Über die Dimension von Vektorräumen ganzer vektorwertiger Heckeformen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

Der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Dortmund
im Februar 2010 vorgelegt von
Andrea Hennekemper

Tag der mündlichen Prüfung: 28.05.2010

Prüfungskommission:

Vorsitzender:	Prof. Dr. H. Blum
Erster Gutachter:	Prof. Dr. G. Rosenberger
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. B. Fine
Weiterer Prüfer:	Prof. Dr. R. Brück
Wiss. Mitarbeiter:	Dr. T. Camps

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Seit langem werden vektorwertige Modulformen als Teilgebiet der Theorie der Modulformen behandelt (s. z.B. [20], [4]). Doch erst zu Beginn dieses Jahrhunderts begannen Marvin Knopp und Geoffrey Mason, angeregt durch Fragestellungen aus RCFT (Rational Conformal Field Theory), den systematischen Aufbau einer eigenständigen Theorie ([10], [11], [12]). Dabei wird zunächst versucht, klassische, skalare Sätze auf den vektorwertigen Fall zu übertragen. Dies ist keinesfalls trivial, denn es gibt vektorwertige Modulformen, deren Komponentenfunktionen keine klassischen Modulformen sind ([10]).

Viele klassische Sätze liefern Dimensionsaussagen über Vektorräume von Modulformen (siehe etwa [15], [18]). In [12] werden analoge Aussagen für ganze vektorwertige Modulformen auf der Modulgruppe Γ gewonnen. Das Ziel dieser Arbeit ist die Verallgemeinerung dieser Ergebnisse auf die Heckegruppen $\overline{G}(\lambda)$ mit $\lambda = \lambda_q := 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$.

Alle dazu benötigten Definitionen und Sätze werden in den Abschnitten 1 bis 4 bereitgestellt.

Im Abschnitt 5 wird eine Konstante $\alpha \geq 0$ definiert und wir zeigen durch Abschätzung des Absolutbetrages der Komponentenfunktionen in der Nähe der reellen Achse nach oben, dass der Vektorraum der ganzen vektorwertigen Heckeformen vom Gewicht k für $k < -2\alpha$ nulldimensional ist. Daraus folgt dann eine allgemeine Dimensionsabschätzung nach oben.

Eine Dimensionsabschätzung nach unten setzt die Konstruktion vektorwertiger Heckeformen voraus. Dies gelingt im Abschnitt 6 analog zur klassischen Theorie über Poincaré Reihen.

Damit erhalten wir im Abschnitt 7 die gewünschte Abschätzung für $k > 2 + 2\alpha$.

An dieser Stelle danke ich ganz herzlich Herrn Prof. Dr. Rosenberger für die Anregung und stetige Förderung dieser Dissertation und der Technischen Universität Dortmund für die gewährte finanzielle Unterstützung.

1 Grundlagen

Definitionen 1.1

i) Obere Halbebene in $\mathbb{C}$

$$\mathbb{H} := \{\tau = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

ii) Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

punktierte Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$

$$\dot{\mathbb{E}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus \{0\}$$

Linksgeschlitzte Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$

$$^{-}\mathbb{E} := \mathbb{E} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

Rechtsgeschlitzte Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$

$$\mathbb{E}^{-} := \mathbb{E} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

iii) Argumentfunktionen
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir $\arg z \in \,]-\pi\,, \pi]$ durch

$$\arg z := \begin{cases} 2 \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\} \\ \pi & \text{für } z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z < 0\} \end{cases}$$

und $\widetilde{\arg}\, z \in [0\,, 2\pi[$ durch

$$\widetilde{\arg}\, z := \begin{cases} \arg z & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \arg z + 2\pi & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}.$$

iv) Logarithmus
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir $\log z$ durch

$$\log z := \log |z| + i \arg z$$

und $\widetilde{\log}\, z$ durch

$$\widetilde{\log}\, z := \log |z| + i\, \widetilde{\arg}\, z\,.$$

Die Zuordnung $z \mapsto \log z$ definiert eine holomorphe Funktion Log auf $^{-}\mathbb{E}$ und $z \mapsto \widetilde{\log}\, z$ eine holomorphe Funktion $\widetilde{\operatorname{Log}}$ auf $\mathbb{E}^{-}$.

v) Allgemeine Potenz
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{C}$ sei

$$z^k := \exp(k \log z)\,.$$

Satz 1.2
Es sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht konstant und periodisch mit Periode $p \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

i) *Die Menge der reellen Perioden $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ von f ist eine abgeschlossene, diskrete Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$.*

ii) *(*positive reelle Elementarperiode*)*
Wählen wir $\omega \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$, so dass

$$0 < \omega = \min\{p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) \mid p > 0\}\,,$$

dann gilt

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) = \mathbb{Z}\omega = \{z\omega \mid z \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Beweis:
Zu i): Die Untergruppeneigenschaft ist klar.
Gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass unendlich viele $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ mit $p < r$ existieren, besitzt $M = \{\tau_0 + p \mid p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f), p < r\}$ für $\tau_0 \in \mathbb{H}$ einen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$. Da $f(\tau) = f(\tau_0)$ für alle $\tau \in M$ gilt, liefert der Identitätssatz für holomorphe Funktionen ([8], Satz 4.16) einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Zu ii): Die angegebene Menge ist nach Voraussetzung nicht leer; also ist die Wahl von ω nach i) möglich. Ist $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$, so haben wir $|p - \lfloor p/\omega \rfloor \omega| \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ und

$$|p - \lfloor p/\omega \rfloor \omega| = |p/\omega - \lfloor p/\omega \rfloor|\omega < \omega\,,$$

d.h. $p/\omega = \lfloor p/\omega \rfloor$ wegen der Wahl von ω und damit $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) \subseteq \mathbb{Z}\omega$. Die Inklusion $\mathbb{Z}\omega \subseteq \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ ist offensichtlich.

Satz 1.3
Es sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph und periodisch mit Periode $p \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

i) *Es existiert genau eine holomorphe Funktion $\hat{f}\colon \dot{\mathbb{E}} \to \mathbb{C}$ mit $f(\tau) = \hat{f}(\mathrm{e}^{2\pi i\tau/p})$. $\hat{f}$ ist in $\dot{\mathbb{E}}$ eindeutig in eine absolut kompakt konvergente (d.h. absolut konvergente und auf jedem Teilkompaktum absolut gleichmäßig konvergente) Laurent-Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad \textit{mit} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{\hat{f}(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad (n \in \mathbb{Z},\ 0 < r < 1)$$

entwickelbar.

ii) f *ist in* $\mathbb{H}$ *eindeutig in eine absolut kompakt konvergente Fourier-Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n\tau/p}$$

entwickelbar.
Für jedes $\tau_0 \in \mathbb{H}$, *jedes* $n \in \mathbb{Z}$ *und* $0 < r < 1$ *gilt*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{\hat{f}(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{p} \int\limits_{[\tau_0\,,\,\tau_0+p]} f(\tau)\mathrm{e}^{-2\pi i n\tau/p}\mathrm{d}\tau\,.$$

iii) Kann man $n_0 \in \mathbb{Z}$ *so wählen, dass* $a_n = 0$ *für* $n < n_0$ *ist, so gibt es zu jedem* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ein* $C \in \mathbb{R}^+$ *mit*

$$|f(\tau)| \le C\mathrm{e}^{-2\pi n_0 \operatorname{Im}\tau/p}$$

für $\tau \in \mathbb{H}$, $\operatorname{Im}\tau > \epsilon$.

