Jörg MEYER, Hameln

Paradoxe Spiele

1. Das Parrondo-Paradoxon

... lautet: „Die zufällige Kombination unvorteilhafter Spiele kann vorteilhaft sein“ (vgl. etwa Haigh 2002; S. 158 f.). Zunächst wird die Modifikation einer weicheren Version betrachtet: „Die Kombination fairer Spiele kann vorteilhaft (d.h. unfair) sein.“ – Worum handelt es sich?

Wir betrachten *drei elementare Münzspiele* α, β und γ.

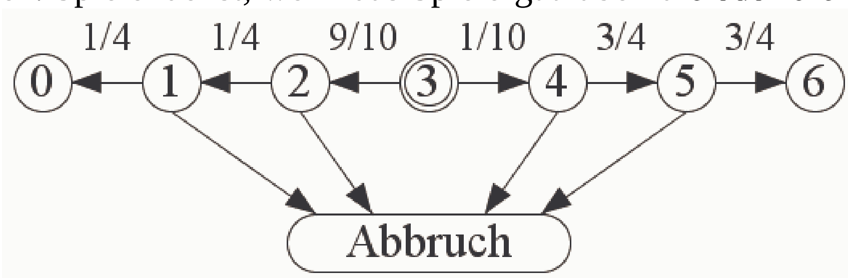
Spielregel: Bei „Kopf“ gewinnt man 1 €, bei „Zahl“ verliert man 1 €.
Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

Spiel α		Spiel β		Spiel γ	
„1“	„–1“	„1“	„–1“	„1“	„–1“
0,5	0,5	0,1	0,9	0,75	0,25

Aus α, β und γ werden die *Super-Spiele* a und b gebaut:

Super-Spiel a besteht darin, dass immer Spiel α gespielt wird. Spiel a ist fair.

Super-Spiel b: Man startet mit einem Guthaben von 3 €. Wenn das momentane Guthaben durch 3 teilbar ist, spielt man β, sonst γ. Sollte Spiel γ wieder in Richtung zu 3 € führen, wird das Spiel (ohne Gewinn oder Verlust) abgebrochen. Spielende ist, wenn das Spielerguthaben 0 € oder 6 € beträgt.

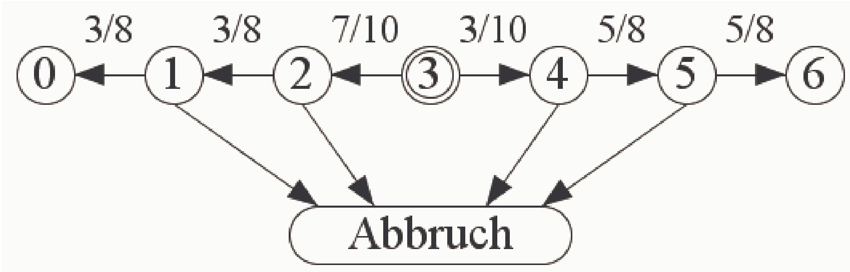


Klar: Spiel b ist fair. Man kann mit der gleichen W’keit 3 € gewinnen oder verlieren.

Nun werden in einem letzten Schritt die Super-Spiele a und b zu einem *Meta-Spiel* mit folgender Spielregel verschmolzen:
Man startet bei 3 €. Es wird mit einer fairen Münze entschieden, ob man Spiel a oder b spielt. Sollte eines der Meta-Spiele wieder in Richtung zu 3 € führen, wird das Spiel abgebrochen. Spielende ist, wenn das Spielerguthaben 0 € oder 6 € beträgt.
Gewinnwahrscheinlichkeit p_{Gew} und Verlustwahrscheinlichkeit p_{Verl} berechnen sich leicht:

$$p_{Gew} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{75}{640}$$

$$p_{Verl} = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{63}{640}$$



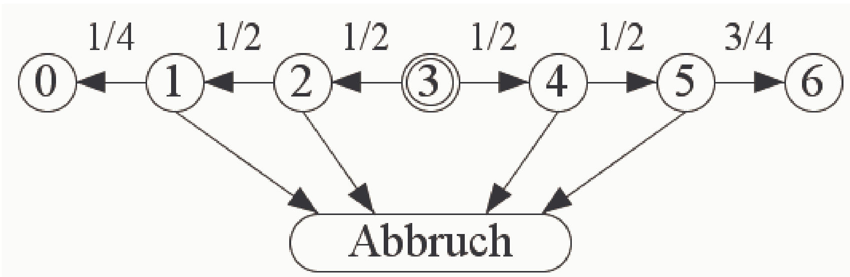
Die zufällige Kombination fairer Spiele hat sich demnach tatsächlich als unfair erwiesen.

Was steckt dahinter? Das Meta-Spiel wird dreimal nacheinander gespielt. Der Zufallsmechanismus des Meta-Spiels wählt irgendeine Reihenfolge aus a und b aus. Die möglichen (und gleich wahrscheinlichen) Reihenfolgen sind: aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb. Wir betrachten zwei Fälle:

$\boxed{\text{aab}}$ vorteilhaft:

$$p_{Gew} = \frac{3}{16}$$

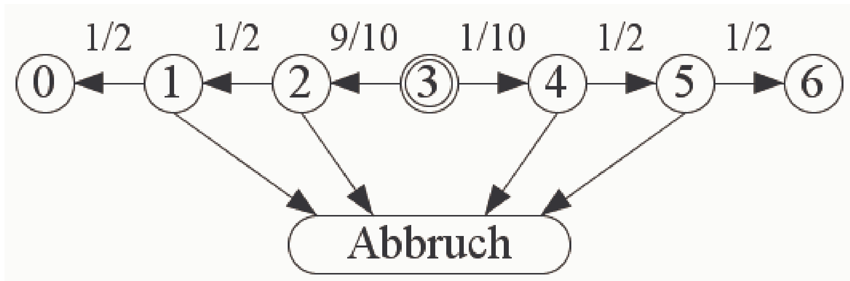
$$p_{Verl} = \frac{1}{16}$$



$\boxed{\text{baa}}$ unvorteilhaft:

$$p_{Gew} = \frac{1}{40};$$

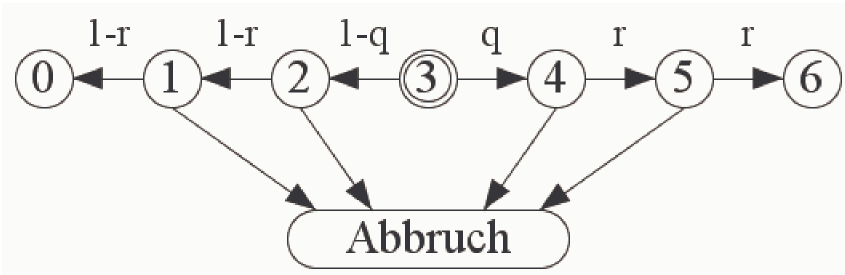
$$p_{Verl} = \frac{9}{40}.$$



Man bekommt die für das Verständnis des Parrondo-Paradoxons entscheidende Einsicht: Die Reihenfolge, in der die Super-Spiele durchgeführt werden, ist wesentlich.

Für die *härtere Version* („Die zufällige Kombination unvorteilhafter Spiele kann vorteilhaft sein“) benutzt man die modifizierten Elementar-Spiele α^*, β^*, γ^*:

Spiel α^*		Spiel β^*		Spiel γ^*	
„1“	„–1“	„1“	„–1“	„1“	„–1“
p	$1-p$	q	$1-q$	r	$1-r$



Spiel a* ist unvorteilhaft für $p<\frac{1}{2}$, Super-Spiel b* ist unvorteilhaft für $(1-r)^2\cdot(1-q)>q\cdot r^2$, das entsprechende Meta-Spiel ist vorteilhaft für

$$\left(1-\frac{p+r}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{p+q}{2}\right)<\frac{p+q}{2}\cdot\left(\frac{p+r}{4}\right)^2.$$

Die drei Ungleichungen kann man systematisch durchsuchen; man findet mehrere Lösungen (z.B. $p=0{,}49$, $q=0{,}09$, $r=0{,}74$).

