
Physikalisch-Statistische Modellierung von Biegeschwingungen

Dipl.-Stat. Nils Raabe
Dortmund im November 2010

eingereicht an der Technischen Universität Dortmund
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
1 Einleitung	1
2 Das BTA-Tiefbohrverfahren	5
2.1 Rattern	6
2.2 Drall	8
3 Physikalisch-Statistische Biegeschwingungsmodellierung	13
3.1 Physikalisches Modell	16
3.1.1 Bewegungsgleichungen des ungedämpften physikalischen Modells	16
3.1.2 Bewegungsgleichungen des proportional viskos gedämpften physikalischen Modells	22
3.1.3 Modellerweiterung durch elastische Abstützungen	25
3.1.4 Bohrtiefenabhängigkeit des Systems	29
3.2 Statistisches Modell zur Schätzung der physikalischen Modellparameter	30
3.2.1 Periodische Anregung	32
3.2.2 Stochastische Anregung	33
3.2.3 Likelihoodfunktion	35
4 Simulationsstudie	41
4.1 Simulationsdesign	41
4.1.1 Biegeeigenfrequenz- und Biegeeigenmodenbestimmung	42
4.1.2 Spektraldichteberechnung	47
4.1.3 Körperschallsimulation	48
4.1.4 Maximum-Likelihood-Schätzung	50

4.2	Ergebnisse	53
4.2.1	Wahl der Fensterlänge und Frequenzbandbreite bezüglich der Exponentialverteilungsapproximation	53
4.2.2	Wahl des Optimierungsverfahrens	58
4.2.3	Wahl der Fensterlänge bezüglich der Eigenfrequenzverlaufs- und Parameteridentifikation	66
4.2.4	Eigenschaften der Maximum-Likelihood-Schätzer	70
4.2.5	Eigenschaften der geschätzten Biegeeigenfrequenzverläufe	78
4.2.6	Verbesserung durch lokale polynomiale Regression	82
4.3	Zusammenfassung	96
5	Modellanpassung an reale Tiefbohrdaten	99
5.1	Eigenschaften der ML-Schätzer und der resultierenden BEF-Verläufe	102
5.2	Freisetzen weiterer Parameter	104
5.3	Anpassung lokaler polynomialer Regressionen	109
6	Zusammenfassung	115
A	Notation	119
A.1	Skalare, Vektoren und Matrizen	119
A.2	Indizes und Argumente	120
A.3	Mathematische Symbole	121
B	Größen des Physikalisch-Statistischen Modells	123
C	Theoretische Grundlagen	125
C.1	Komplexe Notation harmonischer Schwingungen	125
C.2	Stochastische Prozesse	125
C.3	Fouriertransformation	126
C.4	Spektraldichte und Periodogramm	127
C.5	Filter im Zeit- und Frequenzbereich	128
D	Abbildungen zu den Konfidenzintervallen zur Simulationsstudie	129
	Literaturverzeichnis	135

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist im Rahmen des Projekts „Analyse und Modellbildung des Tiefbohrprozesses mit Methoden der Statistik und Neuronalen Netzen“ des durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Sonderforschungsbereichs 475 entstanden.

Tiefbohrverfahren sind Methoden, die speziell für die Herstellung von Bohrungen mit einem hohen Verhältnis von Länge l_B zu Durchmesser d entwickelt wurden. Diese Methoden tragen den besonderen Anforderungen Rechnung, die sich aufgrund der notwendigerweise schlanken Gestalt des verwendeten Bohrrohrs ergeben. Das wesentliche Problem ist hierbei die sich aus dieser Gestalt ergebende hohe Nachgiebigkeit, die während des Prozess zur Ursache für dynamische Störungen wie periodische Verdrehungen (Torsionsschwingungen) und Verbiegungen (Biegeschwingungen) werden kann. Die erstgenannte Störung wird gemeinhin durch den Begriff Rattern bezeichnet, während die zweite Drall genannt wird. Beide Störungstypen können sich bei entsprechend starker Ausprägung in erhöhtem Verschleiß von Werkzeug und Werkstück sowie in Abweichungen von der angestrebten Bohrungsgeometrie äußern.

Der Gefahr der Ausbildung der Störungen Rattern und Drall wird bei der Gestaltung des Werkzeugs u.a. durch die asymmetrische Anordnung der Führungsleisten begegnet. Durch diese wird eine von null verschiedene radiale Komponente der Schnittkraft erreicht, welche den Bohrkopf während des Prozesses gegen die soeben erzeugte Bohrungswand drückt und so die Selbstführung des Werkzeugs verursacht. Für die Vermeidung von Rattern besteht die Möglichkeit der Verwendung eines so genannten Lanchester-Dämpfers (Rubin, 2002), welcher in der Nähe des eingespannten Endes am Bohrohr befestigt wird und dort dämpfend auf Torsionsschwingungen wirkt.

Ein weiteres Problem des Tiefbohrens gegenüber herkömmlichen Bohrverfahren ist die erschwerte Abfuhr von Spänen und Kühl- und Schmierstoffen (KSS), das z.B. durch

die Verwendung eines hohlen Bohrrohrs gelöst wird, durch dessen Inneres die Späne und KSS abtransportiert werden.

Wenn der Durchmesser der herzustellenden Bohrung 20 mm und die Länge das dreifache des Durchmessers übersteigen, wird für gewöhnlich das BTA (Boring Trepanning Association)-Tiefbohrverfahren eingesetzt. Da dieses Verfahrens häufig in einer der letzten Phasen bei der Herstellung hochwertiger Produkte wie Präzisionsrohre und Turbinenläufe zur Anwendung kommt und die beschriebenen Störungen zur Zerstörung des Werkstücks führen können, ist ihre Vermeidung von besonderem Interesse.

Das eingangs genannte Projekt beschäftigt sich mit Möglichkeiten, auf Basis von während des Prozesses aufgezeichneten Signalen dynamische Störungen zu erkennen und zu vermeiden. Dabei lag der Schwerpunkt zunächst auf der phänomenologischen Modellierung der Störungen. Wesentliche Ergebnisse dieser Arbeiten sind die Früherkennung der Störung Rattern bereits einige Sekunden vor deren Eintreten (Messaoud, 2006) und der Eignungsnachweis des Körperschallsignals als Grundlage zur Schätzung variierender Frequenzen (Raabe u. a., 2004).

Für die Entwicklung von adäquaten Gegenmaßnahmen ist ein tieferes Prozessverständnis notwendig. Dieses wird erreicht durch den Übergang von der phänomenologischen zur statistisch-physikalischen Modellierung. Zentral ist dabei die Betrachtung der Störungen Rattern und Drall als regenerative, d.h. selbsterregte Effekte. Im Gegensatz zu den rein phänomenologischen Modellen bilden die physikalischen Modelle den Entstehungsprozess der jeweiligen Störung und nicht nur ihre Auswirkung ab. Dies geschieht unter Einbeziehung der geometrischen und physikalischen Eigenschaften von Werkzeug und Werkstück. Auf diese Weise ist neben der Anpassung an Prozessdaten auch die Einrichtung eines realitätsnahen Simulationssystems möglich. Anhand dieses Systems können Störungsvermeidungsstrategien zunächst vor der Übertragung auf den realen Bohrprozess getestet werden.

Den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit bildet die Entwicklung eines statistisch-physikalischen Modells zur Schätzung der für die Entwicklung von Drall verantwortlichen Biegeeigenfrequenzen des Bohrrohrs auf Basis des Körperschall-Signals. Gegenüber bisherigen Ansätzen wie z.B. Finite-Elemente-Modellen (FEM) erlaubt dieses Modell zum einen die vergleichsweise schnelle Ermittlung der Eigenfrequenzen im laufenden Prozess. Zum anderen ermöglicht die statistische Formulierung des Modells die

Berücksichtigung stochastischer Abweichungen von den Idealbedingungen und somit eine realistischere Abbildung des Prozesses.

2 Das BTA-Tiefbohrverfahren

Das BTA-Tiefbohrverfahren findet häufig zur Herstellung von Metallbohrungen Anwendung, wenn der Durchmesser D der Bohrung 20 mm und ihre Länge l_B das dreifache des Durchmessers übersteigen (N.N., 2003). Der Aufbau des verwendeten Werkzeugs ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Im linken Bereich ist eine Skizze des Bohrkopfs zu sehen, welche die asymmetrische Anordnung von Schneiden und Führungsleisten erkennen lässt. Durch diese Anordnungsart wird erreicht, dass sich die Passivkräfte nicht aufheben, wodurch das Werkzeug über die Führungsleisten gegen die soeben erzeugte Bohrungswand gedrückt wird und diese derart selbstgeführt fortsetzt. Diese Selbstführung wirkt der Gefahr von sich aus der aufgrund der geringen Biegesteifigkeit der schlanken Stange ergebenden Abweichungen vom idealen Mittenverlauf der Bohrung entgegen (Richardson und Bhatti, 2001).

Weitere besondere Anforderungen an Bohrungen mit hohem Länge-zu-Durchmesser-Verhältnis sind die Ver- und Entsorgung von Kühl- und Schmierstoffen (KSS) sowie der Abtransport der aus dem Werkstück geschnittenen Späne. Diese Probleme werden beim BTA-Tiefbohren kombiniert gelöst. Die KSS werden dem Werkzeug durch den schmalen, ringförmigen Raum zwischen Bohrstange und Bohrungswand zugeführt und zusammen mit den Spänen durch die hohle Bohrstange abgeleitet. Die Längsschnittskizze im rechten Bereich von Abbildung 2.1 verdeutlicht diesen Ablauf. Dabei ist zu beachten, dass der KSS-Zuführapparat fest mit dem Werkstück verbunden ist und während des Bohrens mit ihm über die fest eingespannte Stange geschoben wird. Durch den Spanabtransport durch das Innere der Bohrstange wird auch verhindert, dass Späne die erzeugte Bohrungswand beschädigen. Zudem bewirken die auf dem Bohrkopf angebrachten Führungsleisten eine zusätzliche Glättung dieser Wand. Aufgrund dieser Eigenschaften wird das BTA-Tiefbohrverfahren häufig in Anwendungen eingesetzt, in denen es auf eine hohe Oberflächenqualität ankommt. Dementsprechend

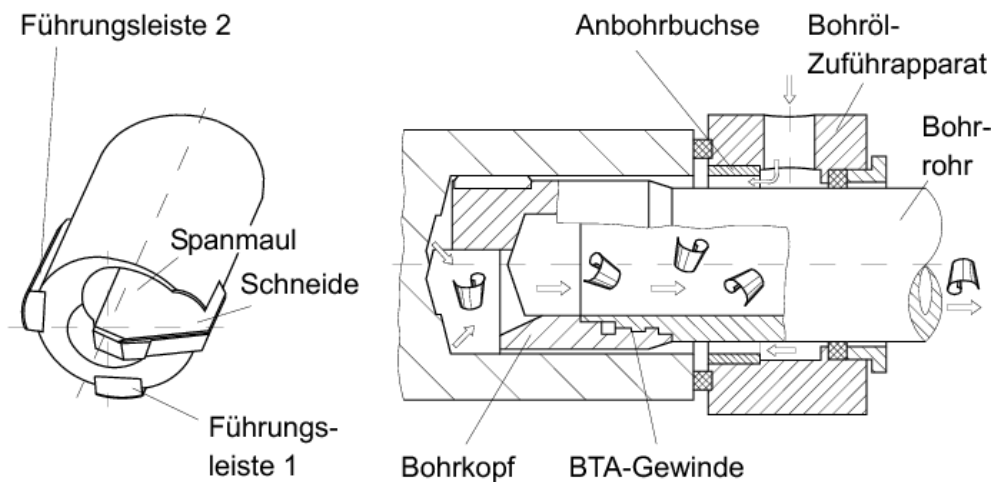


Abbildung 2.1: BTA-Tiefbohrwerkzeug (aus N.N. (2003))

ist es von großem Interesse, Störungen zu vermeiden, die diese Qualität beeinflussen und das erzeugte Produkt unbrauchbar machen können. Derartige Prozessstörungen sind aufgrund der durch die notwendige schlanke Gestalt des Werkzeugs geringen Torsions- und Biegesteifigkeiten typischerweise dynamischer Natur und äußern sich in Form der Störungstypen Rattern und Drall.

2.1 Rattern

Die Störung Rattern zeigt sich in selbsterregten Torsionsschwingungen der Bohrstange aufgrund eines so genannten Regenerativeffekts. Torsionsschwingungen sind periodische Verdrehungen (Torsionen) der Stange um deren eigene Achse. Abbildung 2.2 verdeutlicht die Gestalt der Torsionen. Die Schwingungen werden durch das Grundrauschen der Maschine angeregt und von den Torsionseigenfrequenzen des Systems dominiert.

Zu jeder Torsionseigenfrequenz gehört eine Torsionseigenmode, mit der das System schwingt. Die aktuelle Gestalt der gesamten Stange ergibt sich aus einer Überlagerung aller Torsionsmoden. Die Gewichte, mit denen die einzelnen Moden in diese Überlagerung eingehen, bestimmen sich zum einen aus ihrer aktuellen Auslenkung und

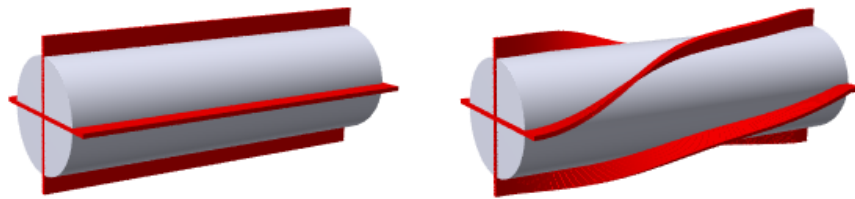


Abbildung 2.2: Torsionsbeispiel. Links: unverformte Stange mit überkreuz eingezogenen Gummibändern, rechts: verdrehte Stange.

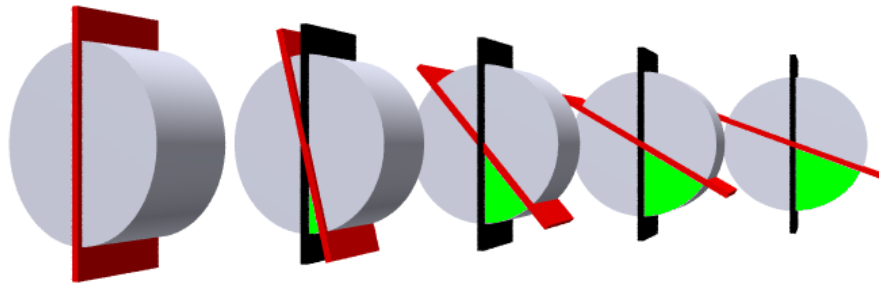


Abbildung 2.3: Torsionsmodenbeispiel mit fünf Freiheitsgraden. Eine Torsionsmode ist der Vektor mit den durch das vertikale schwarze und das rote Band eingeschlossenen Winkeln (grün) der einzelnen Elemente als Einträgen.

zum anderen aus ihrer spezifischen Dämpfung. Eine Möglichkeit der Darstellung einer Torsionsmode besteht in der Diskretisierung der Stange in n gleich lange Abschnitte und der Angabe eines n -dimensionalen Vektors, der die Auslenkungswinkel dieser Abschnitte in Torsionsrichtung enthält (Abbildung 2.3).

Zu Prozessbeginn beginnt die Stange also in torsionaler Richtung zu schwingen. Dementsprechend schwingt auch das freie Ende, an dem sich der Bohrkopf befindet. Da das Werkstück mit konstanter Geschwindigkeit rotiert und über die Stange geschoben wird, schneidet das Werkzeug periodisch tiefer und weniger tief in das Material, was zu einem welligen Bohrungsgrund führt. Nach einer Umdrehung des Werkstücks schneidet die Schneide erneut in diese Welle, was bei günstiger Phasenverschiebung zu einer

stark mit den Torsionseigenfrequenzen schwingenden Zerspanungsdicke führt. Da diese proportional zur Schnittkraft ist, wird das System zusätzlich angeregt, was sich in einer weiteren Erhöhung der maximalen Amplitude äußert (vgl. Raabe u. a. (2010) und Wolfrum u. a. (2006)).

Folgen des Ratterns sind neben einer erheblichen Lärmentwicklung Schädigungen von Werkstück und Werkzeug. Während die Qualität der Bohrungswand vom Rattern weitestgehend unbeeinträchtigt bleibt, bilden sich auf dem Bohrungsgrund radial verlaufende Rattermarken. Insbesondere bei Durchbohrungen schwerer wiegt allerdings der ratterbedingt erhöhte Verschleiß von Schneiden und Führungsleisten in Form von Ausbrüchen und Abschleifungen.

2.2 Drall

Drall äußert sich beim Tiefbohren in unrunder Bohrungsquerschnitten. Typischerweise zeigen die zu Drallbohrungen gehörigen Rundschriebe die Form eines Kleeblatts mit drei oder mehr Blättern. Eine gängige These ist, dass derartige Querschnitte nur in Form einer Kurve konstanter Breite und dementsprechend ausschließlich mit ungerader Anzahl an Ausbuchtungen auftreten können (Bayly u. a., 2002). Eine Kurve konstanter Breite ist ein geometrisches Gebilde, für das jedes Paar von das Gebilde berührenden Parallelen den gleichen Abstand hat. Beispiele für auch Gleichdicke genannte Kurven konstanter Breite zeigt Abbildung 2.4. Implizite Annahme der Gleichdicke-These ist zum einen, dass das Werkzeug ein durchmesserverkörperndes Maß enthält, wie es z.B. bei gegenüberliegenden Anlagepunkten (Schneiden und Führungsleisten) der Fall ist. Zum anderen wird von einer kreisförmigen Bewegung der Werkzeugachse um das Bohrungszentrum ausgegangen, wie es bei periodischen Auslenkungen der Stange auftreten würde.

Wie entsprechende Untersuchungen (Gessesse u. a., 1994) zeigen, sind Biegeschwingungen ursächlich für diese periodischen Auslenkungen und somit für die Entstehung von Drall. Biegeschwingungen sind periodische transversale Verbiegungen (Abbildung 2.5) der Bohrstange, deren Frequenzen (Biegeeigenfrequenzen) und Formen (Biege-

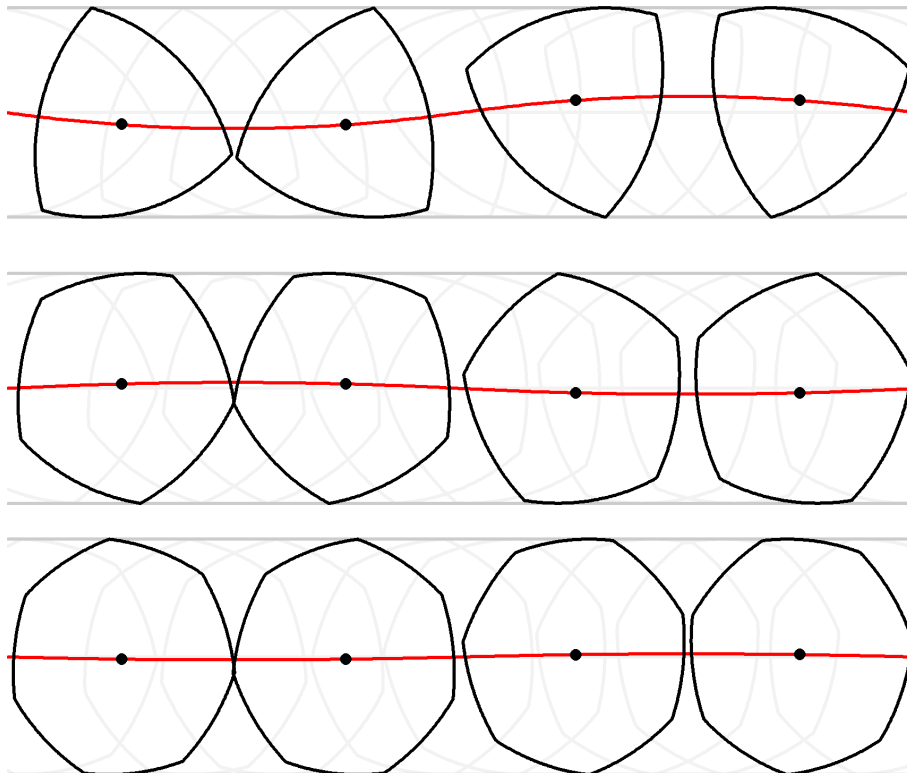


Abbildung 2.4: Beispiele für Kurven konstanter Breite. Die rote Linie zeigt die periodische Schwingung des Gleichdickzentrums um die Mitte der berührenden Parallelen.

moden) von ihren geometrischen und physikalischen Eigenschaften abhängen. Ähnlich den Torsionsmoden lassen sich auch Biegemoden nach Diskretisierung der Stange in n gleich lange Abschnitte durch einen n -dimensionalen Vektor ausdrücken, welcher in diesem Fall die Auslenkungen der einzelnen Elemente als Einträge hat (Abbildung 2.6). Bei Anregung durch das Maschinenrauschen beginnt die Stange im Prozess neben der Torsionsrichtung auch in transversaler Richtung mit den Biegeeigenfrequenzen zu schwingen, was in diesem Fall zu einer Durchmesserabweichung gemäß der beteiligten Mode führt. Stimmt eine der dominierenden Biegeeigenfrequenzen annähernd mit einem Vielfachen der Werkstückdrehfrequenz überein, so zeigt diese Durchmesserabweichung jeweils nach einer Umdrehung in die gleiche Richtung, wodurch die entsprechende Biegeeigenfrequenz zusätzlich regenerativ angeregt wird. Die resultierende Bohrung weist dann den typischen Kleeblattquerschnitt auf, wobei die Anzahl der Blätter gleich dem Faktor ist, um den die dominierende Biegeeigenfrequenz über der Drehzahl liegt. Falls der Durchmesser der Bohrung nicht variieren kann, können diese Querschnitte nur in Form von Kurven von konstanter Breite auftreten, was in der Konsequenz die Entwicklung des Regenerativeffekts Drall nur für ungeradzahlige Vielfache der Drehfrequenz zulässt.

In Voruntersuchungen (Webber (2006), Raabe u. a. (2010)) innerhalb des Rahmenprojekts dieser Arbeit konnte allerdings gezeigt werden, dass Drall beim BTA-Tiefbohren auch bei Übereinstimmung von Biegeeigenfrequenzen mit geradzahligen Vielfachen der Drehfrequenz möglich ist. Abbildung 2.7 zeigt hierzu beispielhaft den Rundschrieb einer Drallbohrung, die nach dem Schnitt des Vierfachen der Drehfrequenz mit einer Biegeeigenfrequenz entstand. Dieser Rundschrieb, der die Abweichungen der Bohrung vom vorgegebenen Bohrungsdurchmesser um einen gesamten Bohrungsquerschnitt herum abbildet, zeigt deutlich vier Ausbuchtungen. Dementsprechend kann der zugehörige Bohrungsquerschnitt keine Kurve konstanter Breite sein. Der Grund für diese Abweichung von der gängigen Drallentstehungstheorie konnte in der Tatsache ausgemacht werden, dass die Stange im Bereich des Bohrkopfs nicht periodisch auslenkt, da der Bohrkopf durch den Kontakt mit dem Werkstück nur eine sehr geringe Nachgiebigkeit aufweist. Stattdessen verkippt das freie Stangenende periodisch, so dass der Bohrungsdurchmesser variieren kann. Die oben beschriebene Erklärung der Drallenstehung lässt sich allerdings analog auf periodische Verkippungen übertragen.

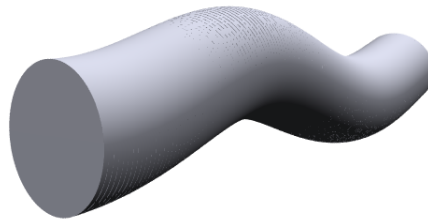


Abbildung 2.5: Beispiel einer transversal gebogenen Stange.

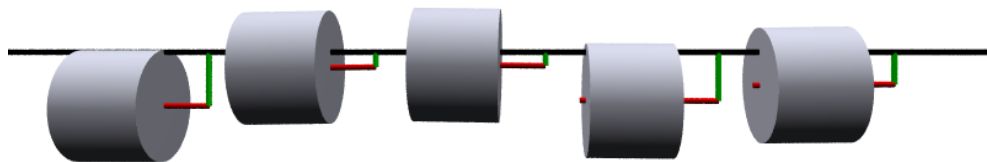


Abbildung 2.6: Biegemodenbeispiel mit fünf Freiheitsgraden. Eine Biegemode ist der Vektor mit den transversalen Auslenkungen (grün) der einzelnen Elemente als Einträgen.

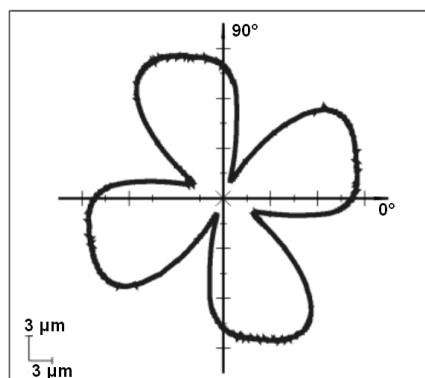


Abbildung 2.7: Rundschrieb einer Drallbohrung mit vier Einbuchtungen.

3 Physikalisch-Statistische Biegeschwingungsmodellierung

Wie im vorigen Kapitel beschrieben, wird den Biegeeigenfrequenzen der Bohrstan-ge die Verantwortung für die Drallentstehung zugeschrieben. Ihre Kenntnis ist daher elementar für die Drallvermeidung. Biegeeigenfrequenzen können im laufenden Pro-zess nicht gemessen werden, eine experimentelle Ermittlung ist lediglich bei ruhender Maschine möglich. Abgesehen von möglichen Abweichungen durch die veränderten Randbedingungen ist diese experimentelle Prozedur, bei der nach manueller Anre-gung Übertragungsfunktionen gemessen und anschließend ausgewertet werden, sehr aufwändig. Zudem muss sie, um die Bohrtiefenabhängigkeit zu berücksichtigen, mehr-fach wiederholt werden.

Aus diesem Grund wurde nach Möglichkeiten gesucht, die Biegeeigenfrequenzen auf Basis von während des laufenden Prozesses aufgezeichneten Signalen zu schätzen. Wie Webber (2006) auf Basis des Vergleichs von gemessenen Biegeeigenfrequenzen mit di-versen Signalen zeigt, spiegeln sich die Eigenfrequenzen am deutlichsten im Signal des zur lateralen Auslenkung proportionalen Körperschalls wieder. Die folgenden Unter-suchungen basieren daher auf Körperschallzeitreihen.

Im Gegensatz zu den für die Störung Rattern relevanten Torsionseigenfrequenzen sind Biegeeigenfrequenzen offensichtlich bohrtiefenabhängig, wie der Vergleich von Spektro-grammen des die Torsionseigenfrequenzen reflektierenden Torsionsmoments mit denen des Körperschalls zeigt (Abbildung 3.1). Der Grund hierfür liegt in der unterschiedli-chen Wirkung des während des Prozesses verschobenen KSS-Zuführ-Apparats. Als die Stange abstützendes Element hat dieser in torsionaler Richtung lediglich dämpfende Wirkung, was sich in einer Amplituden-, nicht aber in einer Frequenzänderung äußert. In transversaler Richtung dagegen verändert er die Biegemoden direkt, da abstützende

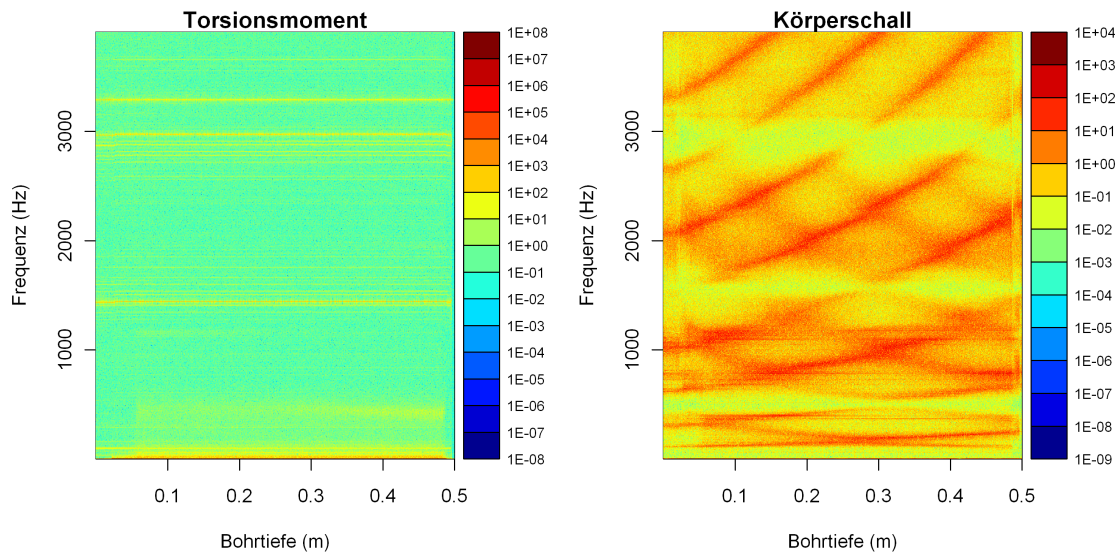


Abbildung 3.1: Vergleich von Spektrogrammen des Torsionsmoments und des Körperschalls.

Elemente gemeinhin Schwingungsknoten implizieren (ein Schwingungsknoten ist eine Position, an der die Schwingungsform ein lokales Auslenkungsminimum aufweist; der Abschnitt zwischen zwei Knoten wird auch als Schwingungsbauch bezeichnet). Entsprechend ändern sich die mit den Schwingungsformen korrespondierenden Biegeeigenfrequenzen. Veranschaulichen lässt sich dieser Effekt durch den Vergleich mit einer Violinensaiten, entlang derer ein greifender Finger verschoben wird. Der Finger ist das abstützende Element, die Schwingungsform enthält je einen Knoten an Steg und Finger und wird desto kürzer, je näher er an den Steg geschoben wird. Damit einhergehend erhöht sich der gespielte Ton, also die Saiteneigenfrequenz.

Bei genauerer Betrachtung von Körperschallspektrogrammen fällt ins Auge, dass diese von drei Typen von Frequenzverläufen dominiert werden, nämlich von steigenden, fallenden und konstanten Verläufen. Diese verschiedenen Verläufe korrespondieren mit den verschiedenen Abschnitten zwischen den abstützenden Elementen. Die konstanten Verläufe reflektieren (so es sich nicht um Frequenzen des laufenden Motors handelt) Biegeeigenfrequenzen zu Moden, die Schwingungsbauche zwischen Einspannende und

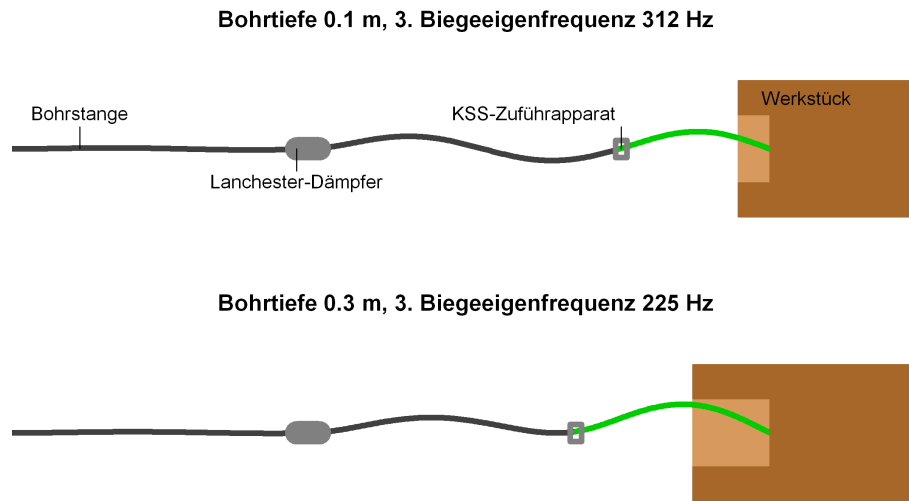


Abbildung 3.2: Biegemodenvergleich vor und nach Verschiebung des KSS-Zuführapparats. Reduktion der 3. Biegeeigenfrequenz und Verlängerung des zwischen KSS-Zuführapparat und Werkstück schwingenden Abschnitts (grün).

Lanchester-Dämpfer haben. Da die Position des Dämpfers sich während des Bohrens nicht ändert, bleiben die Länge dieses Abschnitts und somit die entsprechenden Eigenfrequenzen über den gesamten Prozess gleich. Die steigenden Frequenzen gehören zu Moden, die hauptsächlich zwischen Dämpfer und KSS-Zuführapparat schwingen. Da dieser - ähnlich dem oben beschriebenen Finger auf der Violinensaiten - während des Bohrens gleichmäßig in Richtung des Einspannendes verschoben wird, wird dieser Bereich immer kürzer und die zugehörigen Eigenfrequenzen immer höher. Die fallenden Frequenzverläufe schließlich sind auf das Schwingungsverhalten zwischen KSS-Zuführapparat und Bohrkopf zurückzuführen. Da das Werkstück zwar im festen Abstand zum KSS-Zuführapparat über die Stange geschoben wird, die Stange aber deutlich schmaler ist als der Bohrkopf, wird die abstützende Wirkung des Werkstücks nur am Stangenende, also am Bohrkopf erzielt. Somit wird der an diesem Stangenende schwingende Abschnitt desto länger, je weiter sich der Apparat in Richtung Einspannende verschiebt und die entsprechenden Frequenzen immer niedriger (Abbildung 3.2).

Die beschriebenen Verläufe gelten für den Fall sehr starker Abstützungen. Im Falle schwacher Abstützungen (auf das Violinenbeispiel übertragen vergleichbar mit dem bei Flageolett nur leicht angreifenden Finger) weisen die Schwingungsmoden auch an den Knoten deutlich von null verschiedene Auslenkungen auf, und die Modenformen auf beiden Seiten der Knoten gehen im Zeitverlauf ineinander über, was sich in den Eigenfrequenzverläufen je nach Abstützungsgrad in sich weniger stark ändernden und sich nicht klar schneidenden Eigenfrequenzen äußern kann.

3.1 Physikalisches Modell

Da sich im Körperschallsignal, wie oben angedeutet, neben den Biegeeigenfrequenzen weitere Frequenzen, die dem Maschinenbetrieb zuzuschreiben sind, widerspiegeln, erscheint eine direkte phänomenologische Schätzung schwierig. Darüber hinaus spielt die Aufnahmestelle des Signals eine entscheidende Rolle. So sind gemäß den Ausführungen des vorigen Abschnitts konstante Frequenzen besonders gut zu erkennen in Signalen, die zwischen Einspannung und Lanchester-Dämpfer gemessen werden, wohingegen Messungen zwischen Dämpfer und KSS-Zuführapparat die steigenden Frequenzen gut reflektieren (vgl. Abbildung 3.3).

Von besonderem Interesse sind allerdings die fallenden Frequenzen, da diese wie erläutert mit Schwingungsbäuchen in der Nähe des Bohrkopfs korrespondieren und somit für das Verlassen der Idealbohrlinie verantwortlich zeichnen. Das Anbringen eines Signalaufnehmers in der Nähe des Bohrkopfes erwies sich als nicht praktikabel, da dieser sich in den meisten Versuchen durch die dort fließenden Kühl- und Schmierstoffe löste. Die wenigen erfolgreich aufgenommenen Signale waren für eine eingehendere Auswertung zu stark verrauscht.

3.1.1 Bewegungsgleichungen des ungedämpften physikalischen Modells

Aus den beschriebenen Gründen wurde ein physikalisches Modell der Bohrstange aufgestellt, das die Ermittlung der Biegeeigenfrequenzen erlaubt (vgl. Webber (2006) und Biermann u. a. (2008)). Anhang A enthält dabei allgemeine Bemerkungen zur

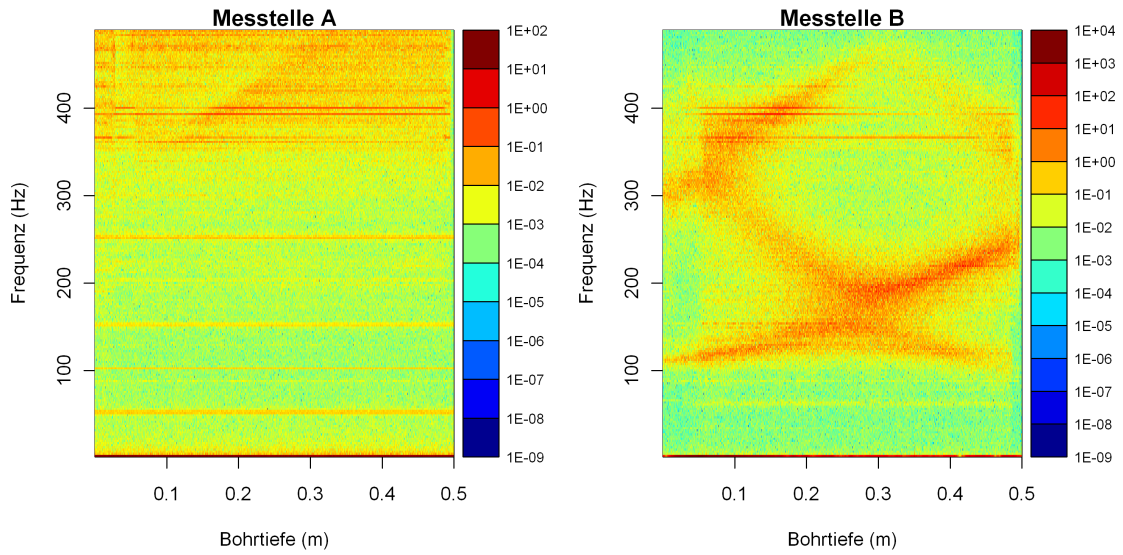


Abbildung 3.3: Vergleich von Spektrogrammen des an zwei Messstellen gemessenen Körperschalls. Messtelle A zwischen Einspannung und Lanchester-Dämpfer, Messtelle B zwischen Dämpfer und KSS-Zuführapparat.

verwendeten Notation. Eine Übersicht der im Modell verwendeten Symbole und ihrer Bedeutungen findet sich in Anhang B. Die wichtigsten aus der Zeitreihen- und Signalanalyse verwendeten Definitionen sind in Anhang C zusammengefasst.

Im ersten Schritt des Aufbaus dieses Modells wird die Bohrstange als einseitig eingespannter und ansonsten frei schwingender Stab modelliert, dessen Biegeschwingungen durch ein lineares, zeitinvariantes, konservatives System mit N Freiheitsgraden approximiert werden kann. Die Anzahl der Freiheitsgrade N bezeichnet dabei die Anzahl der Segmente, in welche die Bohrstange unterteilt wird. Dabei weist Segment j mit $j = 1, \dots, N$ die Länge l_j , Masse m_j und Steifigkeit $k_{b,j}$ auf. Im Weiteren wird von gleich langen, schweren und steifen Elementen ausgegangen, es gilt also $l_j = l$, $m_j = m$ und $k_{b,j} = k$ für alle j . Abbildung 3.4 zeigt eine beispielhafte Skizze eines derart in $N = 4$ Elemente unterteilten Modells einer gebogenen Bohrstange. Dabei steht x_j für die Auslenkung des j -ten Elements und φ_j für den Winkel zwischen dem $(j - 1)$ -ten und dem j -ten Element.

Die N Bewegungsgleichungen dieses Systems ergeben sich entsprechend den Euler-

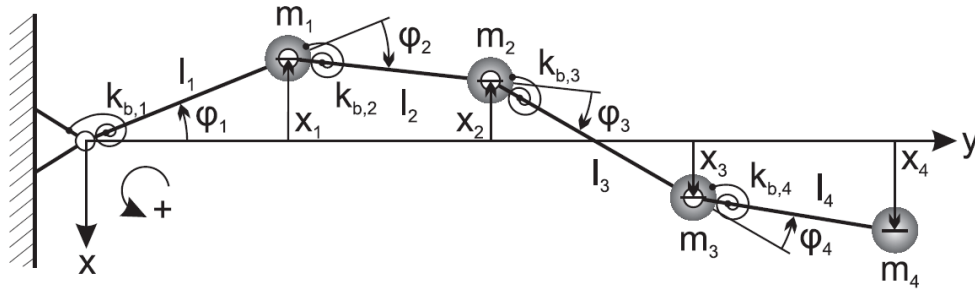


Abbildung 3.4: Beispiel eines diskreten Biegeschwingungsmodells mit vier Freiheitsgraden.

Lagrange-Gleichungen (Timoshenko und Young, 1955) durch die Ableitung von potentieller und kinetischer Energie E_{pot} und E_{kin} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_j} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_j} = 0, \quad \text{für } j = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ die erste Ableitung von q nach der Zeit. Entsprechend gilt $\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt}$. Da ausschließlich Biegeschwingungen betrachtet werden, werden als verallgemeinerte Koordinaten die translatorischen Verschiebungen gewählt, d.h. $q_j = x_j$ für alle j . Aufgrund der einheitlichen Abschnittslänge ergeben sich für kleine Verformungen kinetische und potentielle Energie (Webber (2006), S. 61) zu:

$$E_{kin} = 0.5m \sum_{j=1}^N \dot{x}_j^2 \quad (3.2)$$

und

$$E_{pot} = 0.5k \sum_{j=1}^N \varphi_j^2. \quad (3.3)$$

Aufgrund der hohen Steifigkeit der Eisenstange ist die Annahme geringer Verformungen realistisch. Aus dem selben Grund kann auch die Abschätzung $\sin\varphi \approx \varphi$ für $|\varphi| \ll 1^\circ$ verwendet werden, was die Darstellung weiter vereinfacht. Für die Winkel ergibt sich nämlich:

$$\varphi_1 = -\frac{x_1}{l}, \quad \varphi_2 = -\frac{2x_1 - x_2}{l},$$

$$\varphi_i = \frac{-x_{j-2} + 2x_{j-1} - x_j}{l} \text{ für } j = 2, \dots, N. \quad (3.4)$$

Durch Einsetzen dieser Winkel in Formel 3.3 ergibt sich auch E_{pot} als Funktion der x_i . Mit 3.2 und 3.3 können die Bewegungsgleichungen 3.1 entsprechend umgeformt werden zu:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (3.5)$$

$$\text{mit } \{x\} = (x_1, \dots, x_N)^T, \quad \{\ddot{x}\} = (\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_N)^T,$$

$$[M] = m [I]_{N \times N} \quad \text{und} \quad [K] = \frac{k}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & \\ 1 & -4 & 6 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & -4 & 1 & 0 \\ & 0 & \ddots & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & \ddots & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} .$$

Die Matrizen $[M]$ und $[K]$ werden Massematrix und Steifigkeitsmatrix des Systems genannt. Die Werte von l , m und k können anhand der geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Bohrstange bestimmt werden. Dabei ergeben sich l und m durch einfache Division der Gesamtlänge l_g bzw. -masse m_g der Stange durch die Anzahl N der Freiheitsgrade. In der Praxis wird die zylinderförmige Stange allerdings nicht gewogen, sondern die Abschnittsmasse wird durch

$$m = \frac{\varrho l \pi (d_a^2 - d_i^2)}{4} \quad (3.6)$$

bestimmt, wobei ϱ die Dichte des Materials und d_a und d_i Außen- und Innendurchmesser der Stange bezeichnen. Die Steifigkeit eines Abschnitts kann durch Anwendung der Bernoullischen Balkentheorie (Yang, 2007) durch

$$k = \frac{3EI}{N^3 l} \sum_{j=1}^N j^2 \quad (3.7)$$

berechnet werden, wobei E das materialspezifische Elastizitätsmodul und $I = \pi/64(d_a^4 - d_i^4)$ das Flächenträgheitsmoment bezeichnet.