Beweis:
Die holomorphe Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{H} \to \dot{\mathbb{E}} \\ \tau \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i\tau/p} = \mathrm{e}^{-2\pi \operatorname{Im}\tau/p}\mathrm{e}^{i\,2\pi \operatorname{Re}\tau/p} \end{cases}$$

ist surjektiv; genau die Gerade $\operatorname{Im}\tau = c \in \mathbb{R}^+$ wird auf die Kreislinie $|z| = \mathrm{e}^{-2\pi c/p}$ abgebildet.

Zu i): Ist $z \in \dot{\mathbb{E}}$ und $g(\tau) = z$ für ein $\tau \in \mathbb{H}$, so muss $\hat{f}(z) = f(\tau)$ sein; die Surjektivität von g ergibt einerseits die Eindeutigkeit von $\hat{f}$. Andererseits wird durch die Setzung $\hat{f}(z) := f(\tau)$ eine Funktion $\hat{f}$ definiert: Haben wir nämlich $g(\tau) = z = g(\tilde{\tau})$, so ist $\tau = \tilde{\tau} + kp$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ und $f(\tau) = f(\tilde{\tau})$ wegen der p-Periodizität von f. Weiterhin sieht man $\hat{f}|_{{}^-\mathbb{E}} = f \circ \frac{p}{2\pi i}\mathrm{Log}$ und $\hat{f}|_{\mathbb{E}^-} = f \circ \frac{p}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{Log}}$ (Def. 1.1 iv)), d. h. $\hat{f}$ ist holomorph auf $\dot{\mathbb{E}}$. Die Aussagen über die Laurent-Entwicklung ergeben sich nun direkt aus [8], Satz 5.10.

Zu ii): Wir müssen nur noch die Gleichheit der beiden Kurvenintegrale zeigen. Durchläuft t die Werte von 0 bis 2π, so durchläuft $\tau_0 + \frac{p}{2\pi}t$ die Strecke von τ_0 nach $\tau_0 + p$

und $e^{2\pi i(\tau_0+\frac{p}{2\pi}t)/p}$ den Kreis um 0 mit dem Radius $e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau_0/p}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int\limits_{[\tau_0,\tau_0+p]} f(\tau)e^{-2\pi in\tau/p}d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau_0+\frac{p}{2\pi}t)e^{-2\pi in(\tau_0+\frac{p}{2\pi}t)/p}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \hat{f}(e^{2\pi i(\tau_0+\frac{p}{2\pi}t)/p})e^{-2\pi in(\tau_0+\frac{p}{2\pi}t)/p}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\hat{f}(e^{2\pi i(\tau_0+\frac{p}{2\pi}t)/p})}{e^{-2\pi i(n+1)(\tau_0+\frac{p}{2\pi}t)/p}}\, ie^{-2\pi i(\tau_0+\frac{p}{2\pi}t)/p}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau_0/p}} \frac{\hat{f}(z)}{z^{n+1}}\,dz\,.
\end{aligned}$$

Zu iii): Für $z \in \dot{\mathbb{E}}$ gilt $\hat{f}(z) = z^{n_0}h(z)$ mit einem in $\mathbb{E}$ holomorphen h. Für $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Im}\tau > \epsilon$ haben wir $|g(\tau)| < e^{-2\pi\epsilon/p}$; wählen wir also ein $C \in \mathbb{R}^+$, so dass $|h(z)|$ für $z \in \mathbb{E}$ mit $|z| \le e^{-2\pi\epsilon/p} < 1$ durch C beschränkt ist, so ergibt sich

$$|f(\tau)| = |\hat{f}(g(\tau))| = |g^{n_0}(\tau)||h(g(\tau))| \le e^{-2\pi n_0 \operatorname{Im}\tau/p}C\,.$$

Lemma 1.4

Für $c, d \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$\frac{y^2}{1+|z|^2}(c^2+d^2) \le |cz+d|^2 \le 2(|z|^2+y^{-2})(c^2+d^2)\,.$$

Beweis:
Aus

$$0 \le (|c|-|d||z|)^2 = c^2 - 2|c||d||z| + d^2|z|^2$$

folgt zunächst

$$2|c||d||z| \le c^2 + d^2|z|^2$$

und mit der Dreiecksungleichung damit

$$\begin{aligned}
|cz+d|^2 &\le (|c||z|+|d|)^2 = c^2|z|^2 + 2|c||d||z| + d^2 \\
&\le c^2|z|^2 + c^2 + d^2|z|^2 + d^2 = (|z|^2+1)(c^2+d^2).
\end{aligned}$$

Für $|z| \ge 1$ ist $|z|^2+1 \le 2|z|^2$ und für $|z| < 1$ haben wir $|z|^2+1 \le |z|^2+y^{-2}$ wegen $y^{-2} > 1$, womit sich die obere Abschätzung ergibt.
Mit

$$|cz+d|^2 \ge \operatorname{Im}^2(cz+d) = c^2y^2$$

und

$$|\overline{z}|^2|cz+d|^2 = |\overline{z}(cz+d)|^2 = |\,c|z|^2+d\overline{z}\,|^2 = |\,c|z|^2+dz\,|^2 \geq \mathrm{Im}^2(c|z|^2+dz) = d^2y^2$$

sieht man

$$(1+|z|^2)|cz+d|^2 = |cz+d|^2 + |\overline{z}|^2|cz+d|^2 \geq c^2y^2 + d^2y^2 = y^2(c^2+d^2)\,,$$

die untere Abschätzung.

Lemma 1.5
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$.

i) Es gibt es ein $s \in \mathbb{Z}$, so dass $|(-|a|s+b)\lambda| < |a|$ gilt.

ii) Es gibt es ein $t \in \mathbb{Z}$, so dass $|-|c|t\lambda^2+d| < |c|\lambda$ gilt.

