editors): The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America, MAA Notes, Volume 25, 1992, p. 235-260

ROTH, Jürgen: Bewegliches Denken – ein wichtiges Prozessziel des Mathematikunterrichts. In: Werner Peschek (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2002, S. 423-426

ROTH, Jürgen: Kurvenerzeugende Sehnen. Erscheint in: mathematik lehren, Heft 130, Juni 2005

SCHUMANN, Heinz: Computerunterstützte Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben. Franzbecker, Hildesheim, 2000

VOLLRATH, Hans Joachim: Algebra in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2003[2]