Freie Schwingungen

Im anregungsfreien Fall kann für die Lösung der Bewegungsgleichungen 3.1 der Exponentialansatz genutzt werden (Ewins, 2000). Dabei wird von sinusoidalen Auslenkungen $\{x(t)\}$ ausgegangen:

$$\{x(t)\} = \{x_0\} \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(\{X\} e^{i\omega t})$$

$$\text{mit } \{X\} = \{x_0\} e^{i\phi} = (X_1, \dots, X_N)^T.$$

Üblicherweise wird vereinfachend $\{x(t)\} = \{X\} e^{i\omega t}$ geschrieben. Einsetzen von $\{x(t)\}$ und $\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2 \{X\} e^{i\omega t}$ in 3.1 ergibt:

$$\begin{aligned} [M](-\omega^2 \{X\} e^{i\omega t}) + [K] \{X\} e^{i\omega t} &= \{0\} \\ \Leftrightarrow ([K] - \omega^2 [M]) \{X\} e^{i\omega t} &= \{0\} \quad (3.8) \\ \Leftrightarrow ([K] - \omega^2 [M]) \{X\} &= \{0\}. \end{aligned}$$

Für eine Phasenverschiebung von $\phi = 0$ ist $\{X\}$ reellwertig. Die für nicht-triviale Lösungen des Eigenwertproblems 3.8 notwendige Bedingung

$$\det |[K] - \omega^2 [M]| = 0$$

führt zu den positiven und reellen Eigenwerten $\bar{\omega}_1^2, \dots, \bar{\omega}_N^2$, den quadrierten Biegeeigenfrequenzen (kurz BEFs) des Systems. Die zugehörigen Eigenvektoren $\{\psi\}_1, \dots, \{\psi\}_N$ als Lösungen für $\{X\}$ sind die Biegeeigenmoden (kurz BEMs). Da für jedes von 0 verschiedene reelle α der Wert $\alpha \cdot \{\psi\}_r$ eine Mode der Eigenfrequenz $\bar{\omega}_r$ ist, handelt es sich dabei um relative Moden.

Eine Biegemode ist also die Verbiegungsform $\{\psi\}_r$, mit der die Stange nach punktueller Anregung mit der zugehörigen Biegeeigenfrequenz $\bar{\omega}_r$ schwingt. Die aktuelle Verbiegungsform der Stange ergibt sich aus gewichteter Überlagerung aller beteiligten Biegemoden, wobei sich das Gewicht jeder Mode aus seiner aktuellen Amplitude ergibt.

Eine gängige Skalierung der mehrdeutigen Biegemoden ist die so genannte Massen-Normalisierung. Die r -te massen-normalisierte Mode $\{\phi\}_r$ ist definiert als

$$\begin{aligned} \{\phi\}_r &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}_r}} \{\psi\}_r \\ \text{mit } \tilde{m}_r &= \{\psi\}_r^T [M] \{\psi\}_r, \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei \tilde{m}_r die modale Masse der Mode $\{\psi\}_r$ genannt wird. Die massen-normalisierte Mode $\{\phi\}_r$ hat die Eigenschaft, dass mit dem r -ten Einheitsvektor $\{e\}_r$

$$\begin{aligned} \{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_r &= \{e\}_r \\ \text{und } \{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_r &= \bar{\omega}_r^2 \{e\}_r \end{aligned} \quad (3.10)$$

gilt. Die Lösungen werden in den Eigenmatrizen $[\bar{\Omega}^2] = \text{diag}(\bar{\omega}_1^2, \dots, \bar{\omega}_N^2)$ und $[\Psi] = [\{\psi\}_1, \dots, \{\psi\}_N]$ bzw. $[\Phi] = [\{\phi\}_1, \dots, \{\phi\}_N]$ zusammengefasst.

Angeregte Schwingungen

Im Fall erzwungener Schwingungen tritt an die Stelle der 0 in den Bewegungsgleichungen 3.1 bzw. 3.5 die Anregungskraft f . Dabei wird von einer harmonischen Anregung $\{f(t)\} = \{F\} e^{i\omega t}$ ausgegangen. Die komplexe (bzw. für $\phi = 0$ reelle) Amplitude $\{F\} = \{f_0\} e^{i\phi} = (F_1, \dots, F_N)^T$ gibt dabei für jedes Element j die Amplitude F_j an, mit der es zur Frequenz ω angeregt wird.

Die Bewegungsgleichungen werden dann zu:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{X\} e^{i\omega t} = \{F\} e^{i\omega t}, \quad (3.11)$$

was sich zu

$$\begin{aligned} \{X\} &= [\alpha(\omega)] \{F\} \\ \text{mit } [\alpha(\omega)] &= ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

umformen lässt (Ewins (2000), S. 59). Die $(N \times N)$ -Matrix $[\alpha(\omega)]$ ist die Frequenzantwortfunktionsmatrix, kurz FRF -Matrix (für englisch *frequency response function*) des Systems zur Frequenz ω . Ihr Eintrag $\alpha_{jk}(\omega) = X_j/F_k$ gibt an, um welchen Faktor sich die Amplitude X_j der Schwingung $x_j(t)$ zur Frequenz ω des j -ten Elements von der Amplitude F_k der Anregung $f_k(t)$ zur selben Frequenz unterscheidet, m.a.W. in welchem Ausmaß sich die an der Stelle k wirkende Anregung auf die Stelle j überträgt. Dieses Übertragungsverhältnis ist unabhängig von der Gestalt der Anregungskraft. Die FRF kann durch folgende Umformungen auf die BEFs und BEMs zurückgeführt

werden:

$$\begin{aligned}
 & ([K] - \omega^2 [M]) \stackrel{3.12}{=} [\alpha(\omega)]^{-1} \\
 \Rightarrow & [\Phi]^T ([K] - \omega^2 [M]) [\Phi] = [\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] \\
 \stackrel{3.10}{\Rightarrow} & [\bar{\Omega}^2] - \omega^2 [I] = [\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] \\
 \Rightarrow & [\alpha(\omega)] = [\Phi]^T ([\bar{\Omega}^2] - \omega^2 [I])^{-1} [\Phi].
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ein konkreter FRF-Wert $\alpha_{jk}(\omega)$ kann entsprechend nach der Formel

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{jr} \psi_{kr}}{\tilde{m}_r (\bar{\omega}_r^2 - \omega^2)} \tag{3.14}$$

berechnet werden, wobei ϕ_{jr} bzw. ψ_{jr} das j -te Element der r -ten (massen-normalisierten) BEM ist. Die FRF ist also umso größer, je näher die betrachtete Frequenz ω an einer BEF $\bar{\omega}_r$ liegt. Bei Übereinstimmung von ω mit einer BEF hat die FRF eine Polstelle, es gilt also $\alpha_{jk}(\bar{\omega}_r) = \infty$, $(r, j, k) \in (1, \dots, N)^3$. Der Betrag des Eintrags einer typischen FRF als Funktion von ω ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Die gezeigte Beispiel-FRF weist allerdings aufgrund von wie im folgenden Abschnitt beschrieben integrierter Dämpfung lokale Maxima statt Polstellen auf.

3.1.2 Bewegungsgleichungen des proportional viskos gedämpften physikalischen Modells

Um eine realistischere Abbildung des Schwingungsverhaltens der Bohrstange zu schaffen, wird das Modell um eine viskose, also auf die Geschwindigkeit wirkende Dämpfungsmatrix $[C]$ ergänzt. Die Bewegungsgleichungen des anregungsfreien Falls 3.5 erweitern sich dadurch zu

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}. \tag{3.15}$$

Dabei wird für die Modellierung der Dämpfung die gängige Konvention getroffen, dass sie proportional von Steifigkeit und Masse abhängt (Ewins, 2000), dass also

$$[C] = \beta [K] + \gamma [M] \tag{3.16}$$

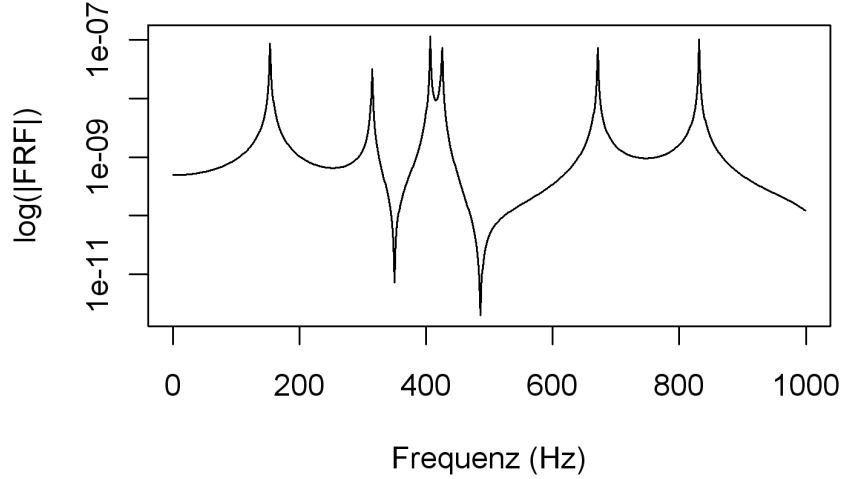


Abbildung 3.5: Typische Frequenzantwortfunktion (logarithmierte Ordinate).

mit den Proportionalitätsfaktoren β und γ gilt.

Durch Linksmultiplikation der Bewegungsgleichungen 3.15 mit der transponierten Modenmatrix $[\Psi]^T$ des ungedämpften Systems ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & [\Psi]^T [M] \{\ddot{x}\} + [\Psi]^T [C] \{\dot{x}\} + [\Psi]^T [K] \{x\} = \{0\} \\
 \Rightarrow & [\Psi]^T [M] [\Psi][\Psi]^{-1} \{\ddot{x}\} + [\Psi]^T [C] [\Psi][\Psi]^{-1} \{\dot{x}\} + [\Psi]^T [K] [\Psi][\Psi]^{-1} \{x\} = \{0\} \\
 \Rightarrow & [\tilde{M}] \{\ddot{p}\} + [\tilde{C}] \{\dot{p}\} + [\tilde{K}] \{p\} = \{0\}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

mit den modalen Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen $[\tilde{M}] = [\Psi]^T [M] [\Psi]$, $[\tilde{C}] = [\Psi]^T [C] [\Psi]$ und $[\tilde{K}] = [\Psi]^T [K] [\Psi]$ und den Modalkoordinaten $\{p\} = [\Psi]^{-1} \{x\}$. Da $[\tilde{M}]$ und $[\tilde{K}]$ aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften von Eigenvektoren Diagonalmatrizen sind, gilt dies auch für die Linearkombination $[\tilde{C}] = \beta[\tilde{K}] + \gamma[\tilde{M}]$.

Somit beschreibt 3.17 ein System ungekoppelter Differentialgleichungen, die dementsprechend unabhängig voneinander gelöst werden können (vgl. Ewins (2000), S. 64). Da sich die Verbiegungsform der Stange gemäß $\{x\} = [\Psi] \{p\}$ als Linearkombination der Moden des ungedämpften Systems zusammensetzt, folgt aus der Entkopplung, dass

die Moden des gedämpften identisch mit denen des ungedämpften Systems sind und die r -te Gleichung in 3.17 die Bewegungsgleichung der r -ten Mode $\{\psi\}_r$ beschreibt:

$$\tilde{m}_r \ddot{p}_r + \tilde{c}_r \dot{p}_r + \tilde{k}_r p_r = 0. \quad (3.18)$$

Zur Lösung dieser Gleichung wird der Exponentialansatz erweitert zu $p_r(t) = Pe^{st} = Pe^{-at}e^{i\omega t}$, wobei der Realteil $-a$ von s das Abklingverhalten und der Imaginärteil ω das Schwingungsverhalten von $p_r(t)$ beschreibt. Mit den Ableitungen $\dot{p}(t) = sPe^{st}$ und $\ddot{p}(t) = s^2Pe^{st}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_r s^2 Pe^{st} + \tilde{c}_r s Pe^{st} + \tilde{k}_r Pe^{st} &= 0 \\ \Rightarrow \left(\tilde{m}_r s^2 + \tilde{c}_r s + \tilde{k}_r \right) Pe^{st} &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{m}_r s^2 + \tilde{c}_r s + \tilde{k}_r &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Damit ergibt sich als Lösung:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\frac{\tilde{c}_r}{2\tilde{m}_r} \pm \frac{\sqrt{\tilde{c}_r^2 - 4\tilde{k}_r\tilde{m}_r}}{2\tilde{m}_r} \\ &= -\sqrt{\tilde{k}_r/\tilde{m}_r}\zeta_r \pm i\sqrt{(\tilde{k}_r/\tilde{m}_r)(1 - \zeta_r^2)} \\ &\quad \text{mit } \zeta_r = \frac{\tilde{c}_r}{2\sqrt{\tilde{k}_r\tilde{m}_r}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Da gilt:

$$\begin{aligned} ([K] - \bar{\omega}_r^2 [M]) \{\psi\}_r &= \{0\} \\ \Rightarrow \{\psi\}_r^T ([K] - \bar{\omega}_r^2 [M]) \{\psi\}_r &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{k}_r - \bar{\omega}_r^2 \tilde{m}_r &= 0 \\ \Rightarrow \bar{\omega}_r^2 &= \tilde{k}_r/\tilde{m}_r, \end{aligned} \quad (3.21)$$

kann diese Lösung umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\bar{\omega}_r \zeta_r \pm i\bar{\omega}_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \\ \text{mit } \zeta_r &= \frac{\tilde{c}_r}{2\sqrt{\tilde{k}_r\tilde{m}_r}} = \beta\bar{\omega}_r/2 + \gamma/(2\bar{\omega}_r). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Der Parameter a für das Abklingen freier Eigenschwingungen mit der BEM $\{\psi\}_r$ ist also gegeben durch $(\beta\bar{\omega}_r^2 + \gamma)/2$. Die zugehörige BEF lautet

$$\omega_r = \bar{\omega}_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}. \quad (3.23)$$

Die Biegeeigenfrequenzen ω_r des proportional gedämpften Systems unterscheiden sich also um den Faktor $\sqrt{1 - (\beta\bar{\omega}_r/2 + \gamma/(2\bar{\omega}_r))^2}$ von denen des ungedämpften Systems, während die Biegeeigenmoden $\{\psi\}_r$ beider Systeme identisch sind.

Ausgehend von $\{f(t)\} = \{F\} e^{i\omega t}$ und $\{x(t)\} = \{X\} e^{i\omega t}$ lässt sich analog zu 3.11–3.13 die Frequenzantwortfunktion des gedämpften Systems herleiten:

$$\begin{aligned} ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M]) &= [\alpha(\omega)]^{-1} \\ \Rightarrow [\Phi]^T ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M]) [\Phi] &= [\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] \\ \Rightarrow [\bar{\Omega}^2] + i\omega [\tilde{C}] - \omega^2 [I] &= [\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] \\ \Rightarrow [\alpha(\omega)] &= [\Phi]^T \left([\bar{\Omega}^2] + i\omega [\tilde{C}] - \omega^2 [I] \right)^{-1} [\Phi]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Für einen einzelnen FRF-Wert $\alpha_{jk}(\omega)$ gilt:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{\bar{\omega}_r^2 + i\omega \tilde{c}_r - \omega^2} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{jr} \psi_{kr}}{\tilde{m}_r (\bar{\omega}_r^2 + i\omega \tilde{c}_r - \omega^2)}. \quad (3.25)$$

Der nun komplexe FRF-Wert $\alpha_{jk}(\omega)$ enthält zum einen die Information darüber, um welchen Faktor $|\alpha_{jk}(\omega)| = |X_j|/|F_k|$ sich die Amplitude $|X_j|$ der Schwingung $x_j(t)$ zur Frequenz ω des j -ten Elements von der Amplitude $|F_k|$ der am k -ten Element wirkenden Anregung $f_k(t)$ zur selben Frequenz unterscheidet. Zum anderen ergibt sich der Winkel $\angle \alpha_{jk}(\omega)$, um den $f_k(t)$ und $x_j(t)$ phasenverschoben sind, durch $\angle \alpha_{jk}(\omega) = \tan^{-1}(\text{Re}[\alpha_{jk}(\omega)]/\text{Im}[\alpha_{jk}(\omega)])$ (vgl. Ewins (2000), S. 521).

3.1.3 Modellerweiterung durch elastische Abstützungen

Die bisherigen Betrachtungen gingen von einer ausschließlich einseitig eingespannten Bohrstange aus. Während des Bohrprozesses haben aber weitere Elemente, nämlich der

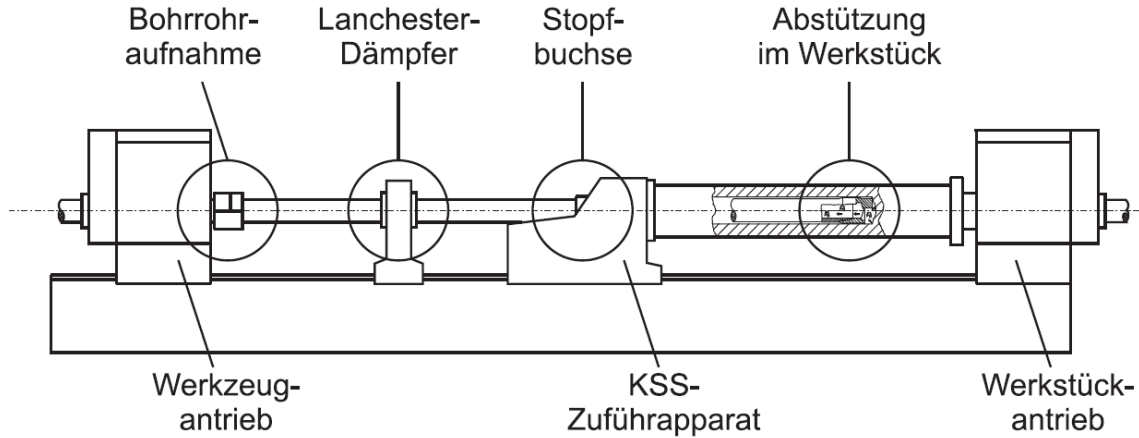


Abbildung 3.6: BTA-Tiefbohrstange mit abstützenden Elementen.

Lanchester-Dämpfer, die Stopfbuchse des KSS-Zuführapparats sowie das Werkstück Kontakt mit der Stange (siehe Abbildung 3.6).

Der Einfluss dieser Elemente kann durch elastische radiale Abstützungen berücksichtigt werden (Webber, 2006). Hierzu wird das Modell um Federelemente erweitert, welche durch ihren additiven Einfluss k_s auf die Basissteifigkeit k der Elemente quantifiziert werden, auf die sie wirken (siehe Abbildung 3.7).

Die Steifigkeit eines durch eine Feder abgestützten Elements j lautet also $k_{g,j} = k + k_{s,j}$, für nicht abgestützte Elemente gilt $k_{s,j} = 0$. Die potentielle Energie aus 3.3 ändert sich somit zu

$$E_{pot} = 0.5k \sum_{j=1}^N \varphi_j^2 + 0.5 \sum_{j=1}^N k_{s,j} \varphi_j^2. \quad (3.26)$$

Unter Verwendung der Approximation 3.4 ergibt die Anwendung von 3.1 die Bewegungsgleichungen

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K_g] \{x\} = \{0\} \quad (3.27)$$

mit

$$[K_g] = [K] + \sum_{j=1}^N k_{s,j} \{e_j\} \{e_j\}^T. \quad (3.28)$$

Die Massematrix $[M]$ des abgestützten Systems ist also identisch mit der des nicht abgestützten, die Steifigkeitsmatrix $[K_g]$ unterscheidet sich von $[K]$ nur auf der Hauptdiagonalen, wobei gilt: $diag([K_g]) = diag([K]) + (k_{s,1}, \dots, k_{s,N})^T$.

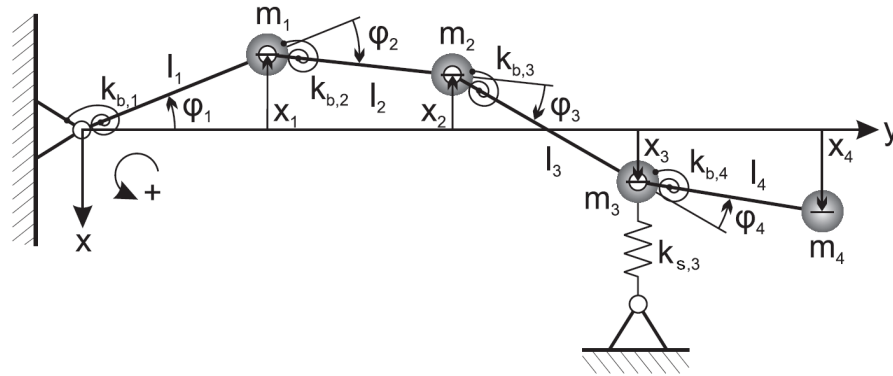


Abbildung 3.7: Beispielmodell mit abstützendem Element.

Die Bewegungsgleichungen des proportional viskos gedämpften Systems ändern sich entsprechend zu

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C_g] \{\dot{x}\} + [K_g] \{x\} = \{0\} \quad (3.29)$$

mit

$$[C_g] = \beta [K_g] + \gamma [M]. \quad (3.30)$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichungen erfolgt gemäß den Ausführungen der vorigen Abschnitte, wobei die Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen $[C]$ und $[K]$ durch $[C_g]$ und $[K_g]$ zu ersetzen und sich aus $[C]$ und $[K]$ berechnende Werte entsprechend anzupassen sind. Auf eine erweiterte Indizierung dieser Größen wird zur besseren Übersichtlichkeit verzichtet und darauf verwiesen, dass sich in allem Weiteren alle Größen auf das abgestützte System beziehen.

Da die abstützenden Elemente unterschiedliche Kontaktflächen aufweisen, werden ihre Steifigkeitseinflüsse in Anlehnung an die experimentellen Untersuchungen von Webber (2006) unterschiedlich modelliert.

Modellierung des Werkstücks

Das Werkstück hat während des Bohrens nur an der Bohrkopfspitze Kontakt mit der Stange, also am N -ten Element. Wie entsprechende Untersuchungen zeigten, ist sein Steifigkeitseinfluss offenbar so stark, dass die Stange an diesem Element nahezu nicht

schwingen kann (Raabe u. a., 2006). Die Modellanpassung wurde desto besser, je größer der Wert von $k_{s,N}$ gewählt wurde. Daher wird $k_{s,N}$ im Weiteren auf einen sehr hohen Wert ($10^{17} N/m$) gesetzt und konstant gehalten. Der Unterschied zum ebenfalls nicht schwingfähigen eingespannten Ende besteht darin, dass am Bohrkopf Verkippungen ($\lim_{N \rightarrow \infty} ([x_N - x_{N-1}]/l) > 0$) möglich sind, während im Bereich der Einspannung nur Verbiegungen ($\lim_{N \rightarrow \infty} (x_1/l) = 0$) auftreten können.

Modellierung des KSS-Zuführapparats

Der KSS-Zuführapparat kontaktiert die Bohrstange über zwei gleichartige, zur Abdichtung der Umgebung installierte Stopfbuchsen. Da die Länge des Kontakts dieser Stopfbuchsen gemeinhin geringer ist als l , wird ihr Steifigkeitseinfluss $k_{s, sb1} = k_{s, sb2} = k_{sb}$ als punktuell auf die beiden Elemente $sb1$ und $sb2$ wirkend modelliert, an denen die Stopfbuchsen die Stangen berühren. Die Elementnummern $sb1$ und $sb2$ ergeben sich durch:

$$\begin{aligned} sb1 &= \lfloor (l_g - l_{dsb2g} - l_{dsb})/l + 0.5 \rfloor \\ sb2 &= \lfloor (l_g - l_{dsb2g})/l + 0.5 \rfloor \end{aligned}$$

wobei l_{dsb2g} den Abstand zwischen Stopfbuchse 2 und der Bohrerspitze und l_{dsb} den Mittenabstand der beiden Stopfbuchsen bezeichnet.

Modellierung des Lanchester-Dämpfers

Im Gegensatz zu den Stopfbuchsen ist die Länge l_D des Lanchesterdämpfers im Allgemeinen größer als die Länge l eines Segments. Dementsprechend wirkt der Dämpfer auf eine Reihe von Segmenten steifigkeitsbeeinflussend. Da davon auszugehen ist, dass das im Dämpfer an der Stange anliegende Hartfasermaterial an seinen Enden eine geringere Nachgiebigkeit aufweist, wird die Kontaktlänge l_{KD} des Dämpfers als im Vergleich zur Dämpferlänge reduziert angenommen. Es gilt also:

$$\begin{aligned} l_{KD} &= l_D - l_{D1} - l_{D2} \\ \text{mit } l_{D1} &> 0, l_{D2} > 0, \\ l_{D1} + l_{D2} &< l_D. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen l_{D1} und l_{D2} die Verkürzungen an den beiden Enden des Dämpfers. Der Gesamtsteifigkeitseinfluss k_D des Dämpfers wird dann gleichmäßig auf die von ihm kontaktierten Elemente $d(1), \dots, d(D)$ verteilt:

$$\begin{aligned} d(i) &= \lfloor l_{d0D}/l \rfloor + i - 1, & i &= 1, \dots, D, \\ D &= \lfloor (l_{d0D} + l_{KD})/l \rfloor - \lfloor l_{d0D}/l \rfloor, \end{aligned}$$

wobei l_{d0D} der Abstand zwischen Einspannung und dem der Einspannung zugewandten Ende des Dämpfers ist. Um k_D gleichmäßig über die Kontaktlänge zu verteilen, müssen die einzelnen Steifigkeitseinflüsse $k_{s,d(i)}$ mit $k_D = \sum_{i=1}^D k_{s,d(i)}$ proportional zum Anteil der Länge sein, über die sie das Element i kontaktieren, formal:

$$k_{s,d(i)} = w_i k_D, \quad i = 1, \dots, D$$

$$\begin{aligned} \text{mit } w_1 &= (\lfloor l_{d0D}/l \rfloor - l_{d0D}/l)/W, \\ w_i &= 1/W, \quad i = 2, \dots, D - 2, \\ w_D &= (\lfloor (l_{d0D} + l_{KD})/l \rfloor - (l_{d0D} + l_{KD})/l)/W, \\ W &= \lfloor l_{d0D}/l \rfloor - l_{d0D}/l + D - 2 + \lfloor (l_{d0D} + l_{KD})/l \rfloor - (l_{d0D} + l_{KD})/l. \end{aligned}$$

3.1.4 Bohrtiefenabhängigkeit des Systems

Während des Bohrprozesses werden KSS-Zuführapparat und Werkstück in festem Abstand zueinander mit der Vorschubgeschwindigkeit v_f über die Bohrstange geschoben. Die steifigkeitsrelevante Kontaktstelle des Werkstücks verbleibt dabei an der Bohrkopfspitze. Dagegen verschieben sich die Kontaktstellen der beiden Stopfbuchsen ebenfalls mit der Geschwindigkeit v_f . Dementsprechend ändern sich Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix über die Zeit und können in Abhängigkeit von der aktuellen Bohrtiefe l_b beschrieben werden:

$$\begin{aligned} [K_g(l_b)] &= [K] + \sum_{j=1}^N k_{s,j} \{e_j\} \{e_j\}^T \\ &\quad + k_{sb} \{e_{sb1(l_b)}\} \{e_{sb1(l_b)}\}^T \\ &\quad + k_{sb} \{e_{sb2(l_b)}\} \{e_{sb2(l_b)}\}^T, \\ [C_g(l_b)] &= \beta [K_g(l_b)] + \gamma [M]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dabei treten an die Stelle der oben als fest angenommenen Stopfbuchsen-Positionen $sb1$ und $sb2$ die bohrtiefenabhängigen Positionen:

$$\begin{aligned} sb1(l_b) &= \lfloor (l_g - l_{dsb2g} - l_{dsb} - l_b)/l + 0.5 \rfloor \\ sb2(l_b) &= \lfloor (l_g - l_{dsb2g} - l_b)/l + 0.5 \rfloor. \end{aligned}$$

Da die Bohrtiefe $l_b = v_f t$ bei konstanter Geschwindigkeit v_f eine Skalierung der Zeit t ist, könnte die Steifigkeitsmatrix auch auf einfache Weise in Abhängigkeit von t formuliert werden. Zur besseren Verallgemeinerbarkeit wird für die Veränderung der Modellrandbedingungen im Weiteren allerdings der Weg als Zeitachse gewählt. Davon unberührt beziehen sich Schwingungsbetrachtungen auf echte Zeiteinheiten.

Ein Veränderung der Steifigkeitsmatrix $[K_g(l_b)]$ findet also immer dann statt, wenn eine Stopfbuchse von einem auf das nächste Element wandert, k_{sb} also auf das nächste Hauptdiagonalelement von $[K]$ addiert wird. Da sich das korrespondierende Eigenwertproblem entsprechend zu

$$([K_g(l_b)] - \omega^2 [M]) \{X\} = \{0\}. \quad (3.32)$$

ändert, ändern sich auch dessen Lösungen $\bar{\omega}_r^2(l_b)$ und $\{\psi_r(l_b)\}$. Die sich durch Einsetzen in 3.23 ergebenden BEFs $\omega_r(l_b)$ sowie die durch 3.24 definierte FRF $[\alpha(\omega, l_b)]$ sind also ebenfalls bohrtiefenabhängig.

3.2 Statistisches Modell zur Schätzung der physikalischen Modellparameter

Bei vollständiger Kenntnis der Parameter des physikalischen Modells könnte der Verlauf der Biegeeigenfrequenzen deterministisch ermittelt werden. Da diese allerdings nicht gegeben ist und zudem stochastische Abweichungen zu erwarten sind, wird der Weg statistischer Modellierung und Parameterschätzung gewählt (vgl. Weinert u. a. (2007) und Weihs u. a. (2009)). Tabelle 3.1 zeigt eine nach ihrem Status geordnete Auflistung aller im Modell erscheinenden Größen. Die Modellgrößen bestehen zunächst aus den aufgrund der Kenntnis der Beschaffenheit der Bohrstange bekannten geometrischen und physikalischen Bohrstangeneigenschaften (4–5). Aus diesen Größen können weitere Größen wie m , k , und l direkt berechnet werden. Die übrigen bekannten Modellparameter beschreiben die Positionen der an der Stange installierten Elemente (6–8) und die Prozessgrößen (9–10). Die unbekanntes und daher zu schätzenden Parameter setzen sich aus den die Steifigkeitseinflüsse der Abstützungen (11–13) und die Gestalt der Dämpfungsmatrix (14) beschreibenden Größen zusammen.

Die im physikalischen Modell enthaltenen Signale bestehen aus der Anregungskraft

	Symbol	Bedeutung	
1	N	Anzahl der Freiheitsgrade	f
2	$k_{s,N}$	Steifigkeitseinfluss des Werkstücks	f
3	$f_j(t) = 0,$ $j = 1, \dots, N - 1$	An allen Elementen außer der Bohrspitze angreifende Anregungskraft zum Zeitpunkt t	f
4	l_g, d_a, d_i	Geometrische Eigenschaften der Bohrstange	b
5	ρ, E, I	Physikalische Eigenschaften der Bohrstange	b
6	l_{dsb2g}, l_{dsb}	Abstände zwischen Bohrspitze und ihr zugewandter Stopfbuchse sowie zwischen den Stopfbuchsen	b
7	l_{d0D}, l_D	Abstand zwischen Einspannung und ihr zugewandtem Dämpferrand sowie Dämpferlänge	b
8	l_{d0KM}	Abstand zwischen Einspannung und Körperschallmessstelle	b
9	v_f	Vorschubgeschwindigkeit	b
10	l_B	Gesamtbohrtiefe	b
11	k_{sb}	Steifigkeitseinfluss einer Stopfbuchse	u
12	k_D	Gesamtsteifigkeitseinfluss des Dämpfers	u
13	l_{D1}, l_{D2}	Verkürzungen der Wirkungslänge des Dämpfers in Bezug auf l_D	u
14	β, γ	Proportionalitätskonstanten der viskosen Dämpfung	u
15	$x_A(t)$	Translatorische Verschiebung des Körperschallmessstellenelements zum Zeitpunkt t	m
16	$x_j(t),$ $j \in \{1, \dots, N\} \setminus A$	Translatorische Verschiebungen aller Elemente außer der Körperschallmessstelle zum Zeitpunkt t	n
17	$f_N(t)$	An der Bohrspitze angreifende Anregungskraft zum Zeitpunkt t	n

Tabelle 3.1: Physikalische Modellgrößen. Statusabkürzungen: f=festgelegter Wert, b=bekannter Parameter, u=unbekannter Parameter, m=gemessenes Signal, n=nicht gemessenes Signal.

$\{f(t)\}$ und den translatorischen Auslenkungen $\{x(t)\}$. Da der Körperschall diese Auslenkung misst, liegt bei Aufzeichnung des Signals eines im Abstand l_{d0KM} zur Einspannung angebrachten Körperschallsensors eine Messung von $x_A(t)$ mit $A = \lfloor l_{d0KM}/l + 0.5 \rfloor$ vor (15).

Die Auslenkungen der übrigen Elemente sowie die Anregungskraft (16–17) werden nicht gemessen. Allerdings wird davon ausgegangen, dass die Stange ausschließlich an der Kontaktstelle zwischen Werkzeug und Werkstück, also am N -ten Element angeregt wird. Diese Annahme erscheint realistisch, da dies die einzige Übertragungsstelle des das Werkstück rotierenden Maschinenantriebs mit der Stange ist. Die Anregung aller übrigen Elemente wird auf 0 gesetzt (3).

Vor der Modellanpassung festzulegen ist neben dem wie in 3.1.3 beschrieben festgelegten Wert für den Steifigkeitseinfluss des Werkstücks (2) die Anzahl der Freiheitsgrade (1).

3.2.1 Periodische Anregung

Die Anpassung der unbekanntem Modellparameter erfolgt anhand des an Element A gemessenen Körperschallsignals $x_A(t)$. Um die Grundlage für eine statistische Parameterschätzung zu schaffen, wird zunächst die bisher als harmonisch angenommene Anregung $\{f(t)\} = \{F\} e^{i\omega t}$ (vgl. 3.1.2) auf den allgemeinen Fall der Anregung $\{f(t)\}$ mit der Quasi-Fouriertransformierten $\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)\} e^{-i\omega t} dt$ erweitert. Mit $\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{x(t)\} e^{-i\omega t} dt$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \{x(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{X(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \\ \{f(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow [M] \int_{-\pi}^{\pi} -\omega^2 \{X(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \\
 &+ [C_g(l_b)] \int_{-\pi}^{\pi} i\omega \{X(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \\
 &+ [K_g(l_b)] \int_{-\pi}^{\pi} \{X(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \\
 &\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} ([K_g(l_b)] + i\omega [C_g(l_b)] - \omega^2 [M]) \{X(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \\
 &\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [\alpha(\omega, l_b)]^{-1} \{X(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \{F(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Da 3.33 unabhängig von der Gestalt der Anregung $\{f(t)\}$ gilt, folgt:

$$\{X(\omega)\} = [\alpha(\omega, l_b)] \{F(\omega)\}. \tag{3.34}$$

Aufgrund der Annahme, dass die Anregung für alle Elemente bis auf das Element N den Wert 0 annimmt, gilt damit für das an Element A gemessene Signal:

$$X_A(\omega) = \alpha_{AN}(\omega, l_b) F_N(\omega), \tag{3.35}$$

und nach dem Faltungssatz (Hamming, 1989) gilt:

$$x_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(t', l_b) f_N(t - t') dt' \tag{3.36}$$

$$\text{mit } a_{AN}(t, l_b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_{AN}(\omega, l_b) e^{i\omega t} d\omega. \tag{3.37}$$

Das Signal $x_A(t)$ ergibt sich also durch Anwendung des kontinuierlichen Filters $a_{AN}(t, l_b)$ auf die Anregung $f_N(t)$. Dieser Filter lässt sich durch geeignete Wahl der Abtastrate t_d beliebig genau durch den linearen Filter $a_{AN,t_d}(t, l_b) = a_{AN}(t, l_b) t_d$ approximieren. Der Eintrag $\alpha_{AN}(\omega, l_b)$ der FRF-Matrix ist die Quasi-Fouriertransformierte dieses Filters und die Quasi-Fouriertransformierte $X_A(\omega)$ des gemessenen Signals ergibt sich als Produkt von $\alpha_{AN}(\omega, l_b)$ und der Quasi-Fouriertransformierten $F_N(\omega)$ der Anregung.

3.2.2 Stochastische Anregung

Die Annahme periodischer Anregung erscheint im laufenden Maschinenbetrieb unrealistisch. Vielmehr ist davon auszugehen, dass die Anregung in Form eines stochastischen

Prozesses $f_N(t)$ auftritt. Da sich die Randbedingungen der Maschine während des Bohrprozesses nicht entscheidend ändern, kann davon ausgegangen werden, dass $f_N(t)$ (schwach) stationär ist. Falls die Autokovarianzfunktion $R_{f_N}(t') = E[f_N(t)f_N(t-t')]$ absolut summierbar ist, ist die Spektraldichtefunktion von $f_N(t)$ durch die Fouriertransformierte $S_{f_N}(\omega)$ von $R_{f_N}(t')$ gegeben:

$$S_{f_N}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_N}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.38)$$

Da die diskontinuierliche Fouriertransformierte von $f_N(t)$ die Dirichlet-Bedingungen verletzt (vgl. James (2002), S.20), ist Gleichung 3.35 nicht anwendbar. Im Zeitbereich dagegen gilt 3.36, d.h. das stochastische Signal durchläuft den selben Filter wie das periodische. Der Übergang in den Frequenzbereich erfolgt über die Spektraldichtefunktion $S_{f_N}(\omega)$ und es gilt:

$$S_{x_A}(\omega, l_b) = |\alpha_{AN}(\omega, l_b)|^2 S_{f_N}(\omega). \quad (3.39)$$

Der Beweis von 3.39 erfolgt in Anlehnung an die Herleitung des Zusammenhangs der Spektraldichten des Inputs und Outputs linearer Filter in Rinne und Specht (2002), S. 220. Betrachte zunächst die Autokovarianzfunktion $R_{x_A}(s, l_b)$ von $x_A(t)$:

$$\begin{aligned} R_{x_A}(s, l_b) &= E_{l_b}[x_A(t)x_A(t-s)] \\ &= E \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u, l_b) f_N(t-u) du \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(h, l_b) f_N(t+s-h) dh \right) \right] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u, l_b) \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(h, l_b) f_N(t-u) f_N(t+s-h) dh \right] du \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u, l_b) \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(h, l_b) R_{f_N}(s-h+u) dh \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u, l_b) \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u+s-v, l_b) R_{f_N}(v) dv \right] du. \end{aligned}$$

Damit gilt für die Spektraldichte $S_{x_A}(\omega, l_b)$ von $x_A(t)$:

$$\begin{aligned}
 S_{x_A}(\omega, l_b) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_A}(s, l_b) e^{-i\omega s} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u, l_b) \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u+s-v, l_b) R_{f_N}(v) dv \right] du \right] ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u, l_b) a_{AN}(u+s-v, l_b) R_{f_N}(v) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot e^{i\omega u} e^{-i\omega v} e^{-i\omega(u+s-v)} dv \right] du \right] ds \\
 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(u, l_b) e^{i\omega u} du \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(w, l_b) e^{-i\omega w} dw \right] \\
 &\quad \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_N}(v) e^{-i\omega v} dv \\
 &= \alpha_{AN}(\omega, l_b) \cdot \overline{\alpha_{AN}(\omega, l_b)} \cdot S_{f_N}(\omega) \\
 &= |\alpha_{AN}(\omega, l_b)|^2 S_{f_N}(\omega) \quad \square
 \end{aligned}$$

Der Faktor $|\alpha_{AN}(\omega, l_b)|^2$ wird auch Power-Frequenzantwortfunktion, kurz Power-FRF des Filters $a_{AN}(t, l_b)$ genannt. Die Spektraldichte $S_{x_A}(\omega, l_b)$ des an der Messstelle A gemessenen Körperschalls $x_A(t)$ lässt sich nach 3.39 also in Abhängigkeit von der Spektraldichte $S_{f_N}(\omega)$ der Anregung $f_N(t)$ und der FRF $\alpha_{AN}(\omega, l_b)$ darstellen, welche wiederum von den bekannten und unbekanntem Modellparametern aus Tabelle 3.1 abhängt.

3.2.3 Likelihoodfunktion

Die asymptotisch gültige Likelihoodfunktion der unbekanntem Parameter kann unter Ausnutzung des folgenden Satzes (Brillinger (2001), S. 126) ermittelt werden.

Satz: Sei $x(t)$ ein diskreter stochastischer Prozess der Länge N mit absolut integrierbarer Autokovarianzfunktion $\gamma(\tau)$. Ferner habe die Spektraldichte $f(\omega)$ von $x(t)$ die Eigenschaft: $f(\omega_{f,n}) > 0$ für alle Fourierkreisfrequenzen $\omega_{f,n} = 2\pi n/N$, $n = 0, \dots, N-1$.

Dann gilt für das Periodogramm $I(\omega_{f,n})$, also die Fouriertransformierte der empirischen Autokovarianzfunktion von $x(t)$:

$$\begin{aligned}
 I(\omega_{f,n}) &\stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} \text{Exp}[1/f(\omega_{f,n})], & n &= 0, \dots, N-1, \\
 \text{Cov}[I(\omega_{f,j}), I(\omega_{f,k})] &\stackrel{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, & j, k &= 0, \dots, N-1, \\
 & & j &\neq k.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Periodogrammordinaten stochastischer Prozesse mit positiver Spektraldichte sind an Fourierkreisfrequenzen $\omega_{f,n}$ also asymptotisch exponentialverteilt mit Erwartungswert $f(\omega_{f,n})$ und Periodogrammordinaten zu verschiedenen Fourierkreisfrequenzen sind asymptotisch unabhängig.

Nach 3.39 ergibt sich die Spektraldichte $S_{x_A}(\omega, l_b)$ des Körperschallsignals $x_A(t)$ als Produkt des quadrierten Absolutbetrags der Frequenzantwort $\alpha_{AN}(\omega, l_b)$ und der Spektraldichte des Anregungssignals $S_{f_N}(\omega)$. Im weiteren wird angenommen, dass $\alpha_{AN}(\omega, l_b)$ an allen Frequenzen von null verschieden ist. Tatsächlich bewegen sich die im Zuge der im weiteren Verlauf dieser Arbeit dokumentierten FRF-Anpassungen in deutlich von null verschiedenen Bereichen, so dass diese Konvention vertretbar erscheint. Dementsprechend folgt für den quadrierten Betrag die Positivität. Um diese Eigenschaft für $S_{x_A}(\omega, l_b)$ zu gewährleisten, muss daher die Annahme $S_{f_N}(\omega) > 0$ für alle ω getroffen werden. Diese Annahme wird als realistisch eingestuft, da davon auszugehen ist, dass in der Anregung durch die Maschine neben Schwingungen zu den im Betrieb dominierenden Frequenzen wie Rotations- und Zahnradengriffsfrequenzen ein gewisses Grundrauschen enthalten ist. Dieses Grundrauschen kann durch zeitlich unsystematisch auftretende Signalabweichungen wie Stromschwankungen erklärt werden und schließt dementsprechend keine Frequenz systematisch aus.

Als weitere Annahme wird die der absoluten Integrierbarkeit der Autokovarianzfunktion $\gamma_{f_N}(\tau)$ von $f_N(t)$ getroffen, welche ebenfalls als plausibel angesehen wird, da wohl nicht von einem langen Gedächtnis des laufenden Maschinenbetriebs ausgegangen wer-

den muss. Aus dieser Annahme folgt dann wegen

$$\begin{aligned}
 \gamma_{x_A}(\tau) &= \gamma_{x_A}(s - u) \text{ für alle } s, u \text{ mit } \tau = s - u \\
 &= \text{Cov} \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(\check{t}, l_b) f_N(s - \check{t}) d\check{t}, \int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(\acute{t}, l_b) f_N(u - \acute{t}) d\acute{t} \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(\check{t}, l_b) a_{AN}(\acute{t}, l_b) \text{Cov}[f_N(s - \check{t}), f_N(u - \acute{t})] d\check{t} \right] d\acute{t} \quad (3.41) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(\check{t}, l_b) a_{AN}(\acute{t}, l_b) \gamma_{f_N}(s - \check{t} - u + \acute{t}) d\check{t} \right] d\acute{t} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_{AN}(\check{t}, l_b) a_{AN}(\acute{t}, l_b) \gamma_{f_N}(\tau - \check{t} + \acute{t}) d\check{t} \right] d\acute{t}
 \end{aligned}$$

die absolute Integrierbarkeit der Autokovarianzfunktion $\gamma_{x_A}(\tau)$ von $x_A(t)$, falls der Filter $a_{AN}(t, l_b)$ absolut integrierbar ist (Schlittgen und Streitberg (1999), S. 164). Von letzterem kann im Folgenden ausgegangen werden, da nur eine endliche Anzahl an Eigenfrequenzen modelliert und durch eine von null verschiedene Dämpfung aller Moden Polstellen in 3.25 vermieden werden. Dies wird erreicht, indem nur positive Schätzungen von β und γ zugelassen werden. Als Konsequenz ist $a_{AN}(t, l_b)$ eine in t gegen null konvergierende Reihe, deren Werte für hinreichend große t vernachlässigt werden können. Diese Vernachlässigung wird durch die Beschränkung der Modellierung auf ein bestimmtes Frequenzband umgesetzt.