Beweis:
Zu i): Wir haben

$$\begin{aligned} |(-|a|s+b)\lambda| < |a| &\iff -|a| < -|a|s\lambda + b\lambda < |a| \\ &\iff |a|(\lambda s - 1) < b\lambda < |a|(\lambda s + 1)\,. \end{aligned}$$

Die Intervalle $]|a|(\lambda s-1)\,, |a|(\lambda s+1)[$ mit $s \in \mathbb{Z}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$: Die Intervallänge beträgt jeweils $2|a|$; der Abstand eines Intervallmittelpunktes $|a|\lambda s$ zu den Nachbarintervallmittelpunkten ist jeweils $|a|\lambda$, also kleiner als $2|a|$. Damit liegt $b\lambda$ in einem dieser Intervalle.

Zu ii): Wir haben

$$\begin{aligned} |-|c|t\lambda^2+d| < |c|\lambda &\iff -|c|\lambda < -|c|t\lambda^2 + d < |c|\lambda \\ &\iff |c|\lambda(\lambda t - 1) < d < |c|\lambda(\lambda t + 1)\,. \end{aligned}$$

Die Intervalle $]|c|\lambda(\lambda t-1)\,, |c|\lambda(\lambda t+1)[$ mit $s \in \mathbb{Z}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$: Die Intervallänge beträgt jeweils $2|c|\lambda$; der Abstand eines Intervallmittelpunktes $|c|\lambda^2 t$ zu den Nachbarintervallmittelpunkten ist jeweils $|c|\lambda^2$, also kleiner als $2|c|\lambda$. Damit liegt d in einem dieser Intervalle.

Lemma 1.6
Für $j \in \mathbb{Z}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin j\varphi = 2\cos\varphi \cdot \sin(j-1)\varphi - \sin(j-2)\varphi\,.$$

Beweis:
Zunächst ist

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\cos\varphi - (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2\cos\varphi - e^{-i\varphi}.$$

Es folgt

$$e^{ij\varphi} = e^{i(j-1)\varphi} \cdot e^{i\varphi} = 2\cos\varphi \cdot e^{i(j-1)\varphi} - e^{i(j-2)\varphi}.$$

Übergang zum Imaginärteil liefert die Behauptung.

Aus der Linearen Algebra benötigen wir das folgende Ergebnis:

Satz 1.7
Es seien $n, p \in \mathbb{N}$ und M eine komplexe $(p \times p)$-Matrix.
Ist dann M^n gleich der $(p \times p)$-Einheitsmatrix E_p, so existiert eine komplexe invertierbare $(p \times p)$-Matrix U derart, dass

$$UMU^{-1} = \operatorname{diag}(e^{2\pi i\varphi_1}, \dots, e^{2\pi i\varphi_p})$$

mit $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$ gilt.

Beweis:
Wegen $M^n = E_p$ ist das Minimalpolynom von M ein Teiler von $x^n - 1$, zerfällt also über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen. Nach [17], Kapitel V, F15 gibt es somit eine komplexe invertierbare $(p \times p)$-Matrix U, so dass $UMU^{-1} = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_p)$. Wegen

$$\operatorname{diag}(c_1^n, \dots, c_p^n) = (UMU^{-1})^n = UM^nU^{-1} = \operatorname{diag}(1, \dots, 1)$$

sind die Diagonalelemente von UMU^{-1} n-te Einheitswurzeln.

2 Heckegruppen

Definitionen 2.1
Für $p \in \mathbb{N}^*$ sei:

i)
$$\mathrm{Mat}(p\,,\mathbb{Z}) := \mathbb{Z}\text{-Algebra der ganzzahligen } p \times p\text{-Matrizen}$$

ii)
$$\mathrm{Mat}(p\,,\mathbb{R}) := \mathbb{R}\text{-Algebra der reellen } p \times p\text{-Matrizen}$$

iii)
$$\mathrm{Mat}(p\,,\mathbb{C}) := \mathbb{C}\text{-Algebra der komplexen } p \times p\text{-Matrizen}$$

iv)
$$E := E_p := p \times p\text{-Einheitsmatrix}$$

Vereinbarung 2.2
Die Elemente einer 2×2-Matrix M notieren wir, wenn nichts anderes gesagt wird, mit a, b, c, d, d.h.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Definitionen 2.3

i) Allgemeine lineare Gruppe vom Grad p über $\mathbb{R}$

$$\mathrm{GL}(p, \mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{Mat}(p, \mathbb{R}) \mid \det M \neq 0\}$$

ii) Allgemeine lineare Gruppe vom Grad p über $\mathbb{C}$

$$\mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) := \{M \in \mathrm{Mat}(p, \mathbb{C}) \mid \det M \neq 0\}$$

iii) Spezielle lineare Gruppe vom Grad p über $\mathbb{R}$

$$\mathrm{SL}(p, \mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{Mat}(p, \mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$$

iv) Spezielle lineare Gruppe vom Grad p über $\mathbb{C}$

$$\mathrm{SL}(p, \mathbb{C}) := \{M \in \mathrm{Mat}(p, \mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$$

v) Projektive spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über $\mathbb{R}$

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{E, -E\}$$

vi) (homogene elliptische) Modulgruppe

$$\overline{\Gamma} := \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) := \{M \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{Z}) \mid \det M = 1\}$$

Definitionen 2.4

i) Den $\mathbb{C}$-Vektorraum der in $\mathbb{H}$ holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit

$$\mathcal{O}(\mathbb{H})\,.$$

ii) Die Gruppe aller biholomorphen Abbildungen $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\,.$$

iii) Die Gruppe aller C^∞-Diffeomorphismen $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Dif}(\mathbb{H})\,.$$

Als Gruppenoperationen haben wir natürlich in 2.3 die Matrizenmultiplikation, in 2.4 ii), iii) die Abbildungskomposition.

Die Elemente aus $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ sind spezielle gebrochen lineare Transformationen:

Satz 2.5

$$V \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \iff \begin{array}{l} \text{Es gibt } a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1, \text{ so dass} \\ V\tau := V(\tau) = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d} \ \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H} \text{ gilt}. \end{array}$$

Beweis:
[8], Lemma 11.12

Definitionen 2.6

i) Für

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

wird durch

$$\Phi_M(\tau) := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

ein $\Phi_M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ definiert.

ii) Statt Φ_M und $\Phi_M(\tau)$ schreiben wir auch $\widehat{M}$ und $\widehat{M}\tau$ oder einfach M und $M\tau$.

iii)
$$M{:}\tau := c\tau + d$$

Satz 2.7
Für $L, M, N \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\Phi_E = \mathrm{id}, \quad \Phi_{-M} = \Phi_M, \quad \Phi_{LM} = \Phi_L \circ \Phi_M, \quad \Phi_{M^{-1}} = \Phi_M^{-1},$$

$$\operatorname{Im}\Phi_M(\tau) = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau + d|^2} = \frac{\operatorname{Im}\tau}{(cx+d)^2 + c^2y^2},$$

$$MN{:}\tau = (M{:}N\tau)(N{:}\tau).$$

Beweis:
[15], II.1.1., [18], (2.2.2)

Satz 2.8
Durch
$$\Phi : \begin{cases} \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \\ M \mapsto \Phi_M \end{cases}$$
wird ein Gruppenepimorphismus mit $\mathrm{Kern}\,\Phi = \{E, -E\}$ *definiert.*
Es gilt
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}).$$

Beweis:
[15], II.1.3.