Die Auswirkungen des Parrondo-Paradoxons sind recht interessant: Man stelle sich einen Spielsalon vor, in dem zwei Spielautomaten hängen, einer gemäß Spiel a* und einer gemäß Spiel b*. Bedient man die Automaten nach dem Zufallsprinzip, so hat man eine über 50 % liegende Chance, den Spielsalon als reicher Mann verlassen zu können!

2. Das Meesters-Paradoxon

Xaver tut den Geldbetrag a in einen Briefumschlag und den Geldbetrag b in einen anderen, von außen gleich aussehenden Briefumschlag. Dabei sei $a<b$.

Yvonne kennt weder a noch b und soll einen Umschlag wählen. Wenn der Umschlag den größeren Betrag enthält, hat sie gewonnen, sonst verloren. Dies Spiel ist sicherlich fair.

Yvonne wählt einen Umschlag. Er enthält U (also $U=a$ oder $U=b$). Nun hat sie die Möglichkeit, statt des gewählten Umschlags den anderen zu nehmen.

Überraschenderweise gibt es eine Strategie, nach der Yvonne entscheiden kann, ob sie umwählen soll oder nicht und die auf Dauer Sinn macht. Dazu führt Yvonne ein Experiment mit (irgendeiner) stetigen Zufallsvariable Z und überall positiver Wahrscheinlichkeitsdichte φ durch.

Mit W'keit $\alpha = \int\limits_a^\infty \varphi(t) \cdot dt$ bekommt sie ein Ergebnis $Z > a$,

mit W'keit $\beta = \int\limits_b^\infty \varphi(t) \cdot dt$ bekommt sie ein Ergebnis $Z > b$.

Die Strategie besteht darin, genau dann umzuwählen, wenn $Z > U$ ist.

Yvonne bekommt also genau dann den größeren Betrag b, wenn sie bei $U = a$ umwählt und bei $U = b$ nicht umwählt.

Der erste Fall hat W'keit $\frac{1}{2} \cdot \alpha$, der zweite Fall hat W'keit $\frac{1}{2} \cdot (1 - \beta)$.
Yvonne gewinnt demnach mit W'keit

$$\frac{1}{2} \cdot (\alpha + 1 - \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \varphi(t) \cdot dt > \frac{1}{2}.$$

Die Strategie lohnt sich also!

Selbstverständlich ist es sinnvoll, dass φ im Wesentlichen den Wertebereich von a und b abdeckt.

Dass man ein Zufallsexperiment hat, ist hierbei gar nicht wesentlich, denn wenn man etwa weiß, dass $a, b \in (-i;\ i)$ ist, so ist schon die Strategie „Wähle um, falls $U < 0$" recht erfolgreich und führt dazu, in 75 % aller Fälle zu gewinnen.

Dass man im allgemeinen Fall ein beliebiges Zufallsexperiment verwendet, drückt nur die Unwissenheit über die Lage von a und b aus.

Wir haben hier einen Fall, der dem Parrondo-Paradoxon ähnelt: Die Kombination eines fairen Spiels mit einem Zufallsexperiment kann für die Spielerin vorteilhaft sein. Aber da endet die Ähnlichkeit auch schon: Die Reihenfolge, die bei Parrondo ausschlaggebend war, spielt bei Meesters offenbar gar keine Rolle mehr. Und auch die Zufälligkeit ist gar nicht so wesentlich.

Literatur

Haigh, J.: Probability Models. 2002 Springer.
Meesters, R.: A natural introduction to probability theory. 2003 Birkhäuser.