Einen weiteren kritischen Punkt bildet die Bohrtiefenabhängigkeit des Systems. Der obige Satz setzt für die Reihe $x(t), t = 1, \dots, N$ eine konstante Spektraldichte voraus. Tatsächlich ändert sich diese für $x_A(t)$ aufgrund der kontinuierlichen Bewegung des KSS-Zuführapparats allerdings ebenfalls kontinuierlich. Die Modellierung dagegen erfolgt diskret, und sofern der Mittenabstand l_{dsb} ein Vielfaches der Länge l eines Elements beträgt, wird die Spektraldichte $S_{x_A}(\omega, l_b)$ von $x_A(t)$ für Abschnitte von l_b der Länge l als konstant modelliert. Unter der Annahme, dass der aus der Diskretisierung folgende Genauigkeitsverlust hinreichend gering ist und unter den oben getroffenen Annahmen ist der Satz über die asymptotische Verteilung von Periodogrammordinaten auf das Periodogramm $I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n})$ eines Abschnitts des Körperschallsignals $x_{A,j}(t), t = t_{j,1}, \dots, t_{j,N_a}$ anwendbar. Die Reihenlänge N_a eines Abschnitts ergibt

sich mit der Abtastrate $1/t_d$ und der konstanten Vorschubgeschwindigkeit v_f durch $N_a = \lfloor (l \cdot t_d)/v_f + 0.5 \rfloor$, wenn davon ausgegangen wird, dass auch die Gesamtbohrtiefe l_B und der Abstand l_{dsb2g} zwischen Bohrerspitze und ihr zugewandter Stopfbuchse Vielfache von l sind. Andernfalls verkürzen sich die Längen des ersten und letzten Abschnitts entsprechend.

Die Abschnittsnummer j des zur Bohrtiefe l_b gültigen Abschnitts ergibt sich durch $j = \lceil l_b/l \rceil$ und nimmt die Werte 1 bis $J = \lceil l_B/l \rceil$ an. Die Zeitpunkte $t_{j,1}, \dots, t_{j,N_a}$ der den j -ten Abschnitt bildenden Beobachtungen berechnen sich zu $t_{j,k} = (j-1)N_a + k$, $k = 1, \dots, N_a$. Falls der Wert von $(l \cdot t_d)/v_f$ nicht ganzzahlig ist, verschieben sich die Abschnittsgrenzen um jeweils eine Beobachtung nach vorne oder hinten. Dieser Umstand kann aufgrund des im Allgemeinen sehr hohen Verhältnisses der Anzahl der Beobachtungen pro Abschnitt zur Anzahl der Freiheitsgrade allerdings vernachlässigt werden. Mit $\alpha_{AN,j}(\omega_{f,n}) := \alpha_{AN}(\omega_{f,n}, l_b)$, $j-1 \leq l_b/l < j$, lautet die asymptotisch gültige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{j,n}(x) := f_{I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n})}(x)$ von $I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n})$ für alle Fourierkreisfrequenzen $\omega_{f,n} = 2\pi n/N_a$, $n = 0, \dots, N_a - 1$, gemäß 3.40 also:

$$f_{j,n}(x) = f_{j,n}(x; p_u, p_b) = \lambda_{j,n}(p_u, p_b) e^{-\lambda_{j,n}(p_u, p_b)x} \quad (3.42)$$

$$\text{mit } \lambda_{j,n}(p_u, p_b) = \frac{1}{|\alpha_{AN,j}(\omega_{f,n})|^2 S_{f_N}(\omega_{f,n})},$$

$$p_u = (k_{sb}, k_D, l_{D1}, l_{D2}, \beta, \gamma),$$

$$p_b = (l_g, d_a, d_i, m_g, \varrho, E, I, l_{dsb2g}, l_{dsb}, l_{d0D}, l_D, l_{d0KM}, v_f, l_B, S_{f_N}(\omega_{f,1}), \dots, S_{f_N}(\omega_{f,N_a})).$$

Die nun explizit angegebenen Konstanten der Dichtefunktion sind die unbekanntenen (p_u) und bekannten (p_b) Parameter des Modells (vgl. Tabelle 3.1). Aufgrund der ebenfalls in 3.40 formulierten asymptotischen Unabhängigkeit der Periodogrammordinaten an unterschiedlichen Fourierkreisfrequenzen gilt für die gemeinsame Dichtefunktion

$f_{I_g}(x_{1,1}, \dots, x_{J,N_a}; p_u, p_b)$ von

$$I_g = (I_{x_{A,1}}(\omega_{f,1}), \dots, I_{x_{A,1}}(\omega_{f,N_a}), I_{x_{A,2}}(\omega_{f,1}), \dots, I_{x_{A,2}}(\omega_{f,N_a}), \dots, I_{x_{A,J}}(\omega_{f,N_a})):$$

$$f_{I_g}(x_{1,1}, \dots, x_{J,N_a}; p_u, p_b) = \prod_{j=1}^J \prod_{n=1}^{N_a} \lambda_{j,n}(p_u, p_b) e^{-\lambda_{j,n}(p_u, p_b)x_{j,n}}, \quad (3.43)$$

falls die Unabhängigkeit auch für die Periodogrammordinaten zu gleichen Fourierkreisfrequenzen und benachbarten Zeitabschnitten gilt. Diese Voraussetzung wiederum ist unter den Modellannahmen bei schnittfremden Abschnitten erfüllt, da $S_{x_A}(\omega, l_b)$ die systematische Veränderung der Periodogrammerwartungswerte über die Zeit abbildet. Dementsprechend hängt der Erwartungswert einer Periodogrammordinate $I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n})$ zum Zeitpunkt j ausschließlich von den Modellparametern und insbesondere nicht von einer Realisierung von $I_{x_{A,j-1}}(\omega_{f,n})$ ab.

Die Likelihoodfunktion LL der unbekannt Parameter p_u ist numerisch identisch mit dieser gemeinsamen Dichte, fasst Sie aber als Funktion von p_u mit p_b und den an die Stelle der Funktionsargumente $(x_{1,1}, \dots, x_{J,N_a})$ tretenden realisierten Periodogrammordinaten $(I_{\tilde{x}_{A,1}}(\omega_{f,1}), \dots, I_{\tilde{x}_{A,J}}(\omega_{f,N_a}))$ als Konstanten auf:

$$LL(p_u; I_{\tilde{x}_{A,1}}(\omega_{f,1}), \dots, I_{\tilde{x}_{A,J}}(\omega_{f,N_a}), p_b) = \prod_{j=1}^J \prod_{n=1}^{N_a} \lambda_{j,n}(p_u, p_b) e^{-\lambda_{j,n}(p_u, p_b) I_{\tilde{x}_{A,j}}(\omega_{f,n})}. \quad (3.44)$$

Die Maximierung der Likelihoodfunktion über die unbekannt Parameter p_u führt zu den Maximum-Likelihood-(ML)-Schätzern \hat{p}_u :

$$\hat{p}_u = \operatorname{argmax}_{p_u} [LL(p_u; I_{\tilde{x}_{A,1}}(\omega_{f,1}), \dots, I_{\tilde{x}_{A,J}}(\omega_{f,N_a}), p_b)]. \quad (3.45)$$

4 Simulationsstudie

Vor der Anpassung des im vorigen Kapitel beschriebenen physikalisch-statistischen Modells an reale Messdaten wird eine umfangreiche Simulationsstudie durchgeführt. Dies geschieht zur Klärung einer Reihe von offenen Fragen unter Idealbedingungen, also unter Gültigkeit der Modellvoraussetzungen und unter Kenntnis der unbekannt Parameter. Die Fragen betreffen im Einzelnen:

- Die Wahl der Länge N_a eines einem Periodogramm zugrunde liegenden Abschnitts hinsichtlich:
 - Güte der Approximation der Periodogrammordinatenverteilung durch die Exponentialverteilung,
 - Abstimmung von Frequenz- und Zeitaufösung, gemessen an der Fähigkeit, das gültige Frequenzverlaufsmuster abzubilden.
- Die praktische Umsetzung der Likelihood-Maximierung.
- Die Eigenschaften der Likelihoodfunktion und der ML-Schätzer.
- Die Identifizierbarkeit der unbekannt Modellparameter und der Eigenfrequenzverläufe.

4.1 Simulationsdesign

Für die Simulationen werden alle in Tabelle 3.1 aufgeführten Parameter auf feste Werte gesetzt. Die Werte bekannter Parameter sind den in Webber (2006) analysierten Versuchen entlehnt, wobei die Vorschubgeschwindigkeit v_f auf den vergleichsweise hohen Wert 0.01 m/s gesetzt wird. Diese Wahl erfolgt zum einen, um den Simulationsumfang beherrschbar zu halten. Zum anderen kann sie aber auch konservativ in dem Sinne

angesehen werden, dass Verfahren, welche die sich bei dieser hohen Geschwindigkeit entsprechend schnell ändernden Eigenfrequenzen detektieren können, dazu insbesondere bei langsameren Prozessen in der Lage sind.

Unbekannte Parameterwerte wurden einmalig durch gleichverteilte Zufallsauswahl ermittelt, wobei sich die Grenzen dieser Verteilungen aus den Größenordnungen ergeben, die sich innerhalb der im Zuge o.g. Analysen durchgeführten experimentellen Anpassungen ergaben. Tabelle 4.1 listet die gewählten Parameter auf.

Die in Tabelle 4.1 aufgeführte Anzahl N_s der Freiheitsgrade von 500 wird lediglich für die Simulation verwendet. Für die später durchzuführenden Modellanpassungen wird ein wesentlich kleinerer Wert, nämlich 125 gewählt, für den Webber (2006) für einen konkreten Versuchsaufbau zeigt, dass die aus der Diskretisierung resultierende relative Abweichung für die ersten, d.h. niedrigsten fünf Eigenfrequenzverläufe unter 1% beträgt. Die Verwendung des höheren Werts ermöglicht zum einen eine realitätsnähere Simulation, da sich im Prozess die Eigenfrequenzen entsprechend der kontinuierlichen Verschiebung des KSS-Zuführapparats stetig ändern. Zum anderen erlaubt die Anpassung mit einer niedrigeren Freiheitsgrade-Zahl die Trennung von stochastischer und diskretisierungsbedingter Abweichung.

4.1.1 Biegeeigenfrequenz- und Biegeeigenmodenbestimmung

Für einen bestimmten unbekanntem Parametersatz $\check{p}_u = (\check{k}_{sb}, \check{k}_D, \check{l}_{D1}, \check{l}_{D2}, \check{\beta}, \check{\gamma})$ und die bekannten Parameter p_b kann die zur Bohrtiefe l_b gehörende Frequenzantwortfunktion $\check{\alpha}_{AN}(\omega, l_b)$ berechnet werden, indem zunächst das sich nach Formel 3.8 ergebende Eigenwertproblem gelöst wird:

$$\left([\check{K}_g(l_b)] - \omega^2 [M] \right) \{X\} = \{0\}. \quad (4.1)$$

Dabei hängt die Steifigkeitsmatrix $[\check{K}_g(l_b)]$ sowohl von der aktuellen Bohrtiefe l_b als auch von bekannten (k, l_g, E, I, N) und unbekanntem $(\check{k}_{sb}, \check{k}_D, \check{l}_{D1}, \check{l}_{D2})$ Parametern ab (vgl. 3.5 und 3.31). Dagegen ist die Massematrix bohrtiefenunabhängig und lässt sich nach Formeln 3.5 und 3.6 aus den bekannten Parametern l_g, N, d_a, d_i und ϱ berechnen.

Symbol	Wert	Bedeutung	
N_s	500	Anzahl der Freiheitsgrade	f
$k_{s,N}$	10^{17} N/m	Steifigkeitseinfluss des Werkstücks	f
l_g	3.35 m	Bohrstangen-Länge	b
d_a	0.051 m	Bohrstangen-Außendurchmesser	b
d_i	0.039 m	Bohrstangen-Innendurchmesser	b
ρ	7850 kg/m ³	Bohrstangen-Stahldichte	b
E	$2.1 \cdot 10^{11}$ MPa	Bohrstangen-Elastizitätsmodul	b
I	$2.19 \cdot 10^{-7}$ m ⁴	Bohrstangen-Flächenträgheitsmoment	b
l_{dsb2g}	0.49 m	Abstand zwischen Bohrerspitze und ihr zugewandter Stopfbuchse	b
l_{dsb}	0.05 m	Abstand zwischen den Stopfbuchsen	b
l_{d0D}	1.255 m	Abstand zwischen Einspannung und ihr zugewandtem Dämpferrand	b
l_D	0.10 m	Dämpfer-Länge	b
l_{d0KM}	1.503 m	Abstand zwischen Einspannung und Körperschallmessstelle	b
v_f	0.01 m/s	Vorschubgeschwindigkeit	b
l_B	0.5 m	Gesamtbohrtiefe	b
k_{sb}	$7.28 \cdot 10^7$ N/m	Steifigkeitseinfluss einer Stopfbuchse	u
k_D	$3.06 \cdot 10^{10}$ N/m	Gesamtsteifigkeitseinfluss des Dämpfers	u
l_{D1}	0.0417 m	Linke Verkürzung der Wirkungslänge des Dämpfers in Bezug auf l_D	u
l_{D2}	0.0304 m	Rechte Verkürzung der Wirkungslänge des Dämpfers in Bezug auf l_D	u
β	$2.16 \cdot 10^{-11}$ s/m ²	Steifigkeits-Proportionalitätskonstante der viskosen Dämpfung	u
γ	4.97 Ns/(m · kg)	Masse-Proportionalitätskonstante der viskosen Dämpfung	u

Tabelle 4.1: Parameterwerte für die Simulationen. Statusabkürzungen: f=festgelegter Wert, b=bekannter Parameter, u=unbekannter Parameter.

Wegen $[M] = m \cdot [I]_{N \times N}$ kann 4.1 umgeformt werden zu:

$$\left([\check{K}_g(l_b)] - u[I]_{N \times N} \right) \{X\} = \{0\}, \quad (4.2)$$

mit $u = \omega^2 m$.

Durch Berechnung der Eigenwerte $\bar{u}_r(l_b), r = 1, \dots, N$ der Matrix $[\check{K}_g(l_b)]$ können gemäß $\bar{u}_r(l_b) = \check{\omega}_r(l_b)^2 m$ und Formel 3.23 die aktuellen Biegeeigenfrequenzen $\check{\omega}_r(l_b)$ berechnet werden:

$$\check{\omega}_r(l_b) = \sqrt{\frac{\bar{u}_r(l_b)}{m}} \sqrt{1 - \left(\check{\beta} \sqrt{\frac{\bar{u}_r(l_b)}{m}}/2 + \check{\gamma} \sqrt{\frac{m}{\bar{u}_r(l_b)}}/2 \right)^2}. \quad (4.3)$$

Die aktuellen Biegeeigenmoden $\{\check{\psi}_r(l_b)\}$ ergeben sich als Eigenvektoren der Matrix $[\check{K}_g(l_b)]$ (vgl. Ewins (2000), S. 65). An dieser Stelle sei erwähnt, dass sich hier wie in allen weiteren simulierten und realen Auswertungen die BEFs $\check{\omega}_r(l_b)$ des ungedämpften und $\check{\omega}_r(l_b)$ des gedämpften Systems aufgrund vergleichsweise niedriger Werte von β und γ um deutlich weniger als 1% unterscheiden.

Diskretisierungsfehler

Wie weiter oben erwähnt, beträgt die relative Abweichung¹ der ersten fünf kontinuierlich modellierten BEFs bei einer Freiheitsgradzahl von 125 weniger als 1%. Wie die vorliegenden Untersuchungsergebnisse zeigen, ist dieses Ergebnis allerdings nicht pauschal für alle Parameterkombinationen vertretbar. Hierzu zeigt Tabelle 4.2 den Vergleich von sich nach 4.1.1 ermittelten BEF-Verläufen für Freiheitsgradzahlen N von 125 und 500 zu zwei unterschiedlichen Bohrtiefen. Abbildung 4.1 zeigt einen visuellen Vergleich ausgewählter Eigenfrequenzverläufe über den gesamten Bohrtiefenverlauf.

Tabelle 4.2 zeigt, dass die aus der Reduktion von 500 auf 125 Freiheitsgrade resultierende relative Abweichung für einzelne BEFs bis zu 5% betragen kann und ihr Absolutwert zumeist über 1% liegt. Der mittlere Absolutwert beträgt über alle Frequenzen und Bohrtiefen 1.5 %. Im Vergleich zu den kontinuierlichen BEF-Verläufen sind noch

¹Die relative Abweichung $\Delta\%$ eines approximierten bzw. geschätzten Wertes $\hat{\omega}$ von einem wahren Wert ω ist hier wie im folgenden definiert als $\Delta\% = 100 \cdot (\hat{\omega} - \omega)/\omega$.

Bohrtiefe $l_b = 0.02$ m					Bohrtiefe $l_b = 0.5$ m				
$N = 500$		$N = 125$			$N = 500$		$N = 125$		
$\check{k}_{sb} = k_{sb}$		$\check{k}_{sb} = k_{sb;o}$			$\check{k}_{sb} = k_{sb}$		$\check{k}_{sb} = k_{sb;o}$		
$\check{k}_D = k_D$		$\check{k}_D = k_{D;o}$			$\check{k}_D = k_D$		$\check{k}_D = k_{D;o}$		
$\check{l}_{D1} = l_{D1}$		$\check{l}_{D1} = l_{D1;o}$			$\check{l}_{D1} = l_{D1}$		$\check{l}_{D1} = l_{D1;o}$		
$\check{l}_{D2} = l_{D2}$		$\check{l}_{D2} = l_{D2;o}$			$\check{l}_{D2} = l_{D2}$		$\check{l}_{D2} = l_{D2;o}$		
$\check{\beta} = \beta$		$\check{\beta} = \beta$			$\check{\beta} = \beta$		$\check{\beta} = \beta$		
$\check{\gamma} = \gamma$		$\check{\gamma} = \gamma$			$\check{\gamma} = \gamma$		$\check{\gamma} = \gamma$		
$\omega_r(l_b)$	$\check{\omega}_r(l_b)$	$\Delta\%$	$\omega_{r;o}(l_b)$	$\Delta\%$	$\omega_r(l_b)$	$\check{\omega}_r(l_b)$	$\Delta\%$	$\omega_{r;o}(l_b)$	$\Delta\%$
111.8	115.9	+3.7	112.2	+0.4	134.4	134.9	+0.4	134.8	+0.3
153.4	151.7	-1.2	153.9	+0.3	153.2	151.6	-1.1	153.6	+0.2
307.3	316.7	+3.1	308.0	+0.2	245.4	257.7	+5.0	247.3	+0.8
422.7	417.6	-1.2	423.3	+0.1	423.1	417.7	-1.3	423.7	+0.2
443.2	443.2	+0.1	443.9	+0.2	474.8	471.0	-0.8	471.2	-0.8
640.2	656.3	+2.5	639.5	-0.1	682.9	716.0	+4.8	688.0	+0.7
830.7	818.0	-1.5	830.8	< 0.1	832.5	818.8	-1.6	833.2	+0.1
1036.1	1059.1	+2.2	1035.4	-0.1	983.2	968.9	-1.5	976.4	-0.7
1323.6	1315.8	-0.6	1332.9	+0.1	1281.4	1327.6	+3.6	1290.3	+0.7
1374.0	1349.8	-1.8	1370.4	-0.3	1382.5	1359.4	-1.7	1383.1	< 0.1
1548.6	1573.2	+1.6	1537.2	-0.7	1624.6	1608.5	-1.0	1609.2	-0.9
2034.2	2008.2	-1.3	2019.1	-0.7	2027.7	2007.8	-1.0	2015.4	-0.6
2102.6	2107.3	+0.2	2090.9	-0.6	2099.3	2112.7	+0.6	2093.4	-0.3
2572.3	2577.4	+0.2	2541.8	-1.2	2520.9	2518.7	-0.1	2480.3	-1.6
2869.5	2799.7	-2.4	2842.2	-1.0	2869.2	2799.6	-2.4	2842.6	-0.9
3066.5	3070.5	+0.1	3014.7	-1.7	3115.5	3129.6	+0.5	3070.1	-1.5

Tabelle 4.2: Vergleich von Eigenfrequenzverläufen (in Hz) auf Basis verschieden stark diskretisierter Modelle zu Beginn und Ende des Prozesses mit originalen und optimierten Parametern.

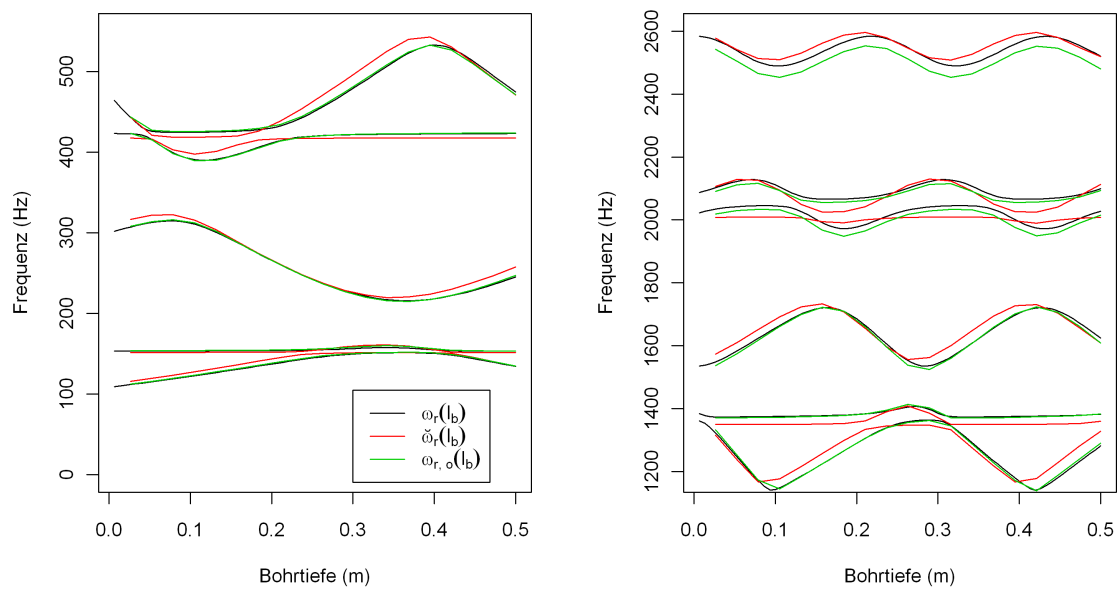


Abbildung 4.1: Eigenfrequenzverläufe auf Basis wahrer Parameter bei Auflösung $N = 500$ (schwarz), auf Basis wahrer Parameter bei Auflösung $N = 125$ (rot) und auf Basis optimierter Parameter bei Auflösung $N = 125$ (grün). Links: Frequenzbereich von 0 bis 500 Hz, rechts: Frequenzbereich von 1200 bis 2600 Hz.

größere relative Abweichungen zu erwarten. Das Ausmaß der Abweichungserhöhung kann allerdings als gering eingestuft werden, da bereits ab einer Freiheitsgradzahl von ca. 400 keine nennenswerte Anpassungsverbesserung durch eine weitere Erhöhung von N beobachtet und somit das Modell auf Basis von 500 Freiheitsgraden als ausreichend detailgetreu angesehen werden kann.

Die vierte und fünfte bzw. neunte und zehnte Spalte von Tabelle 4.2 zeigen BEF-Verläufe und entsprechende Werte relativer Abweichungen, die sich auf Basis des Optimierungsverfahrens nach Nelder und Mead (Alt, 2002) optimierter Werte von \check{k}_{sb} , \check{k}_D , \check{l}_{D1} und \check{l}_{D2} ergeben. Dabei wurde die Wurzel aus der Quadratsumme aller relativen Abweichungen minimiert. Die so erlangten optimalen Werte lauten:

$$\begin{aligned} k_{sb;o} &= 7.97 \cdot 10^7 \quad \text{N/m,} \\ k_{D;o} &= 1.13 \cdot 10^{10} \quad \text{N/m,} \\ l_{D1;o} &= 0.0209 \quad \text{m,} \\ l_{D2;o} &= 0.0442 \quad \text{m.} \end{aligned}$$

Wie Tabelle 4.2 und Abbildung 4.1 verdeutlichen, verbessern diese Parameterwerte die Anpassung im Vergleich zu den wahren bekannten Parameterwerten erheblich. Bis auf einige höhere BEFs liegen die Abweichungen unter 1%, der mittlere Absolutbetrag liegt bei 0.6 %. Das Modell ist also offenbar flexibel genug, die diskretisierungsbedingte Abweichung der BEFs durch Veränderung der Parameterwerte auszugleichen. Da die Bestimmung der BEF-Verläufe das eigentliche Untersuchungsziel darstellt, ist es von geringem Interesse, dass die ursprünglichen Parameter p_u durch das diskretisierte Modell offenbar nicht rekonstruiert werden können. Ob dieser Ausgleich des Diskretisierungsfehlers auch durch statistisch geschätzte Parameter gelingt, zeigt die im Weiteren beschriebene Simulationsstudie.

4.1.2 Spektraldichteberechnung

Mit den BEFs und BEMs aus 4.1.1 kann nun nach Formel 3.25 die Frequenzantwortfunktion $\check{\alpha}_{AN}(\omega, l_b)$ direkt berechnet werden:

$$\check{\alpha}_{AN}(\omega, l_b) = \sum_{r=1}^N \frac{\check{\psi}_{jr}(l_b)\check{\psi}_{kr}(l_b)}{\check{m}_r \left(\check{\omega}_r^*(l_b)^2 - \omega^2 + i\omega\check{c}_r \right)}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } [\check{M}] &= [\check{\Psi}]^T [M] [\check{\Psi}], \\ [\check{C}] &= [\check{\Psi}]^T (\check{\beta} [\check{K}_g(l_b)] + \check{\gamma} [M]) [\check{\Psi}]. \end{aligned}$$

Um eine realistischere, sich kontinuierlich ändernde FRF zu erhalten, werden die BEFs dabei linear interpoliert, d.h.:

$$\begin{aligned} \check{\omega}_r^*(l_b) &= (1 - z) \cdot \check{\omega}_r(\lfloor \frac{l_b N}{l_g} \rfloor \frac{l_g}{N}) + z \cdot \check{\omega}_r(\min[l_B, (\lfloor \frac{l_b N}{l_g} \rfloor + 1) \frac{l_g}{N}]), \\ z &= \frac{l_b N}{l_g} - \lfloor \frac{l_b N}{l_g} \rfloor. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Spektraldichte $S_{x_A}(\omega, l_b)$ des zu simulierenden Körperschallsignals $x_A(t)$ ergibt sich schließlich durch Anwendung von Formel 3.39 unter Einsetzen der Werte aus Tabelle 4.1 zu $S_{x_A}(\omega, l_b) = |\alpha_{AN}(\omega, l_b)|^2 S_{f_N}(\omega)$. Dabei wird für die zeitkonstante Spektraldichte $S_{f_N}(\omega)$ der Anregungskraft $f_N(t)$ die in Abbildung 4.2 visualisierte folgende Form angenommen:

$$S_{f_N}(\omega) = \left(\frac{1}{[(\omega - \omega_R)/4]^2 + 1/3} + 0.1 \right)^2. \quad (4.6)$$

Dabei ist $\omega_R = 48$ Hz die Rotationsfrequenz, mit der das Werkstück um die Bohrstan-ge gedreht wird. Die durch 4.6 beschriebene Anregung wurde durch visuellen Abgleich mit experimentellen Anregungsmessungen mit dem Ziel einer möglichst realistischen Abbildung heuristisch festgelegt.

4.1.3 Körperschallsimulation

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, lautet die Spektraldichte des zu simulierenden Körperschallsignals $S_{x_A}(\omega, l_b) = |\alpha_{AN}(\omega, l_b)|^2 S_{f_N}(\omega)$. Sei nun $\varepsilon(t)$ ein standardnormalverteiltes Weißes Rauschen, also ein stochastischer Prozess mit $\varepsilon(t) \sim N(0, 1)$, $Cov[\varepsilon(t), \varepsilon(s)] = 0, t \neq s$. Da die Spektraldichte $S_\varepsilon(\omega)$ eines derartigen Weißen Rauschens für alle Frequenzen ω konstant gleich eins ist, lässt sich die Spektraldichte des Körperschallsignals umschreiben zu:

$$\begin{aligned} S_{x_A}(\omega, l_b) &= |\kappa_{AN}(\omega, l_b)|^2 S_\varepsilon(\omega) \\ \text{mit } \kappa_{AN}(\omega, l_b) &= \sqrt{|\alpha_{AN}(\omega, l_b)|^2 S_{f_N}(\omega)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

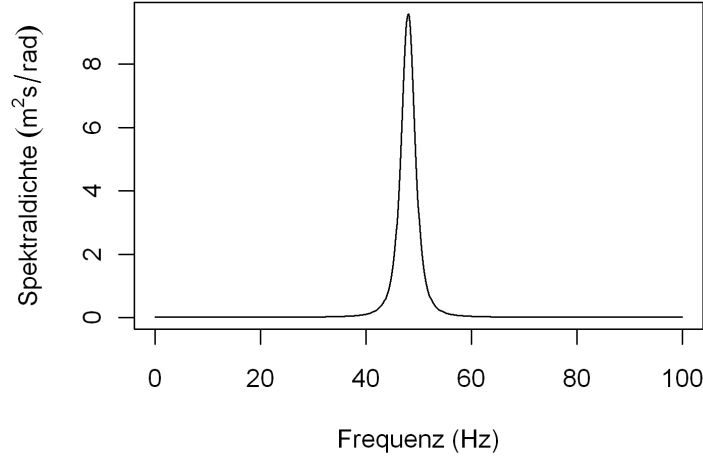


Abbildung 4.2: Spektraldichte der Anregungskraft.

Das Körperschallsignal ist also ein durch einen Filter $q(t, l_b)$ mit Power-FRF $|\kappa_{AN}(\omega, l_b)|^2$ gefiltertes Weißes Rauschen $\varepsilon(t)$. Nach dem Faltungssatz lässt sich das Körperschallsignal entsprechend im Zeitbereich ausdrücken durch:

$$x_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau, l_b) \varepsilon(t - \tau) d\tau \quad (4.8)$$

wobei $q(t, l_b)$ die zu jeder Bohrtiefe berechnete inverse Quasi-Fouriertransformierte von $\kappa_{AN}(\omega, l_b)$ ist. Formel 4.8 kann zur Simulation des Körperschallsignals verwendet werden, indem zunächst die Abtastrate $1/t_d$ auf den Wert 20000 Hz festgelegt wird. Dieser entspricht der Abtastrate der realen Messungen. Im nächsten Schritt wird der kontinuierliche Filter gemäß dieser Abtastrate diskretisiert und auf ein Zeitfenster von der Länge 1.0005 s begrenzt. Wie hier nicht näher diskutierte Voruntersuchungen zeigen, ist diese Approximation ausreichend, da sich die Ergebnisse bei der Wahl längerer Zeitfenster und höherer Abtastraten nur geringfügig verändern.

Um den so diskretisierten und begrenzten Filter zur Simulation nutzen zu können, wird $\varepsilon(t)$ als eine Stichprobe der Länge 1020001 aus einer Standardnormalverteilung gezogen. Diese Länge entspricht der um die Länge des Zeitfensters verlängerten Ge-

samtbeobachtungszahl $\#T$ des Prozesses von einer Million, die sich aus der Abtastrate $1/t_d = 20000$ Hz, der Gesamtbodentiefe 0.5 m und der konstanten Vorschubgeschwindigkeit $v_f = 0.01$ ergibt. Die Menge T_ε der Messzeitpunkte von $\varepsilon(t)$ ist gegeben durch $T_\varepsilon = \{t_j = j \cdot t_d \mid j \in [-10000, 1010000] \cap \mathbb{Z}\}$. Das simulierte Körperschallsignal $x_A(t_j), j = 1, \dots, 1000000$ wird schließlich durch sukzessive Anwendung der linearen Filter $q(t, l_b), l_b = v_f t_j$, also durch die Formel

$$x_A(t_j) = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=-10000}^{10000} q(t_i, v_f t_j) \varepsilon(t_j - t_i) \right) \quad (4.9)$$

gewonnen. Das im Allgemeinen komplexwertige gefilterte Signal erfüllt die geforderten spektralen Eigenschaften in jeder eindimensionalen Projektion aus der zweidimensionalen komplexen Zahlenebene. Einfachheitshalber wird daher die Projektion auf den Realteil gewählt, um ein reellwertiges Signal zu erhalten (vgl. Ripley (1987), S. 110). Auf die beschriebene Weise wurde unter Verwendung der Software R (R Development Core Team, 2010) eine Reihe von 200 Zeitreihen des Körperschallsignals zu einem Bohrprozess mit den Einstellungen aus Tabelle 4.1 simuliert.

4.1.4 Maximum-Likelihood-Schätzung

Für die 200 simulierten Körperschallzeitreihen werden jeweils fünf ML-Schätzervektoren ermittelt. Der Vektor $\hat{p}_{u;N_{a;i}}$ entspricht dabei den ML-Schätzern für p_u , die auf Basis von auf Abschnitten der Länge $N_{a;i}$ berechneten Periodogrammen ermittelt werden. Die fünf untersuchten Fensterlängen lauten 512, 1024, 2048, 4096 und 8192, es gilt also $N_{a;i} = 2^{i+8}$. Die Anzahl J der Abschnitte ergibt sich bei vorgegebener Fensterlänge nicht mehr durch $\lceil l_B/l \rceil$ (vgl. 3.2.3), sondern durch $J = \lfloor \#T/N_{a;i} \rfloor$. Entsprechend gilt $\alpha_{AN,j}(\omega_{f,n}) := \alpha_{AN}(\omega_{f,n}, l_b), j - 1 \leq l_b/l_A < j$ mit $l_A = l_B/J$.

Zur Ermittlung der einzelnen ML-Schätzer muss die Likelihoodfunktion in Formel 3.44 über p_u maximiert werden. Um das Mehrfachprodukt in 3.44 in eine numerisch besser zu handhabende Mehrfachsumme zu überführen, wird die Likelihoodfunktion gemäß des bei der Maximum-Likelihood-Schätzung allgemein üblichen Vorgehens der natürlichen Logarithmustransformation unterzogen. Aufgrund der auf $(0, \infty)$ strengen Monotonie erreichen die Funktionen $LL(\cdot)$ und $\log[LL(\cdot)]$ ihr Maximum an derselben Stelle. Da in der mathematischen Terminologie Optimierungen üblicherweise als

Minimierungsprobleme formuliert sind, wird im folgenden der negative Wert der logarithmierten Likelihoodfunktion aus Formel 3.44 betrachtet. Der ML-Schätzer-Vektor zur Fensterlänge $N_{a;i}$ wird also ausgedrückt durch:

$$\hat{p}_{u;N_{a;i}} = \operatorname{argmin}_{p_u} \left(- \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{N_{a;i}} [\log \lambda_{j,n}(p_u, p_b) - \lambda_{j,n}(p_u, p_b) I_{\tilde{x}_{A,j}}(\omega_{f,n})] \right). \quad (4.10)$$

Bisher wurde durch die Festlegung in Formel 3.42 die Spektraldichtefunktion S_{f_N} der Anregung f_N als bekannt vorausgesetzt. Dies wird im Allgemeinen nicht der Fall sein. Um die Zahl zu optimierender Parameter beherrschbar zu halten, wird für die Schätzung der Anregung ein im Folgenden beschriebener restringierter Maximum-Likelihood-Ansatz gewählt. Nach Brockwell und Davis (1993), S. 347 gilt mit den in 3.2.3 getroffenen Annahmen approximativ:

$$\begin{aligned} I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n}) &= |\alpha_{AN,j}(\omega_{f,n})|^2 I_{f_{N,j}}(\omega_{f,n}) \\ \Leftrightarrow I_{f_{N,j}}(\omega_{f,n}) &= \frac{I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n})}{|\alpha_{AN,j}(\omega_{f,n})|^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Da $I_{f_{N,j}}(\omega_{f,n})$ die Spektraldichte $S_{f_N}(\omega_{f,n})$ besitzt, ist $I_{f_{N,j}}(\omega_{f,n})$ asymptotisch exponentialverteilt mit Parameter $S_{f_N}(\omega_{f,n})^{-1}$. Daher sind die auf p_u restringierten Maximum-Likelihood-Schätzungen für $S_{f_N}(\omega_{f,n})$ gegeben durch:

$$\hat{S}_{f_N}(\omega_{f,n}) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n})}{|\alpha_{AN,j}(\omega_{f,n})|^2}, \quad n = 1, \dots, N_{a;i}. \quad (4.12)$$

Diese Schätzungen werden in Formel 3.42 eingesetzt, wodurch sich der ML-Schätzer zu

$$\hat{p}_{u;N_{a;i}} = \operatorname{argmin}_{p_u} \left(- \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{N_{a;i}} \left[\log \hat{\lambda}_{j,n}(p_u, p_b) - \hat{\lambda}_{j,n}(p_u, p_b) I_{\tilde{x}_{A,j}}(\omega_{f,n}) \right] \right) \quad (4.13)$$

$$\text{mit } \hat{\lambda}_{j,n}(p_u, p_b) = \frac{1}{|\alpha_{AN,j}(\omega_{f,n})|^2 \hat{S}_{f_N}(\omega_{f,n})}$$

ändert.

Parameter	Untere Grenze	Obere Grenze	Skalierungsterm
k_{sb}	10^6	10^8	10^6
k_D	10^{10}	10^{11}	10^{10}
l_{D1}	0	0.049	0.01
l_{D2}	0	0.049	0.01
β	10^{-11}	10^{-10}	10^{-10}
γ	1	300	1

Tabelle 4.3: Obere und untere Grenzen für die Startwerte der verwendeten Optimierungsverfahren und Parameterskalierungsterme für das Nelder-Mead-Verfahren.

Verwendete Optimierungsverfahren

Da mehrere Eigenfrequenzverläufe simultan angepasst werden, ist prinzipiell nicht auszuschließen, dass die Likelihoodfunktion multimodal ist. Da zudem aufgrund der Diskretisierung des Modells Unstetigkeiten der zu optimierenden Funktion möglich sind, erscheinen global gradientenbasierte Verfahren ungeeignet. Aus diesem Grund wird zum einen das Simplexverfahren nach Nelder und Mead (Alt, 2002) zur Lösung des Minimierungsproblems in 4.13 eingesetzt. Da dieses Verfahren grundsätzlich die Neigung zur Konvergenz in lokalen Optima besitzt, wird zum anderen parallel dazu das Verfahren *Genetic Optimization Using Derivatives* (Genoud, vgl. Sekhon und Mebane (1998)) zur Ermittlung der ML-Schätzer verwendet. Dieses Verfahren kombiniert einen genetischen Algorithmus mit dem Quasi-Newton-Verfahren nach Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno (BFGS, vgl. Antoniou und Lu (2007)), indem die beste Lösung jeder Generation des genetischen Algorithmus' mit dem BFGS-Verfahren weiter optimiert wird.

Die maximale Anzahl von Funktionsaufrufen wird für beide betrachteten Verfahren auf 5000 und die Populationsgröße einer Generation des Genoud-Verfahrens auf 200 festgesetzt. Die Startwerte für p_u werden jeweils aus einer Gleichverteilung in den in Tabelle 4.3 aufgeführten Grenzen ermittelt. Die vierte Spalte von Tabelle 4.3 enthält die für jeden Parameter beim Nelder-Mead-Verfahren anzugebenden Skalierungsterme.

4.2 Ergebnisse

4.2.1 Wahl der Fensterlänge und Frequenzbandbreite bezüglich der Exponentialverteilungsapproximation

Wie Tabelle 4.2 zu entnehmen ist, liegt die höchste Biegeeigenfrequenz im Bereich von 3000 Hz. Die Betrachtung von Spektren der simulierten Prozesse wie in Abbildung 4.3 zeigt, dass ab einer Frequenz von ca. 3600 Hz ein deutlicher Amplitudenabstieg zu verzeichnen ist. Oberhalb dieser Frequenz existiert offenbar lediglich ein gefärbtes Grundrauschen, welches keine relevante Information über die Eigenfrequenzstruktur darunter enthält. Daher werden im Weiteren lediglich die Periodogrammordinaten zu Frequenzen unter 3600 Hz betrachtet und zur Anpassung verwendet. Die zu minimierende Funktion aus Formel 4.13 ändert sich dadurch zu:

$$-\sum_{j=1}^J \sum_{n=N_{min}}^{N_{max}} \left[\log \hat{\lambda}_{j,n}(p_u, p_b) - \hat{\lambda}_{j,n}(p_u, p_b) I_{\tilde{x}_{A,j}}(\omega_{f,n}) \right], \quad (4.14)$$

$$\text{mit } N_{min} = 1, N_{max} = \max \left(N \mid \frac{N}{t_d N_{a;i}} \leq 3600 \right).$$

Ein Aspekt für die Wahl der Fensterlänge N_a ist die Güte der Approximation der Periodogrammordinatenverteilung durch die Exponentialverteilung. Für kurze Fenster könnte die asymptotische Annäherung zu gering sein. Andererseits ist insbesondere bei langen Fenstern aufgrund der Bohrtiefenabhängigkeit der Spektraldichte eine nur unzureichende Annäherung möglich, da die Beobachtungen nicht aus derselben Verteilung stammen.

Zur Beurteilung der Approximationsgüte wird zu jeder Fensterlänge $N_{a;i}$ für jede Periodogrammordinate $I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n})$, $j = 1, \dots, J$, $n = 1, \dots, N_{max}$ die Annäherung durch die Annahme der Exponentialverteilung geprüft. Dazu wird die Lilliefors-Korrektur des Kolmogorow-Smirnow-Tests (Lilliefors, 1967) jeweils auf die zu jeder Ordinate vorliegenden 200 Realisationen $I_{\tilde{x}_{A,j}}(\omega_{f,n})$ angewendet. Unter der Nullhypothese (H_0) exponentialverteilter Ordinaten sind die p-Werte dieser Tests auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt. Abbildung 4.4 zeigt jeweils ein Histogramm und eine Zeit-Frequenz-Darstellung der p-Werte für jede der fünf analysierten Fensterlängen.

In der Histogrammdarstellung ist zu erkennen, dass sich p-Werte von unter 0.05 für alle Fensterlängen häufen. Größere p-Werte sind offenbar in allen fünf Fällen gleichmäßig

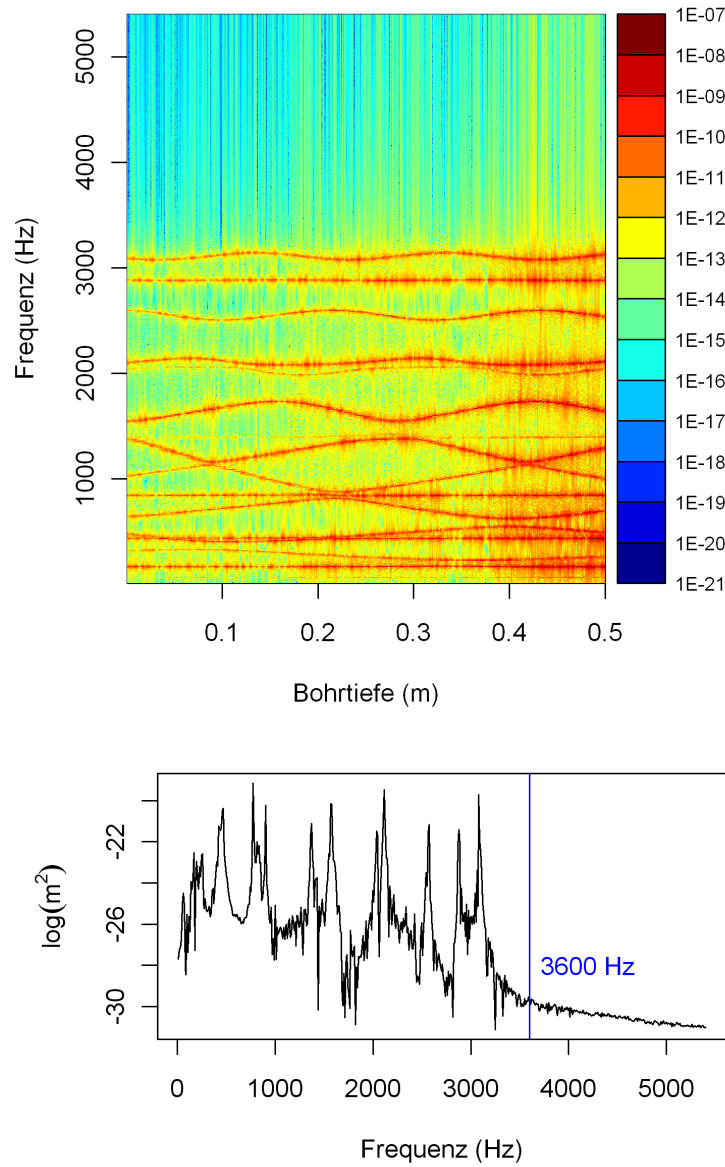


Abbildung 4.3: Spektraldarstellungen eines simulierten Körperschallsignals mit Fensterlänge 2048 und logarithmierter Periodogrammskala. Oben: Spektrogramm, unten: Periodogramm zur Bohrtiefe 0.25 m.