Definition 2.9
Ist $V \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, so schreiben wir (falls die Mehrdeutigkeit keine Probleme verursacht) $\overline{V}$ oder auch einfach V für jedes der zwei $\bmod \{E, -E\}$ äquivalenten Elemente aus $\Phi^{-1}[\{V\}]$ und setzen (bis auf den Faktor -1 eindeutig)

$$V{:}\tau := \overline{V}{:}\tau$$

für $\tau \in \mathbb{H}$.

Definitionen 2.10
Es sei G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

i)

$$G \text{ heißt } \textit{diskret} \;:\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Phi^{-1}[G] \right\} \text{ ist diskrete Teilmenge des } \mathbb{R}^4.$$

ii)

$$G \text{ heißt } \textit{diskontinuierlich} \;:\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{Es gibt ein } \tau_0 \in \mathbb{H} \text{ und eine Umgebung } U(\tau_0) \\ \text{von } \tau_0, \text{ so dass für alle } V \in G, V \neq \mathrm{id}, \\ V[U(\tau_0)] \cap U(\tau_0) = \varnothing \text{ gilt }. \end{array}$$

Definitionen 2.11
Es sei G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

i) $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ heißen *G-äquivalent* genau dann, wenn es ein $V \in G$ mit $V(\tau_1) = \tau_2$ gibt.

ii) Eine offene Menge $F \subseteq \mathbb{H}$ heißt *Fundamentalbereich von G* genau dann, wenn

1) Je zwei verschiedene $\tau_1, \tau_2 \in F$ sind nicht G-äquivalent.

2) Jedes $\tau \in \mathbb{H}$ ist G-äquivalent zu einem $\overline{\tau} \in \overline{F}$.

Die Definitionen 2.10, 2.11 übertragen sich vermöge Φ auf Untergruppen von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Satz 2.12
Es sei G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

$$G \text{ diskret } \Leftrightarrow G \text{ diskontinuierlich} \Leftrightarrow G \text{ besitzt einen Fundamentalbereich}$$

Beweis:
[15], II.,4., [16], Chapter 1

Definitionen 2.13
Es sei

$$T : \begin{cases} \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$S_\lambda : \begin{cases} \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ \tau \mapsto \tau + \lambda \end{cases}$$

und

$$U_\lambda := TS_\lambda \,.$$

Definitionen 2.14

i) Die *Heckegruppe zu* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ist die von T und S_λ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$:

$$G(\lambda) := \langle T, S_\lambda \rangle = \langle T, U_\lambda \rangle \; < \mathrm{Aut}(\mathbb{H})\,.$$

Die Elemente von $G(\lambda)$ nennen wir *Hecketransformationen zu* λ.

ii)

$$\begin{aligned} \overline{G}(\lambda) \; &:= \; \Phi^{-1}[G(\lambda)] = \left\langle \overline{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \overline{S}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \; \left\langle \overline{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \overline{U}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \right\rangle \; < \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

heißt die Heckematrizengruppe zu λ.
Die Elemente von $\overline{G}(\lambda)$ nennen wir die *Heckematrizen zu* λ.

Vereinbarung 2.15

Falls keine Probleme zu erwarten sind, unterscheiden wir im folgenden oft nicht zwischen einer Hecketransformation V und den zwei durch Φ^{-1} zugeordneten, mod $\{E\,, -E\}$ äquivalenten Heckematrizen.

Satz 2.16

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}^+$*.*

$$G(\lambda) \text{ diskontinuierlich} \Leftrightarrow \lambda \geq 2 \text{ oder } \lambda = \lambda_q := 2\cos\frac{\pi}{q} \text{ mit } q \in \mathbb{N}, q \geq 3$$

Beweis:
[6] oder [5]

Vereinbarung 2.17

Im folgenden betrachten wir nur Heckegruppen zu $\lambda = \lambda_q := 2\cos\frac{\pi}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}, q \geq 3$.
Man beachte, dass damit $\lambda \in [1\,, 2[$, also $1 \geq 2 - \lambda > 0$.

Für einige Heckegruppen lassen sich die Elemente explizit angeben. So gilt zum Beispiel:

Satz 2.18
Es sei $\lambda \in \{1 = \lambda_3\,, \sqrt{2} = \lambda_4\,, \sqrt{3} = \lambda_6\}$. *Dann gilt*

$$\overline{G}(\lambda) = \overline{\Gamma}(\lambda) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \\ ad - \lambda^2 bc = 1 \end{matrix} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} a\lambda & b \\ c & d\lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \\ \lambda^2 ad - bc = 1 \end{matrix} \right\}.$$

Beweis:
Man prüft leicht nach, dass $\overline{\Gamma}(\lambda)$ eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ist. Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma}(\lambda)$$

folgt $\overline{G}(\lambda) \subseteq \overline{\Gamma}(\lambda)$ und wir müssen nur noch $\overline{\Gamma}(\lambda) \subseteq \overline{G}(\lambda)$ zeigen. Wegen

$$\begin{pmatrix} a\lambda & b \\ c & d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a\lambda \\ -d\lambda & c \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \overline{G}(\lambda)}$$

reicht es dazu,

$$\overline{\Gamma}_N(\lambda) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \\ ad - \lambda^2 bc = 1 \end{matrix} \right\} \subseteq \overline{G}(\lambda)$$

nachzuweisen. Dies geschieht durch Induktion über $|a|$.
Es sei also

$$M := \begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma}_N(\lambda)\,.$$

Induktionsanfang:
Ist $a = 0$, so gilt $\lambda = 1$ und

$$M = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

wegen $ad - \lambda^2 bc = 1$. Die Produktdarstellung

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \pm \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \overline{G}(1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \overline{G}(1)}$$

zeigt $M \in \overline{G}(1)$.

Vor dem Induktionsschritt stellen wir drei Hilfsergebnisse zusammen.

1. Hilfsergebnis:
Ist $b = 0$, so gilt $a = d = \pm 1$ wegen $ad - \lambda^2 bc = 1$ und

$$M = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Produktdarstellung

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c\lambda & 1 \end{pmatrix} = \mp \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \overline{G}(\lambda)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -c\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \overline{S}_\lambda^{-c} \in \overline{G}(\lambda)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \overline{G}(\lambda)}$$

liefert $M \in \overline{G}(\lambda)$.

2. Hilfsergebnis: Es gibt eine Matrix aus $N \in \overline{G}(\lambda)$, so dass

$$MN = \begin{pmatrix} a & \tilde{b}\lambda \\ c\lambda & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

mit $|\tilde{b}|\lambda < |a|$ gilt.
Beweis: Wir wählen zunächst (Lemma 1.5 i)) ein $s \in \mathbb{Z}$ mit

$$|(-|a|s + b)\lambda| < |a|.$$

Es folgen

$$\begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{sgn}(a)s\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \overline{G}(\lambda)} = \begin{pmatrix} a & (-|a|s + b)\lambda \\ c\lambda & -\operatorname{sgn}(a)cs\lambda^2 + d \end{pmatrix}$$

und damit die Behauptung.

3. Hilfsergebnis: Es gibt eine Matrix aus $P \in \overline{G}(\lambda)$, so dass

$$MP = \begin{pmatrix} a & \tilde{b}\lambda \\ c\lambda & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

mit $|\tilde{d}| < |c|\lambda$ gilt.
Beweis: Wir wählen zunächst (Lemma 1.5 ii)) ein $t \in \mathbb{Z}$ mit

$$|-|c|t\lambda^2 + d| < |c|\lambda.$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{sgn}(c)t\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \overline{G}(\lambda)} = \begin{pmatrix} a & (-\operatorname{sgn}(c)at + b)\lambda \\ c\lambda & -|c|t\lambda^2 + d \end{pmatrix},$$

also die Behauptung.

Wir führen den Induktionsschritt von $0, \ldots, n$ auf $n+1$, indem wir die Matrix M mit $a = n+1$ fortlaufend mit Matrizen aus $\overline{G}(\lambda)$ multiplizieren, so dass entweder $b = 0$ oder $|a|$ verkleinert wird.
Ausgehend von M gehen wir nach dem ersten Hilfsergebnis über zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} a & \tilde{b}\lambda \\ c\lambda & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

mit $|\tilde{b}|\lambda < |a|$. Ist $\tilde{b}\lambda = 0$, so sind wir nach dem 1. Hilfsergebnis fertig. Andernfalls konjugieren wir mit $\overline{T}$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} -\tilde{d} & c\lambda \\ \tilde{b}\lambda & -a \end{pmatrix} .$$

Jetzt liefert das 3. Hilfsergebnis den Übergang zu

$$\begin{pmatrix} -\tilde{d} & \tilde{c}\lambda \\ \tilde{b}\lambda & -\tilde{a} \end{pmatrix}$$

mit $|\tilde{a}| < |\tilde{b}|\lambda$. Eine weitere Konjugation mit $\overline{T}$ ergibt

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b}\lambda \\ \tilde{c}\lambda & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

mit $|\tilde{a}| < |a|$.

Korollar 2.19

$$G(1) = \Gamma \quad \text{(inhomogene elliptische Modulgruppe)}$$

Für alle von uns betrachteten Heckegruppen gelingt eine Abschätzung der Matrixelemente nach unten (Satz 2.26). Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Definition 2.20
Für $r \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ definieren wir

$$u_r := u_r(\lambda_q) := \frac{\sin r\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{q}} .$$

Lemma 2.21

i)

$$u_{-1} = -1, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$

ii)

$$u_{q-1} = 1, \quad u_q = 0, \quad u_{q+1} = -1$$

iii)

$$u_r = -u_{r-2} + u_{r-1}\lambda_q \quad \text{für } r \in \mathbb{N}^*$$

iv)

$$u_r \geq \lambda_q \quad \text{für } q \geq 4,\ r = 2, \ldots, q-2$$

v)

$$u_{r-1}u_r + u_r u_{r+1} - \lambda_q u_r^2 = 0 \quad \text{für } r \in \mathbb{N}$$

vi)

$$u_{r-1}^2 - \lambda_q u_{r-1}u_r + u_r^2 = 1 \quad \text{für } r \in \mathbb{N}$$

Beweis:

i) Definition, $\sin 0 = 0$, $\sin -x = -\sin x$

ii) $u_{q-1} \sin\frac{\pi}{q} = \sin(\pi - \frac{\pi}{q}) = \sin\frac{\pi}{q}, \quad u_{q+1} \sin\frac{\pi}{q} = \sin(\pi + \frac{\pi}{q}) = -\sin\frac{\pi}{q}$

iii)

$$u_r \sin\frac{\pi}{q} = \sin r\frac{\pi}{q} \overset{1.6}{=} 2\cos\frac{\pi}{q} \cdot \sin(r-1)\frac{\pi}{q} - \sin(r-2)\frac{\pi}{q}$$

iv) Zunächst erhält man mit i), ii) und iii)

$$u_2 = -u_0 + u_1\lambda_q = \lambda_q$$

(womit für $q = 4$ alles bewiesen ist) und

$$0 = u_q = -u_{q-2} + u_{q-1}\lambda_q = -u_{q-2} + \lambda_q\,, \text{ also } u_{q-2} = \lambda_q\,.$$

Für $q \geq 5$ betrachten wir auf $[2\,, q-2]$ die durch

$$f(x) = \frac{\sin x\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{q}}$$

definierte Funktion f.
Wir haben $u_2 = f(2) = f(q-2) = u_{q-2} = \lambda_q$, $f'(x) > 0$ für $x \in [2\,, \frac{q}{2}[$ und $f'(x) < 0$ für $x \in]\frac{q}{2}\,, q-2]$, d.h. $f(x) \geq \lambda_q$ im Intervall $[2\,, q-2]$.

v)

$$u_{r-1}u_r + u_r u_{r+1} - \lambda_q u_r^2 \quad = \quad u_r(u_{r-1} + u_{r+1} - \lambda_q u_r) \overset{iii)}{=} 0$$

vi) Beweis durch Induktion:

$r = 0$:

$$u_{-1}^2 - \lambda_q u_{-1} u_0 + u_0^2 \overset{i)}{=} (-1)^2 - \lambda_q (-1) 0 + 0^2 = 1$$

$r \to r+1$:

$$\begin{aligned} u_r^2 - \lambda_q u_r u_{r+1} + u_{r+1}^2 &\overset{iii)}{=} u_r^2 - \lambda_q u_r(-u_{r-1} + u_r \lambda_q) + (-u_{r-1} + u_r \lambda_q)^2 \\ &= u_{r-1}^2 + \lambda_q u_{r-1} u_r + u_r^2 = 1 \end{aligned}$$

Lemma 2.22

Für $r \in \mathbb{N}$ ist

$$\overline{U}_\lambda^r = \begin{pmatrix} -u_{r-1} & -u_r \\ u_r & u_{r+1} \end{pmatrix}.$$

Beweis durch Induktion:

$r = 0$:

$$\overline{U}_\lambda^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2.21\ i)}{=} \begin{pmatrix} -u_{-1} & -u_0 \\ u_0 & u_1 \end{pmatrix}$$

$r \to r+1$:

$$\begin{aligned} \overline{U}_\lambda^{r+1} &= \begin{pmatrix} -u_{r-1} & -u_r \\ u_r & u_{r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_r & u_{r-1} - u_r\lambda \\ u_{r+1} & -u_r + u_{r+1}\lambda \end{pmatrix} \\ &\overset{2.21\ iii)}{=} \begin{pmatrix} -u_r & -u_{r+1} \\ u_{r+1} & u_{r+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korollar 2.23

U_λ hat in $G(\lambda)$ die Ordnung q, $\overline{U}_\lambda$ hat in $\overline{G}(\lambda)$ die Ordnung $2q$.