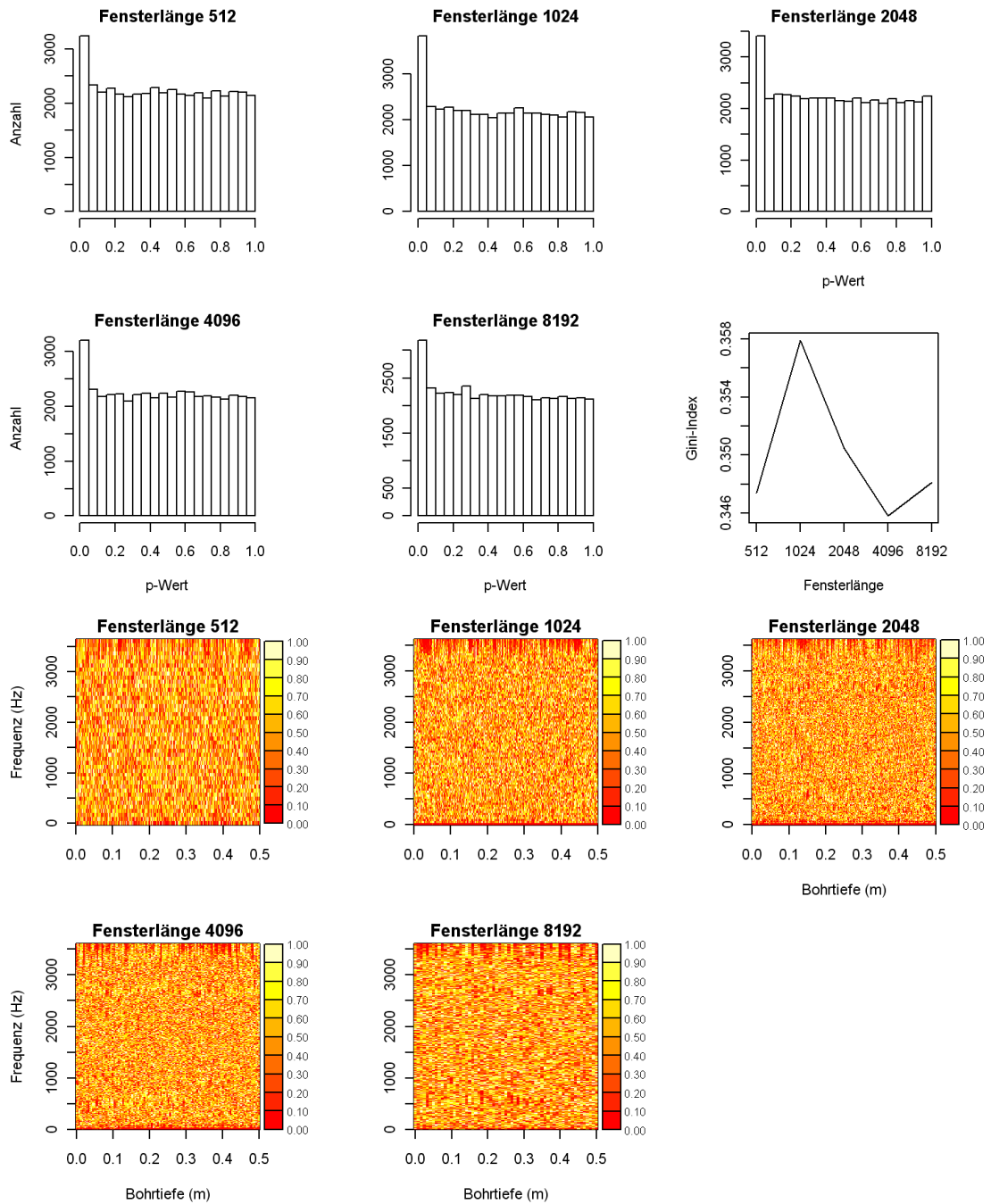


Abbildung 4.4: Verteilung der p-Werte zu Lilliefors-Tests auf Exponentialverteilung für unterschiedliche Fensterlängen. Oben: Histogramme und Gini-Index der p-Werte, unten: Zeit-Frequenz-Darstellungen.

über das Intervall $(0.05, 1]$ verteilt. Die sechste Grafik in Abbildung 4.4 zeigt den Gini-Index der p-Werte über die fünf Fensterlängen. Dieser ist ein Maß für die Konzentration der p-Werte und umso geringer, je gleichmäßiger die Werte verteilt sind. Für perfekte Gleichverteilung nimmt der Gini-Index den Wert 0 an (vgl. Hartung u. a. (2002), S. 52f). Wie anhand der Grafik zu erkennen ist, erreicht der Gini-Index für die Fensterlänge 4096 seinen minimalen Wert von ca. 0.346, so dass zunächst davon ausgegangen werden kann, dass für diese die Approximation der Periodogrammordinatenverteilung durch die Exponentialverteilung relativ am besten ist.

Die Häufung der kleinen p-Werte über das unter H_0 erwartete Maß deutet allerdings darauf hin, dass für einen Teil der Periodogrammordinaten die Approximation unzureichend ist und für diese keine Exponentialverteilung angenommen werden kann. Bei Betrachtung der Zeit-Frequenz-Darstellung der p-Werte im unteren Teil von Abbildung 4.4 fällt auf, dass dies offenbar jeweils für die p-Werte zu den Ordinaten besonders niedriger und besonders hoher Frequenzen gilt. In diesen Bereichen sind dichtere dunkelrote Bereiche zu erkennen, die für niedrige p-Werte stehen.

Dieser Eindruck wird durch Abbildung 4.5 unterstützt, in der für jede der fünf Fensterlängen der mittlere p-Wert für jede Fourierfrequenz abgetragen ist. In den mittleren Frequenzbereichen streuen die gemittelten p-Werte mehr oder wenig stark um den unter H_0 erwarteten Wert von 0.5, während an den Rändern des betrachteten Bereichs die p-Werte kleiner sind, also gegen exponentialverteilte Ordinaten sprechen. Die mittleren Bereiche lassen sich durch die in Abbildung 4.5 durch vertikale blaue Linien markierten Werte 100 Hz und 3300 Hz eingrenzen. Die sechste Grafik in Abbildung 4.5 zeigt wiederum die Gini-Indizes der p-Werte innerhalb dieses Frequenzbands. Auch hier liegt die im Sinne von H_0 optimale Fensterlänge bei 4096, für die der Gini-Index einen Wert von ca. 0.333 annimmt.

Im Sinne der Güte der Approximation empfiehlt sich also für die betrachteten Einstellungen die Wahl der Fensterlänge 4096. Weiterhin legen die Betrachtungen dieses Abschnitts eine weitere Einengung des betrachteten Frequenzbands nahe, die durch Ersetzen von N_{min} durch $\min(N \mid \frac{N}{t_d N_{a,i}} \geq 100)$ und von N_{max} durch $\max(N \mid \frac{N}{t_d N_{a,i}} \leq 3300)$ in Formel 4.14 umgesetzt werden könnte. Allerdings konnten bei einer in dieser Arbeit nicht präsentierten Wiederholung der folgenden Analysen auf diesem engeren Frequenzband keine wesentlichen Ergebnisunterschiede beobachtet werden. Daher wer-

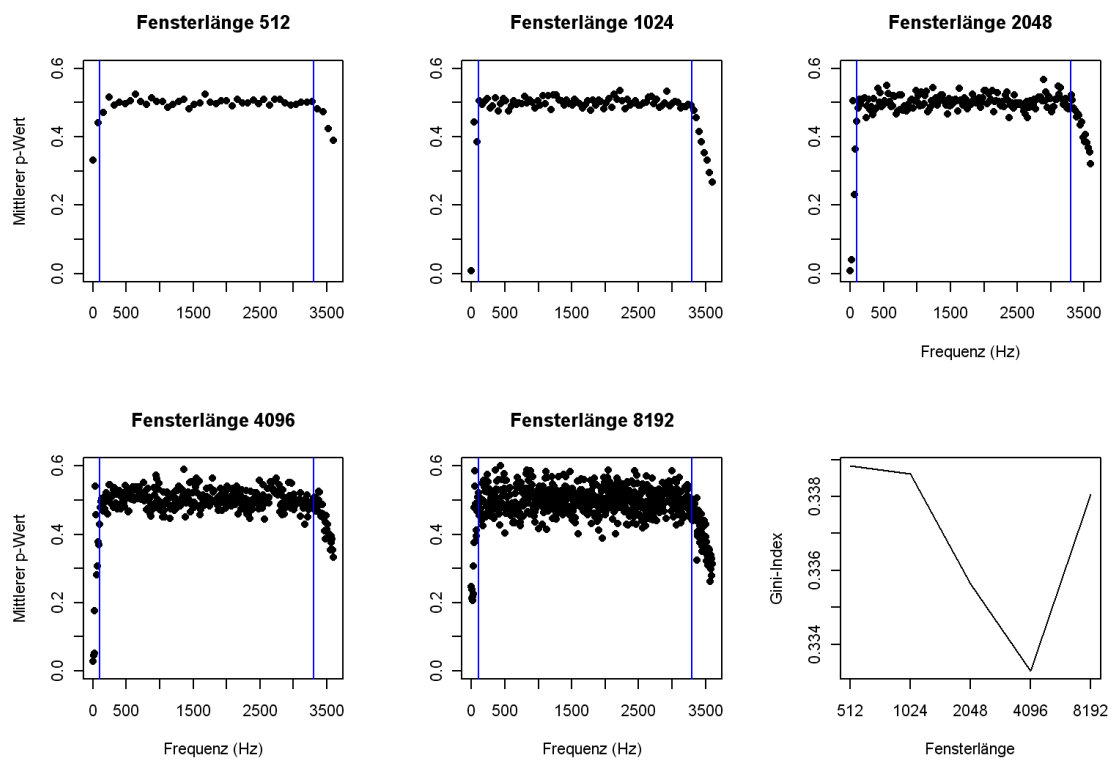


Abbildung 4.5: Mittlere p-Werte zu Lilliefors-Tests auf Exponentialverteilung für unterschiedliche Fensterlängen pro Frequenz und Gini-Index der p-Werte innerhalb des Frequenzbands zwischen 100 Hz und 3300 Hz.

den in den nächsten Abschnitten die Ergebnisse auf Basis des einseitig durch 3600 Hz begrenzten Frequenzbands vorgestellt.

4.2.2 Wahl des Optimierungsverfahrens

Eigenschaften der Likelihoodfunktion

Um die in 4.1.4 vermutete Multimodalität der Likelihoodfunktion zu überprüfen, werden wiederholt, von zufälligen Startwerten ausgehend, numerische Gradientenpfade berechnet. Dabei werden die Parameter, ausgehend vom Startwert, schrittweise so lange in Richtung des auf Basis numerischer Gradienten bezüglich $-\log(LL)$ steilsten Abstiegs variiert, bis sich $-\log(LL)$ zum ersten Mal durch die Variation erhöht, das (möglicherweise lokale) Minimum also überschritten wird. Ab diesem Punkt werden die Parameter in die Richtung des steilsten Anstiegs verändert, bis wiederum ein Maximum von $-\log(LL)$ erreicht ist und die Prozedur wiederholt wird. Abbildung 4.6 zeigt einen Verlaufsausschnitt eines typischen derartig bestimmten numerischen Gradientenpfads.

Der in Abbildung 4.6 als dicke schwarze Linie eingezeichnete Verlauf von $-\log(LL)$ zeigt zwei klare lokale Minima, also lokale Maxima der Likelihoodfunktion. Daneben sind durch farbige Linien die Verläufe der sechs Funktionsparameter eingezeichnet. Wie auch der Pfad von $-\log(LL)$ sind offenbar alle Verläufe stetig, wenngleich nicht stetig differenzierbar. Die hier nicht gezeigten Darstellungen von von anderen Startwerten ausgehenden Pfaden weisen qualitativ ähnliche Muster auf. Die offensichtliche Multimodalität der Likelihoodfunktion spricht für die Verwendung eines genetischen Optimierungsverfahrens. Weiterhin erscheint aufgrund der Stetigkeit der Funktion gradientenbasierte Optimierung in der Nähe des Maximums sinnvoll. Ausgehend von dieser Argumentation kann das genetische und gradientenbasierte Optimierung kombinierende Genoud-Verfahren also als die für die vorliegende Situation vielversprechendere Methode angesehen werden.

Vergleich der erreichten Optima

Zur weiteren Beurteilung der Eignung der beiden verwendeten Optimierungsverfahren werden zunächst die erreichten optimalen Likelihoodwerte miteinander verglichen.

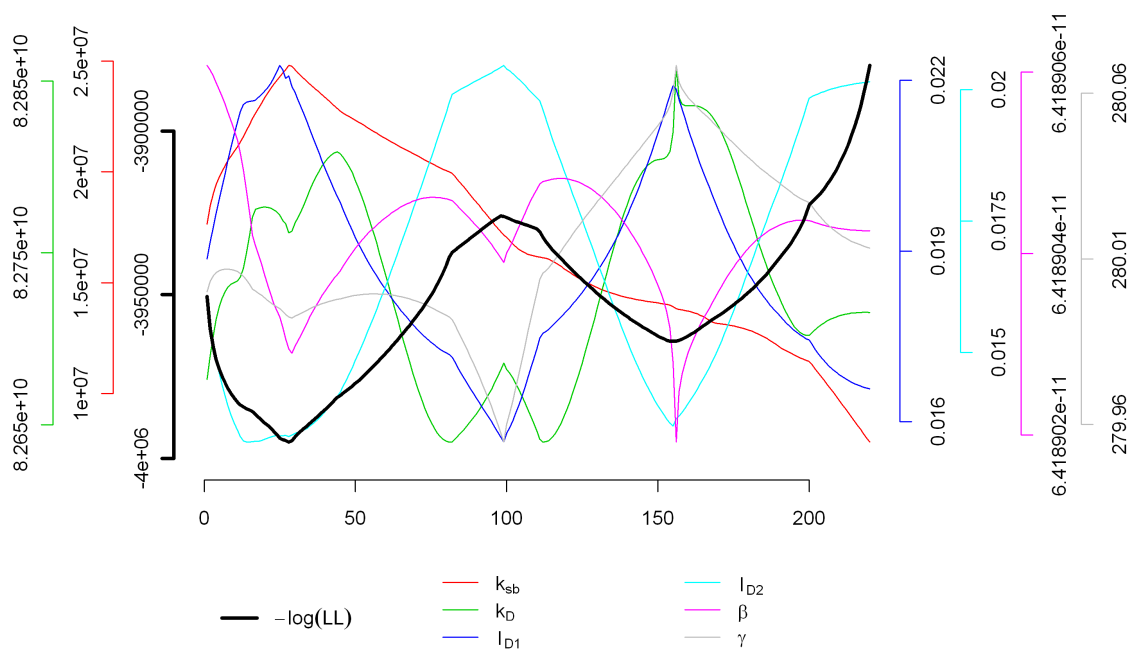


Abbildung 4.6: Ausschnitt eines typischen numerischen Gradientenpfads.

Fensterlänge	Verfahren	Median	Mittelwert	Minimum	Maximum	Standardabweichung
512	Nelder-Mead	-3.896	-3.868	-3.964	-3.325	0.086
	Genoud	-3.939	-3.940	-3.963	-3.915	0.010
1024	Nelder-Mead	-3.977	-3.963	-4.073	-3.693	0.074
	Genoud	-4.060	-4.059	-4.074	-4.032	0.007
2048	Nelder-Mead	-3.993	-3.972	-4.107	-3.256	0.113
	Genoud	-4.092	-4.092	-4.108	-4.077	0.007
4096	Nelder-Mead	-4.050	-4.046	-4.161	-3.711	0.089
	Genoud	-4.149	-4.149	-4.165	-4.130	0.007
8192	Nelder-Mead	-4.070	-4.064	-4.193	-3.626	0.102
	Genoud	-4.182	-4.181	-4.198	-4.158	0.007

Tabelle 4.4: Maßzahlen der durch Genoud- und Nelder-Mead-Verfahren minimierten negativen logarithmierten Likelihoodwerte für jede Fensterlänge. Alle Angaben in Millionen.

Hierzu dient Tabelle 4.4, in der für jede Fensterlänge die Maßzahlen Median, Mittelwert, Extrema und Standardabweichung der jeweils 200 durch das Nelder-Mead- und das Genoud-Verfahren erreichten Minima der negativen logarithmierten Likelihoodfunktion gegenübergestellt werden. Abbildung 4.7 visualisiert die der Tabelle zugrunde liegenden Zahlen mit Hilfe von Boxplotpaaren für jede Fensterlänge.

Offensichtlich ist die Streuung der optimalen Lösungen über alle Fensterlängen beim Nelder-Mead-Verfahren deutlich höher als beim Genoud-Verfahren, was auf die Neigung des Nelder-Mead-Verfahrens zu allgemein mangelnder Konvergenz bzw. zu Konvergenz in lokalen Minima hinweist. Die letztere Vermutung wird durch die Tatsache gestützt, dass die optimalen Werte des Genoud-Verfahrens im Mittel deutlich unter denen des Nelder-Mead-Verfahrens liegen. Diese Unterschiede können durch den Wilcoxon-Test (vgl. Büning und Trenkler (1994), S. 171ff) für verbundene Stichproben bei p-Werten von deutlich unter 0.00001 für jede Fensterlänge als zum Niveau 5% signifikant belegt werden, was bei Betrachtung von Abbildung 4.7 nicht überrascht.

Da in der Simulationsstudie die wahren Eigenfrequenzen bekannt sind, können neben den Likelihoodwerten auch die aus den jeweils geschätzten Parametern resultierenden geschätzten Eigenfrequenzverläufe mit den wahren Verläufen verglichen werden. Ta-

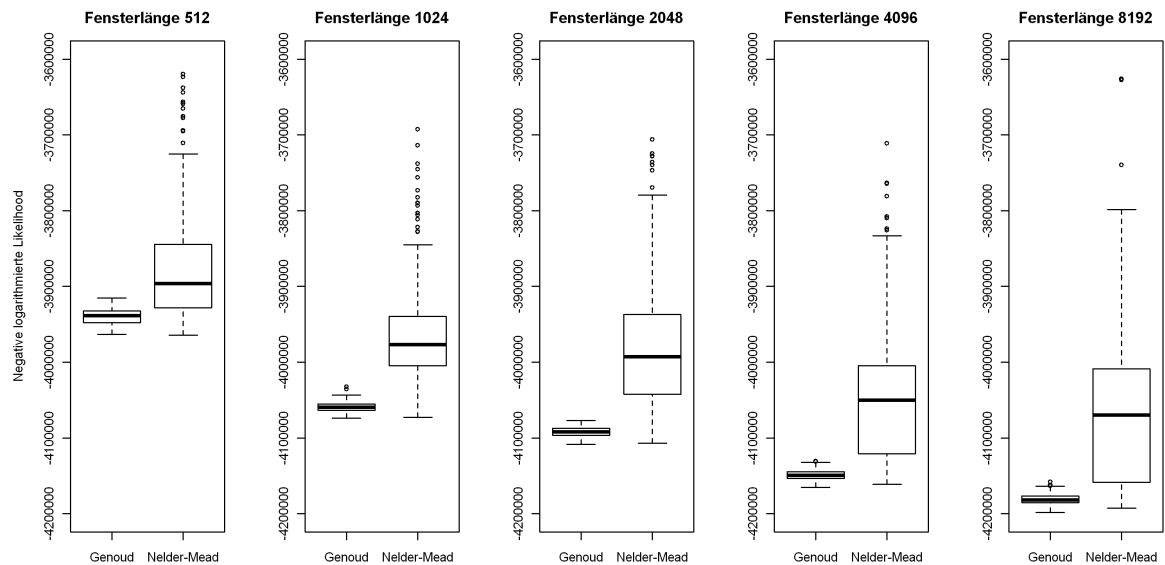


Abbildung 4.7: Vergleich der durch Genoud- und Nelder-Mead-Verfahren minimierten negativen logarithmierten Likelihoodwerte für jede Fensterlänge.

belle 4.5 und Abbildung 4.8 zeigen einen den vorigen Darstellungen entsprechenden Vergleich der beiden Verfahren bezüglich des mittleren Absolutwerts der relativen Abweichungen (i.W. kurz „Abweichung“) der geschätzten von den wahren Eigenfrequenzen über alle Fensterlängen. In Abbildung 4.8 ist die diskretisierungsbedingt minimal erreichbare Abweichung von 0.6% (vgl. Abschnitt 4.1.1) als grüne horizontale Linie eingezeichnet.

Bei den Abweichungen zeigt sich ein ähnliches Bild wie bei den Likelihoodwerten. Das Genoud-Verfahren liefert durchweg die besseren Lösungen bei gleichzeitig geringerer Streuung. Lediglich für die Fensterlänge 512 sind die Ergebnisse beider Verfahren in ähnlich schlechten Bereichen. Diesem Eindruck entsprechend ergeben Wilcoxon-Tests auf Lageunterschiede zwischen den Verfahren für die Eigenfrequenzabweichungen bei p-Werten von weit unter 0.00001 zum Niveau 5% signifikante Unterschiede für Fensterlängen von mindestens 1024. Auch für die Fensterlänge 512 kann die Nullhypothese gleicher Mediane bei einem p-Wert von 0.0049 zum selben Niveau abgelehnt werden, allerdings weniger deutlich als bei den längeren Fenstern.

Fensterlänge	Verfahren	Median	Mittelwert	Minimum	Maximum	Standardabweichung
512	Nelder-Mead	2.301	2.576	0.642	11.410	1.661
	Genoud	2.116	2.086	0.664	3.266	0.932
1024	Nelder-Mead	1.818	2.085	0.740	8.584	1.252
	Genoud	1.112	1.109	0.708	1.288	0.067
2048	Nelder-Mead	1.923	2.175	0.685	9.922	1.502
	Genoud	0.826	0.836	0.716	1.116	0.054
4096	Nelder-Mead	1.707	1.941	0.693	9.604	1.440
	Genoud	0.785	0.830	0.691	1.167	0.105
8192	Nelder-Mead	1.672	1.941	0.649	9.506	1.355
	Genoud	0.814	0.852	0.651	1.257	0.141

Tabelle 4.5: Maßzahlen der aus den Ergebnissen der Verfahren Genoud und Nelder-Mead resultierenden mittleren Absolutwerte der relativen Eigenfrequenzabweichungen für jede Fensterlänge. Alle Angaben in %.

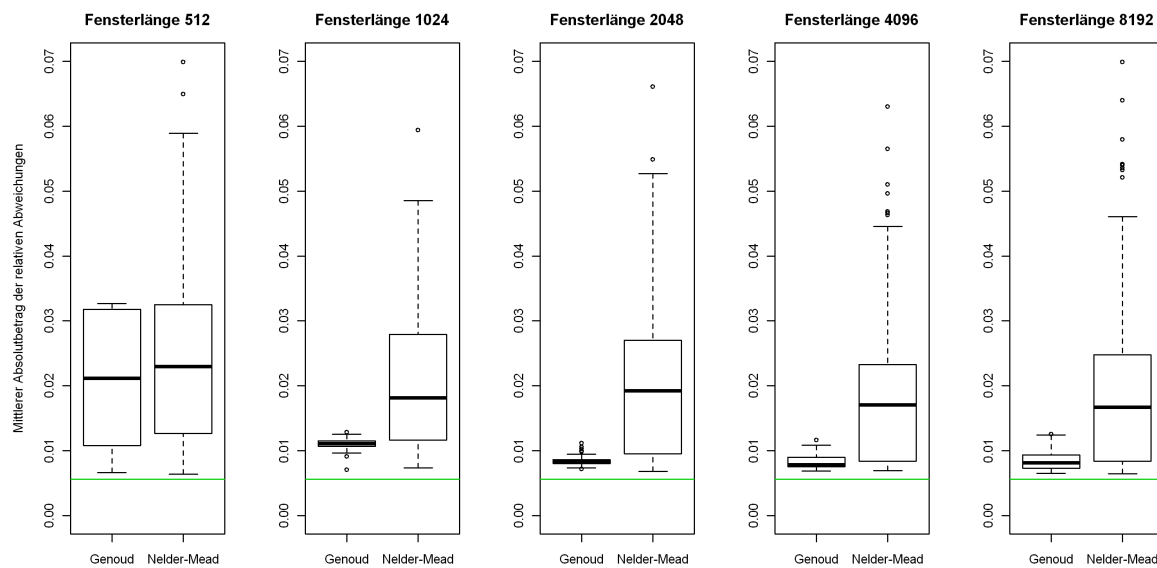


Abbildung 4.8: Vergleich der aus den Ergebnissen der Verfahren Genoud und Nelder-Mead resultierenden mittleren Absolutwerte der relativen Eigenfrequenzabweichungen für jede Fensterlänge. Grüne Linie: minimal erreichbare Abweichung.

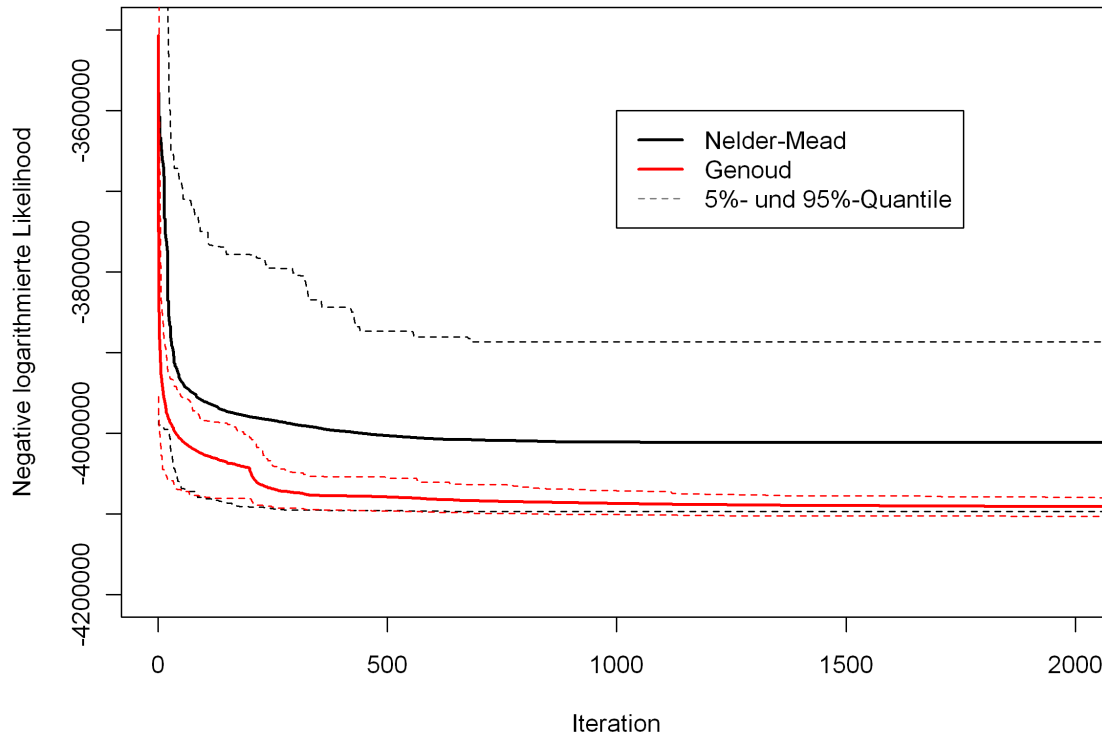


Abbildung 4.9: Verläufe der mit Nelder-Mead- und Genoud-Verfahren auf Basis der Fensterlänge 4096 bis zur aktuellen Iteration erreichten Optima.

Konvergenz der Optimierungsverfahren

Abschließend werden die beiden verwendeten Optimierungsverfahren bezüglich ihres Konvergenzverhaltens verglichen. Zur Beurteilung der allgemeinen Konvergenz zeigt Abbildung 4.9 einen Vergleich der für jede Iteration über alle 200 Realisationen gemittelten minimalen Werte von $-\log(LL)$, die bis zu dieser Iteration mit den beiden Verfahren auf Basis der Fensterlänge 4096 erreicht wurden. Als Unsicherheitsbereiche sind außerdem die Verläufe der 5%- und 95%-Quantile eingezeichnet.

An den in Abbildung 4.9 gezeigten Verläufen fällt auf, dass sich die deutliche Überlegenheit des Genoud-Verfahrens bereits während der ersten 250 Iterationen zeigt. Dieser erste Block entspricht der Initialisierungsgeneration des Genoud-Verfahrens,

die im Wesentlichen einer im Parameterraum gleichverteilten Zufallsstichprobe entspricht. Beim Nelder-Mead-Verfahren kann in den folgenden Iterationen keine wesentliche Verbesserung erzielt werden. Im Mittel ist also die Optimierung auf Basis der Wahl der besten unter 250 zufällig gewählten Parameterkombinationen besser als die Nelder-Mead-Optimierung mit 2500 Iterationen. Im Gegensatz dazu erfolgt beim Genoud-Verfahren eine weitere, zunächst ab Iteration 250 sprunghaft beschleunigte deutliche Verbesserung des bis dahin ermittelten optimalen Werts. Die eigentliche, erst ab da einsetzende Optimierung ist also neben dem Nelder-Mead-Verfahren auch der Optimierung durch Zufallsauswahl deutlich überlegen. Zudem verdichten sich die gefundenen Optima mit wachsender Iterationenzahl immer mehr um ihren mittleren Wert, was an der Annäherung der Quantilslinien erkannt werden kann.

Neben der allgemeinen Konvergenz ist auch von Interesse, ob auf unterschiedlichen Startwerten basierende Optimierungen für einzelne Datensätze zu den selben optimalen Parametern führen. Aus diesem Grund werden für einen festen Datensatz fünf zufällige Startwerte ermittelt. Ausgehend von diesen Startwerten werden dann jeweils beide Verfahren zur Optimierung eingesetzt. Abbildung 4.10 zeigt einen typischen Parameterpfadvergleich der so an einem Beispieldatensatz durchgeführten Optimierungen. Die Darstellung erfolgt dabei im Raum der ersten zwei Hauptkomponenten, die auf Basis aller bei den insgesamt 10 Optimierungen betrachteten Parameterwerte berechnet wurden. Die grauen Pfade verbinden die durch Kreise dargestellten Startwerte über alle während einer Optimierung durchlaufenen Parameterkombinationen mit den durch Quadrate dargestellten optimalen Parametereinstellungen.

Offenbar werden die Parameterwerte im Verlauf des Nelder-Mead-Verfahrens nur sehr gering variiert, während beim Genoud-Verfahren stark springende Pfade zu beobachten sind. Allerdings führen diese springenden Pfade in ein relativ kleines Gebiet optimaler Lösungen, wohingegen die Pfade des Nelder-Mead-Verfahrens in unterschiedliche Richtungen laufen. Lediglich zwei (blau und schwarz) der fünf Pfade enden in dem vom Genoud-Verfahren als optimal identifizierten Gebiet.

Da sich die Lösungen für das Genoud-Verfahren zwar geringer, aber dennoch sichtbar unterscheiden, wird für beide Verfahren eine Inspektion der Likelihoodfunktion in ihrer Nähe vorgenommen. Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen hierzu einen Vergleich

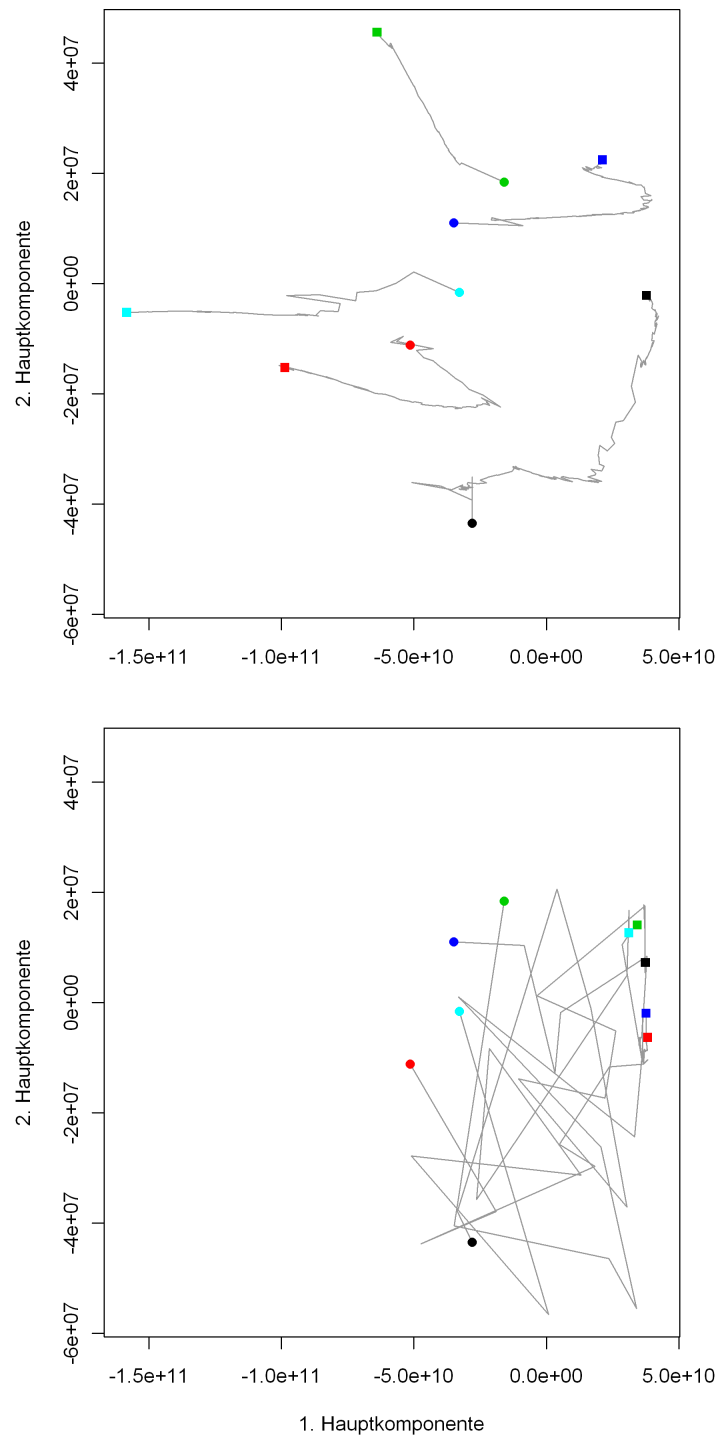


Abbildung 4.10: Vergleich von je fünf Optimierungspfaden im Raum der ersten zwei Parameterhauptkomponenten. Oben: Nelder-Mead-Verfahren, unten: Genoud-Verfahren.

von jeweils auf Basis von vier zufälligen Startwerten ermittelten Lösungen, wobei die Startwerte wiederum für beide Verfahren dieselben waren. Die Abbildungen zeigen die Werte der negativen logarithmierten Likelihoodfunktion und der mittleren Abweichung, die sich auf der durch lineare Inter- und Extrapolation der im Quadrat angeordneten Parameterkombinationen bestimmten gekrümmten Ebene ergeben. Der Höhen- und Farbwert steht dabei für den Wert des jeweiligen Kriteriums, die i - und j -Werte entsprechen den Inter- bzw. Extrapolationsgewichten.

Abbildung 4.11 zeigt, dass zwischen den vier durch Nelder-Mead gefundenen Parametereinstellungen bezüglich beider Kriterien deutliche Anstiege zu verzeichnen sind und die Lösungen somit allem Anschein nach echte lokale Minima darstellen. Dagegen erscheinen die Gebiete zwischen den Genoud-Lösungen (Abbildung 4.12) für beide Kriterien relativ flach. Dementsprechend ist davon auszugehen, dass Lösungen aus diesem Gebiet bezüglich der Anpassungsgüte nicht oder kaum unterscheidbar sind.

Wiederholungen dieser Darstellungen für unterschiedliche Datensätze und Startwerte zeigen ein ähnliches Bild. Insgesamt ist also davon auszugehen, dass das Nelder-Mead-Verfahren in lokale Minima konvergiert. Dagegen scheint das Genoud-Verfahren das „Tal“ des globalen Optimums und eine an ihm hinreichend nahe Lösung verlässlich zu finden. Entsprechend kann dieses Verfahren als die für das vorliegende Optimierungsproblem deutlich besser geeignete Methode angesehen werden.

4.2.3 Wahl der Fensterlänge bezüglich der Eigenfrequenzverlaufs- und Parameteridentifikation

Die Vergleiche der optimalen Likelihoodwerte und sich aus diesen Optima ergebenden Eigenfrequenzabweichungen sprechen klar für das Genoud-Verfahren. Die Tabelle 4.5 und Abbildung 4.8 zugrunde liegenden Daten erlauben zudem eine weitere Beurteilung der untersuchten Fensterlängen bezüglich ihrer Eignung zur Rekonstruktion der Frequenzverläufe. Dabei werden aufgrund der deutlichen Überlegenheit des Genoud-Verfahrens nur die durch diese Methode erhaltenen Werte berücksichtigt. Offenbar ist die mittlere Abweichung sowohl im Sinne des Medians von 0.785 als auch des Mittelwerts von 0.830 für die Fensterlänge 4096 minimal, wobei sich die Werte für die Fensterlängen 2048 und 8192 augenscheinlich kaum davon unterscheiden.

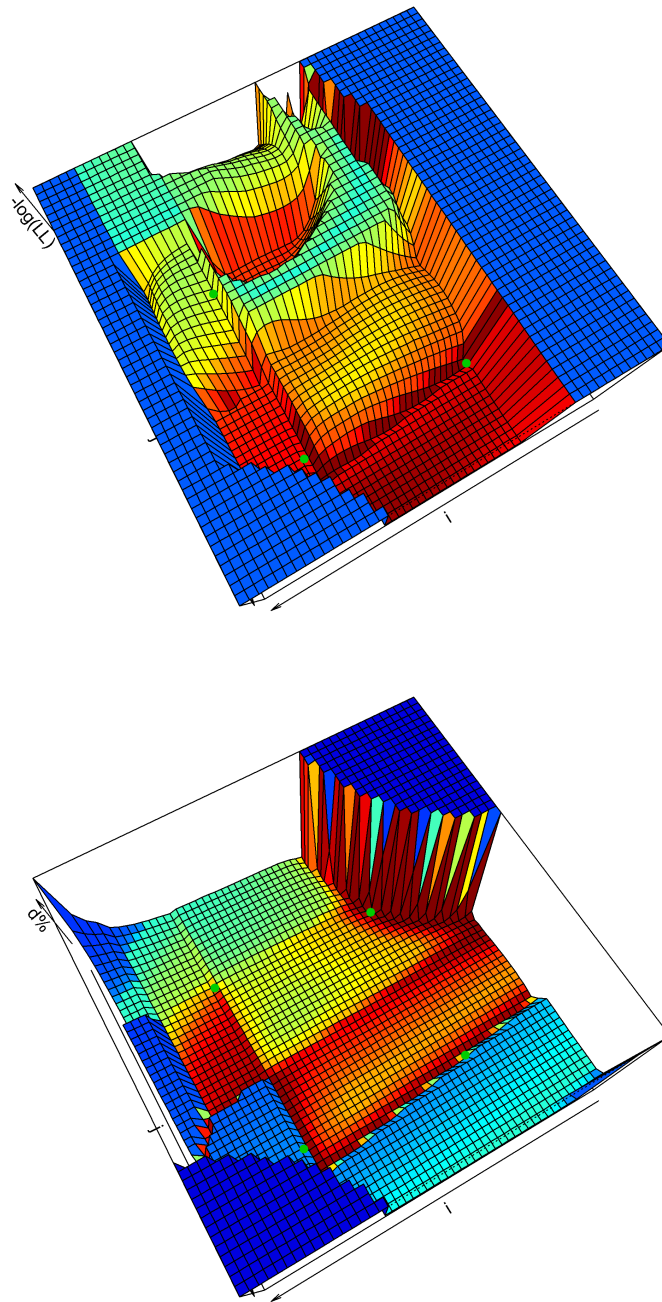


Abbildung 4.11: Kriterien in der Nähe von auf vier Startwerten basierenden Lösungen des Nelder-Mead-Verfahrens. Oben: negative logarithmierte Likelihood, unten: mittlere Abweichung. Die grünen Punkte kennzeichnen die jeweiligen Lösungen, Farbskalen entsprechen den z-Achsen.

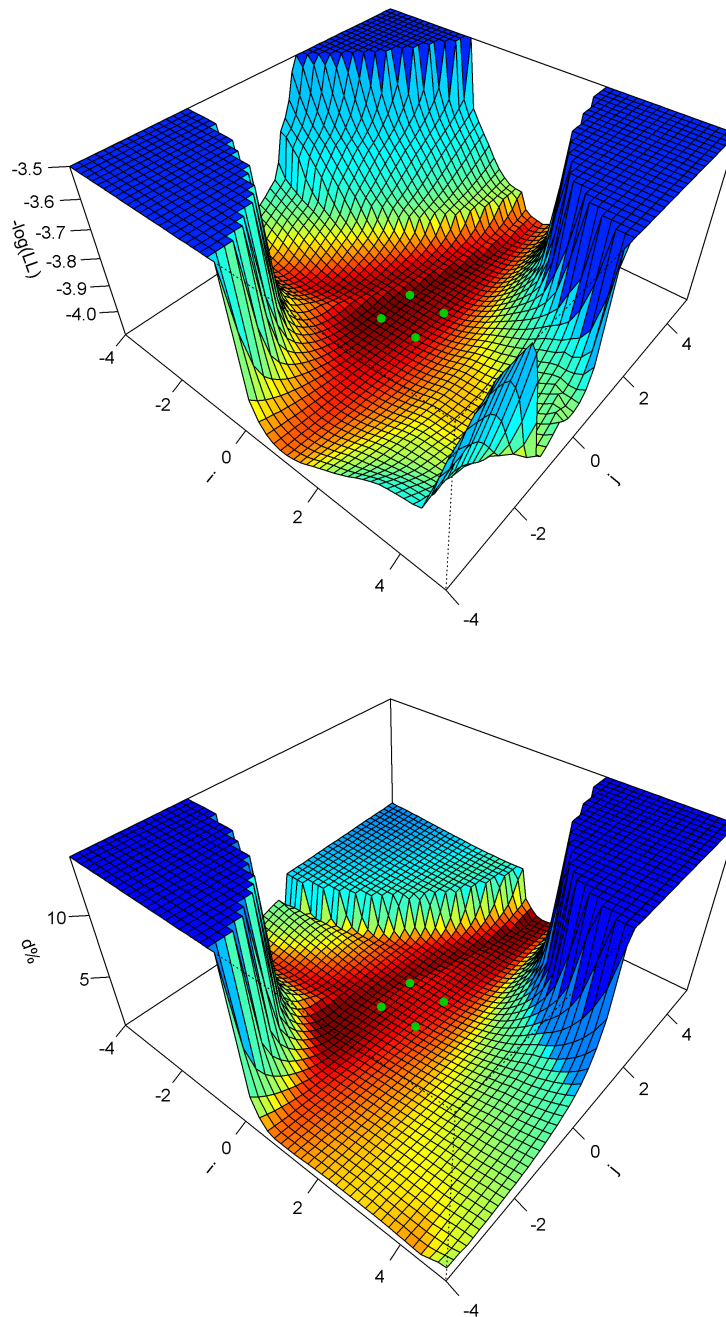


Abbildung 4.12: Kriterien in der Nähe von auf vier Startwerten basierenden Lösungen des Genoud-Verfahrens. Oben: negative logarithmierte Likelihood, unten: mittlere Abweichung. Die grünen Punkte kennzeichnen die jeweiligen Lösungen, Farbskalen entsprechen den z-Achsen.

p-Wert	Adjustiertes Signifikanzniveau	H_0	Testentscheidung
<0.00001	0.00500	$M_{512}=M_{1024}$	Lehne H_0 ab
<0.00001	0.00556	$M_{512}=M_{2048}$	Lehne H_0 ab
<0.00001	0.00625	$M_{512}=M_{4096}$	Lehne H_0 ab
<0.00001	0.00714	$M_{512}=M_{8192}$	Lehne H_0 ab
<0.00001	0.00833	$M_{1024}=M_{2048}$	Lehne H_0 ab
<0.00001	0.01000	$M_{1024}=M_{4096}$	Lehne H_0 ab
<0.00001	0.01250	$M_{1024}=M_{8192}$	Lehne H_0 ab
0.02945	0.01667	$M_{2048}=M_{4096}$	Lehne H_0 nicht ab
0.27994	0.02500	$M_{4096}=M_{8192}$	Lehne H_0 nicht ab
0.65738	0.05000	$M_{2048}=M_{8192}$	Lehne H_0 nicht ab

Tabelle 4.6: Ergebnisse der Post-Hoc-Paarvergleiche der mit dem Genoud-Verfahren erzielten Abweichungen zwischen den untersuchten Fensterlängen. M_i bezeichnet den Median der Verteilung, aus der die mit der Fensterlänge i erzielten Abweichungen stammen.