Beweis:

2.21, 2.22 zeigen: $\overline{U}_\lambda^r \neq \pm E_2$ für $r = 1, \ldots, q-1$ und $\overline{U}_\lambda^q = -E_2$.

Korollar 2.24

Es gilt

$$\operatorname{Im} U_\lambda^r \tau < \operatorname{Im} \tau$$

für $\tau \in \mathbb{H}$ mit $|\tau| > 1, |\operatorname{Re} \tau| \leq \frac{\lambda}{2}$ und $r = 1, \ldots, q-1$.

Beweis:
Wir haben nach Lemma 2.21 für $r = 1, \ldots, q-1$

$$u_r^2 > 0, \quad u_r u_{r+1} \geq 0\,,$$

also

$$\begin{aligned}
|u_r\tau + u_{r+1}|^2 &= (u_r x + u_{r+1})^2 + u_r^2 y^2 = u_r^2(x^2+y^2) + 2u_r u_{r+1} x + u_{r+1}^2 \\
&> u_r^2 + 2u_r u_{r+1} x + u_{r+1}^2 \geq u_r^2 - \lambda u_r u_{r+1} + u_{r+1}^2 \overset{2.21\ vi)}{=} 1\,.
\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\operatorname{Im} U_\lambda^r \tau = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|u_r\tau + u_{r+1}|^2} < \operatorname{Im}\tau$$

zusammen mit 2.7 und 2.22.

Korollar 2.25
Es sei $r = 1, \ldots, q-1$.

$$(\tau \in \mathbb{H} \text{ } \mathit{mit} \text{ } \operatorname{Re}\tau > 0) \vee (\tau \in \mathbb{H} \text{ } \mathit{mit} \text{ } |\tau| \geq 1, |\operatorname{Re}\tau| \leq \frac{\lambda}{2}) \Longrightarrow \operatorname{Re} U_\lambda^r \tau < 0\,.$$

Beweis:
Zunächst gilt nach 2.22

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} U_\lambda^r \tau &= \operatorname{Re} \frac{-u_{r-1}\tau - u_r}{u_r\tau + u_{r+1}} \\
&= -\frac{(u_{r-1}x + u_r)(u_r x + u_{r+1}) + u_{r-1}u_r y^2}{|u_r\tau + u_{r+1}|^2} && (1) \\
&= -\frac{u_{r-1}u_r|\tau|^2 + (u_{r-1}u_{r+1} + u_r^2)x + u_r u_{r+1}}{|u_r\tau + u_{r+1}|^2} \\
&= -\frac{u_{r-1}u_r|\tau|^2 + u_r u_{r+1} + 2u_r^2 x + \overbrace{(u_{r-1}u_{r+1} - u_r^2)}^{=-\det \overline{U}_\lambda^r = -1} x}{|u_r\tau + u_{r+1}|^2} \\
&= -\frac{u_{r-1}u_r|\tau|^2 + u_r u_{r+1} + 2u_r^2 x - x}{|u_r\tau + u_{r+1}|^2}\,. && (2)
\end{aligned}$$

Sei zunächst $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Re}\tau > 0$. Für $r = 1, \ldots, q-1$ haben wir nach Lemma 2.21

$$(u_{r-1}x + u_r)(u_r x + u_{r+1}) \geq u_r^2 x > 0$$

und

$$u_{r-1}u_r y^2 \geq 0\,.$$

(1) liefert die Konklusion.
Sei nun $\tau \in \mathbb{H}$ mit $|\tau| \geq 1, |\operatorname{Re}\tau| \leq \frac{\lambda}{2}$. Für $r = 1, \ldots, q-1$ haben wir nach Lemma 2.21

$$u_{r-1}u_r, u_{r-1}u_{r+1} \geq 0\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & u_{r-1}u_r|\tau|^2 + u_r u_{r+1} + 2u_r^2 x - x \geq \\ & \quad u_{r-1}u_r + u_r u_{r+1} - \lambda u_r^2 + \frac{\lambda}{2} \overset{2.21\ v)}{=} \frac{\lambda}{2} > 0\,. \end{aligned}$$

(2) ergibt das Gewünschte.

Satz 2.26

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \overline{G}(\lambda) \Longrightarrow m_{kl} = 0 \ \vee \ |m_{kl}| = 1 \ \vee \ |m_{kl}| \geq \lambda \text{ für alle } k, l \in \{1\,, 2\}$$

Beweis:
Es ist (Lemmma 2.22)

$$(-\overline{T})\overline{U}_\lambda^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{r-1} & -u_r \\ u_r & u_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_r & u_{r+1} \\ u_{r-1} & u_r \end{pmatrix}$$

für $r = 1, \ldots, q-1$, d.h. (Lemma 2.21) alle Elemente von $(-\overline{T})\overline{U}_\lambda^r$ sind entweder 0, 1 oder $\geq \lambda$. Dies gilt dann auch bei einem Produkt der Form

$$P = (-\overline{T})\overline{U}_\lambda^{r_1} \cdots (-\overline{T})\overline{U}_\lambda^{r_m}, \quad r_1, \ldots, r_m \in \{1, \ldots, q-1\}\,.$$

$T^2 = -E_2$, 2.23 und 2.14 zeigen, dass sich jedes $M \in \overline{G}(\lambda)$ schreiben läßt als $M = \pm P$, $M = \pm\overline{T}P$ oder $M = \pm P\overline{T}$. Da eine Multiplikation mit $\overline{T}$ höchstens die Anordnung oder die Vorzeichen der Matrizenelemente ändert, ist alles bewiesen.

Korollar 2.27
Es sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{G}(\lambda)\,.$$

Dann gilt $|c\tau + d|^2 \geq 2 - \lambda$ *für* $\tau \in \mathbb{H}$ *mit* $|\tau| \geq 1$ *und* $|\operatorname{Re}\tau| \leq \frac{\lambda}{2}$.