Die Bewertung der Abweichungsunterschiede zwischen allen fünf Fensterlängen erfolgt zunächst durch den F_c -Test nach Friedman (vgl. Büning und Trenkler (1994), S. 200ff), welcher bei einem p-Wert von deutlich unter 0.00001 zum Niveau 5% signifikante Unterschiede belegt. Die geordneten p-Werte der zu diesem globalen Test als paarweise Post-Hoc-Tests durchgeführten Wilcoxon-Tests für verbundene Stichproben sowie die damit zu vergleichenden nach der Bonferroni-Holm-Methode (Holm, 1979) adjustierten Signifikanzniveaus sind Tabelle 4.6 zu entnehmen.

Dem visuellen Eindruck entsprechend werden die Abweichungsergebnisse zwischen den Fensterlängen 512 und 1024 untereinander sowie zu den größeren Fensterlängen als zum globalen Niveau 5% signifikant belegt. Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Fensterlängen 2048, 4096 und 8192 dagegen werden als zufällig eingestuft. Die im vorigen Abschnitt gegebene Fensterlängenempfehlung erhält durch diese Ergebnisse also dahingehend Unterstützung, dass Fensterlängen von unter 2048 als zu kurz im Sinne der Eigenfrequenzverlaufsrekonstruktion angesehen werden können. Für die übrigen Längen findet sich hier keine klare Überlegenheit, allerdings sind empirisch auch hier die auf Basis von 4096 Beobachtungen langen Fenstern ermittelten Ergeb-

nisse die besten.

In Abbildungen 4.13 und 4.14 sind Matrizen von Streudiagrammen aller Paare von mit den beiden Optimierungsverfahren ermittelten Parameterschätzern und den zugehörigen Likelihoodwerten für die Fensterlängen 512 und 4096 dargestellt. Dabei sind die dargestellten Spannweiten zur besseren Vergleichbarkeit in beiden Abbildungen dieselben. Darüber hinaus sind in den dortigen Darstellungen die in Abschnitt 4.1.1 ermittelten, den Diskretisierungsfehler minimierenden Parameterwerte in Form von grünen Kreuzen eingezeichnet.

Die Streudiagramme zeigen, dass neben den Likelihoodwerten auch die Parameterschätzer beim Nelder-Mead-Verfahren sehr viel stärker streuen als beim Genoud-Verfahren. Beim Vergleich zwischen den beiden betrachteten Fensterlängen fällt auf, dass sich beim Genoud-Verfahren mit Fensterlänge 512 die Schätzer offenbar an mehreren Punkten konzentrieren. So lassen sich im Streudiagramm zwischen \hat{k}_{sb} und $\hat{\beta}$ z.B. drei Cluster identifizieren. Diese Cluster deuten stark auf lokale Minima der negativen logarithmierten Likelihoodfunktion hin. Für die Darstellung zur Fensterlänge 4096 rücken diese Cluster offenbar zu einer einzigen Punktwolke zusammen. Die für die optimalen Parameter stehenden grünen Kreuze liegen augenscheinlich im Inneren dieser Punktwolke, was ein weiterer Hinweis auf eine erfolgreiche Optimierung ist.

Die hier nicht aufgeführten entsprechenden Darstellungen unterscheiden sich qualitativ nicht wesentlich von den gezeigten. In den Streudiagrammen zur Fensterlänge 1024 sind die angesprochenen Gruppen noch zu erkennen, wenngleich bereits näher zusammen gerückt. Die Plots zu den Fensterlängen 2048 und 8192 ähneln denen zur Länge 4096. Auch die Betrachtung der Parameterschätzer legt also nahe, Fenster von mindestens 2048 Beobachtungen Länge zu verwenden.

4.2.4 Eigenschaften der Maximum-Likelihood-Schätzer

Aufgrund der Ergebnisse der vorigen Abschnitte werden im Weiteren ausschließlich die durch das Genoud-Verfahren auf Basis von Periodogrammen der Länge 4096 gewonnenen Ergebnisse analysiert. Zunächst werden in Tabelle 4.7 die Maßzahlen sowie die bivariaten Korrelationen der 200 sechsdimensionalen ML-Schätzer und der negativen logarithmierten Likelihoodfunktion anhand der Streudiagramm-Matrix in Abbildung 4.15 (welche einem vergrößerten Ausschnitt von Abbildung 4.14, beschränkt auf die

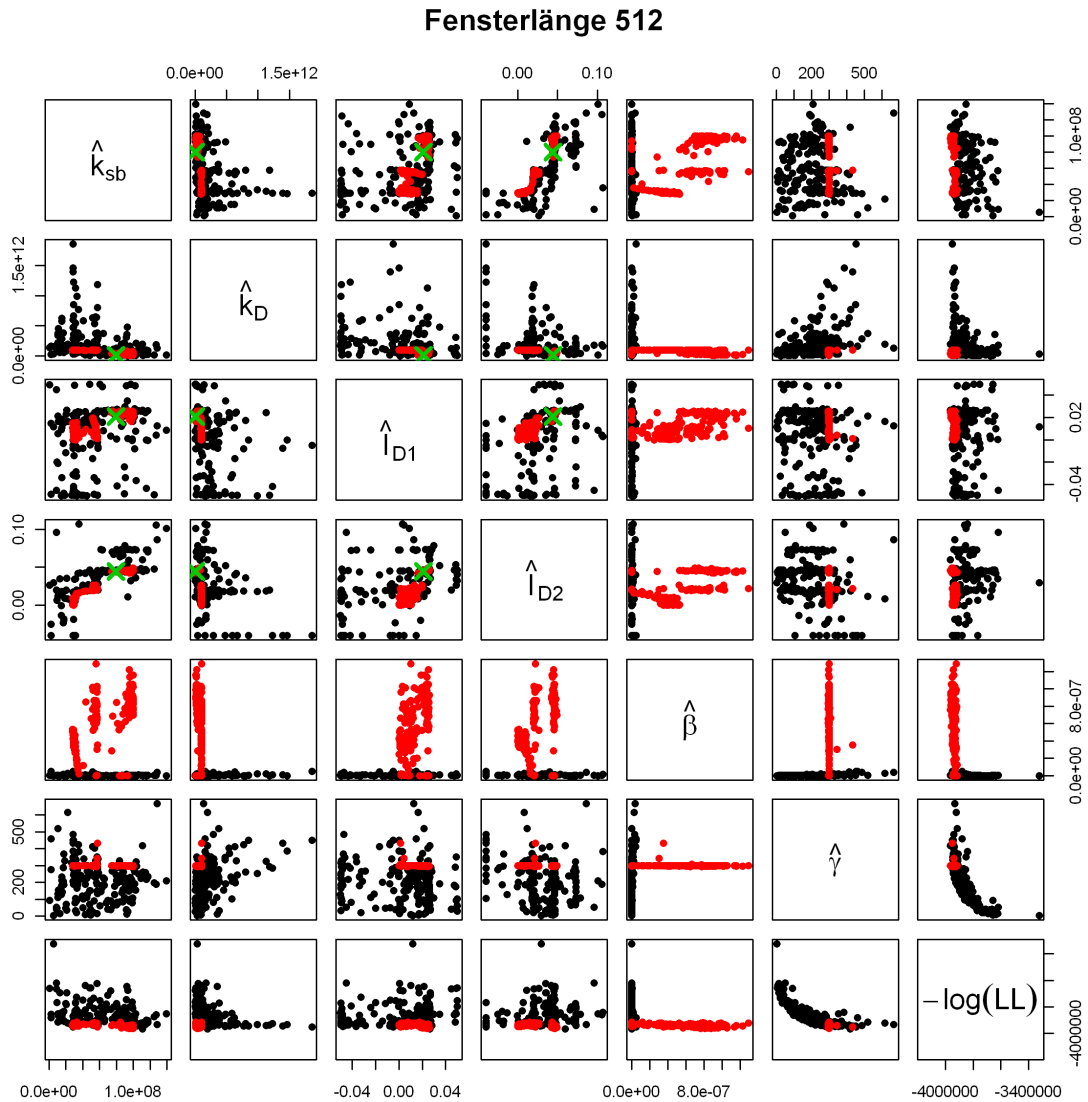


Abbildung 4.13: Streudiagramm-Matrix aller mit den Verfahren Nelder-Mead (schwarz) und Genoud (rot) ermittelter Parameterschätzer und zugehöriger negativer Likelihoodwerte für die Fensterlänge 512. Die grünen Kreuze markieren die bezüglich des Diskretisierungsfehlers optimalen Parameterwerte.

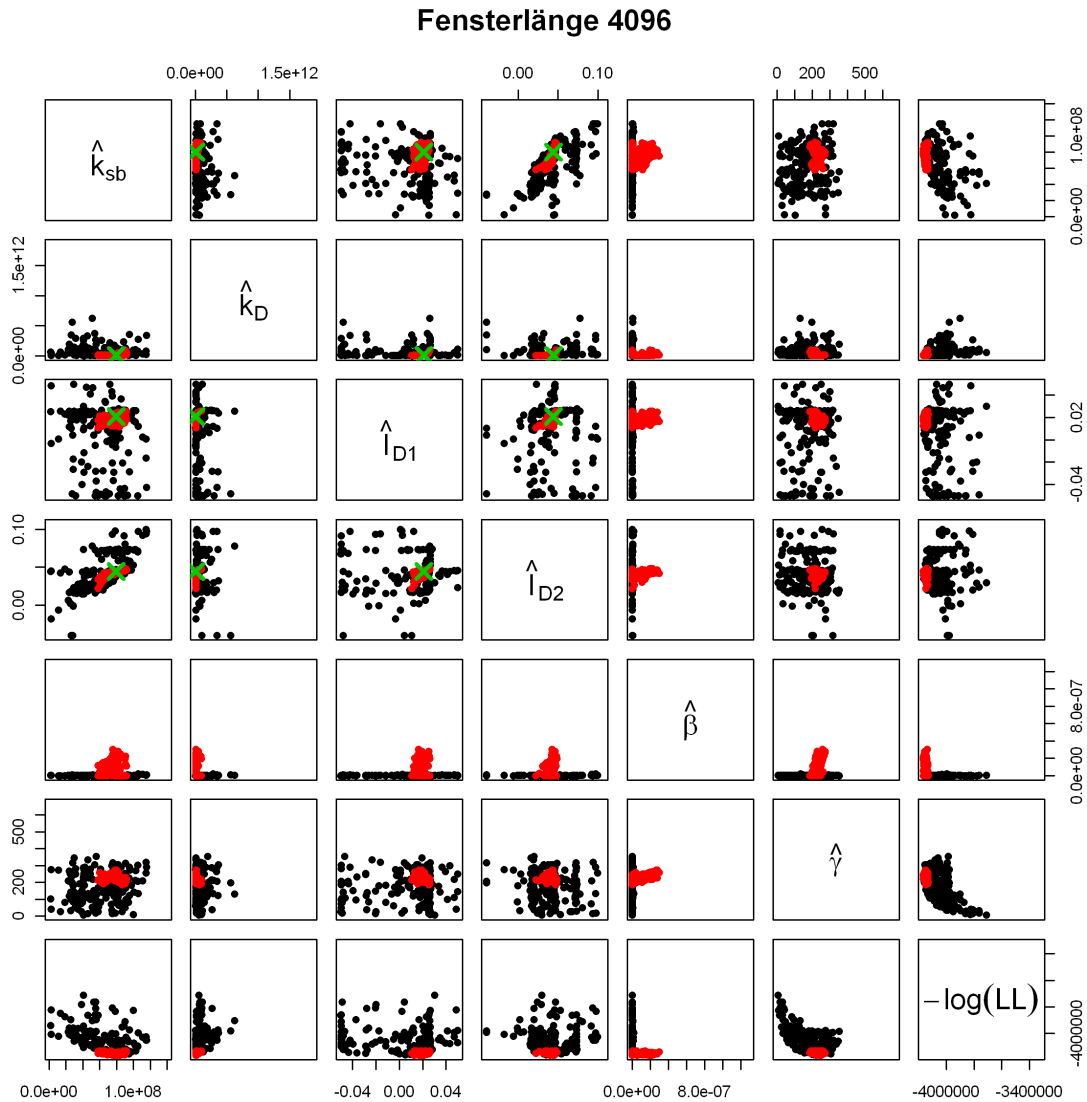


Abbildung 4.14: Streudiagramm-Matrix aller mit den Verfahren Nelder-Mead (schwarz) und Genoud (rot) ermittelter Parameterschätzer und zugehöriger negativer Likelihoodwerte für die Fensterlänge 4096. Die grünen Kreuze markieren die bezüglich des Diskretisierungsfehlers optimalen Parameterwerte.

Parameter	Wahrer* Wert	Median	Mittel- wert	Minimum	Maximum	Standard- abweichung
$k_{sb}/10^7$	7.969	7.772	7.601	5.779	9.195	0.812
$k_D/10^{10}$	1.134	1.212	1.585	1.000	9.680	1.259
l_{D1}	0.021	0.017	0.018	0.011	0.026	0.003
l_{D2}	0.044	0.043	0.042	0.022	0.049	0.004
$\beta \cdot 10^{11}$	2.165	10958	10145	1.003	29936	84.395
γ	4.97	229.8	230.4	187.1	272.8	16.78
$-\log(LL)/10^6$		-4.149	-4.149	-4.165	-4.130	0.0069

Tabelle 4.7: Maßzahlen der durch das Genoud-Verfahren auf Basis der Fensterlänge 4096 bestimmten ML-Schätzer und der negativen logarithmierten Likelihood. *Als „wahre“ Werte für die ersten vier Parameter gelten die den Diskretisierungsfehler optimal ausgleichenden Werte.

Werte des Genoud-Verfahrens, entspricht) und der Korrelationsmatrix in Tabelle 4.8 betrachtet.

Die Stichprobenzahl von 200 impliziert, dass unter der Normalverteilungsannahme bereits Korrelationen mit Betrag über ca. 0.15 zum Niveau 5% signifikant sind. Die Erfülltheit dieser Annahme und die Signifikanz von Korrelationen soll hier nicht näher diskutiert werden, die Angabe des Werts dient lediglich der besseren Einordnung. Bei Betrachtung von Abbildung 4.15 fallen vor allem die starken nichtlinearen Zusammenhänge zwischen \hat{k}_{sb} , \hat{k}_{D1} , \hat{l}_{D1} und \hat{l}_{D2} , also den Schätzern für die die Abstützungen beschreibenden Größen ins Auge. Offenbar können also Variationen jeweils eines Parameters bezüglich der Anpassungsgüte durch Variationen der übrigen ausgeglichen werden. Beispielsweise geht eine Erhöhung der geschätzten Gesamtsteifigkeit \hat{k}_{D1} des Dämpfers mit der beidseitigen Verkürzung der geschätzten Wirkungsfläche, also mit der Erhöhung von \hat{l}_{D1} und \hat{l}_{D2} einher. Aufgrund der Monotonie dieser Zusammenhänge drücken diese sich auch in vergleichsweise hohen linearen Korrelationskoeffizienten zwischen 0.4 und 0.9 aus.

Ein weiterer starker positiver Zusammenhang besteht zwischen den Schätzungen für β und γ , also den die proportionale Dämpfung beschreibenden Größen. Dieser Zusammenhang ist durchaus zu erwarten, da die beiden Größen die Proportionalitäts-

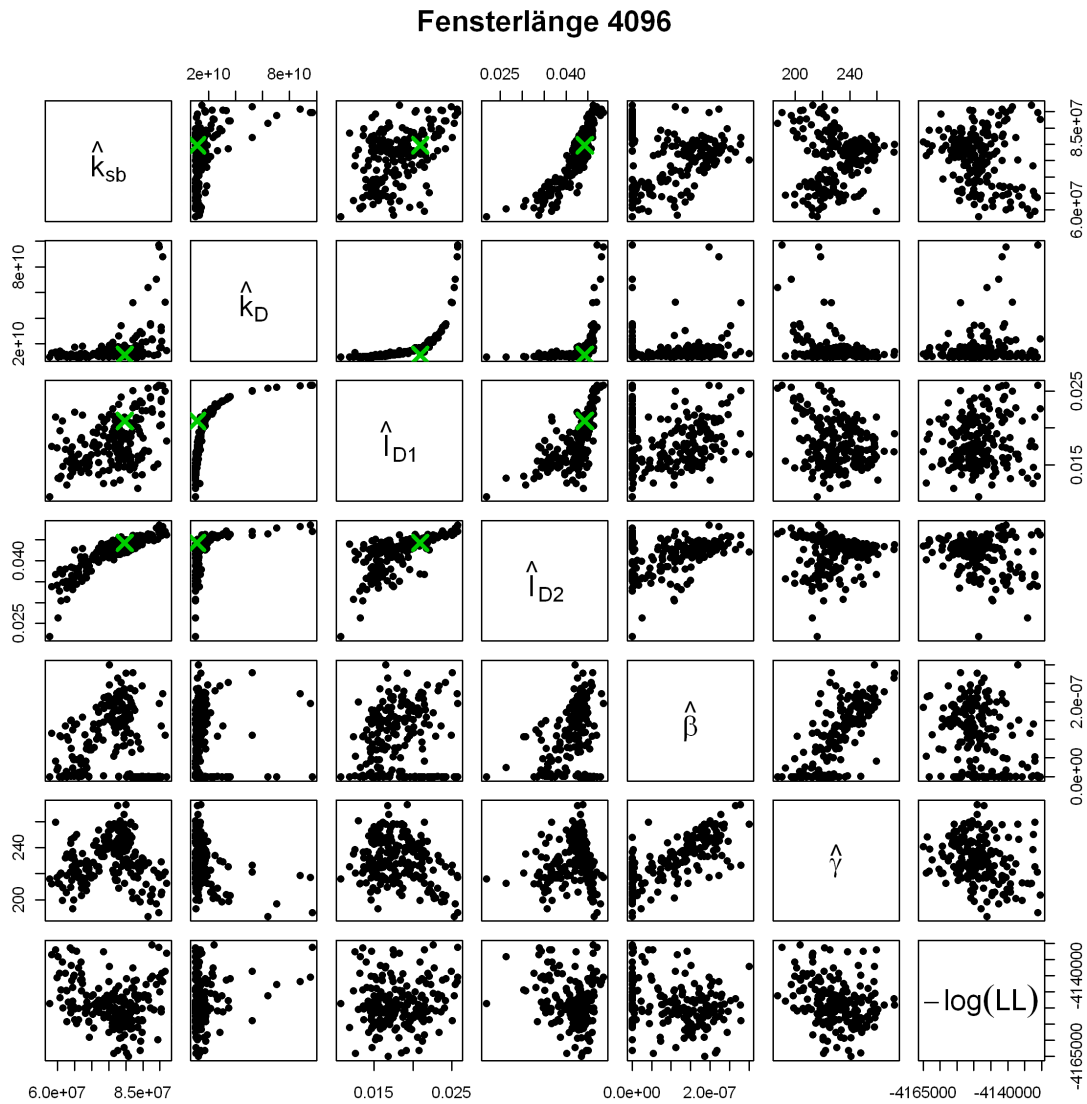


Abbildung 4.15: Streudiagramm-Matrix der mit dem Genoud-Verfahren ermittelten Parameterschätzer und zugehöriger negativer Likelihoodwerte für die Fensterlänge 4096. Die grünen Kreuze markieren die bezüglich des Diskretisierungsfehlers optimalen Parameterwerte.

	\hat{k}_{sb}	\hat{k}_D	\hat{l}_{D1}	\hat{l}_{D2}	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$-\log(LL)$
\hat{k}_{sb}	1.0000	0.4302	0.4622	0.8849	0.0720	0.0146	-0.2148
\hat{k}_D	0.4302	1.0000	0.6899	0.4319	0.0283	-0.3508	0.2262
\hat{l}_{D1}	0.4622	0.6899	1.0000	0.6448	0.1688	-0.2505	0.1241
\hat{l}_{D2}	0.8849	0.4319	0.6448	1.0000	0.2249	0.0792	-0.2283
$\hat{\beta}$	0.0720	0.0283	0.1688	0.2249	1.0000	0.7285	-0.2841
$\hat{\gamma}$	0.0146	-0.3508	-0.2505	0.0792	0.7285	1.0000	-0.2693
$-\log(LL)$	0.2148	0.2262	0.1241	-0.2283	-0.2841	-0.2693	1.0000

Tabelle 4.8: Korrelationsmatrix der durch das Genoud-Verfahren auf Basis der Fensterlänge 4096 bestimmten ML-Schätzer und der negativen logarithmierten Likelihood. Graue Werte sind auf dem Niveau 5% nicht signifikant.

konstanten für Masse- und Steifigkeitsmatrix darstellen. Wird die Dämpfung in einer Stichprobe tendenziell höher geschätzt, müssen β und γ in festem Verhältnis zueinander gleichmäßig erhöht werden, damit sich die Gewichtung von Masse und Steifigkeit bei der Berechnung der Dämpfung nicht ändert.

Die paarweisen Korrelationen der Parameterschätzer mit $-\log(LL)$ fallen allesamt mit Beträgen unter 0.3 vergleichsweise niedrig aus, und auch in den Streudiagrammen zeigen sich keine auffälligen linearen oder nichtlinearen Zusammenhänge. Diese geringen Korrelationen sind wünschenswert, da durch die ML-Schätzung die zwischen den Parametern und der Likelihoodfunktion bestehenden systematischen Zusammenhänge gefunden werden und die auf die optimalen Werte bedingte Streuung rein zufällig sein sollte. Erkennbare Muster zwischen Parameterschätzern und der Likelihoodfunktion wären ein Hinweis darauf, dass die Schätzer weiter verbessert werden könnten und somit bestenfalls lokale Optima verkörpern.

Die grünen Kreuze in Abbildung 4.15 markieren die in 4.2.3 bestimmten, den Diskretisierungsfehler optimal ausgleichenden Parameterwerte für k_{sb} , k_{D1} , l_{D1} und l_{D2} und liegen offensichtlich in der Punktwolke der ML-Schätzer. Der wahre Wert 4.97 von γ wird dagegen durchweg mit Werten zwischen 187 und 273 deutlich überschätzt. Die Spannweite der Schätzungen für β von $1.003 \cdot 10^{-11}$ bis $2.994 \cdot 10^{-7}$ umschließt zwar den wahren Wert $2.16 \cdot 10^{-11}$, allerdings liegt der mittlere Schätzwert von $1.015 \cdot 10^{-7}$ deutlich darüber. Die hohe Rechtsschiefe der Verteilung von $\hat{\beta}$ kann auch in der fünf-

ten Spalte von Abbildung 4.15 erkannt werden. Offenbar gibt es eine Gruppe von sehr kleinen Werten, denen eine weitere Gruppe stärker streuender größerer Werte gegenübersteht. Diese Gruppenbildung deutet prinzipiell auf lokale Minima hin. Allerdings bietet das Streudiagramm zwischen $\hat{\beta}$ und $-\log(LL)$ keinen Hinweis darauf, dass sich die Niveaus dieser lokalen Minima merklich unterscheiden, mit kleinen wie mit hohen Werten von $\hat{\beta}$ werden ähnliche Likelihoodwerte erzielt.

Einen Hinweis darauf, warum der Wert von γ offenbar so systematisch überschätzt wird, soll im Folgenden gegeben werden. Wie in 4.1.1 beschrieben, unterscheiden sich die Eigenfrequenzen des ungedämpften vernachlässigbar von denen des gedämpften Systems. Die Höhe der BEFs wird also vor allem durch die abstützungsmodellierenden Parameter bestimmt. Die Proportionalitätskonstanten β und γ legen dagegen die Gestalt der FRF zwischen den Peaks an den Stellen der Eigenfrequenzen fest. In Abbildung 4.16 sind neben dem über alle 200 Versuche gemittelten Periodogramm und der wahren FRF zwei FRFs eingezeichnet, die sich auf Basis von bis auf den Wert für γ optimalen Parameterwerten und Werten für γ von 50 und 250 auf dem Frequenzband von 0 bis 1000 Hz ergeben.

Die Grafik zeigt zunächst, dass die in der wahren FRF (grüne Linie) deutlich durch lokale Minimalstellen erkennbaren Antiresonanzen sich im gemittelten Periodogramm (dicke schwarze Linie) nicht zeigen. Die Maximalstellen an den Stellen der BEFs sind dagegen in beiden Darstellungen deutlich zu sehen, im Periodogramm allerdings weniger stark ausgeprägt als in der FRF. Die blaue Linie, welche die auf Basis von $\gamma = 50$ geschätzte FRF visualisiert, zeigt, dass die Antiresonanzen zwar abgebildet, wenngleich in Position und Höhe verfehlt werden. Je höher der Wert von γ gewählt wird, am Beispiel der violetten Linie von $\gamma = 250$ dargestellt, desto flacher wird die gesamte FRF und desto weniger ausgeprägt sind die lokalen Extremstellen, Resonanzen wie Antiresonanzen. Da das Likelihoodkriterium implizit die Übereinstimmung von Periodogramm und geschätzter FRF bewertet, erscheint hiermit einleuchtend, dass der wahre, niedrige γ -Wert von 4.97 als schlecht beurteilt wird. Zwischen den resultierenden FRFs und den Periodogrammen sind nämlich insbesondere an den Antiresonanzstellen hohe Diskrepanzen zu sehen. Die flacheren FRFs mit höheren γ -Werten führen zwar zu höheren Abweichungen an den Resonanzstellen; allerdings können diese durch bessere Anpassungen zwischen den Peaks ausgeglichen werden. Da allerdings

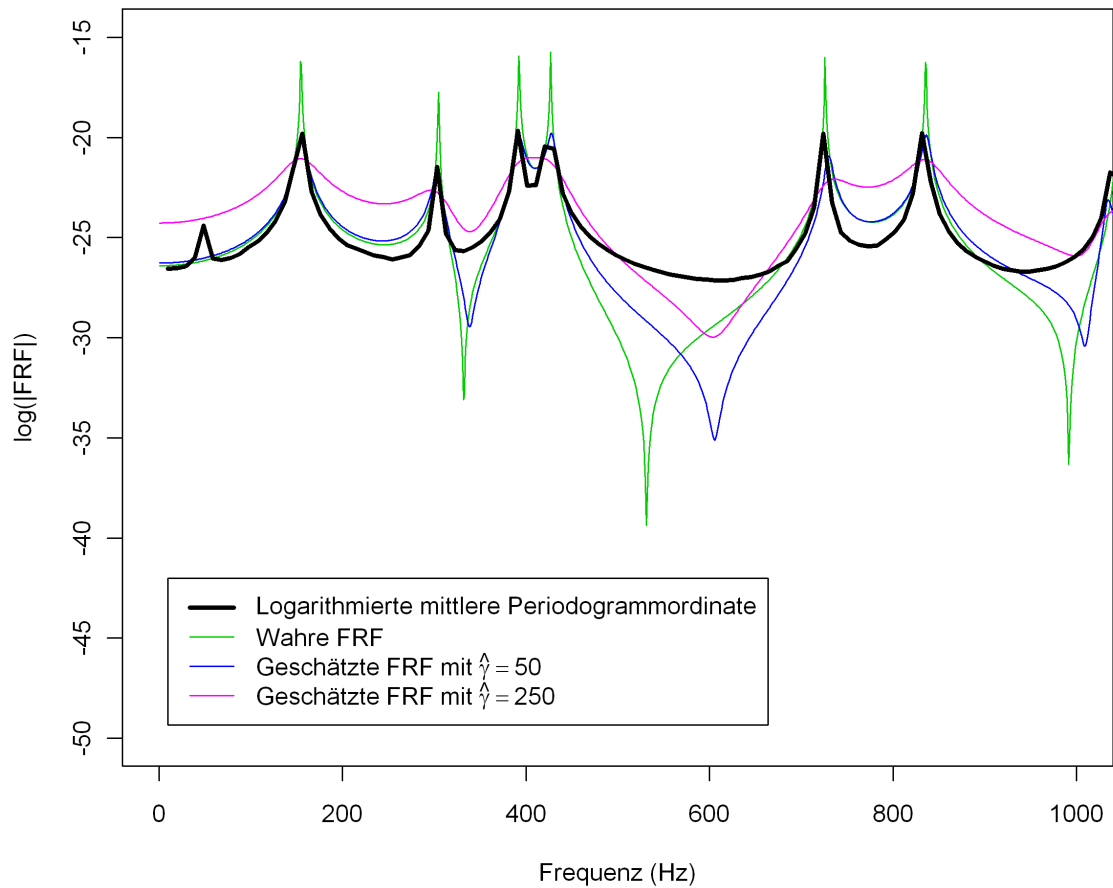


Abbildung 4.16: Vergleich des über alle 200 Versuche gemittelten Periodogramms, der wahren FRF und zwei mit unterschiedlichen γ -Werten und ansonsten optimalen Werten geschätzten FRFs.

die Schätzung der Biegeeigenfrequenzen das eigentliche Ziel der Schätzung darstellt ist die offensichtlich nicht vorhandene Identifizierbarkeit des Parameters γ als solche nicht problematisch.

Eine zu Abbildung 4.16 analoge Darstellung für den Parameter β zeigt Abbildung 4.17. Wie klar zu erkennen ist, unterscheiden sich die auf Basis zweier extrem unterschiedlicher β -Werte berechneten FRFs so gut wie gar nicht. Dementsprechend ist der Einfluss dieses Parameters auf die Likelihoodfunktion jenseits des oben erläuterten Zusammenhangs mit γ so gering, dass die große Streubreite seiner Schätzwerte plausibel ist.

Dass die Schätzer $\hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}$ nicht erwartungstreu für β und γ sind, ist nach den obigen Ausführungen offensichtlich. Obwohl die übrigen vier Parameterschätzer um ihre wahren Werte streuen, erkennen Wilcoxon-Rangsummen-Tests mit p-Werten von durchweg deutlich unter 0.00001 auch hier signifikante Unterschiede. Es ist also allgemein davon auszugehen, dass die unbekannt Parameter des physikalisch-statistischen Modells nicht durch die Maximum-Likelihood-Parameterschätzung identifizierbar sind. Ein Grund hierfür kann die in 4.2.2 beschriebene Tatsache sein, dass die optimalen Parameterwerte sich in vergleichsweise flachen Tälern nahezu indifferenter Werte von $-\log(LL)$ befinden und die Schätzer möglicherweise tendenziell an den Rändern dieser Täler liegen.

Da das eigentliche Interesse aber an der Identifikation der Biegeeigenfrequenzen liegt, muss diese fehlende Identifizierbarkeit kein Nachteil sein.

4.2.5 Eigenschaften der geschätzten Biegeeigenfrequenzverläufe

Tabelle 4.9 enthält Informationen über die Anpassungsgüte der sich mit den ML-Schätzern entsprechend den Ausführungen in 4.1.1 ergebenden BEF-Verläufe. Die ersten beiden Spalten enthalten zu jeder BEF ihre während des Prozesses erreichten wahren Extremwerte $\omega_{r;l}$ und $\omega_{r;u}$, also das Frequenzband, in dem die BEF variiert. Die nächsten beiden Spalten geben die für jede Frequenz über alle Bohrtiefen gemittelte absolute Abweichung $\hat{\Delta}_r = 1/J \sum_{j=1}^J \hat{\omega}_r(j \cdot l_A) - \omega_r(j \cdot l_A)$ und die entsprechend gemittelte relative Abweichung $\hat{\Delta}\%_r = 100/J \sum_{j=1}^J [\hat{\omega}_r(j \cdot l_A) - \omega_r(j \cdot l_A)]/\omega_r(j \cdot l_A)$ an. Diese beiden Abweichungsmaße unterscheiden sich dadurch von den zuletzt verwen-

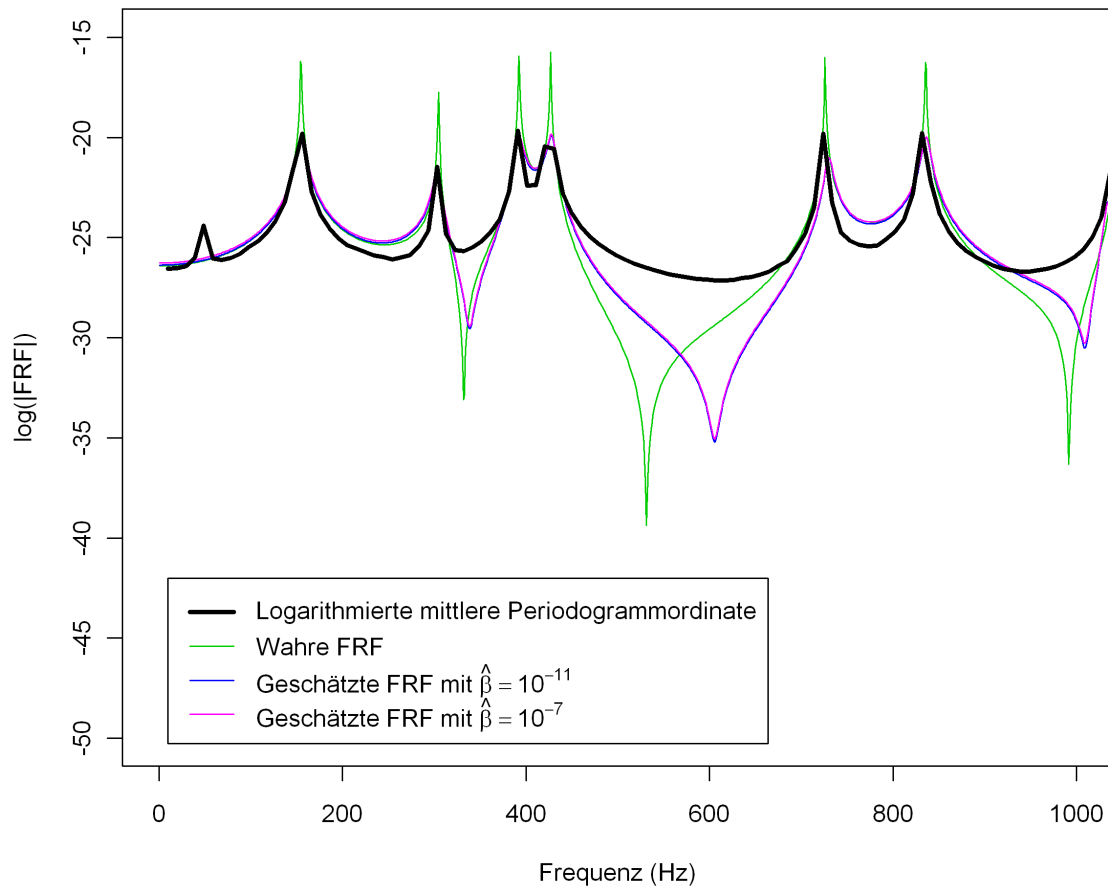


Abbildung 4.17: Vergleich des über alle 200 Versuche gemittelten Periodogramms, der wahren FRF und zwei mit unterschiedlichen β -Werten und ansonsten optimalen Werten geschätzten FRFs.

$\omega_{r;l} - \omega_{r;u}$	$\hat{\Delta}_r$	$\hat{\Delta}\%_r$	$\Delta_{r;o}$	$\Delta\%_{r;o}$	$\hat{U}_{95;r}$	$\hat{U}\%_{95;r}$
112 – 151	2.23	1.6	0.81	0.6	2.57	1.9
153 – 158	1.76	1.1	0.93	0.6	0.94	0.6
216 – 315	1.28	0.5	0.28	0.1	3.75	1.5
391 – 423	4.03	1.0	-0.05	>-0.1	3.97	1.0
425 – 532	1.97	0.4	0.48	0.1	5.08	1.1
612 – 798	1.89	0.3	-0.77	-0.1	12.47	1.8
826 – 837	6.61	0.8	0.21	<0.1	3.12	0.4
867 – 1115	-0.57	>-0.1	1.77	0.2	30.23	3.0
1141 – 1364	2.82	0.2	0.68	0.1	31.83	2.5
1374 – 1405	5.86	0.4	-1.03	-0.1	10.30	0.7
1537 – 1721	-5.23	-0.3	-5.02	-0.3	36.22	2.2
1973 – 2045	-1.74	-0.1	-16.82	-0.8	17.20	0.9
2066 – 2127	-8.34	-0.4	-10.70	-0.5	21.29	1.0
2490 – 2582	-25.96	-1.0	-33.45	-1.3	19.60	0.8
2868 – 2872	-7.67	-0.3	-26.91	-0.9	8.78	0.3
3064 – 3130	-42.96	-1.4	-50.17	-1.6	23.90	0.8

Tabelle 4.9: Abweichungsmaße und Unsicherheitsbereichsbreiten der mit den ML-Schätzern ermittelten BEF-Verläufe.

deten, dass sie das Vorzeichen der Abweichung berücksichtigen, während bisher nur Absolutwerte betrachtet wurden. Positive Vorzeichen von $\hat{\Delta}_r$ und $\hat{\Delta}\%_r$ bedeuten also mittlere Überschätzung, negative Vorzeichen mittlere Unterschätzung des Verlaufs der r -ten BEF.

Die fünfte und sechste Spalte zeigen mit $\Delta_{r;o}$ und $\Delta\%_{r;o}$ die entsprechenden Abweichungen für die sich aus den in 4.2.3 bezüglich minimalen Diskretisierungsfehlers optimierten Parametern ergebenden BEF-Verläufe.

In den letzten beiden Spalten von Tabelle 4.9 stehen die über alle Bohrtiefen gemittelten absoluten und relativen Breiten $\hat{U}_{95;r}$ und $\hat{U}\%_{95;r}$ von 95%-Unsicherheitsbereichen für die geschätzten BEF-Verläufe. Diese Breiten ergeben sich zu jeder Bohrtiefe l_b aus den Differenzen der 97.5%- und 2.5%-Quantile der jeweils 200 sich aus den ML-Schätzern ergebenden Schätzungen $\hat{\omega}_r(l_b)$.

Eine grafische Darstellung der geschätzten BEF-Verläufe und ihrer Unsicherheitsbereiche zeigt Abbildung 4.18.

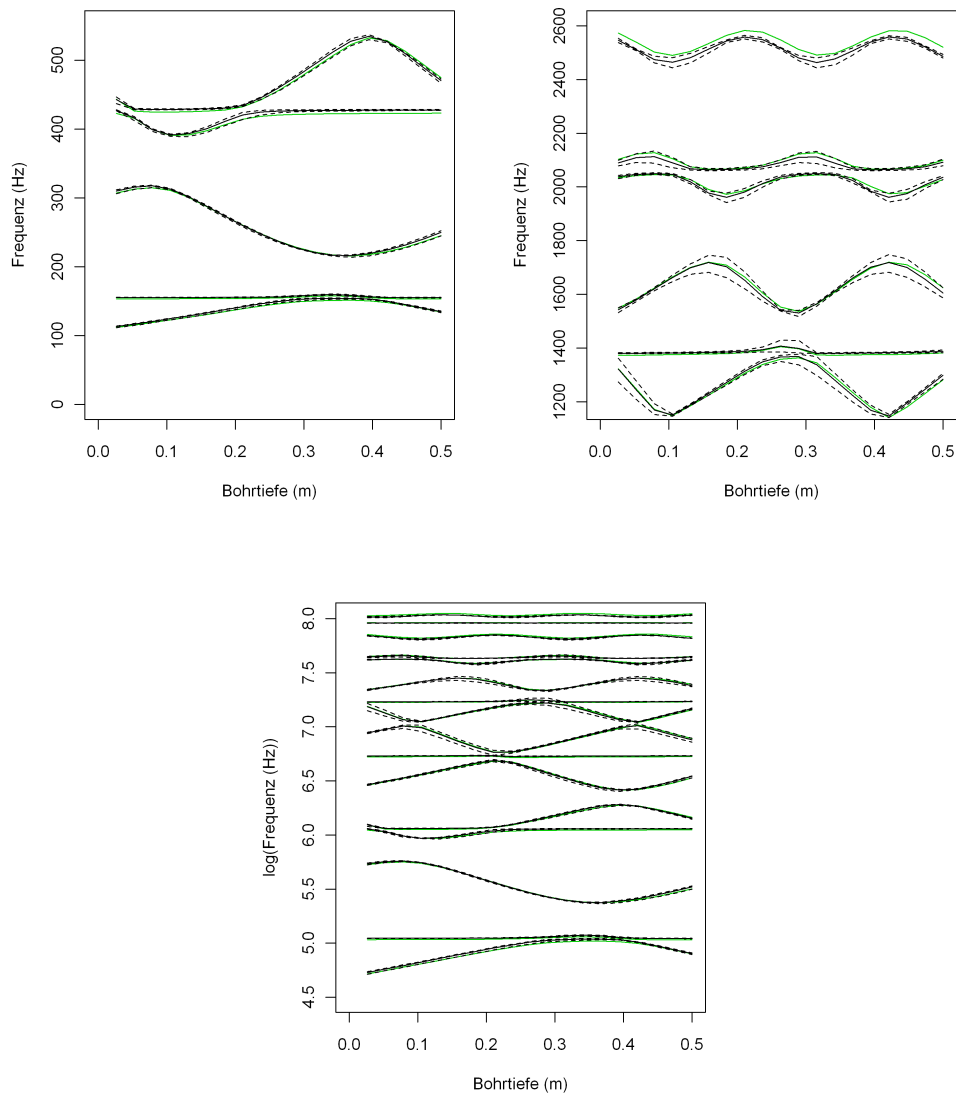


Abbildung 4.18: Wahre (grün) und geschätzte (schwarz) BEF-Verläufe sowie 95%-Unsicherheitsbereiche (gestrichelt). Oben links: Frequenzbereich von 0 bis 500 Hz, oben rechts: Frequenzbereich von 1200 bis 2600 Hz, unten: Frequenzbereich von 0 bis 3600 Hz mit logarithmierter Frequenzskala.

Wie Tabelle 4.9 zeigt, werden niedrigere BEFs eher über- und hohe eher unterschätzt. Das Ausmaß der Verschätzungen liegt für alle BEFs zwischen 0.57 und 42.96 Hz bzw. zwischen 0 und 1.6 %. Wie Abbildung 4.18 zeigt, liegen die geschätzten BEFs insbesondere für die niedrigeren Frequenzbereiche bei geringer Streuung sehr dicht an den wahren Werten.

Abbildung 4.19 stellt auf Basis von Wilcoxon-Rangsummen-Tests berechnete 99%-Konfidenzintervalle für die Erwartungswerte von $\hat{\Delta}_r$ in Abhängigkeit von den über den Bohrweg gemittelten wahren BEFs dar. Offensichtlich enthält lediglich das Konfidenzintervall zur achten BEF, welche im Mittel 1002.3 beträgt, den Wert null. Alle übrigen geschätzten BEF-Verläufe weichen also zum Niveau 1 % signifikant vom jeweils wahren Verlauf ab. Die in Abbildung 4.19 dargestellten blauen Linien markieren die relativen Abweichungen, die einer absoluten Abweichung um eine Fourierfrequenz $20000 \text{ Hz}/4096=4.88 \text{ Hz}$ nach unten oder oben und somit einer Abweichung entsprechen, die in der Praxis kaum als relevant bezeichnet werden dürfte. Mit Ausnahme der siebten und zehnten BEF sowie den BEFs über 2000 Hz liegen alle relativen Abweichungen inklusive der zugehörigen Konfidenzintervalle innerhalb dieser Grenzen. Insbesondere die zur Entstehung von Drall maßgeblich beitragenden niedrigen Eigenfrequenzen werden also offenbar vergleichsweise genau geschätzt.

4.2.6 Verbesserung durch lokale polynomiale Regression

Da die mit den ML-Parameterschätzern berechneten Biegeeigenfrequenzverläufe offensichtlich nicht erwartungstreu mit allgemein nicht bestimmbarer Verzerrung sind, können diese nicht zu inferenzstatistischen Methoden wie der Konstruktion von Konfidenzintervallen genutzt werden.

Gemäß den Ausführungen des vorigen Abschnitts liegen die geschätzten Verläufe in der Nähe der wahren. Daher soll im folgenden untersucht werden, ob die BEF-Schätzungen durch die Anpassung von lokalen polynomialen Regressionen auf variablen Frequenzbändern um die geschätzten BEF-Verläufe verbessert werden können.

Dabei ergibt sich das zur r -ten BEF gehörige, symmetrische und bohrtiefenabhängige Frequenzband $[\omega_{r;1}(j \cdot l_A), \omega_{r;2}(j \cdot l_A)]$, in dem für jeden Abschnitt $j = 1, \dots, J$ die kleinere der beiden Differenzen $|\hat{\omega}_r(j \cdot l_A) - \hat{\omega}_{r-1}(j \cdot l_A)|$ und $|\min(\hat{\omega}_{r+1}(j \cdot l_A), 3600) - \hat{\omega}_r(j \cdot l_A)|$ zu den beiden Nachbar-BEFs bzw. der Frequenzobergrenze 3600 Hz be-

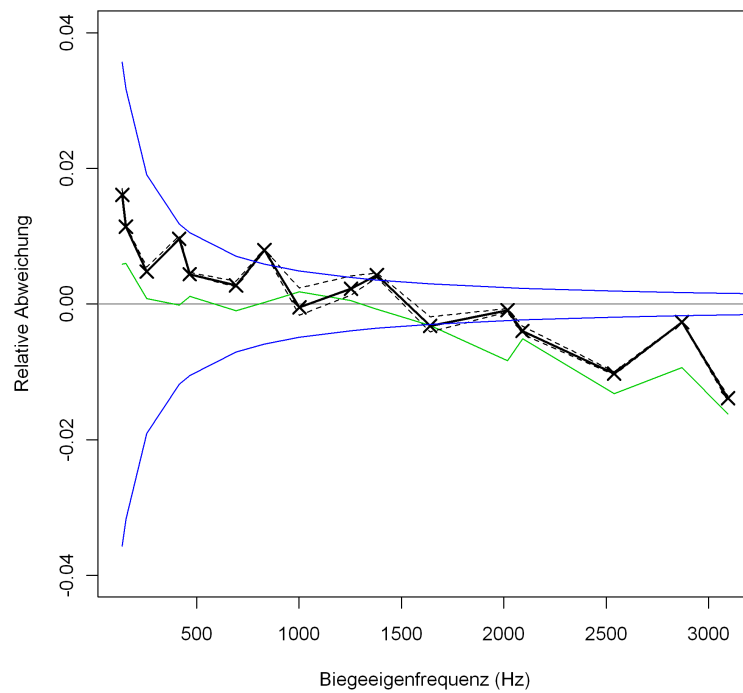


Abbildung 4.19: Relative Abweichungen der geschätzten BEFs (schwarz) und 99%-Konfidenzintervalle (gestrichelt) über die mittleren BEFs sowie relative Abweichungen mit bezüglich Diskretisierungsfehlers optimalen Parametern (grün) und Abweichungen um eine Fourierfrequenz entsprechende relativen Werten (blau).

stimmt und $\omega_{r;j;d}$ genannt wird. Die untere Nachbar-BEF $\hat{\omega}_0(\cdot)$ der niedrigsten BEF wird dabei auf den Wert ω_R der Rotationsfrequenz gesetzt, da im Allgemeinen davon ausgegangen werden kann, dass letztere deutlich unter $\omega_1(\cdot)$ liegt. Die Grenzen des r -ten Frequenzbands ergeben sich schließlich durch:

$$\begin{aligned}\omega_{r;1}(j \cdot l_A) &= \hat{\omega}_r(j \cdot l_A) - b_f \cdot \omega_{r;j;d}, \\ \omega_{r;2}(j \cdot l_A) &= \hat{\omega}_r(j \cdot l_A) + b_f \cdot \omega_{r;j;d},\end{aligned}\tag{4.15}$$

wobei b_f ein vorher zu bestimmender Faktor zwischen 0 und 0.5 ist, welcher die Breite des Frequenzbands kontrolliert. Wiederholungen der folgenden Untersuchungen mit unterschiedlichen Werten zeigten, dass die Ergebnisse zu Werten zwischen 0.1 und 0.4 nahezu äquivalent sind, wohingegen für engere und breitere Frequenzbänder deutliche Anpassungsverschlechterungen zu verzeichnen sind. Aus diesem Grund werden im folgenden exemplarisch die Ergebnisse für $b_f = 0.25$ dargestellt.

Abbildung 4.20 zeigt die anhand eines Beispieldatensatzes in der beschriebenen Weise um die ersten vier geschätzten BEFs konstruierten Frequenzbänder.

Im nächsten Schritt werden für jede BEF und jeden jeweils 4096 Beobachtungen umfassenden Abschnitt j die Periodogrammwerte $I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_{r;j;1}}), \dots, I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_{r;j;2}})$ zu den zwischen $\omega_{r;1}(j \cdot l_A)$ und $\omega_{r;2}(j \cdot l_A)$ liegenden Fourierfrequenzen betrachtet, formal:

$$\begin{aligned}n_{r;j;1} &= \min [n \mid 2\pi n/4096 > \omega_{r;1}(j \cdot l_A)] \\ n_{r;j;2} &= \max [n \mid 2\pi n/4096 \leq \omega_{r;2}(j \cdot l_A)].\end{aligned}\tag{4.16}$$

Falls das Frequenzband breit genug ist, dass es eine oder mehrere Fourierfrequenzen enthält, d.h. falls $n_{r;j;1} \leq n_{r;j;2}$ gilt, wird die innerhalb des Frequenzbands eines Abschnitts dominierende Frequenz durch $\omega_{r;j;m}$ geschätzt. Dabei wird $\omega_{r;j;m}$ für $n_{r;j;2} \leq n_{r;j;1} + 1$ folgendermaßen gewählt:

$$\begin{aligned}\omega_{r;j;m} &= \omega_{f,n_{r;j;1}} \quad \text{für } n_{r;j;1} = n_{r;j;2} \\ \omega_{r;j;m} &= \omega_{f,n_{r;j;i_m}} \quad \text{für } n_{r;j;1} = n_{r;j;2} - 1 \\ &\quad \text{mit } i_m = \operatorname{argmax}_{i \in \{1,2\}} [I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_{r;j;i}})].\end{aligned}\tag{4.17}$$

Für $n_{r;j;2} > n_{r;j;1} + 1$ wird $\omega_{r;j;m}$ nach der von Ligges (2006) vorgeschlagenen Heuristik zur Grundfrequenzschätzung bestimmt, indem die bis auf Nullmengen eindeutig bestimmte Parabel mit den Parametern $a_{P;j}$ und $\omega_{r;j;m}$ über die Frequenz an die höchste Periodogrammordinate und die beiden zu deren Fourierfrequenz benachbarten Fourier-

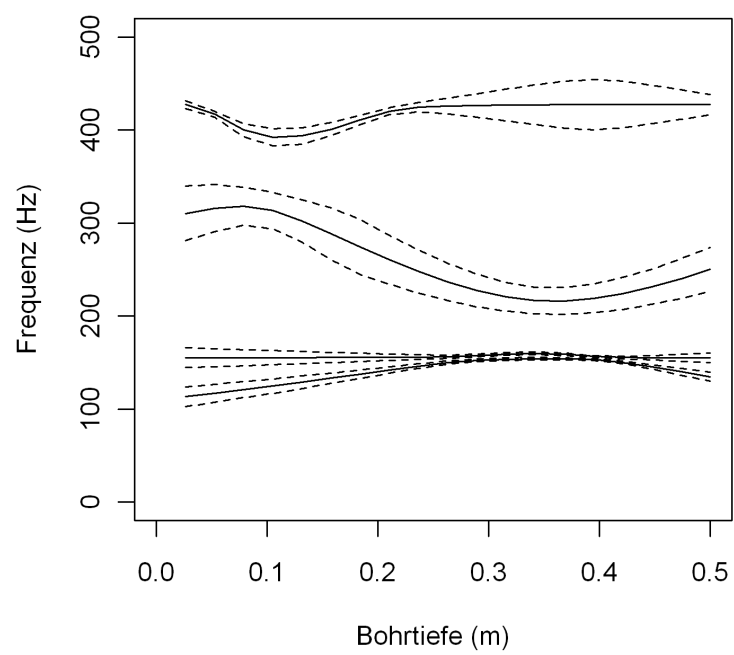


Abbildung 4.20: Geschätzte Verläufe (durchgezogen) der ersten vier Biegeeigenfrequenzen und Frequenzbänder (gestrichelt).

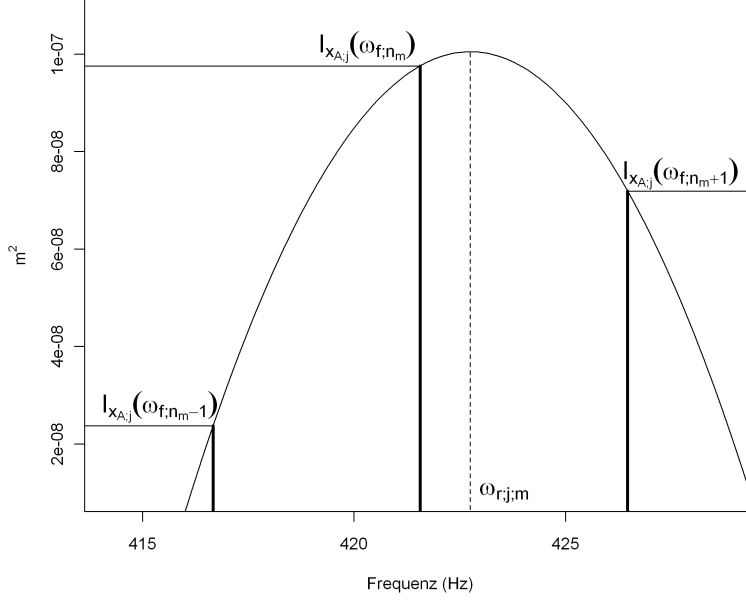


Abbildung 4.21: Skizze der Schätzung von $\omega_{r;j;m}$ für mindestens drei Fourierfrequenzen einschließende Frequenzbänder.

frequenzen gehörigen Ordinaten angepasst wird. Es gelten also die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_m-1}) &= -a_{P;j}(\omega_{f,n_m-1} - \omega_{r;j;m})^2 + I_{x_{A,j}}(\omega_{r;j;m}) \\ I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_m}) &= -a_{P;j}(\omega_{f,n_m} - \omega_{r;j;m})^2 + I_{x_{A,j}}(\omega_{r;j;m}) \\ I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_m+1}) &= -a_{P;j}(\omega_{f,n_m+1} - \omega_{r;j;m})^2 + I_{x_{A,j}}(\omega_{r;j;m}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\text{mit } n_m = \operatorname{argmax}_{n \in \{n_{r;j;1}, \dots, n_{r;j;2}\}} [I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n})].$$

Den Gleichungen entsprechend ist die Schätzung $\omega_{r;j;m}$ in diesem Fall genau die Frequenz, an der die angepasste Parabel ihr Maximum erreicht (vgl. exemplarisch Abbildung 4.21). Ihre Berechnungsvorschrift lautet:

$$\omega_{r;j;m} = \frac{\omega_{f,n_m-1} + \omega_{f,n_m}}{2} + \frac{[\omega_{f,n_m-1} - \omega_{f,n_m}][I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_m-1}) - I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_m})]}{2I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_m}) - I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_m-1}) - I_{x_{A,j}}(\omega_{f,n_m+1})}. \quad (4.19)$$

Auf diese Weise ergibt sich für jede r -te BEF und jeden j -ten Abschnitt mit $n_{r;j;1} \leq n_{r;j;2}$ ein Beobachtungspaar aus der Bohrtiefe $l_{r;j} = j \cdot l_A$ und der dominierenden Frequenz $\omega_{r;j;m}$.

Da die BEFs sich im Allgemeinen in Peaks in der FRF und damit auch in der Spektraldichte zeigen, scheint es bezüglich möglicher Verbesserungen der BEF-Verlaufsschätzungen vielversprechend, die dominierenden Frequenzen je Fenster in Abhängigkeit von der Bohrtiefe zu modellieren. Zum einen könnte dieses Vorgehen den Diskretisierungsfehler weiter ausgleichen. Weiterhin ermöglicht es prinzipiell eine flexiblere und damit realitätsnähere Abbildung der bisher auf Abschnitten der Länge $[l_B/l]$ konstant modellierten BEF-Verläufe.

Wegen der offensichtlichen Nichtlinearität der BEF-Verläufe wird zur Modellierung die Methode der lokalen polynomialen Regression (Loader, 1999) vorgeschlagen. Die entsprechenden Modellgleichungen lauten im vorliegenden Fall:

$$\omega_{r;j;m} = f_{L;r}(l_{r;j}) + \varepsilon_{r,j}, \quad (4.20)$$

wobei $f_{L;r}$ die zu schätzende Funktion und $\varepsilon_{r,j}$ einen individuellen Zufallsfehler bezeichnet. Die Schätzung $\hat{f}_{L;r}$ für $f_{L;r}$ wird auf Basis der trikubischen Gewichtsfunktion ermittelt. Die Festlegung der Bandbreite geschieht durch den Parameter α_b , welcher den auf die Gesamtbeobachtungszahl J_r bezogenen Anteil der zur lokalen Schätzung verwendeten Beobachtungen angibt. Dabei wird derjenige Wert von $\alpha_b \in [1/J_r, 1]$ gewählt, für den der resultierende Wert des Akaike Information Criterion (AIC, vgl. Akaike (1974)) minimal ist.

Der auf lokaler Regression basierende Schätzwert $\hat{\omega}_{r;L}(l_b)$ für $\omega_r(l_b)$ ergibt sich schließlich durch Einsetzen von l_b in die entsprechende geschätzte Funktionsgleichung, also durch $\hat{\omega}_{r;L}(l_b) = \hat{f}_{L;r}(l_b)$. Da sich mit der Methode der lokalen polynomialen Regression auch der geschätzte Standardfehler $\hat{s}e[\hat{\omega}_{r;L}(l_b)]$ dieser Schätzung berechnen lässt, kann unter der Annahme unabhängig identisch $N(0, \sigma_L^2)$ -verteilter Zufallsfehler ein asymptotisches $(1 - \alpha_c)$ -Konfidenzintervall $[L_{r;\alpha_c}(l_b), U_{r;\alpha_c}(l_b)]$ für $\omega_r(l_b)$ durch

$$\begin{aligned} [L_{r;\alpha_c}(l_b), U_{r;\alpha_c}(l_b)] = \\ [\hat{\omega}_{r;L}(l_b) - u_{1-\alpha_c/2} \cdot \hat{s}e[\hat{\omega}_{r;L}(l_b)], \hat{\omega}_{r;L}(l_b) + u_{1-\alpha_c/2} \cdot \hat{s}e[\hat{\omega}_{r;L}(l_b)]] \end{aligned} \quad (4.21)$$

angegeben werden, wobei u_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet. Abbildung 4.22 illustriert das in diesem Abschnitt beschriebene Vorgehen zur BEF-Verlaufsschätzung anhand eines Beispiels aus den Simulationen für die dritte

$\omega_{r;l} - \omega_{r;u}$	$\hat{\Delta}_r$	$\hat{\Delta}\%_r$	$\Delta_{r;o}$	$\Delta\%_{r;o}$	$\hat{\Delta}_{r;L}$	$\hat{\Delta}\%_{r;L}$	$\hat{C}_{95;r}$	$\hat{C}\%_{95;r}$
112 – 151	2.23	1.6	0.81	0.6	1.49	1.3	15.54	11.4
153 – 158	1.76	1.1	0.93	0.6	0.93	0.6	4.64	3.0
216 – 315	1.28	0.5	0.28	0.1	-0.31	-0.1	5.80	2.3
391 – 423	4.03	1.0	-0.05	>-0.1	1.19	0.3	7.95	1.9
425 – 532	1.97	0.4	0.48	0.1	1.14	0.3	9.10	2.0
612 – 798	1.89	0.3	-0.77	-0.1	1.29	0.2	13.74	2.0
826 – 837	6.61	0.8	0.21	<0.1	0.90	0.1	5.62	0.7
867 – 1115	-0.57	>-0.1	1.77	0.2	0.78	0.1	38.17	3.8
1141 – 1364	2.82	0.2	0.68	0.1	0.21	<0.1	45.63	3.6
1374 – 1405	5.86	0.4	-1.03	-0.1	1.41	0.1	23.30	1.7
1537 – 1721	-5.23	-0.3	-5.02	-0.3	2.47	0.2	25.18	1.5
1973 – 2045	-1.74	-0.1	-16.82	-0.8	0.56	<0.1	15.99	0.8
2066 – 2127	-8.34	-0.4	-10.70	-0.5	-3.07	-0.1	18.90	0.9
2490 – 2582	-25.96	-1.0	-33.45	-1.3	0.61	<0.1	15.52	0.6
2868 – 2872	-7.67	-0.3	-26.91	-0.9	1.54	0.1	4.71	0.2
3064 – 3130	-42.96	-1.4	-50.17	-1.6	-3.37	-0.1	45.63	1.5

Tabelle 4.10: Abweichungsmaße und Konfidenzintervallbreiten der mit lokaler polynomialer Regression ermittelten BEF-Verläufe.

Biegeeigenfrequenz.

Tabelle 4.10 enthält eine Zusammenfassung der in der beschriebenen Weise ermittelten Ergebnisse. Zum Vergleich sind die absoluten und relativen Abweichungswerte, die sich für alle betrachteten BEFs auf Basis von ML-Schätzern bzw. von bezüglich Diskretisierungsfehlers optimierten Werten ergeben (vgl. Spalten 1–6 in Tabelle 4.9), erneut angegeben. Die siebte und achte Spalte von Tabelle 4.10 geben die entsprechenden mittleren Abweichungswerte für die mit der lokalen polynomialen Regression bestimmten BEF-Verläufe. Die letzten beiden Spalten enthalten mittlere absolute und relative Breiten $\hat{C}_{95;r}$ und $\hat{C}\%_{95;r}$ von 95%-Konfidenzintervallen für die BEFs. Eine grafische Darstellung dieser Konfidenzintervalle findet sich in Abbildungen D.1 und D.2 in Anhang D.

Abbildung 4.23 vermittelt einen grafischen Eindruck dieser Ergebnisse. Entsprechend der Darstellung in Abbildung 4.19 ist dort der Verlauf der relativen Abweichung für die

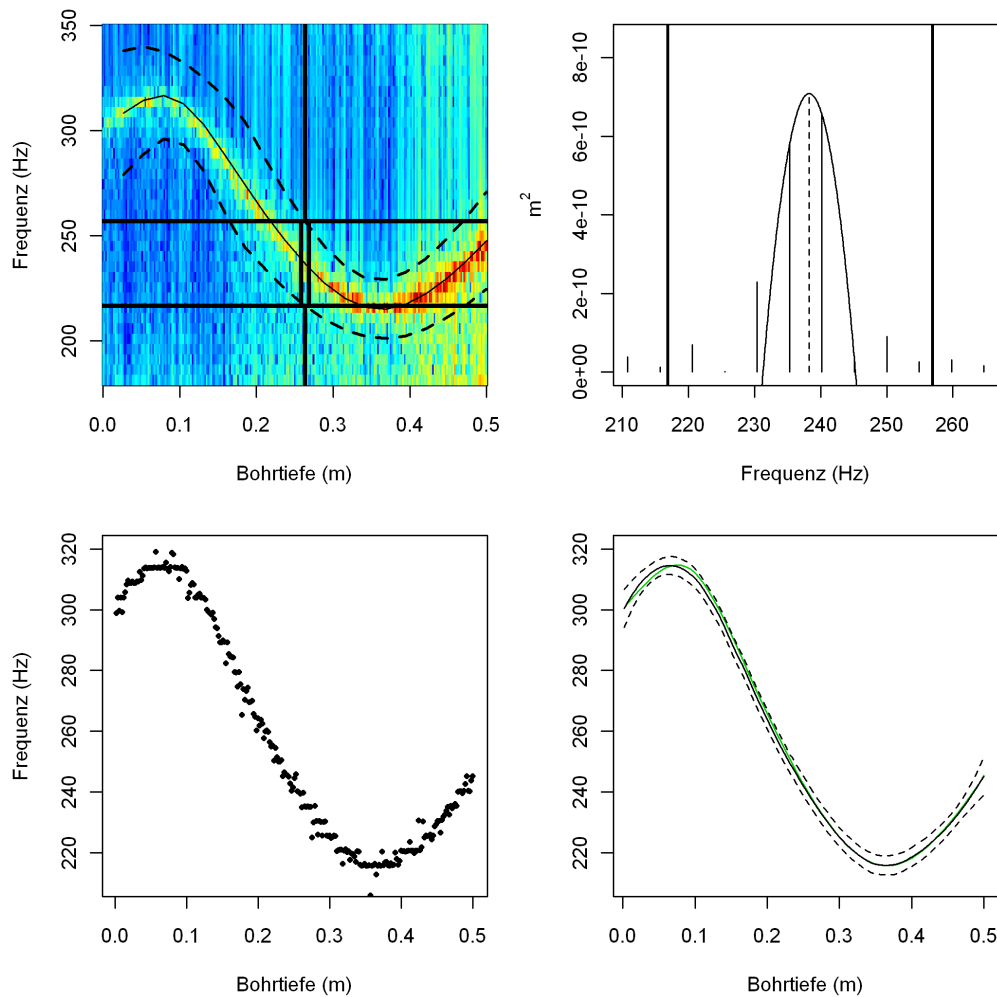


Abbildung 4.22: Links oben: Spektrogramm mit eingezeichneter geschätzter dritter BEF (durchgezogen) und Frequenzbandverläufen (gestrichelt) sowie für Bohrtiefe 0.263 m fett hervorgehobenes Frequenzband von 217 bis 257 Hz. Rechts oben: Periodogrammausschnitt zur selben Bohrtiefe auf diesem Frequenzband sowie um die maximale Periodogrammmordinate angepasste Parabel und Position der geschätzten dominierenden Frequenz bei 239 Hz (gestrichelt). Links unten: Streudiagramm von Bohrtiefe und geschätzte dominierende Frequenzen zu jedem Abschnitt. Rechts unten: Anpassungsfunktion (durchgezogen) der lokalen polynomialen Regression und punktweise 95%-Konfidenzbänder (gestrichelt) nebst wahren BEF-Verlauf (grün).

durch lokale Regression angepassten Werte von den wahren Werten durch eine durchgezogene Linie über die mittleren BEF-Werte neben den sich mit diskretisierungsfehler-minimalen Werten ergebenden relativen Abweichungen (grüne Linie) abgetragen. Die Abweichungen um eine Fourierfrequenz entsprechenden relativen Werte sind wiederum in blau markiert. Zusätzlich sind die über die 200 Datensätze gemittelten, um die Schätzungen verschobenen Grenzen der 95%-Konfidenzintervalle auf der gleichen relativen Skala eingezeichnet und durch gestrichelte Linien miteinander verbunden.

Beim Vergleich von $\hat{\Delta}_{r;L}$ mit $\hat{\Delta}_r$ bzw. von $\hat{\Delta}\%_{r;L}$ mit $\hat{\Delta}\%_r$ wird deutlich, dass die Modifikation der Schätzungen durch die lokale Regression für alle BEFs zu einer erheblichen Anpassungsverbesserung führt. Abbildung 4.23 führt dabei vor Augen, dass insbesondere die Abweichungen für BEFs ab 200 Hz im Vergleich zur Darstellung in Abbildung 4.19 deutlich näher an null liegen. Zudem werden im Schnitt alle BEFs um deutlich weniger als eine Fourierfrequenz (4.88 Hz) verschätzt, was auch an den Werten von $\hat{\Delta}_{r;L}$ abgelesen werden kann.

Biegeeigenfrequenzen über 800 Hz werden i.d.R. mit lokaler Regression sogar genauer geschätzt als mit diskretisierungsfehler-minimalen Parametern, wie der Vergleich von $\hat{\Delta}_{r;L}$ mit $\Delta_{r;o}$ bzw. von $\hat{\Delta}\%_{r;L}$ mit $\Delta\%_{r;o}$ bzw. der grünen mit der schwarzen Linie in Abbildung 4.23 verdeutlicht. Der über alle BEFs und Bohrtiefen gemittelte Absolutbetrag der relativen Abweichungen, also das Kriterium, nach dem die den Diskretisierungsfehler minimierenden Parameter optimiert wurden (vgl. 4.2.3), wird sogar für alle 200 Datensätze mit Hilfe der lokalen Regressionsschätzer unterschritten. Abbildung 4.24 illustriert dieses Ergebnis durch den Vergleich eines Boxplots der 200 Abweichungen, die durch die ML-Schätzung des physikalisch-statistischen Modells erreicht wurden (entspricht dem Boxplot zu Fensterlänge 4096 und Genoud-Verfahren in Abbildung 4.8) mit einem entsprechenden Boxplot der Ergebnisse, die sich aus den auf diesen Schätzungen aufbauenden lokalen Regressionsschätzungen ergeben. Die grüne Linie kennzeichnet die durch reine Anpassung des Modells mit 125 Freiheitsgraden minimale Abweichung von 0.56%. Die Hoffnung, den Diskretisierungsfehler durch das flexible Verfahren der lokalen polynomialen Regression weiter auszugleichen, hat sich also offensichtlich erfüllt.

Die in Abbildung 4.23 eingezeichneten mittleren um die Schätzungen verschobenen

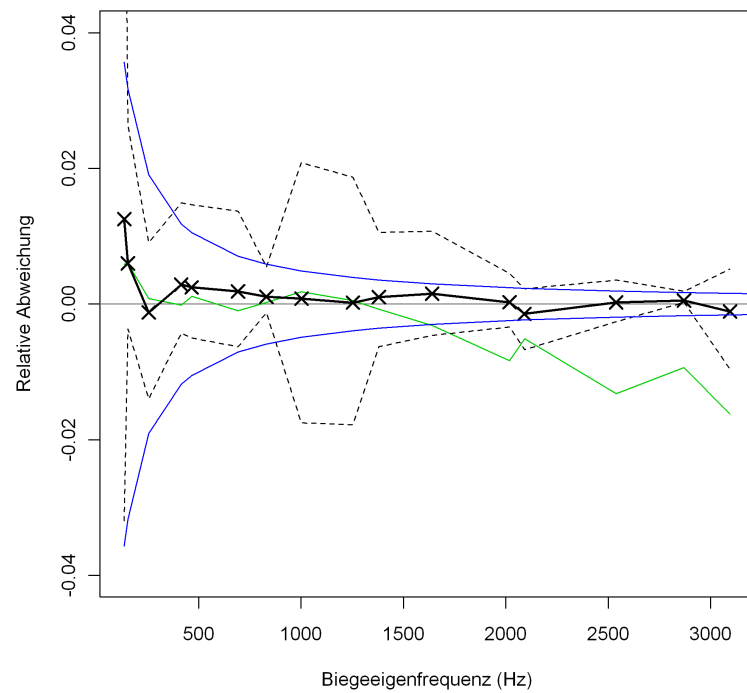


Abbildung 4.23: Relative Abweichungen der mit lokaler polynomialer Regression geschätzten BEFs (schwarz) und mittlere, um die Schätzungen verschobene 95%-Konfidenzintervalle (gestrichelt) über die mittleren BEFs sowie relative Abweichungen mit bezüglich Diskretisierungsfehlers optimalen Parametern (grün) und Abweichungen um eine Fourierfrequenz entsprechenden relativen Werten (blau).

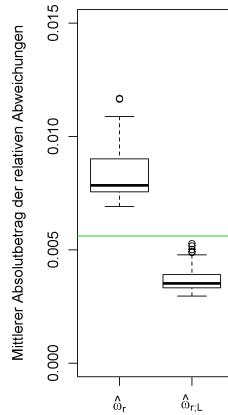


Abbildung 4.24: Boxplots des mittleren Absolutbetrags der relativen Abweichung für die ML-Schätzer des physikalisch-statistischen Modells und die lokalen polynomialen Regressionschätzer sowie minimaler Diskretisierungsfehler (grün).

95%-Konfidenzintervalle umschließen offenbar allesamt den Wert null, entsprechend umschließen die unverschobenen Intervalle im Mittel die wahre BEF. Mögen die Breiten der Konfidenzintervalle recht hoch erscheinen, so sollte berücksichtigt werden, dass diese jeweils auf einem einzigen Datensatz basieren und für die tabellarische und grafische Darstellung über alle 200 Datensätze gemittelt wurden. Die vorher dargestellten Konfidenzintervalle für die Erwartungswerte der Abweichungen (Abbildung 4.19) wurden dagegen auf Basis der Ergebnisse aller 200 Datensätze bestimmt. Während diese dementsprechend engeren Konfidenzintervalle zur Untersuchung der Erwartungstreue der auf ML-Schätzern basierenden BEF-Verläufe dienen, steht nunmehr die Konstruktion von (punktweisen) Vertrauensbereichen anhand eines einzelnen Datensatzes für die wahren BEF-Verläufe im Vordergrund.

Um die Gültigkeit der in der beschriebenen Weise bestimmten Konfidenzintervalle zu prüfen, zeigt Abbildung 4.25 ein Streudiagramm, in dem die über alle Bohrtiefen, Frequenzen und Datensätze bestimmten empirischen Überdeckungswahrscheinlichkeiten gegen die vorgegebenen Konfidenzniveaus dargestellt sind. Augenscheinlich liegen

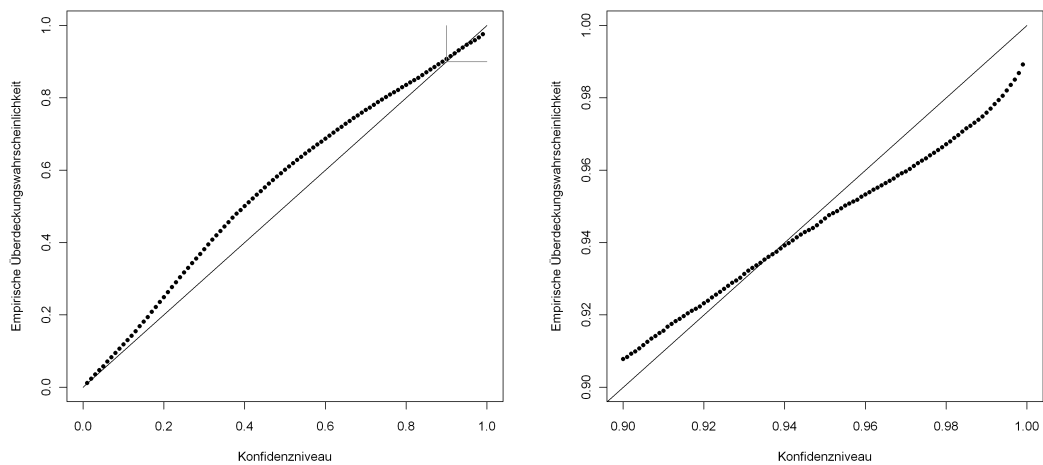


Abbildung 4.25: Streudiagramme von vorgegebenen Konfidenzniveaus und empirischen Überdeckungswahrscheinlichkeiten für die Konfidenzintervalle $[L_{r;\alpha_c}(l_b), U_{r;\alpha_c}(l_b)]$. Links: Intervall von 0 bis 1, rechts: vergrößerter Ausschnitt von 0.9 bis 1.

die realisierten Überdeckungswahrscheinlichkeiten für den größten Bereich oberhalb der Hauptdiagonale, Konfidenzintervalle sind in diesem Bereich also konservativ mit das vorgegebene Niveau moderat um bis zu 10% übersteigenden realisierten Niveaus. Wie der vergrößerte Ausschnitt des für Vertrauensniveaus typischerweise interessanten Bereichs zwischen 0.9 und 1 zeigt, werden die Intervalle ab einem vorgegebenen Konfidenzniveau von ca. 94% liberal, wobei die Abweichung nie mehr als 1% beträgt.

Eine Staffelung der Überdeckungswahrscheinlichkeiten nach den ersten neun BEFs zeigt Abbildung 4.26. In den rechten unteren Ecken der neun Diagramme sind jeweils die Verläufe der zugehörigen BEFs auf gleich skalierten Frequenzachsen skizziert. Wie deutlich zu erkennen ist, tritt das Problem ausgeprägt liberaler Konfidenzintervalle nur bei abschnittsweise nahezu konstanten BEFs wie der 2., 4. und 7. Biegeeigenfrequenz auf. Ein möglicher Grund für dieses Phänomen ist die Tatsache, dass diese Frequenzen hauptsächlich zwischen Einspannende und Dämpfer aktiv sind. Durch die entsprechend seinem hohen Steifigkeitseinfluss starke Abschirmung des Dämpfers sind

diese im Spektrum dann weniger stark ausgeprägt und können bereits bei der Frequenzbandbestimmung vor der Anpassung durch die lokale polynomiale Regression verfehlt werden. Für die interessanten fallenden BEFs (vgl. Kapitel 3) wird das vorgegebene Konfidenzniveau allerdings durchweg zumindest annähernd eingehalten bzw. sogar übertroffen.

Bei Verbreiterung der Konfidenzintervalle um jeweils eine halbe Fourierfrequenz nach unten und oben, also bei Verwendung der Konfidenzintervalle $[L_{r;\alpha_c}^*(l_b), U_{r;\alpha_c}^*(l_b)] = [L_{r;\alpha_c}(l_b) - 0.5 \cdot \omega_{f,1}, U_{r;\alpha_c}(l_b) + 0.5 \cdot \omega_{f,1}]$ ergeben sich die in Abbildungen D.3 und D.4 in Anhang D gezeigten 95%-Konfidenzintervalle mit den in Abbildung 4.27 dargestellten globalen Überdeckungswahrscheinlichkeiten bei unterschiedlichen vorgegebenen Niveaus.

Offenbar sind die derart verbreiterten Konfidenzintervalle über den gesamten Bereich konservativ. Die Betrachtung der entsprechenden Darstellungen für die ersten neun BEFs in Abbildung D.5 (Anhang D) zeigt, dass diese Konservativität für alle, insbesondere für die problematischen abschnittsweise konstanten BEFs gilt. Die Erhöhung der Konfidenzintervallsbreite um eine Fourierfrequenz sichert für die Rahmenbedingungen der vorliegenden Simulationsstudie also offenbar gleichmäßig die Einhaltung des vorgegebenen Niveaus.

Für eine abschließende Beurteilung der Anpassungen durch die lokale polynomiale Regression werden die Residuen inspiziert. Abbildung 4.28 zeigt die empirischen Verteilungs- und Dichtefunktionen der über alle 200 Experimente und 16 betrachteten BEFs ermittelten pro angepasster Regression standardisierten wahren Residuen. Der Vergleich mit den grün eingezeichneten entsprechenden Funktionen der Standardnormalverteilung zeigt, dass die Verteilung bei einem Exzess von ca. 3 deutlich leptokurtischer als diese ist. Offensichtlich ist die Verteilung symmetrisch. Diese spitzere Verteilungsform passt zur beobachteten Konservativität der Konfidenzintervalle $[L_{r;\alpha_c}(l_b), U_{r;\alpha_c}(l_b)]$ im Bereich mittlerer Konfidenzniveaus. In diesem Bereich sind die Quantile der Standardnormalverteilung nämlich größer als die der eigentlichen Verteilung der standardisierten Residuen; in der Konsequenz werden die auf Basis der zu großen Quantile konstruierten Konfidenzintervalle zu breit. Dieses Verhältnis hebt sich

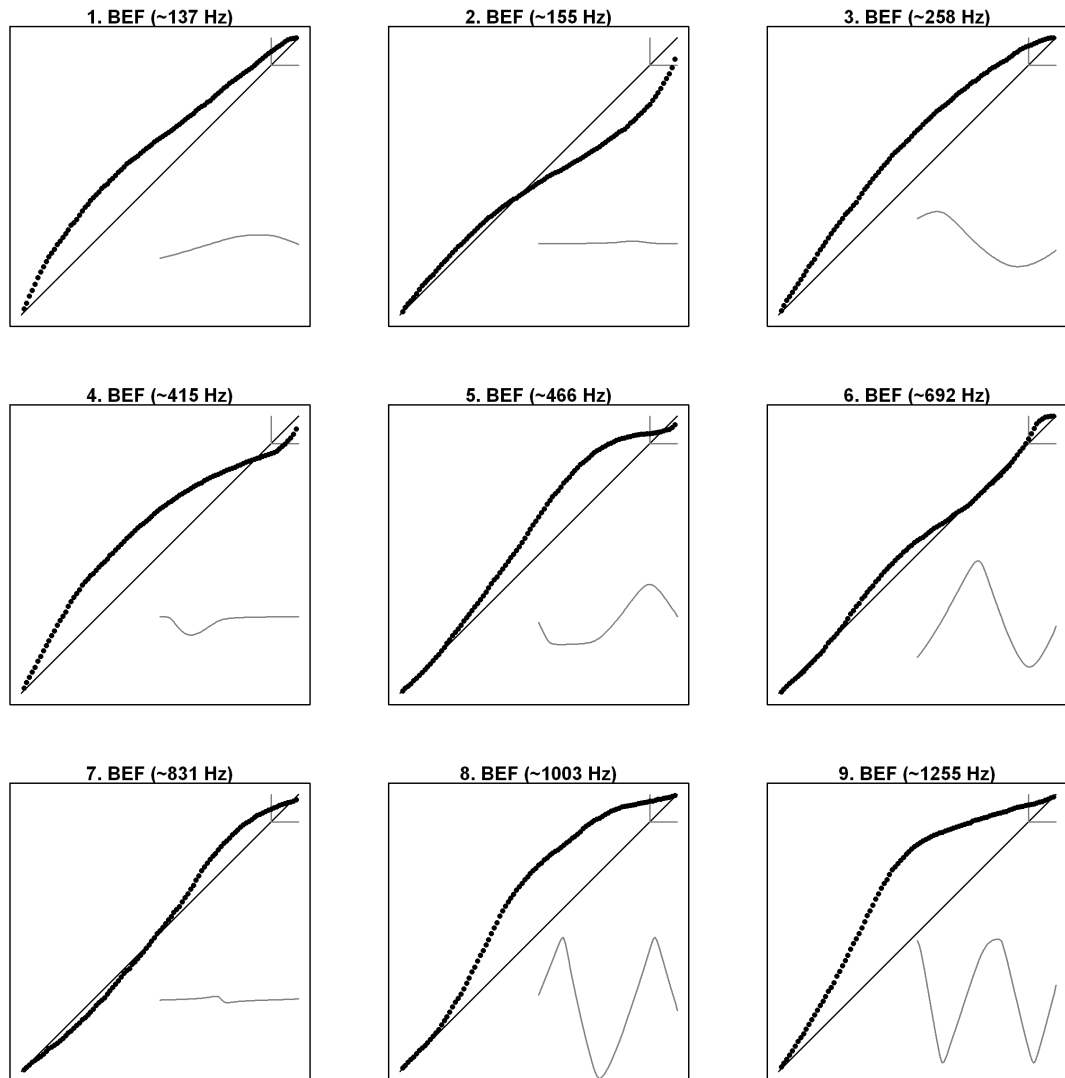


Abbildung 4.26: Streudiagramme von vorgegebenen Konfidenzniveaus (Abszissen) und empirischen Überdeckungswahrscheinlichkeiten (Ordinaten) für die Konfidenzintervalle $[L_{r;\alpha_c}(l_b), U_{r;\alpha_c}(l_b)]$ und die ersten neun Biegeeigenfrequenzen sowie zugehörige BEF-Verläufe (eingeklinkt).

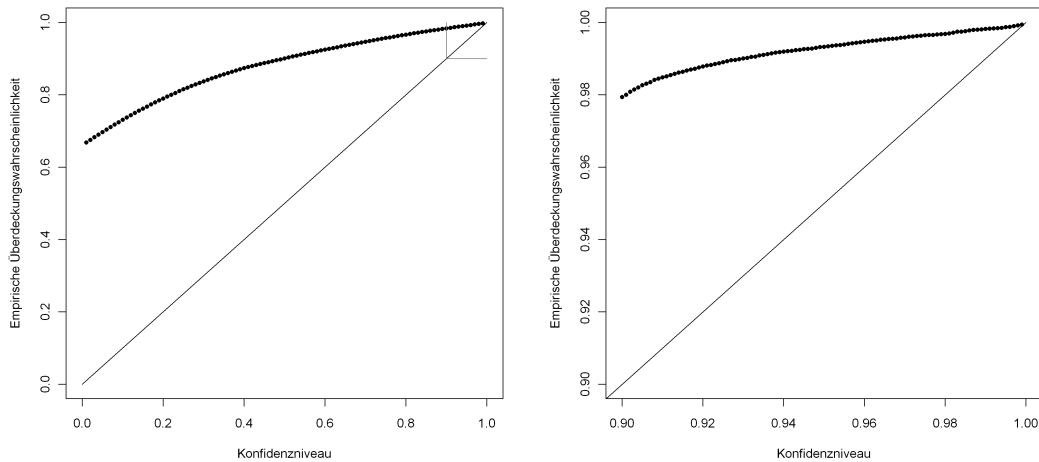


Abbildung 4.27: Streudiagramme von vorgegebenen Konfidenzniveaus und empirischen Überdeckungswahrscheinlichkeiten für die Konfidenzintervalle $[L_{r;\alpha_c}^*(l_b), U_{r;\alpha_c}^*(l_b)]$. Links: Intervall von 0 bis 1, rechts: vergrößerter Ausschnitt von 0.9 bis 1.

bei Konfidenzniveaus ab ca. 94% auf, da ab diesem Wert die Quantile der Residuenverteilung diejenigen der Normalverteilung übersteigen.

Der Verlauf der standardisierten Residuen über den Bohrweg (Abbildung 4.29) zeigt keine nennenswerten Hinweise auf Heteroskedastie oder andere Strukturen.

4.3 Zusammenfassung

Die Ergebnisse der hier beschriebenen Simulationsstudie haben die grundsätzliche Eignung der physikalisch-statistischen Modellierung zur Schätzung von Biegeeigenfrequenzverläufen gezeigt. Es wurde herausgestellt, dass sowohl für die Güte der Approximation der Verteilung von Periodogrammordinaten durch die Exponentialverteilung (vgl. 4.2.1) als auch zur Rekonstruktion der betrachteten BEF-Verläufe Fenster (vgl. 4.2.3) von mindestens 2048 Beobachtungen Länge verwendet werden sollten.

Ferner wurde die deutliche Überlegenheit des Genoud-Verfahrens gegenüber der Methode nach Nelder und Mead bei der Maximierung der Likelihoodfunktion, deren Mul-

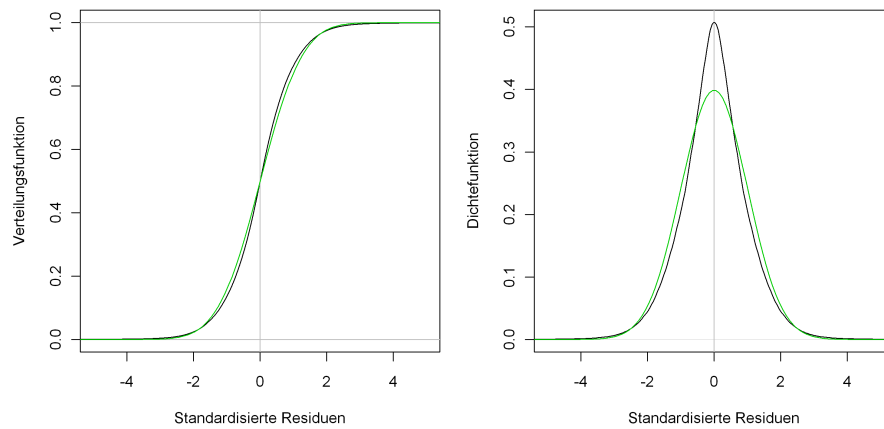


Abbildung 4.28: Verteilungs- und Dichtefunktion der standardisierten Residuen (schwarz) und der Standardnormalverteilung (grün).

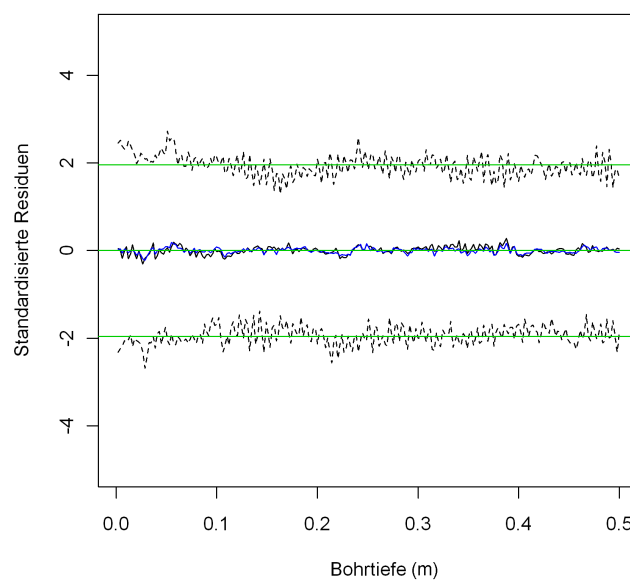


Abbildung 4.29: Verlauf standardisierter Residuen über den Bohrweg: Median (schwarz), Mittelwert (blau), 2.5%- und 97.5%-Quantile der empirischen (gestrichelt) und der Standardnormalverteilung (grün).

timodalität in 4.2.2 belegt werden konnte, gezeigt. Diese Überlegenheit äußert sich sowohl in schnellerer und besserer Konvergenz als auch in der Fähigkeit zum Auffinden des globalen Optimums.