Beweis:
Ist $c = 0$, so ist $d \neq 0$, also nach 2.26 und 2.17 $|c\tau + d|^2 = |d|^2 \geq 1 \geq 2 - \lambda$. Ist $d = 0$, so ist $c \neq 0$, also $|c\tau + d|^2 = |c|^2|\tau|^2 \geq |c|^2 \geq 1 \geq 2 - \lambda$ nach Voraussetzung, 2.26 und 2.17. Für $c, d \neq 0$ haben wir

$$\begin{aligned}
|c\tau + d|^2 &= (c\tau + d)(c\overline{\tau} + d) = c^2|\tau|^2 + 2cd\operatorname{Re}\tau + d^2 \\
&\overset{1)}{\geq} c^2 - \lambda|cd| + d^2 = (|c| - |d)^2 + (2 - \lambda)|cd| \\
&\geq (2 - \lambda)|cd| \overset{2)}{\geq} 2 - \lambda
\end{aligned}$$

mit 1): Voraussetzung an τ, 2): 2.26 und 2.17.

Korollar 2.28
Es sei

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{G}(\lambda),\ \tau \in \mathbb{H}\,.$$

Dann ist für $c = 0$

$$\operatorname{Im}\tau = \operatorname{Im}V\tau$$

und für $c \neq 0$

$$\operatorname{Im}\tau \leq \frac{1}{\operatorname{Im}V\tau}\,.$$

Beweis:
Ist $c = 0$, so gilt $a = d = 1$ oder $a = d = -1$ wegen 2.26 und $\det V = 1$, d.h. aber $\operatorname{Im}\tau = \operatorname{Im}V\tau$.
Sei nun $c \neq 0$, also $c^2 \geq 1$ nach 2.26. Es folgt zusammen mit $\tau = V^{-1}V\tau$ und $V^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\tau &\overset{2.7}{=} \frac{\operatorname{Im}V\tau}{|-cV\tau + a|^2} = \frac{\operatorname{Im}V\tau}{c^2(\operatorname{Im}V\tau)^2 + (a - c\operatorname{Re}V\tau)^2} \\
&\leq \frac{\operatorname{Im}V\tau}{c^2(\operatorname{Im}V\tau)^2} \leq \frac{\operatorname{Im}V\tau}{(\operatorname{Im}V\tau)^2} = \frac{1}{\operatorname{Im}V\tau}\,.
\end{aligned}$$

Satz 2.29

$$F_\lambda := \{\tau \in \mathbb{H}\,|\,|\tau| > 1, |\operatorname{Re}\tau| < \frac{\lambda}{2}\}$$

ist ein Fundamentalbereich von $G(\lambda)$*.*

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt (2.30 — vor 2.36).

Definitionen 2.30
Es seien $T_1, T_2, T_3 \in \mathrm{Dif}(\mathbb{H})$ definiert durch

$$T_1 : \begin{cases} \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ \tau \mapsto \frac{\tau}{|\tau|^2} = \frac{1}{\overline{\tau}} \end{cases} ,$$

$$T_2 : \begin{cases} \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ \tau \mapsto -\overline{\tau} \end{cases}$$

und

$$T_3 : \begin{cases} \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ \tau \mapsto -(\overline{\tau} + \lambda) \end{cases} .$$

Auf $\tau \in \mathbb{H}$ angewandt bewirkt T_1 eine Spiegelung an der Einheitskreislinie, T_2 eine Spiegelung an der imaginären Achse und T_3 eine Spiegelung an der durch $\mathrm{Re}\,\tau = -\frac{\lambda}{2}$ definierten Gerade.

Mit der Definition folgt unmittelbar:

Lemma 2.31

i)

$$\mathrm{ord}(T_1) = \mathrm{ord}(T_2) = \mathrm{ord}(T_3) = 2$$

ii)

$$T_1 T_2 = T_2 T_1 = T \quad T_1 T_3 = U_\lambda,\ T_3 T_1 = U_\lambda^{-1} \quad T_2 T_3 = S_\lambda,\ T_3 T_2 = S_\lambda^{-1}$$

iii) Die Komposition einer geraden Anzahl von $T_1 = T_1^{-1}$, $T_2 = T_2^{-1}$, $T_3 = T_3^{-1}$ ist Element von $G(\lambda)$ und umgekehrt.

iv)

$$T_2[F_\lambda] = F_\lambda \quad T_2[\overline{F}_\lambda] = \overline{F}_\lambda$$

v)

$$G(\lambda) < \langle T_1 , T_2 , T_3 \rangle < \mathrm{Dif}(\mathbb{H})$$

vi) Zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ existiert ein $V \in \langle T_2 , T_3 \rangle$, so dass

$$V\tau \in M_\lambda := \{\tau \in \mathbb{H} \mid -\frac{\lambda}{2} \leq \mathrm{Re}\,\tau \leq 0\} .$$

Gilt $-\lambda \leq \mathrm{Re}\,\tau < -\frac{\lambda}{2}$, so kann man $V = T_3$ wählen.

vii) *Konvergiert eine Folge* (τ_n)*,* $\tau_n \in \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau_n| < 1\,,\, -\frac{\lambda}{2} \leq \operatorname{Re}\tau \leq 0\}$*, gegen ein Element aus* $\{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau_n| = 1\,,\, -\frac{\lambda}{2} < \operatorname{Re}\tau \leq 0\}$*, so gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$*, so dass* $T_1\tau_{n_0} \in \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau_n| > 1\,,\, -\frac{\lambda}{2} \leq \operatorname{Re}\tau \leq 0\}$*.*

Lemma 2.32
Zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ *existiert ein* $V \in G(\lambda)$*, so dass* $V\tau \in \overline{F}_\lambda$*.*

Beweis:
Wir zeigen, dass es ein $V \in \langle T_1\,,T_2\,,T_3\rangle$ gibt, so dass $V\tau \in \overline{F}_\lambda$; wegen 2.31 iii), iv) ist dann alles bewiesen.
Dazu definieren wir induktiv eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tau_n \in M_\lambda$:

$$\tau_0 := V_0\tau$$

mit einem $V_0 \in \langle T_2\,,T_3\rangle$ gemäß Lemma 2.31 vi).
Ist τ_n schon definiert, so sei

$$\tau_{n+1} := V_{n+1}T_1\tau_n\,.$$

Dabei sei $V_{n+1} \in \langle T_2\,,T_3\rangle$ nach Lemma 2.31 vi) so gewählt, dass $V_{n+1}T_1\tau_n \in M_\lambda$.
Ist eines unserer τ_n vom Betrage größer oder gleich 1, so sind wir fertig. Dass dies immer eintritt, beweisen wir durch Widerspruch.
Es gelte also $|\tau_n| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist zunächst (y_n) wegen