Wie sich herausstellte, sind die wahren Parameter schon allein aufgrund der Abweichung durch die Diskretisierung durch die Maximum-Likelihood-Schätzung nicht im Sinne erwartungstreuer Schätzer rekonstruierbar. Allerdings liegen sowohl die Parameterlösungen als auch die sich daraus ergebenden BEF-Verläufe in der Nähe derjenigen Werte, die den Diskretisierungsfehler bestmöglich ausgleichen (vgl. 4.2.4).

In 4.2.6 konnte gezeigt werden, dass durch Modifikation der BEF-Verlaufsschätzungen des physikalisch-statistischen Modells mit Hilfe der Methode der lokalen polynomialen Regression die Anpassung über den Ausgleich des Diskretisierungsfehlers hinaus verbessert werden kann. Aufbauend auf diesen Ergebnissen konnten für die Rahmenbedingungen der vorgestellten Studie konservative punktweise Konfidenzbänder bestimmt werden.

5 Modellanpassung an reale Tiefbohrdaten

Das in den vorigen Kapiteln aufgestellte und anhand der Simulationsstudie untersuchte physikalisch-statistische Biegeschwingungsmodell wird nun an Körperschallsignale angepasst, die im Rahmen einer Versuchsreihe zur Untersuchung verschleißbedingten Drallbohrens (Theis und Busse, 2004) aufgezeichnet wurden. Die bekannten physikalischen und geometrischen Einstellungen gleichen dabei mit Ausnahme der Vorschubgeschwindigkeit v_f den im Rahmen der Simulationsstudie verwendeten Werten (s. Tabelle 4.1). Die Versuchsreihe wurde nach einem Central Composite Design (CCD, vgl. Box und Draper (1987), S.305ff) in zehn Läufen geplant und durchgeführt. Dabei wurden die beiden Parameter Vorschub pro Umdrehung f und Schnittgeschwindigkeit v_c variiert. Die Einstellungen dieser Parameter sowie die sich aus diesen ergebenden Vorschubgeschwindigkeiten sind Tabelle 5.1 und Abbildung 5.1 zu entnehmen.

Die variierten Parameter f bzw. v_f und v_c haben gemäß dem Biegeschwingungsmodell keinen Einfluss auf die Biegeeigenfrequenzen. Entsprechend weisen alle zehn Versuche bei Gültigkeit des Modells die gleichen Eigenfrequenzverläufe über die Bohrtiefe auf, wobei die Längen der Zeitreihen aufgrund der unterschiedlichen Vorschubgeschwindigkeiten zwischen ca. 4.5 und 12 Millionen variieren.

Nr.	f (mm/U)	v_c (mm/s)	v_f (mm/s)	$N/10^6$
1	0.185	60	0.96	11.0
2	0.139	111	1.33	8.0
3	0.139	69	0.83	12.3
4	0.231	111	2.21	4.7
5	0.120	90	0.93	11.0
6	0.185	120	1.92	5.4
7	0.231	69	1.38	7.4
8	0.250	90	1.93	5.3
9	0.184	90	1.43	7.2
10	0.186	90	1.43	7.6

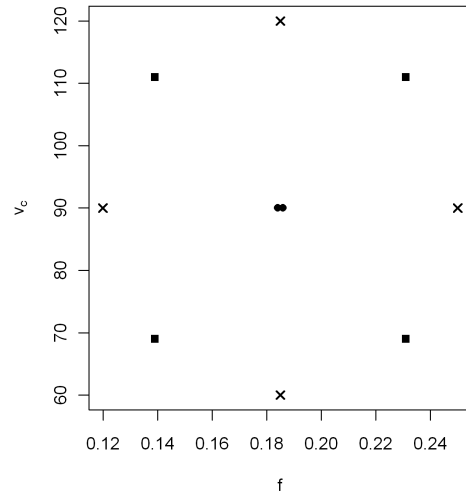


Tabelle 5.1: Werte von f , v_c , N und v_f im CCD.

Abbildung 5.1: Einstellungen von f und v_c im CCD.

Abbildung 5.2 zeigt einen Vergleich von mit der Fensterlänge 4096 berechneten Spektrogrammen für die einzelnen Versuche sowie das über alle zehn Versuche gemittelte Spektrogramm, wobei rote und blaue Bereiche für hohe und niedrige Amplitudenstärken stehen. Offenbar sind steigende Frequenzverläufe deutlich besser zu erkennen als die fallenden, die sich bestenfalls in der Nähe von Kreuzungen mit den steigenden erahnen lassen.

Die zehn Zeit-Frequenz-Darstellungen des Körperschalls zeigen ein ähnliches Muster von überhöhten Frequenzbereichen, wobei das Ausmaß der Überhöhungen variiert. Dieses Muster drückt sich auch in der hohen mittleren Korrelation von 0.969 aus, die zwischen je zwei an der selben Bohrtiefe gemessenen Periodogrammen zu zwei unterschiedlichen Versuchen besteht.

Ein derartiges konstantes Muster, das sich grafisch besonders deutlich in dem über alle Versuche gemittelten Spektrogramm zeigt, ist bei, wie unterstellt, einheitlichen Biege-eigenfrequenzverläufen zu erwarten und kann entsprechend als Indiz für die Adäquanz und Validität des gewählten Modellierungsansatzes gewertet werden.

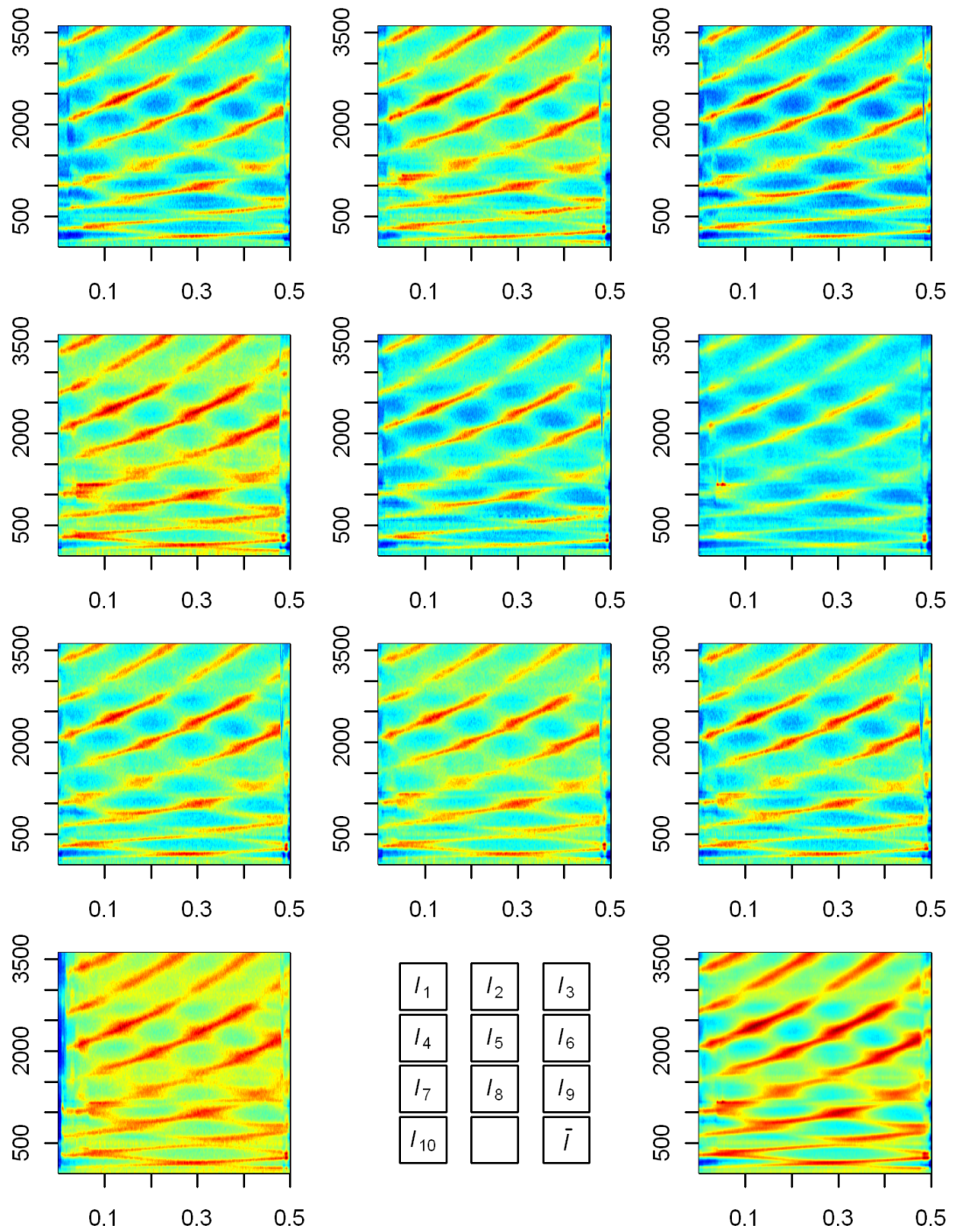


Abbildung 5.2: Spektrogramme I_1 bis I_{10} der Körperschallsignalaufzeichnungen zu den zehn Tiefbohrversuchen (Fensterlänge 4096) und über alle Versuche gemittelttes Spektrogramm \bar{I} (rechts unten). Abszissen: Bohrtiefe (m), Ordinaten: Frequenz (Hz).

Parameter	Einheit	Untere Grenze	Obere Grenze
k_{sb}	N/m	10^3	10^{12}
k_D	N/m	10^8	10^{19}
l_{D1}	m	0	0.049
l_{D2}	m	0	0.049
β	s/m ²	10^{-11}	10^{-8}
γ	Ns/(m · kg)	1	200

Tabelle 5.2: Obere und untere Grenzen des dem Genoud-Verfahren zugrunde liegenden Suchraums.

5.1 Eigenschaften der ML-Schätzer und der resultierenden BEF-Verläufe

Tabelle 5.3 zeigt die ML-Schätzer und Werte der negativen Log-Likelihood, die sich bei Anwendung des in 4.1.4 beschriebenen Vorgehens unter Verwendung der Fensterlänge 4096 und des Genoud-Verfahrens ergeben. Die Grenzen des Suchraums sind in Tabelle 5.2 aufgeführt.

Offensichtlich liegen alle ML-Schätzer recht dicht beieinander, was auf den ersten Blick positiv erscheint. Bei genauerer Betrachtung fällt allerdings auf, dass der Wert des Parameters k_D durchgängig durch 10^8 geschätzt wird und somit immer am Rand des Optimierungskubus liegt. Es ist davon auszugehen, dass bei Erweiterung des Kubus durch Absenken der unteren Grenze für diesen Parameter kleinere Schätzwerte zu weiterer Anpassungsverbesserung führen würden. Allerdings erscheint ein derartiges Vorgehen auf Basis der folgenden Argumentation wenig sinnvoll. Der Vergleich der Spektrogramme zu den realen Tiefbohrdaten in Abbildung 5.2 mit jenen aus den Simulationen (Abbildung 4.3) macht nämlich deutlich, dass die konstanten Biegeeigenfrequenzen sich in den realen Daten sich deutlich schwächer zeigen als in den simulierten. Es ist also davon auszugehen, dass die Übertragung von den zwischen Einspannung und Lanchester-Dämpfer aktiven konstanten BEFs auf die zwischen Lanchester-Dämpfer und KSS-Zuführapparat befindliche Messstelle sehr gering ist. Dies ist gleichbedeutend mit einem höheren Steifigkeits- bzw. Dämpfungseinfluss des Lanchester-Dämpfers, al-

Parameter	Versuch				
	1	2	3	4	5
$\hat{k}_{sb}/10^8$	6.145	6.420	6.316	6.191	6.145
$\hat{k}_D/10^8$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$\hat{l}_{D1}/100$	4.747	4.747	4.749	4.752	4.739
$\hat{l}_{D2}/100$	4.821	4.809	4.815	4.811	4.813
$\hat{\beta} \cdot 10^{11}$	2.776	2.804	7.285	6.708	8.617
$\hat{\gamma}$	148.98	142.07	149.87	141.58	143.63
$-\log(LL)/10^6$	4.518	3.314	4.980	1.967	4.491
	6	7	8	9	10
$\hat{k}_{sb}/10^8$	6.232	6.359	6.354	6.334	6.066
$\hat{k}_D/10^8$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$\hat{l}_{D1}/100$	4.746	4.749	4.746	4.746	4.743
$\hat{l}_{D2}/100$	4.810	4.814	4.820	4.821	4.815
$\hat{\beta} \cdot 10^{11}$	8.246	8.190	1.204	4.837	6.798
$\hat{\gamma}$	146.77	146.57	144.94	142.72	144.27
$-\log(LL)/10^6$	2.297	3.048	2.239	2.972	3.375

Tabelle 5.3: ML-Schätzer des an die Tiefbohrdaten angepassten Biegeschwingungsmodells.

so einem für die Realdaten größeren Wert von k_D als für die Simulationsdaten. Eine deutliche untere Schranke für die k_D -Schätzungen auf Basis der Realdaten sollte also der bei den Simulationen verwendete Wert von $k_D = 3.06 \cdot 10^{10}$ sein.

Eine Konzentration am Rand des Optimierungsraums ist auch bei den die Dämpferverkürzung reflektierenden Parameter l_{D1} und l_{D2} zu beobachten, welche durchweg in der Nähe der Obergrenze von 4.9 cm geschätzt werden.

Bei weiterer Betrachtung der sich aus den ML-Schätzern ergebenden BEF-Verläufe in Abbildung 5.3 bestätigen sich scheinbar die durch die ähnlichen Schätzer begründeten Erwartungen dicht beinander liegender Verläufe. Tatsächlich können die jeweils zehn unterschiedlichen BEF-Verläufe auf den dort dargestellten Frequenzbändern von 0 bis 3600 Hz und von 0 bis 1000 Hz optisch gar nicht unterschieden werden. Diese gute Übereinstimmung dürfte allerdings aus der Konzentration der Anpassungen am Optimierungskubusrand resultieren. Hierfür spricht insbesondere die in Abbildung 5.3 offensichtliche schlechte Anpassung. Während die gut erkennbaren steigenden BEF-Verläufe zwischen ca. 500 und 2800 Hz noch vergleichsweise gut getroffen werden, werden die fallenden mit Ausnahme der sich im Prozessverlauf von ca. 3600 auf 1500 Hz ändernden Frequenz teilweise deutlich verfehlt.

5.2 Freisetzen weiterer Parameter

Eine Ursache für die im vorigen Abschnitt beschriebenen schlechten Anpassungen kann in der mangelnden Flexibilität des Modells liegen, Abweichungen zur Realität auszugleichen, die zum einen durch die Diskretisierung, zum anderen aber auch durch Materialinhomogenitäten, Geometrieabweichungen und zu starker Vereinfachung begründet sein können. Bereits in der Simulationsstudie konnte beobachtet werden, dass Parameterwerte, die teilweise erheblich von den wahren Werten abweichen, zu besseren BEF-Anpassungen führen (vgl. 4.2.3). Dementsprechend erscheint es erfolgsversprechend, weitere Parameter durch das ML-Verfahren zu schätzen, deren Werte eigentlich bekannt sind. Die Intervalle, innerhalb derer die ML-Parameter gesucht werden, sollten dabei einerseits die wahren Werte beinhalten und andererseits nicht zu breit gewählt werden, um die prinzipielle Modellannahme nicht aufzugeben. Aufgrund dieser Überlegungen werden die Anpassungen an die zehn Versuche wiederholt, wobei

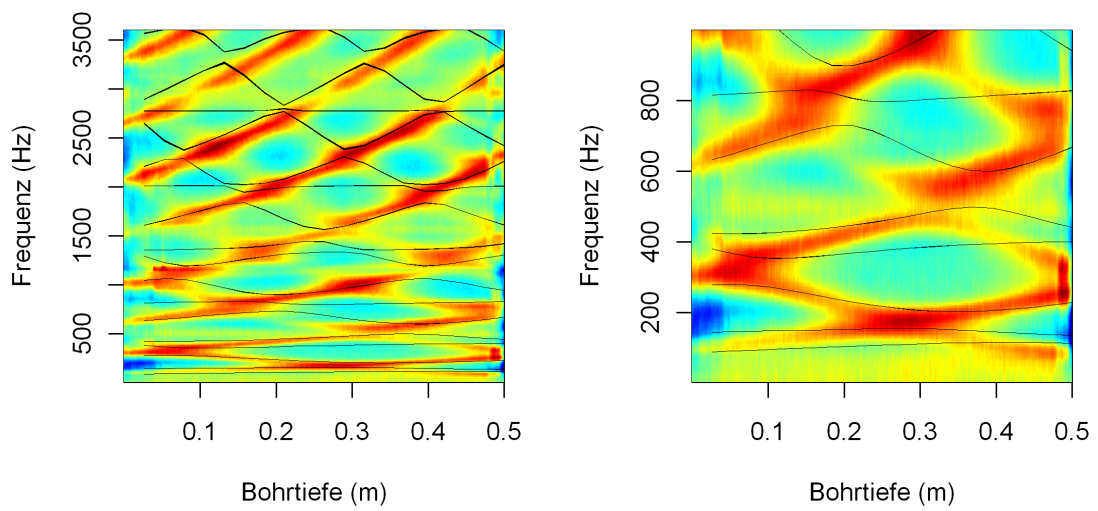


Abbildung 5.3: Über alle zehn Versuche gemitteltetes Spektrogramm im Vergleich zu den sich aus den ML-Schätzern ergebenden BEF-Verläufen. Links: Frequenzband von 0 bis 3600 Hz, rechts: Frequenzband von 0 bis 1000 Hz.

Parameter	Einheit	Untere Grenze	Obere Grenze	Wahrer Wert
l_{d0D}	m	1.1	1.41	1.255
l_{dsb2g}	m	0.19	0.89	0.49
l_g	m	3.0	3.7	3.35
E	MPa	10^9	10^{13}	$2.1 \cdot 10^{11}$

Tabelle 5.4: Obere und untere Grenzen des dem Genoud-Verfahren zugrunde liegenden Suchraums weiterer freier Parameter.

neben den unbekanntem Parametern aus Tabelle 5.2 auch die bekannten Parameter l_{d0D} , l_{dsb2g} , l_g und E in den in Tabelle 5.4 angegebenen Grenzen ML-geschätzt werden.

Die Parameterschätzer und negativen Log-Likelihood-Werte der auf dem erweiterten Parameterraum wiederholten Anpassung zeigt Tabelle 5.5.

Auch im freien Parameterraum ähneln sich die Schätzwerte über die zehn Versuche, wengleich ihre Streuung hier höher ist. Ihre Mittelwerte unterscheiden sich zudem deutlich von jenen im restringierten Raum. Insbesondere der zuvor diskutierte Steifigkeitseinfluss k_D des Dämpfers wird mit Werten zwischen $4.5 \cdot 10^{16}$ und $4.8 \cdot 10^{16}$ deutlich höher geschätzt und liegt somit über dem in der Simulation verwendeten Wert.

Weiterhin auffällig ist, dass die Freisetzung der geometrischen Parameter l_{d0D} , l_{dsb2g} und l_g in den meisten Fällen zu einer virtuellen Verlängerung der Stange geführt hat, was die Schätzer für l_g zeigen, die durchweg über dem wahren Wert von 3.35 m liegen. Diese Erhöhung der Stangenlänge hat prinzipiell eine Senkung der Biegeeigenfrequenzen zur Folge. Da auch der die Länge l_{dsb2g} zwischen der dem Bohrkopf zugewandten Stopfbuchse und dem Bohrkopf reflektierende Parameter in allen Fällen höher als der wahre Wert 0.49 m geschätzt wird, gilt diese Senkung vor allem für die fallenden BEFs. Dies erscheint plausibel, da, wie in Abbildung 5.3 zu erkennen, die fallenden BEFs offenbar deutlich überschätzt werden. Eine systematische Konzentration am Rand des Optimierungsraums ist bei keinem der Schätzer zu beobachten.

Bei Betrachtung der aus den so geschätzten Parametern resultierenden BEF-Verläufe in Abbildung 5.4 wird deutlich, dass hier sowohl die steigenden als auch die fallenden BEFs die hohen Bereiche der Spektrogramme gut treffen. Die offensichtlich größere Streuung bei den fallenden BEFs ist aufgrund der Messposition zwischen Dämpfer

Parameter	Versuch				
	1	2	3	4	5
$\hat{k}_{sb}/10^8$	25.89	24.59	17.07	14.65	12.43
$\hat{k}_D/10^{16}$	4.614	4.665	4.710	4.669	4.576
$\hat{l}_{D1}/100$	2.275	3.817	2.050	0.585	0.467
$\hat{l}_{D2}/100$	3.747	1.450	2.621	1.070	2.604
$\hat{\beta} \cdot 10^{11}$	1.522	9.683	1.000	9.966	1.000
$\hat{\gamma}$	159.06	144.08	159.94	157.48	159.93
\hat{l}_{d0D}	1.166	1.208	1.146	1.131	1.233
\hat{l}_{dsb2g}	0.704	0.615	0.625	0.612	0.784
\hat{l}_g	3.468	3.497	3.416	3.386	3.655
$\hat{E}/10^{11}$	1.674	2.053	2.024	1.820	1.977
$-\log(LL)/10^6$	4.126	2.873	4.502	1.707	3.961
	6	7	8	9	10
$\hat{k}_{sb}/10^8$	28.20	27.57	27.73	28.21	11.08
$\hat{k}_D/10^{16}$	4.616	4.590	4.590	4.700	4.586
$\hat{l}_{D1}/100$	2.492	1.572	0.801	2.626	2.636
$\hat{l}_{D2}/100$	1.110	1.181	1.784	1.687	1.246
$\hat{\beta} \cdot 10^{11}$	1.209	2.329	9.966	9.904	1.000
$\hat{\gamma}$	149.84	159.86	158.19	158.01	159.77
\hat{l}_{d0D}	1.192	1.137	1.213	1.161	1.195
\hat{l}_{dsb2g}	0.675	0.643	0.755	0.638	0.633
\hat{l}_g	3.529	3.417	3.652	3.418	3.527
$\hat{E}/10^{11}$	1.879	1.699	2.112	1.729	2.007
$-\log(LL)/10^6$	2.038	2.746	2.088	2.673	2.831

Tabelle 5.5: ML-Schätzer des an die Tiefbohrdaten angepassten Biegeschwingungsmodells mit erweitertem Parameterraum.

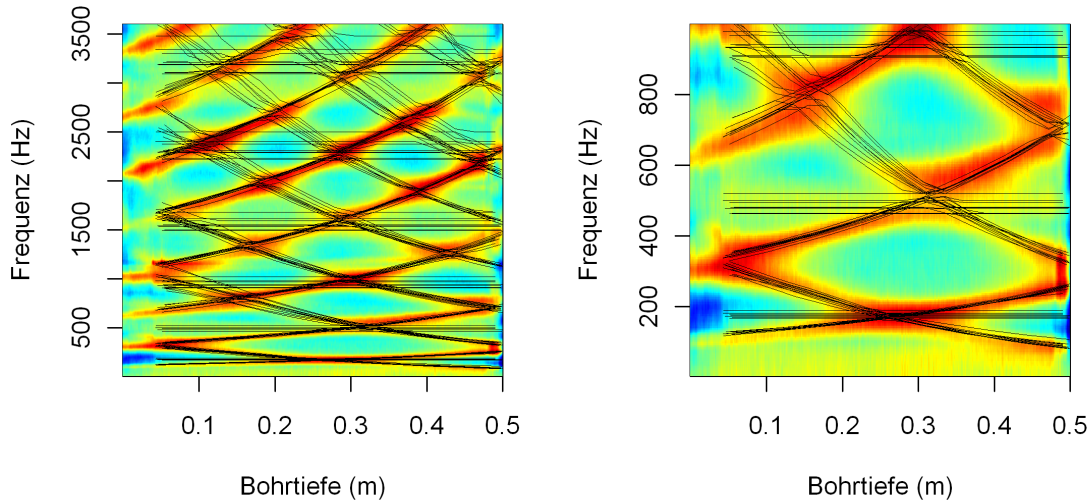


Abbildung 5.4: Über alle zehn Versuche gemitteltetes Spektrogramm im Vergleich zu den sich aus den im erweiterten Parameterraum ermittelten ML-Schätzern ergebenden BEF-Verläufen. Links: Frequenzband von 0 bis 3600 Hz, rechts: Frequenzband von 0 bis 1000 Hz.

und KSS-Zuführapparat gut nachvollziehbar. Das gleiche gilt für die (uninteressanten) konstanten BEFs, die sich aufgrund des hohen Steifigkeitseinflusses k_D des Dämpfers kaum in den Spektrogrammen widerspiegeln.

Eine weitere Auffälligkeit an Abbildung 5.4 ist die Tatsache, dass die variablen BEFs klar von Prozessbeginn bis -ende durchgängig fallen bzw. steigen, während in der Simulation des vorigen Kapitels alternierende Verläufe beobachtet werden konnten. Der Grund für diese monotonen Verläufe liegt im höheren Steifigkeitseinfluss k_{sb} der Stopfbuchsen, welcher eine größere Isolation der Bereiche zwischen Dämpfer und KSS-Zuführapparat bzw. zwischen diesem und Bohrkopf impliziert. In der Folge gehen Biegeeigenmoden und -frequenzen nicht wie dort fließend ineinander über, sondern sind nahezu unabhängig voneinander. Aufgrund dieser klareren Trennung der Stangenabschnitte erscheint hier eine Ordnung der BEFs nicht wie bisher nach ihrer Höhe,

sondern nach ihrem Status, steigend oder fallend, sinnvoll.

Die zu dieser Umordnung nötige Zuordnung der BEFs von einem Zeitpunkt zum nächsten ist über die sich klar unterscheidenden BEMs möglich. Formal geschieht dies, indem zunächst durch $\hat{\omega}_{r;q}(l_A) := \hat{\omega}_r(l_A)$ die initiale r-te umgeordnete BEF zur Bohrtiefe l_A und entsprechend die r-te umgeordnete BEM $\{\hat{\psi}_{r;q}(l_A)\} := \{\hat{\psi}_r(l_A)\}$ definiert wird. Die entsprechenden Werte zu den Bohrtiefen $j \cdot l_A, j = 2, \dots, J$ ergeben sich dann iterativ durch $\hat{\omega}_{r;q}(j \cdot l_A) := \hat{\omega}_s(j \cdot l_A)$ und $\{\hat{\psi}_{r;q}(l_A)\} := \{\hat{\psi}_s(l_A)\}$, wobei s jeweils so gewählt wird, dass $\left| \{\hat{\psi}_s(j \cdot l_A)\} - \{\hat{\psi}_{r;q}([j-1] \cdot l_A)\} \right|_2$ minimal wird. Da im weiteren nur noch die neu geordneten BEFs betrachtet werden, wird zur besseren Übersichtlichkeit auf den Index q verzichtet.

5.3 Anpassung lokaler polynomialer Regressionen

Die umgeordneten BEF-Verlaufsschätzungen werden schließlich in der in Kapitel 4.2.6 beschriebenen Weise modifiziert. Dabei werden die für die Drallentstehung irrelevanten konstanten BEFs nicht weiter berücksichtigt. Abbildung 5.5 zeigt beispielhaft die nach Status der jeweiligen BEF unterschiedenen Frequenzbänder um die geschätzten Verläufe, auf denen die hierzu verwendeten lokalen polynomialen Regressionen angepasst werden.

Die Ergebnisse zu den auf diesen Frequenzbändern angepassten Regressionen werden in Abbildung 5.6 und Tabelle 5.6 visualisiert und zusammengefasst. Dabei zeigt die Abbildung die Verläufe aller Schätzungen und der zugehörigen punktwisen 95%-Konfidenzbänder, während die Tabelle aggregierte Angaben enthält. Diese Angaben beinhalten zum einen in den ersten beiden Spalten die mittleren Start- und Endwerte $\bar{\omega}_{r;L}(l_A)$ und $\bar{\omega}_{r;L}(l_B)$ für alle betrachteten BEFs. Die dritte Spalte gibt zu jeder BEF den über alle Zeitpunkte und Versuche gemittelten Wert

$$\bar{\Delta}\omega_{r;L} = \frac{1}{10J} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^J \left| \hat{\omega}_{r;L;i}(j \cdot l_A) - \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} \hat{\omega}_{r;L;k}(j \cdot l_A) \right|$$

an, um den eine BEF-Schätzung zu einem Versuch und Zeitpunkt von dem über alle Versuche gemittelten Schätzwert zu diesem Zeitpunkt abweicht. Die Größe $\bar{\Delta}\omega_{r;L}$

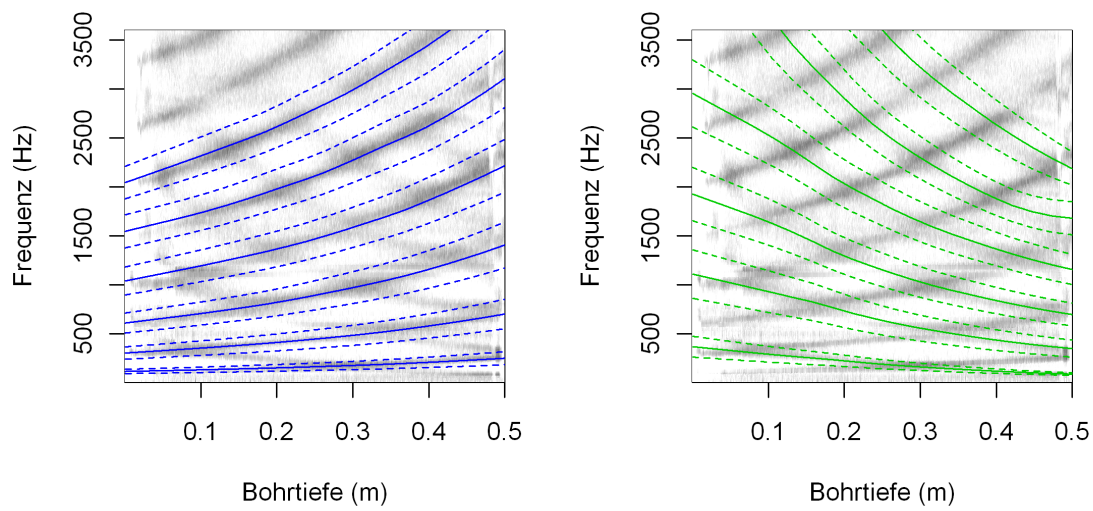


Abbildung 5.5: Geschätzte BEF-Verläufe (durchgezogen) und Frequenzbänder (gestrichelt) für die lokalen polynomialen Regressionen. Links: steigende BEFs, rechts: fallende BEFs.

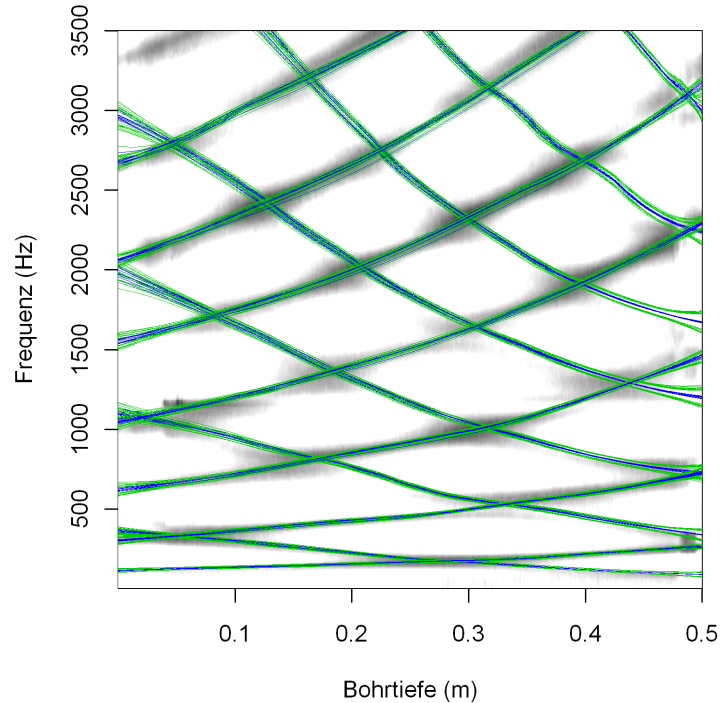


Abbildung 5.6: Durch lokale polynomiale Regressionen geschätzte BEF-Verläufe (blau) und punktweise 95%-Konfidenzbänder (grün).

ist also ein Maß für die zwischen den Versuchen auftretende Variabilität der BEF-Schätzungen. Die vierte Spalte enthält mit $\bar{\Delta}^{\%}\omega_{r;L}$ das entsprechende relative Variabilitätsmaß, welches sich durch Skalierung durch die BEF-Schätzungen, also bei Betrachtung von relativen statt absoluten Abweichungen ergibt:

$$\bar{\Delta}\omega_{r;L} = \frac{1}{10J} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^J \frac{|\hat{\omega}_{r;L;i}(j \cdot l_A) - \sum_{k=1}^{10} \hat{\omega}_{r;L;k}(j \cdot l_A)|}{\hat{\omega}_{r;L;i}(j \cdot l_A)}.$$

Die letzten beiden Spalten von Tabelle 5.6 geben schließlich die über Zeit und Versuche gemittelten absoluten und relativen Breiten $\bar{C}_{95;r}$ und $\bar{C}_{95;r}^{\%}$ der 95%-Konfidenzbänder an.

Anhand von Abbildung 5.6 ist durch den direkten Vergleich mit dem über alle Ver-

BEF	$\tilde{\omega}_{r;L}(l_A) - \tilde{\omega}_{r;L}(l_B)$	$\bar{\Delta}\omega_{r;L}$	$\bar{\Delta}\% \omega_{r;L}$	$\bar{C}_{95;r}$	$\bar{C}\%_{095;r}$
1	116-266	1.467	0.85	13.359	8.05
2	304-729	2.819	0.61	19.635	4.37
3	623-1461	4.544	0.52	25.469	2.84
4	1049-2292	7.053	0.47	26.255	1.78
5	1553-3165	9.385	0.44	28.521	1.35
6	2058-3642	10.357	0.38	30.437	1.06
7	2678-3588	6.987	0.23	33.635	1.01
8	363-90	1.716	0.74	15.758	9.22
9	1103-338	4.495	0.59	27.594	4.65
10	1987-728	8.161	0.59	32.451	2.91
11	2966-1202	9.793	0.46	41.168	2.32
12	3619-1672	11.933	0.41	53.909	2.05
13	3673-2241	7.873	0.24	79.083	2.42
14	3589-2999	2.734	0.08	72.861	2.06

Tabelle 5.6: Zusammenfassung der Regressionsergebnisse. Zeilen 1-7: steigende BEFs, Zeilen 8-14: fallende BEFs.

suche gemittelten Spektrogramm gut zu erkennen, dass die geschätzten Verläufe gut mit den Gebieten hoher Amplitudenwerte übereinstimmen. Lediglich zu Beginn des Prozesses im Frequenzbereich von ca. 1000-2000 Hz sind bei den fallenden Biegeeigenfrequenzen größere Abweichungen zu erkennen, welche möglicherweise auf veränderte Randbedingungen während des Anbohrprozesses zurückzuführen sind. Ebenfalls zu erkennen ist, dass die Konfidenzbänder offenbar über weite Strecken des Prozesses eine gleichmäßige Breite aufweisen und lediglich zu Beginn und Ende des Prozesses breiter werden. Letzteres liegt auch in der Natur der lokalen polynomialen Regression begründet.

Im Vergleich zu Abschnitt 5.4 zeigt sich, dass vor allem die fallenden BEFs über die Versuche hinweg mit deutlich geringerer Streuung geschätzt werden. Wie weiter oben erwähnt, ist dieses Ergebnis unter Gültigkeit der Modellvoraussetzungen zu erwarten, da die das BEF-Verlaufsmuster beeinflussenden Parameter in allen Versuchen die gleichen Werte haben. Das gewählte Vorgehen liefert also offenbar ein reliables Instrument zur Messung zeitvariabler Biegeeigenfrequenzen.

Bei näherer Betrachtung von Tabelle 5.6 wird deutlich, dass die mittlere relative Streuung der Schätzungen für alle Frequenzen deutlich weniger als 1 % beträgt. Vergleichsweise hohe absolute Streuungen mit Werten um 10 Hz sind vor allem für sowohl fallende als auch steigende BEFs ab einer Höhe von ca. 1500 Hz zu beobachten. Insgesamt liegen die Streuungen für die fallenden BEFs höher, was, wie bereits erläutert, aufgrund der Messposition zwischen Lanchester-Dämpfer und KSS-Zuführapparat einleuchtet. Diese Verhältnisse spiegeln sich entsprechend in den Breiten der Konfidenzintervalle wider. Hierbei ist zu beachten, dass durch die in Kapitel 4.2.6 beschriebene konservative Verbreiterung der Intervalle um eine Fourierfrequenz deren minimale Breite 4.88 Hz beträgt. Dass die Konfidenzintervalle i.d.R. deutlich breiter sind als in der Simulationsstudie (vgl. Tabelle 4.10), kann aufgrund der dort perfekt erfüllten Modellvoraussetzungen und dem im realen Prozess höheren Grundrauschen nicht überraschen. Die Ergebnisse der Anpassung an die realen Tiefbohrdaten liefern allerdings keinen Hinweis auf systematische Abweichungen von den Voraussetzungen, welche die Gültigkeit des gewählten Modellierungsansatzes und die Überdeckungswahrscheinlichkeiten der Konfidenzbänder in Frage stellen könnten.

6 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Entwicklung eines Modells zur effizienten, realitätsnahen Schätzung von Biegeeigenfrequenzen (BEFs) der Bohrstange beim BTA-Tiefbohren. Die Motivation dieses Modells ist die Tatsache, dass der Schnitt bestimmter Biegeeigenfrequenzen mit Vielfachen der Bohrstangendrehfrequenz die Entstehung von Drall und die daraus folgenden Schädigungen des Werkstücks begünstigen kann. Die Schätzung der BEFs erfolgt dabei in drei Schritten. Im ersten Schritt wird ein physikalisches Modell aufgestellt, welches die deterministische BEF-Ermittlung in Abhängigkeit von den geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Bohrstange ermöglicht. Im nächsten Schritt wird ein statistisches Modell formuliert, welches auf Basis des von den BEFs abhängigen stochastischen Körperschallsignals die Maximum-Likelihood-Schätzung der unbekannt Parameter des physikalischen Modells erlaubt. Die sich nach Einsetzen der Parameterschätzungen in das physikalische Modell ergebenden BEF-Verläufe bilden schließlich die Grundlage des dritten Schritts, der Feinanpassung der Verläufe durch an um diese gelegte Frequenzbänder angepasste lokale polynomiale Regressionen. Ergebnis dieses letzten Schritts sind Punkt- und Intervallschätzungen der interessierenden BEF-Verläufe.

Die Vorteile des gewählten Wegs statistisch-physikalischer Modellierung gegenüber aufwändigen Methoden zur direkten Eigenfrequenzmessung liegen zum einen in der deutlich höheren Effizienz. Während die experimentelle Ermittlung einen hohen personellen Interaktionsgrad erfordert, kann das statistisch-physikalische Modell beliebig oft und unter veränderten Randbedingungen automatisiert an das während des Prozesses aufgezeichnete Körperschallsignal angepasst werden. Zum anderen führt die Methode zu einer realitätsnäheren Abbildung, da ihr Daten des laufenden Prozesses zugrunde liegen, während die experimentelle Ermittlung nur an der ruhenden Stange möglich ist.

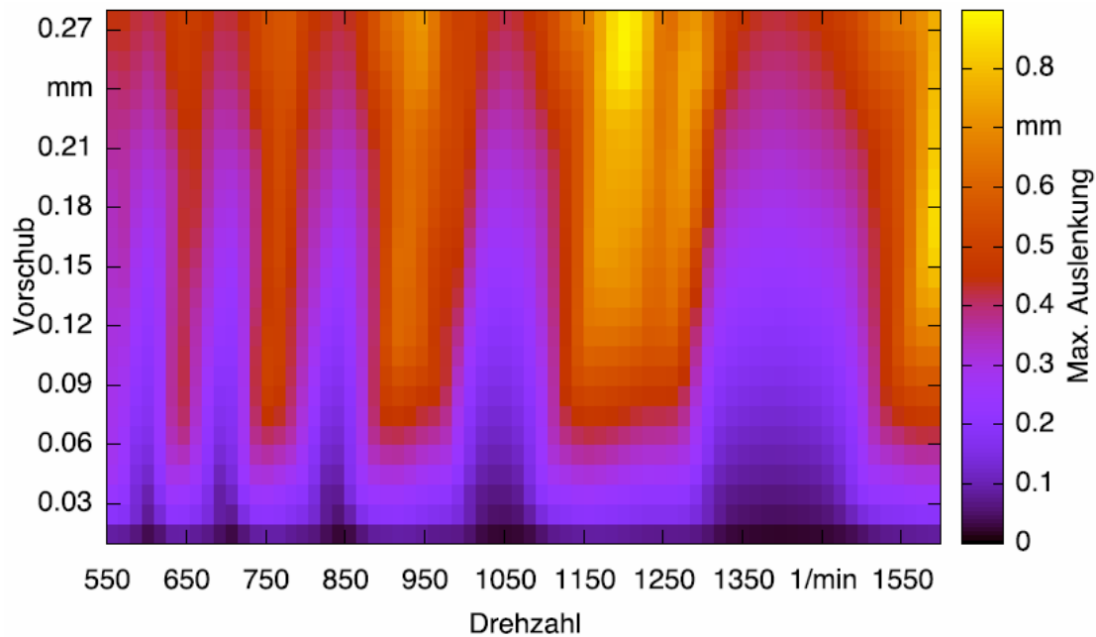


Abbildung 6.1: Beispiel einer Drall-Stabilitätskarte. Rote Bereiche stehen für Parameterkombinationen mit hohem Drallausmaß.

Wesentliche Vorteile gegenüber rein deterministischen Modalanalyse-Methoden werden durch das statistische Modell erreicht, da es die Berücksichtigung stochastischer Abweichung und die Schätzung unbekannter Parameter erlaubt. In der durchgeführten Simulationsstudie zeigte sich allerdings auch die Präsenz von durch den Diskretisierungsfehler implizierten systematischen Abweichungen, welche durch die Verfeinerung der BEF-Schätzungen mit lokalen polynomialen Regressionen jedoch ausgeglichen werden konnten. Bei der Übertragung auf reale Tiefbohrdaten zeigten sich neben einer plausiblen Erhöhung der Gesamtvarianz keine Hinweise auf weitere systematische Abweichungen des Modells von der Realität, so dass davon ausgegangen wird, dass mit dem vorgestellten Modell ein valides Instrument zur Biegeeigenfrequenzverlaufsbestimmung entwickelt wurde.

Ein ursprünglich angestrebter Online-Einsatz des Modells zur Prozesskontrolle konnte nicht realisiert werden. Neben der relativ hohen Rechenzeit bei der Maximierung der Likelihoodfunktion liegt dies vor allem darin begründet, dass die einzige Möglichkeit,

den Schnitt einer BEF mit einem Vielfachen der Rotationsfrequenz zu vermeiden, die Senkung der letzteren wäre. Es hat sich allerdings gezeigt, dass eine solche Veränderung der Drehzahl im laufenden Prozess beginnenden Drall nicht vermeiden kann und darüber hinaus ihrerseits zu Schädigungen der Bohrung führt.

Umso größere Bedeutung kommt daher der statischen Prozessregelung zu. Hierbei besteht der praktische Nutzen des vorgestellten Modells darin, vor dem Einstieg in die Serienproduktion mit gleichen Einstellungen die BEF-Verläufe anhand nur einer Probebohrung bestimmen zu können. Ausgehend von diesen Verläufen können zum einen die BEFs ggf. gezielt etwa durch veränderte Positionierung von Lanchester-Dämpfer oder KSS-Zuführapparat verändert werden. Zum anderen dienen die Verläufe als Eingangsparameter für ein vom Institut für Spanende Fertigung der TU Dortmund entwickeltes Simulationsmodell zur Drallentstehung beim BTA-Tiefbohren (Biermann u. a., 2009). Dieses Modell basiert auf der in Kapitel 2.2 beschriebenen Drallentstehungserklärung und benötigt als Grundvoraussetzung für seine Anwendung in der Praxis eine valide und effiziente Schätzung variierender Biegeeigenfrequenzen, die durch das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren gegeben ist. Die Ausgabe des Modells besteht aus einer so genannten Stabilitätskarte (Abbildung 6.1), welche das erwartete Drallausmaß zu jeder Bohrtiefe in Abhängigkeit von den Parametern Vorschub f und Schnittgeschwindigkeit v_c darstellt. Mit dieser Karte können kritische und unkritische Kombinationen identifiziert und f und v_c entsprechend eingestellt werden.

A Notation

A.1 Skalare, Vektoren und Matrizen

Beispiel	Bedeutung
$s \in \mathbb{C}$	Skalar
$\{x\} \in \mathbb{C}^N$	N -dimensionaler Vektor
$\{x\}^T \in \mathbb{C}^{1 \times N}$	Transponierter Vektor
$[M] \in \mathbb{C}^{J \times K}$	Matrix mit J Zeilen und K Spalten
$[M]^T \in \mathbb{C}^{K \times J}$	Transponierte Matrix
x_j	j -ter Eintrag von $\{x\}$
$\{m_j\}$	j -ter Spaltenvektor von $[M]$
m_{jk}	Eintrag der j -ten Zeile und k -ten Spalte von $[M]$
m_j	j -tes Hauptdiagonalelement der Diagonalmatrix $[M]$
$[M]^{-1}$	Inverse von $[M]$

Beispiel	Bedeutung
$\det([M])$	Determinante von $[M]$
$\text{diag}([M])$	Hauptdiagonale von $[M]$
$\text{diag}(x_1, \dots, x_N)$	Diagonalmatrix mit Hauptdiagonale $\{x\}^T$
$\{e\}_j \in \mathbb{C}^N$	j -ter Einheitsvektor der Dimension N
$\{1\}_N$	N -dimensionaler Einsvektor
$[I]_{N \times N}$	N -dimensionale Einheitsmatrix
$[1]_{N \times N}$	N -dimensionale Einsmatrix

A.2 Indizes und Argumente

Allgemein bedeutet die unabgesetzte Folge von Buchstaben deren Produktbildung (Beispiel: $xy = x \cdot y$). Eine Ausnahme bilden Indizes, bei denen Buchstaben- und Zahlenfolgen Mehrfachindizierungen (Beispiel: m_{jk}) oder Abkürzungen (Beispiel: k_{sb1}) bedeuten. Verwechslungen werden durch entsprechende Einführungen von Abkürzungen verhindert und in Indizes verwendete Produkte werden explizit durch Verwendung des Multiplikationszeichens \cdot gekennzeichnet. Mehrfachindizierungen werden mit Ausnahme von Matrixeinträgen durch Kommata oder Semikolons getrennt (Beispiel: $k_{s,j}$). Argumente der Funktion f erscheinen im Ausdruck innerhalb der Klammern zuerst, getrennt durch Kommata. Funktionskonstanten werden davon durch ein Semikolon abgesetzt und voneinander ebenfalls durch Kommata getrennt (Beispiel: $f(x, y; a, b)$).

A.3 Mathematische Symbole

Beispiel	Bedeutung
$\frac{d}{dx}f$	Erste Ableitung von $f : x \rightarrow f(x)$ nach x .
$\frac{\partial}{\partial x_j}f$	Erste partielle Ableitung von $f : \{x\} \rightarrow f(\{x\})$ nach x_j .
\dot{x}, \ddot{x}	Erste und zweite Ableitung von $x : t \rightarrow x(t)$ nach der Zeit t
$\{\dot{x}\}$	Elementweise zeitabgeleiteter Vektor mit Einträgen $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N$
$\int_a^b \{f(x)\}dx$	Elementweises Integral der Funktion $f : \{x\} \rightarrow \{f(x)\}$ in den Grenzen a und b
e, π, i	Konstanten Eulersche Zahl $e \approx 2,7183$, Kreiszahl $\pi \approx 3,1416$ und imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$
$Re(x), Im(x)$	Realteil und Imaginärteil von $x = Re(x) + iIm(x)$
$ x $	Absolutbetrag von x , $ x = \sqrt{Re(x)^2 + Im(x)^2}$
\bar{x}	Konjugiert Komplexe zu x , $\bar{x} = Re(x) - iIm(x)$
sin, cos, tan	Trigonometrische Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens
$sin^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}$	Inverse trigonometrische Funktionen Arkussinus, Arkuscosinus und Arkustangens
$\lfloor x \rfloor$	Abrundung, $\lfloor x \rfloor = argmax_z(z \in \mathbb{Z} z \leq x)$
$\lceil x \rceil$	Aufrundung, $\lceil x \rceil = argmin_z(z \in \mathbb{Z} z \geq x)$

B Größen des Physikalisch-Statistischen Modells

Symbol	Einheit	Bedeutung
$[\alpha(\omega)]$		Frequenzantwortfunktionsmatrix
β	s/m ²	Proportionalitätsfaktor zwischen Steifigkeit und Dämpfung
γ	Ns/(m · kg)	Proportionalitätsfaktor zwischen Masse und Dämpfung
ϱ	kg/m ³	Dichte des Bohrstangenmaterials
ϕ	s	Phasenverschiebung
$[\Phi]$	kg ²	Massennormalisierte Eigenvektormatrix
$\{\phi\}_r$	kg ²	r -te massennormalisierte Biegeeigenmode
φ	rad	Winkel
$[\Psi]$		Allgemeine Eigenvektormatrix
$\{\psi\}_r$		Allgemeine r -te Biegeeigenmode
$[\bar{\Omega}^2]$		Eigenwertmatrix
ω	rad/s = Hz/(2 π)	Kreisfrequenz
$\bar{\omega}_r$	rad/s	r -te Biegeeigenfrequenz des ungedämpften Systems
ω_r	rad/s	r -te Biegeeigenfrequenz des gedämpften Systems
ω_R	rad/s	Rotationsfrequenz des Werkstücks
A		Elementnummer der Körperschallmessstelle
$[C]$	Ns/m	Dämpfungsmatrix des unabgestützten Systems
$[C_g]$	Ns/m	Dämpfungsmatrix des abgestützten Systems
$[\tilde{C}]$	Ns/m	Modale Dämpfungsmatrix des unabgestützten Systems
d_i, d_a	m	Innen- und Außendurchmesser der Bohrstange
E	MPa	Elastizitätsmodul des Bohrrohrmaterials
E_{kin}	J	Kinetische Energie
E_{pot}	J	Potentielle Energie
f	N	Anregungskraft
I	m ⁴	Flächenträgheitsmoment der Bohrstange
$[K]$	N/m	Steifigkeitsmatrix des unabgestützten Systems

Symbol	Einheit	Bedeutung
$[K_g]$	N/m	Steifigkeitsmatrix des abgestützten Systems
$[\tilde{K}]$	N/m	Modale Steifigkeitsmatrix des unabgestützten Systems
k	N/m	Steifigkeit eines freischwingenden Freiheitsgrads
k_D	N/m	Gesamtsteifigkeitseinfluss des Lanchester-Dämpfers
$k_{s, sb}$	N/m	Steifigkeitseinfluss einer Stopfbuchse
$k_{s, N}$	N/m	Steifigkeitseinfluss des Werkstücks
\tilde{k}_r	kg	Modale Steifigkeit der r -ten Biegeeigenmode
l	m	Länge eines Freiheitsgrads
l_B	m	Gesamtbohrtiefe
l_b	m	Aktuelle Bohrtiefe
l_D	m	Länge des Lanchester-Dämpfers
l_{D1}, l_{D2}	m	Wirkungslängenverkürzungen des Lanchester-Dämpfers
l_{d0D}	m	Abstand zwischen Einspannung und ihr näherem Lanchester-Dämpferrand
l_{d0KM}	m	Abstand zwischen Einspannung und Körperschallsensor
l_{dsb}	m	Mittenabstand der Stopfbuchsen
l_{dsb2g}	m	Abstand zwischen Bohrerspitze und ihm näherer Stopfbuchse zu Prozessbeginn
l_g	m	Gesamtlänge der Bohrstange
l_{KD}	m	Kontaktlänge des Lanchester-Dämpfers
$[M]$	kg	Massematrix
$[\tilde{M}]$	kg	Modale Massematrix
m	kg	Masse eines Freiheitsgrads
m_g	kg	Gesamtmasse der Bohrstange
\tilde{m}_r	kg	Modale Masse der r -ten Biegeeigenmode
N		Anzahl der Freiheitsgrade
p		Modalkoordinate
q		Verallgemeinerte Koordinate
R_{fN}	m ²	Autokovarianzfunktion der Anregungskraft
R_{xA}	m ²	Autokovarianzfunktion des Körperschallsignals
S_{fN}	m ² s/rad	Spektraldichtefunktion der Anregungskraft
S_{xA}	m ² s/rad	Spektraldichtefunktion des Körperschallsignals
$sb1, sb2$		Elementnummern der Stopfbuchsenkontaktpositionen
t	s	Zeit seit Prozessbeginn
$1/t_d$	Hz	Abtastrate
v_f	m/s	Vorschubgeschwindigkeit
x	m	Translatorische Verschiebung (Auslenkung)

C Theoretische Grundlagen

C.1 Komplexe Notation harmonischer Schwingungen

Jede reellwertige harmonische Schwingung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

mit der Amplitude x_0 , der Frequenz ω und der Phasenverschiebung ϕ kann aufgrund der Eulerschen Identität

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

durch

$$x(t) = \operatorname{Re}(X e^{i\omega t}) \quad \text{mit} \quad X = x_0 e^{i\phi}$$

ausgedrückt werden (vgl. Ewins (2000), S. 521f). Dabei enthält die komplexe Amplitude X die Information über die Amplitude $x_0 = |X|$ und die Phasenverschiebung $\phi = \tan^{-1}(\operatorname{Im}(X)/\operatorname{Re}(X))$ von $x(t)$.

C.2 Stochastische Prozesse

Ein **stochastischer Prozess** $x(t)$ ist eine Familie von Zufallsvariablen

$$x(t) \text{ mit } t \in T.$$

Für $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ wird x_t kontinuierlich, für $T = \{t_j = j \cdot t_d \mid j \in J\}$, $J = [a, b] \cap \mathbb{Z}$, diskret genannt. Die Realisation $\tilde{x}(t)$ eines stochastischen Prozesses wird entsprechend kontinuierliche oder diskrete **Zeitreihe** genannt.

Der stochastische Prozess $x(t)$ wird (**schwach**) **stationär** genannt, falls gilt:

$$E|x(t)|^2 < \infty \quad \forall t \in T,$$

$$E[x(t)] = \mu \quad \forall t \in T \quad (\text{Mittelwertstationarität}),$$

$$\text{Cov}[x(t), x(s)] = \gamma(s - t) \quad \forall t, s \in T \quad (\text{Kovarianzstationarität}).$$

Die Funktion $\gamma(\tau)$ ist dabei die (**theoretische**) **Autokovarianzfunktion** von $x(t)$.

Die **empirische Autokovarianzfunktion** $c(\tau)$ von $x(t)$ ist definiert durch:

$$c(\tau) = \frac{1}{\#\tilde{T}_\tau} \sum_{t \in \tilde{T}_\tau} [x(t) - \bar{x}][x(t + \tau) - \bar{x}]$$

$$\text{mit } \tilde{T}_\tau = \{t | t, (t + \tau) \in T\} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \frac{1}{\#T} \sum_{t \in T} x(t)$$

(vgl. Brockwell und Davis (1993), S. 8ff und S. 25ff).

C.3 Fouriertransformation

Gegeben sei die absolut integrierbare Funktion $x(t), t \in T$, d.h. es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Dann ist die **Fouriertransformierte** $X(\omega)$ von $x(t)$ definiert als:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Entsprechend ist die **inverse Fouriertransformierte** $x(t)$ von $X(\omega)$ definiert als:

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Die Größe $\tilde{X}(\omega) = 2\pi X(\omega)$ wird als **Quasi-Fouriertransformierte** von $x(t)$ bezeichnet.

Im Falle von $T = \{t_j = j \cdot t_d | j = 1, \dots, N\}$ ist die **diskrete Fouriertransformierte** $X(\omega)$ von $x(t)$ an den **Fourierkreisfrequenzen** $\omega_{f,n} = 2\pi n/N, n = 0, \dots, N - 1$ als

$$X(\omega_{f,n}) = \sum_{k=0}^{N-1} x(t_{k+1}) e^{-i2\pi nk/N}, \quad n = 0, \dots, N - 1,$$

und die **inverse diskrete Fouriertransformierte** $x(t)$ von $X(\omega)$ als

$$x(t_{k+1}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(\omega_{f,n}) e^{i2\pi nk/N}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

definiert. Wegen

$$x(t_{k+1}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [Re[X(\omega_{f,n})] \cos(\omega_{f,n} k) - Im[X(\omega_{f,n})] \sin(\omega_{f,n} k)]$$

sind die Beträge der Fouriertransformierten Maße für die Amplituden der harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen $\omega_{f,n}$, aus denen sich $x(t)$ überlagert zusammensetzt. Daher wird $|X(\omega_{f,n})|, n = 0, \dots, N-1$ auch das **Amplituden- oder Linienspektrum** von $x(t)$ genannt (vgl. Wei (1994), S. 224ff sowie Schlittgen und Streitberg (1999), S. 68ff).

C.4 Spektraldichte und Periodogramm

Sei $x(t), t \in T$ ein (schwach) stationärer stochastischer Prozess mit absolut integrierbarer Autokovarianzfunktion $\gamma(\tau)$. Dann wird die Fouriertransformierte $f(\omega)$ von $\gamma(\tau)$:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

die **Spektraldichte** von $X(t)$ genannt (Schlittgen und Streitberg (1999), S. 156). Falls $T = \{t_j = j \cdot t_d | j = 1, \dots, N\}$ gilt, heißt die diskrete Fouriertransformierte $I(\omega)$ der empirischen Autokovarianzfunktion $c(\tau)$ von $x(t)$:

$$I(\omega_{f,n}) = \sum_{k=0}^{N-1} c(t_k) e^{-i2\pi nk/N}, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

das **Periodogramm** von $x(t)$. Der Ausdruck $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}I(\omega)$ definiert das **Stichprobenspektrum** von $x(t)$. Ferner gilt mit der diskreten Fouriertransformierten $X(\omega)$ von $x(t)$:

$$I(\omega_{f,n}) = \frac{1}{N} |X(\omega_{f,n})|^2.$$

Das Periodogramm ist also identisch mit dem quadrierten Amplitudenspektrum geteilt durch die Reihenlänge (Brockwell und Davis (1993), S. 332).

C.5 Filter im Zeit- und Frequenzbereich

Die diskrete Funktion $a(t), t \in T = \{t_j = j \cdot t_d | j \in J\}, J = [a, b] \cap \mathbb{Z}$, welche die Funktion $x(t)$ in der Form

$$y(t) = \sum_{\tau \in \tilde{T}_t} a(\tau)x(t - \tau)$$

$$\text{mit } \tilde{T}_t = \{\tau | t, (t - \tau) \in T\}.$$

in die Reihe $y(t)$ transformiert, wird als **(diskreter) linearer Filter** bezeichnet (Schlittgen und Streitberg (1999), S. 35). Der Grenzübergang für $t_d \rightarrow 0$ führt zu dem **kontinuierlichen Filter** $a(t)$ mit

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)x(t - \tau)d\tau.$$

Die Funktion $y(t)$ wird auch die **Faltung** von $x(t)$ bezüglich des Filters $a(t)$ genannt. Nach dem **Faltungssatz** gilt für die Fouriertransformierten $A(\omega), X(\omega)$ und $Y(\omega)$ von $a(t), x(t)$ und $y(t)$:

$$Y(\omega) = A(\omega)X(\omega)$$

(vgl. Hamming (1989), S. 176ff).

D Abbildungen zu den Konfidenzintervallen zur Simulationsstudie

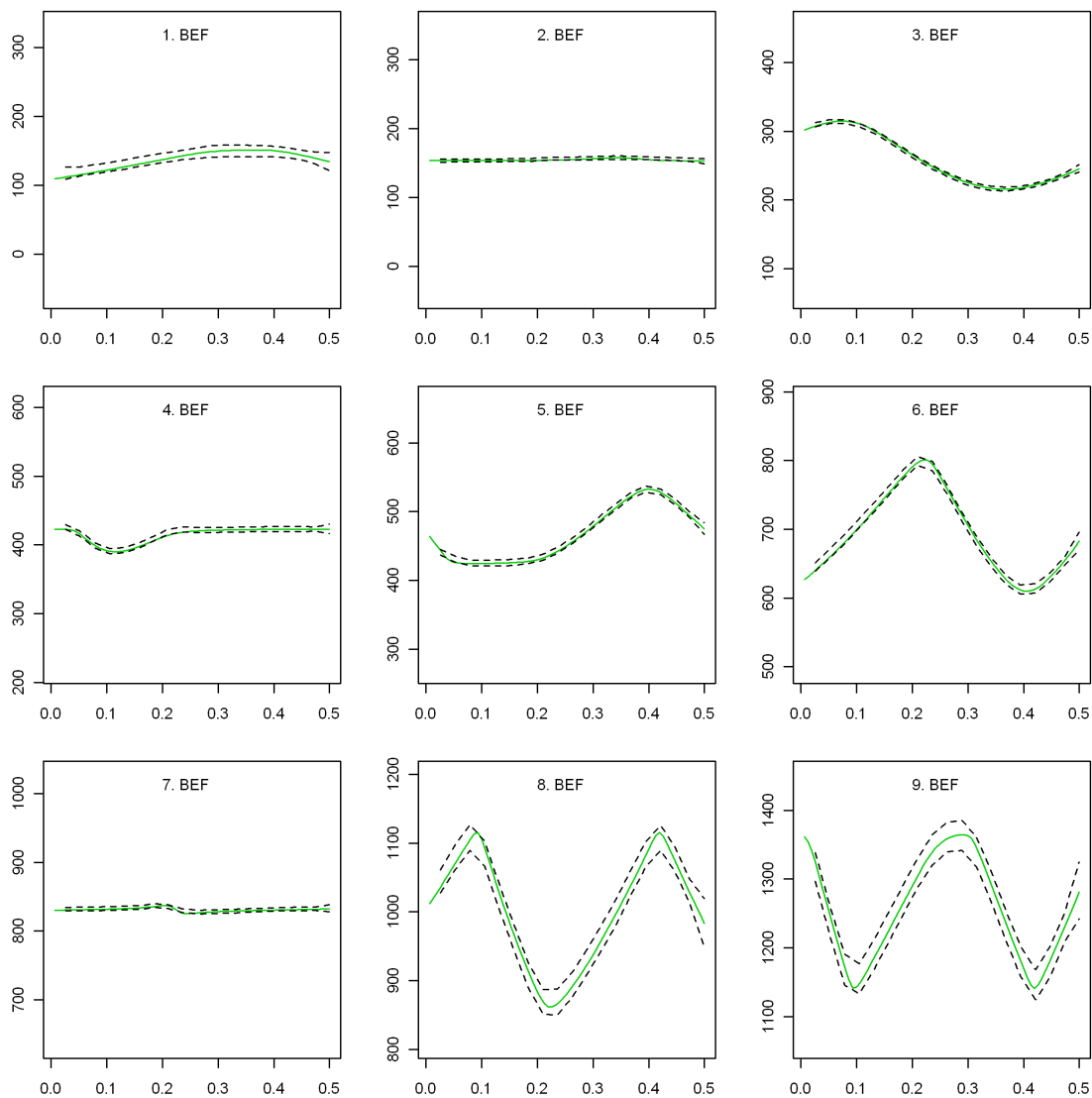


Abbildung D.1: Mittlere Konfidenzintervalle $[L_{r;0.95}(l_b), U_{r;0.95}(l_b)]$ für alle BEFs unter 1350 Hz (gestrichelt) und wahre BEF-Verläufe (grün). Abszissen: Bohrtiefe (m), Ordinaten: Frequenz (Hz).

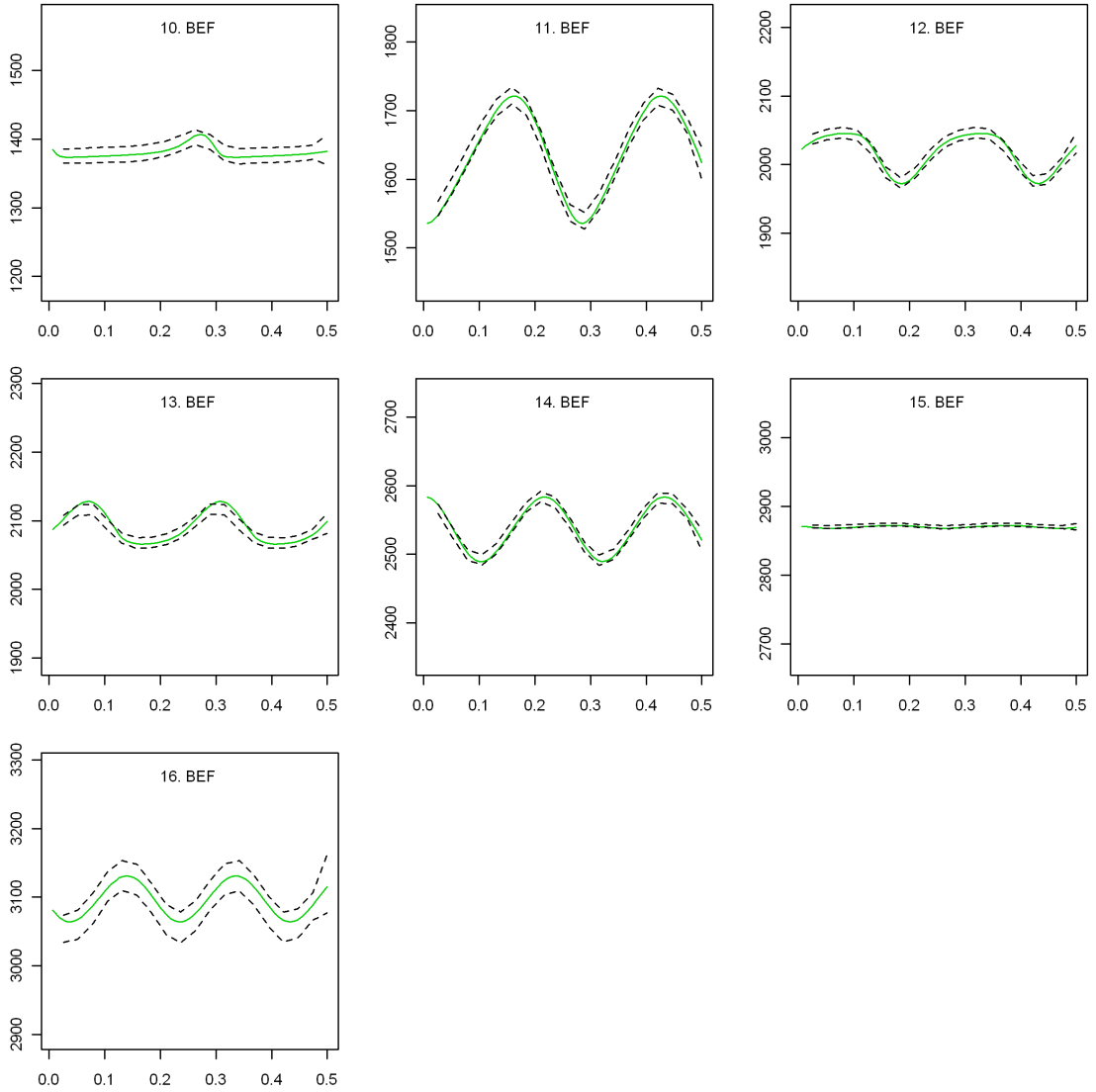


Abbildung D.2: Mittlere Konfidenzintervalle $[L_{r;0.95}(l_b), U_{r;0.95}(l_b)]$ für alle BEFs zwischen 1350 und 3600 Hz (gestrichelt) und wahre BEF-Verläufe (grün).
 Abszissen: Bohrtiefe (m), Ordinaten: Frequenz (Hz).

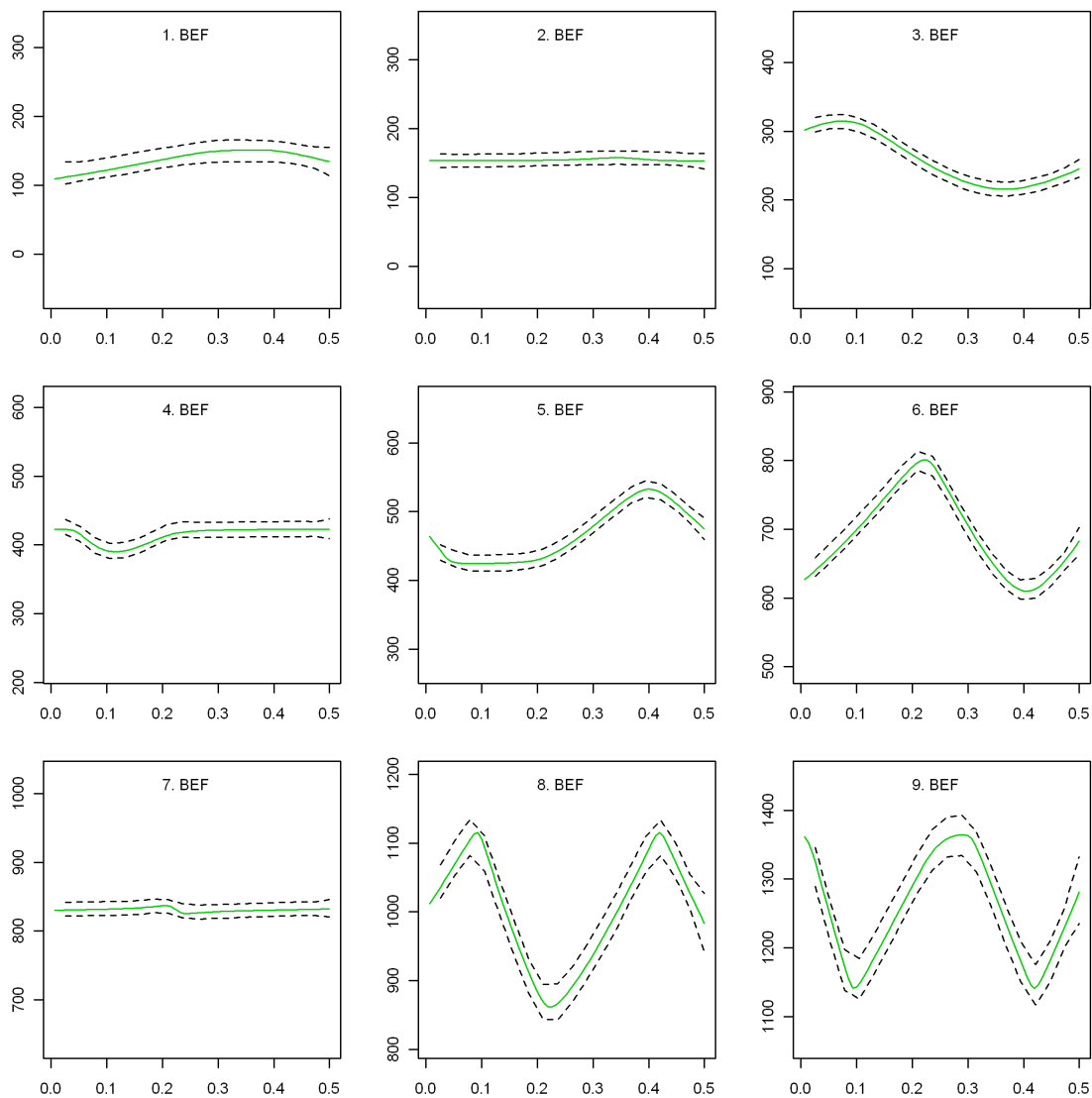


Abbildung D.3: Mittlere Konfidenzintervalle $[L_{r;0.95}^*(l_b), U_{r;0.95}^*(l_b)]$ für alle BEFs unter 1350 Hz (gestrichelt) und wahre BEF-Verläufe (grün). Abszissen: Bohrtiefe (m), Ordinaten: Frequenz (Hz).

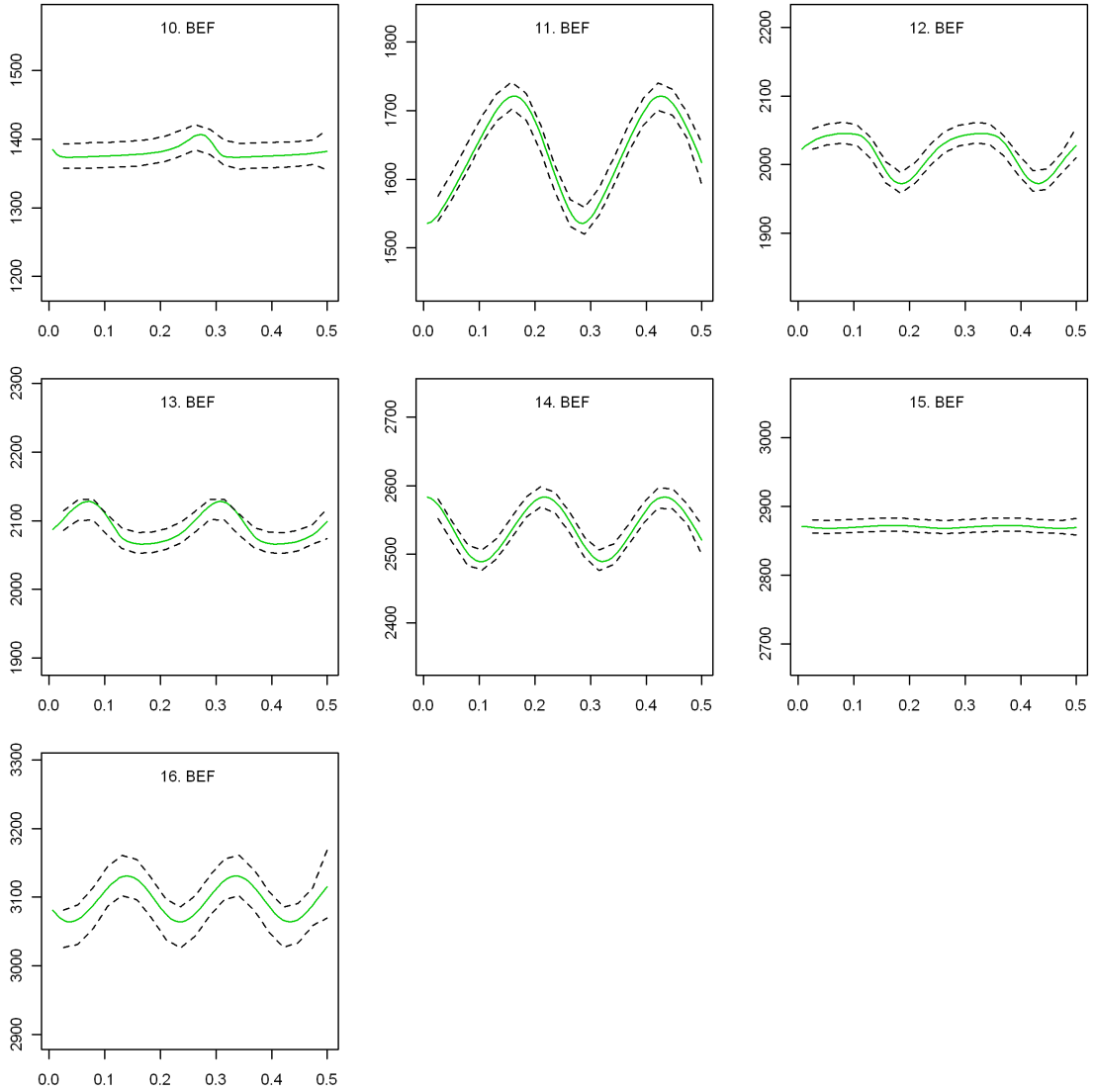


Abbildung D.4: Mittlere Konfidenzintervalle $[L_{r;0.95}^*(l_b), U_{r;0.95}^*(l_b)]$ für alle BEFs zwischen 1350 und 3600 Hz (gestrichelt) und wahre BEF-Verläufe (grün).
 Abszissen: Bohrtiefe (m), Ordinaten: Frequenz (Hz).

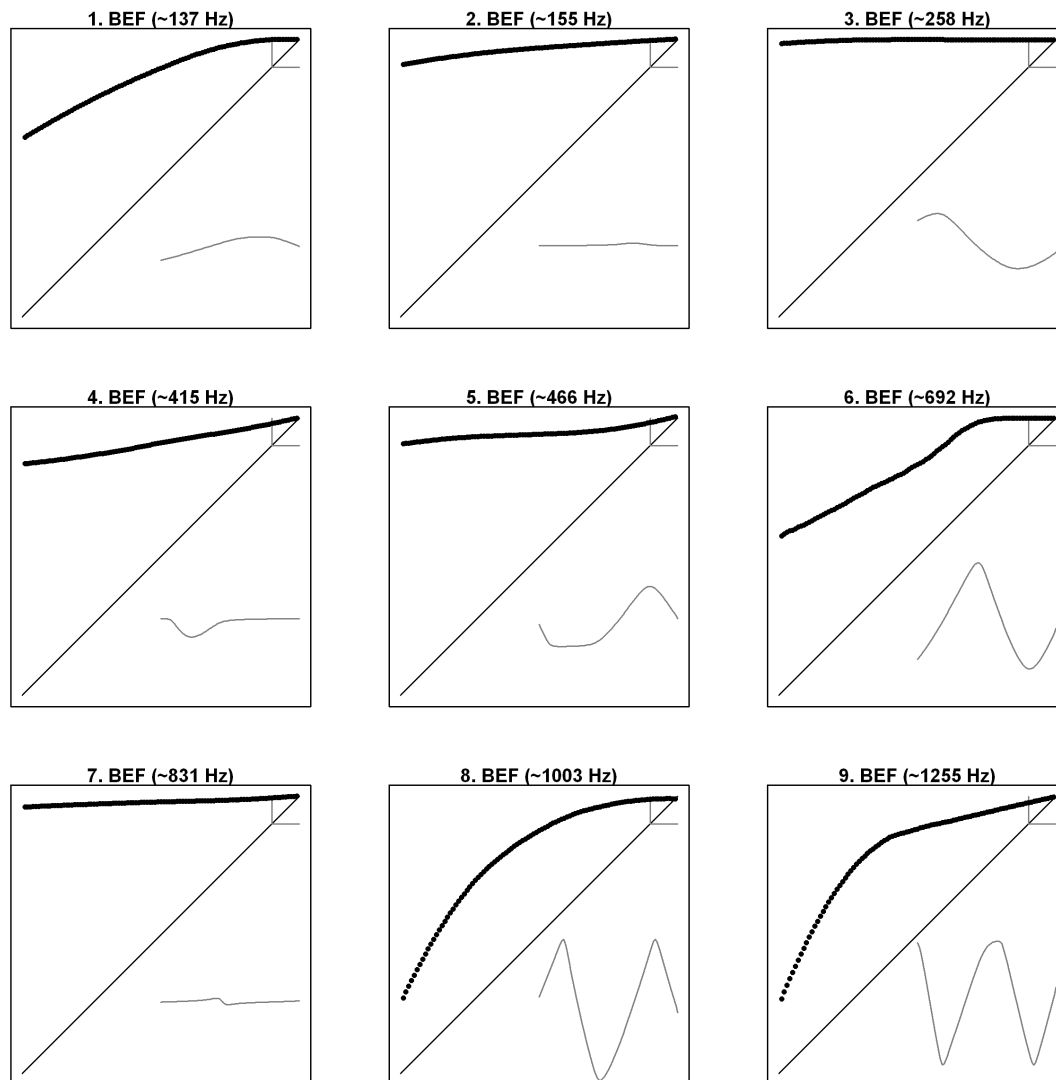


Abbildung D.5: Streudiagramme von vorgegebenen Konfidenzniveaus (Abszissen) und empirischen Überdeckungswahrscheinlichkeiten (Ordinaten) für die Konfidenzintervalle $[L_{r;\alpha_c}^*(l_b), U_{r;\alpha_c}^*(l_b)]$ und die ersten neun Biegeeigenfrequenzen sowie zugehörige BEF-Verläufe (eingeklinkt).

Literaturverzeichnis

- [Akaike 1974] AKAIKE, H.: A New Look at the Statistical Model Identification. In: *IEEE Transaction on Automatic Control* 19 (1974), S. 716–723
- [Alt 2002] ALT, W.: *Nichtlineare Optimierung: Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Wiesbaden : Vieweg und Teubner, 2002
- [Antoniu und Lu 2007] ANTONIOU, A. ; LU, W.-S.: *Practical Optimization: Algorithms and Engineering Applications*. New York : Springer, 2007
- [Bayly u. a. 2002] BAYLY, P. V. ; LAMAR, M. T. ; CALVERT, S. G.: Low-Frequency Regenerative Vibration and the Formation of Lobed Holes in Drilling. In: *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 124 (2002), Nr. 2, S. 275–285
- [Biermann u. a. 2009] BIERMANN, D. ; SACHAROW, A. ; WOHLGEMUTH, K.: Simulation of the BTA deep-hole drilling process. In: *Production Engineering* 3 (2009), Nr. 4–5, S. 339–346
- [Biermann u. a. 2008] BIERMANN, D. ; WEINERT, K. ; ENK, D. ; HOSSAM, M. ; RAABE, N.: Controlling Approach for the BTA Deep Hole Drilling Process to Avoid Spiralling. In: DENKENA, B. (Hrsg.): *Proceedings of the 1st International Conference on Process Machine Interactions (PMI 2008)*. Hannover, 2008, S. 53–60
- [Box und Draper 1987] BOX, G. E. P. ; DRAPER, N. R.: *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. New York : Wiley, 1987 (Probability and Mathematical Statistics)
- [Brillinger 2001] BRILLINGER, D. R.: *Time Series: Data Analysis and Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001

- [Brockwell und Davis 1993] BROCKWELL, P. J. ; DAVIS, R. A.: *Times Series: Theory and Methods*. 2. Auflage. New York : Springer, 1993
- [Büning und Trenkler 1994] BÜNING, H. ; TRENKLER, G.: *Nichtparametrische statistische Methoden*. 2. Auflage. Berlin : Walter de Gruyter, 1994
- [Ewins 2000] EWINS, D. J.: *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. 2. Auflage. Hertfordshire : Research Studies Press Ltd., 2000
- [Gessesse u. a. 1994] GESSESSE, Y. B. ; LATINOVIC, V. N. ; OSMAN, O. M.: On the Problem of Spiralling in BTA Deep-Hole Machining. In: *Journal of Engineering for Industry* 116 (1994), S. 161–165
- [Hamming 1989] HAMMING, R. W.: *Digital Filters*. 3. Auflage. Lucent Technologies, 1989
- [Hartung u. a. 2002] HARTUNG, J. ; ELPELT, B. ; KLÖSENER, K.-H.: *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. 13. Auflage. München : Oldenbourg, 2002
- [Holm 1979] HOLM, S.: A Simple Sequentially Rejective Multiple Test Procedure. In: *Scandinavian Journal of Statistics* 6 (1979), Nr. 2, S. 65–70
- [James 2002] JAMES, J.-F.: *A Student's Guide to Fourier Transforms: With Applications in Physics and Engineering*. 2. Auflage. Cambridge : Cambridge University Press, 2002
- [Ligges 2006] LIGGES, U.: *Transkription monophoner Gesangszeitreihen*, Universität Dortmund, Dissertation, 2006
- [Lilliefors 1967] LILLIEFORS, H.: On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown. In: *Journal of the American Statistical Association* 62 (1967), S. 399–402
- [Loader 1999] LOADER, C.: *Local Regression and Likelihood*. New York : Springer, 1999 (Statistics and Computing)
- [Messaoud 2006] MESSAOUD, A.: *Monitoring Strategies for Chatter Detection In a Drilling Process*, Universität Dortmund, Dissertation, 2006

- [N.N. 2003] N.N.: *VDI-Richtlinie 3210 Blatt 1: Tiefbohrverfahren*. Düsseldorf : VDI, 2003
- [R Development Core Team 2010] R DEVELOPMENT CORE TEAM: R: A Language and Environment for Statistical Computing. (2010). – URL <http://www.R-project.org>
- [Raabe u. a. 2010] RAABE, N. ; ENK, D. ; BIERMANN, D. ; WEIHS, C.: Dynamic Disturbances in BTA Deep-hole Drilling: Modelling Chatter and Spiralling as Regenerative Effects. In: *Advances in Data Analysis, Data Handling and Business Intelligence* Bd. 11, Springer, 2010, S. 745–754
- [Raabe u. a. 2004] RAABE, N. ; WEBBER, O. ; THEIS, W.: Spiralling in BTA deep-hole drilling - How to model varying frequencies. In: *Fourth Annual Meeting of the European Network for Business and Industrial Statistics (ENBIS), Konferenz-CD*, 2004
- [Raabe u. a. 2006] RAABE, N. ; WEBBER, O. ; THEIS, W. ; WEIHS, C.: Spiralling in BTA Deep-hole Drilling: Models of Varying Frequencies. In: *From Data and Information Analysis to Knowledge Engineering* Bd. 12, Springer, 2006, S. 510–517
- [Richardson und Bhatti 2001] RICHARDSON, R. ; BHATTI, R.: A review of research into the role of guide pads in BTA deep-hole machining. In: *Journal of Materials Processing Technology* 110 (2001), Nr. 1, S. 61–69
- [Rinne und Specht 2002] RINNE, H. ; SPECHT, K.: *Zeitreihen: Statistische Modellierung, Schätzung und Prognose*. München : Vahlen, 2002
- [Ripley 1987] RIPLEY, B. D.: *Stochastic Simulation*. New York : Wiley, 1987
- [Rubin 2002] RUBIN, S.: *Dynamic Vibration Absorbers and Auxiliary Mass Dampers*. In: HARRIS, C.M. (Hrsg.) ; PIERSOL, A.G. (Hrsg.): *Harris' Shock and Vibration Handbook*. New York : McGraw-Hill, 2002
- [Schlittgen und Streitberg 1999] SCHLITTFGEN, R. ; STREITBERG, B. H. J.: *Zeitreihenanalyse*. 8. Auflage. München : Oldenbourg, 1999

- [Sekhon und Mebane 1998] SEKHON, J. S. ; MEBANE, W. R. J.: Genetic Optimization Using Derivatives: Theory and Application to Nonlinear Models. In: *Political Analysis* 7 (1998), S. 187–210. – URL <http://sekhon.berkeley.edu/genoud/genoud.pdf>
- [Theis und Busse 2004] THEIS, W. ; BUSSE, A. M.: Comparing Time Series with and without Spiralling / Fachbereich Statistik, Universität Dortmund. 2004 (39). – Technical Report
- [Timoshenko und Young 1955] TIMOSHENKO, S. ; YOUNG, D. H.: *Vibration Problems in Engineering*. 3. Auflage. Princeton : D. Van Nostrand Company, 1955
- [Webber 2006] WEBBER, O.: *Untersuchungen zur bohrtiefenabhängigen Prozessdynamik beim BTA-Tiefbohren*, Universität Dortmund, Dissertation, 2006
- [Wei 1994] WEI, W. S.: *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Addison Wesley, 1994
- [Weihs u. a. 2009] WEIHS, C. ; RAABE, N. ; WEBBER, O.: Deriving a statistical model for the prediction of spiralling in BTA deep-hole-drilling from a physical model. In: *Cooperation in Classification and Data Analysis* Bd. 2, Springer, 2009, S. 107–114
- [Weinert u. a. 2007] WEINERT, K. ; WEBBER, O. ; RAABE, N.: Varying Bending Eigenfrequencies in BTA Deep Hole Drilling: Mechanical Modeling Using Statistical Parameter Estimation. In: *Production Engineering* 1 (2007), Nr. 2, S. 127–134
- [Wolfrum u. a. 2006] WOLFRUM, P. ; GEPPERTH, A. ; SANDAMIRSKA, Y. ; WEBBER, O. ; RAABE, N. ; SZEPANNEK, G. ; SCHOENER, G.: Modelling and Understanding of Chatter / Fachbereich Statistik, Universität Dortmund. 2006 (22). – Technical Report
- [Yang 2007] YANG, X.-S.: *Applied Engineering Mathematics*. Cambridge : Cambridge International Science Publishing, 2007