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{|\tau_n|^2} > y_n > 0$$

eine streng monoton steigende Folge in $]0\,,1[$.
Ist τ ein Häufungswert der beschränkten Folge (τ_n) mit $|\tau| < 1$, so exitiert eine Teilfolge $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (τ_n) mit $|\tau_{n_k}|^2 \leq c < 1$ und

$$y_{n_k} \geq \frac{y_{n_{k-1}}}{c} \geq \ldots \geq \frac{y_{n_1}}{c^{k-1}} \to \infty$$

liefert einen Widerspruch zur Beschränktheit von (y_n).
2.31 vii) zeigt nun, dass der einzige Häufungswert τ von (τ_n) der Schnittpunkt der Einheitskreislinie mit der Geraden $\operatorname{Re}\tau = -\frac{\lambda}{2}$ ist.
Es ist $\arg\tau_n > \arg\tau$ (und damit $x_n < 0$) für $n \in \mathbb{N}$, denn aus $\arg\tau_n \leq \arg\tau$ folgt wegen

$$y_{n+1} = \frac{|\tau_n|\sin(\arg\tau_n)}{|\tau_n|^2} \geq \frac{|\tau_n|\sin(\arg\tau)}{|\tau_n|^2} > |\tau|\sin(\arg\tau) = y$$

ein Widerspruch zur streng monoton steigenden Konvergenz von (y_n) gegen y.
Wegen $\operatorname{Re}T_1\tau = -\frac{\lambda}{2}$ gibt es daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $-\lambda < \operatorname{Re}T_1\tau_n < -\frac{\lambda}{2}$, also (2.31

vi)) $\tau_{n+1} = T_3 T_1 \tau_n$ für $n \geq n_0$ gilt. Wir erhalten für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -\lambda - \frac{x_n}{|\tau_n|^2} - x_n = -\frac{1}{x_n}(\lambda x_n + \cos^2(\arg\tau_n) + x_n^2) \\ &> -\frac{1}{x_n}(\lambda x_n + \cos^2(\arg\tau) + x_n^2) = -\frac{1}{x_n}(\lambda x_n + \frac{\lambda^2}{4} + x_n^2) \\ &\geq -\frac{1}{x_n}(x_n + \frac{\lambda}{2})^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n \geq n_0}$ eine streng monoton wachsende Zahlenfolge in $[-\frac{\lambda}{2}, 0]$. Dies steht im Widerspruch zu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re}\tau = -\frac{\lambda}{2}$.

Lemma 2.33
Gilt $V\tau_1 = \tau_2$ *für* $\tau_1, \tau_2 \in F_\lambda$, $V \in \langle T_1, T_3\rangle$, *so ist* $V = \mathrm{id}$.

Beweis:
Es sei o.B.d.A. $\operatorname{Im}\tau_1 \leq \operatorname{Im}\tau_2$. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass $V\tau_1 = \tau_2$ mit $\mathrm{id} \neq V \in \langle T_1, T_3\rangle$. Dann ist $V \neq T_1$ und $V \neq T_3$, da andernfalls nicht $\tau_1, \tau_2 \in F_\lambda$ sein können. Mit Lemma 2.31 i) sieht man, dass sich V entweder als $V = T_3^\rho (T_1 T_3)^r$ oder als $V = T_3^\rho (T_3 T_1)^r$ mit $\rho = 0, 1$ und $r \in \mathbb{Z}^*$ darstellen läßt. Wegen $(T_1 T_3)^{-1} = T_3 T_1$ gibt es immer die erste Darstellungform. Da nach Korollar 2.23 $T_1 T_3 = U_\lambda$ die Ordnung q besitzt können wir von einer Darstellung $V = T_3^\rho (T_3 T_1)^r$ mit $\rho = 0, 1$ und $r = 1, \ldots, q-1$ ausgehen. Mit 2.24 ergibt sich dann

$$\operatorname{Im}\tau_2 = \operatorname{Im} V\tau_1 = \operatorname{Im}(T_1 T_3)^r \tau_1 = \operatorname{Im} U_\lambda^r \tau_1 < \operatorname{Im}\tau_1$$

im Widerspruch zu $\operatorname{Im}\tau_1 \leq \operatorname{Im}\tau_2$.

Lemma 2.34
Es sei $V \in \langle T_1, T_3\rangle$, $V \neq \mathrm{id}$, $V \neq T_1$.

$$(\tau \in \mathbb{H} \textit{ mit } \operatorname{Re}\tau > 0) \vee (\tau \in F_\lambda) \Longrightarrow \operatorname{Re} V\tau < 0$$

Beweis:
Wir können ausgehen (vgl. den Beweis zu 2.33) von einer Darstellung $V = T_1^\rho (T_1 T_3)^r$ mit $\rho = 0, 1$ und $r = 1, \ldots, q-1$. Wegen $\operatorname{sgn}\operatorname{Re} T_1\tau = \operatorname{sgn}\operatorname{Re}\tau$ genügt es, sich auf $V = (T_1 T_3)^r = U_\lambda^r$ zu beschränken. Wegen Korollar 2.25 ist damit die Implikation bewiesen.

Beweis von 2.29:
Wir zeigen durch Widerspruch: Aus $\tau_1, \tilde{\tau} \in F_\lambda$, $V \in \langle T_1, T_2, T_3\rangle$ und $V\tau_1 = \tilde{\tau}$ folgt $V = \mathrm{id}$ oder $V = T_2$. Wegen 2.31 v), $T_2 \notin G(\lambda)$ und Lemma 2.32 ist dann alles

nachgewiesen.
Unter allen $V \in \langle T_1, T_2, T_3 \rangle$, $V \neq \mathrm{id}$, $V \neq T_2$, für die es $\tau_1, \tilde{\tau} \in F_\lambda$ mit $V\tau_1 = \tilde{\tau}$ gibt, wählen wir ein V, das als Produkt minimal vieler T_1, T_2, T_3 darstellbar ist. Nach Lemma 2.33 muss in dieser Darstellung mindestens ein T_2 vorkommen. Jedoch kann keine minimale Produktdarstellung mit T_2 beginnen oder enden; denn wegen 2.31 iv) könnte man diese Faktoren streichen, um einen Widerspruch zur minimalen Wahl zu erhalten. Eine minimale Darstellung hat also die Form

$$V = W_1 T_2 W_2 \cdots T_2 W_{n+1}$$

mit $n \in \mathbb{N}^*$, $W_l \in \langle T_1, T_3 \rangle$, $W_l \neq \mathrm{id}$ für $l = 1, \dots, n+1$.
Es ist $W_1, W_{n+1} \neq T_1$, denn sonst hätte man wegen $T_1 T_2 = T_2 T_1$ eine minimale Darstellung, die mit T_2 beginnt bzw. endet. Ebenfalls ist $W_l \neq T_1$ für $l = 2, \dots, n$, denn sonst enthielte die Produktdarstellung eine Sequenz $T_2 T_1 T_2$, die man wegen $T_1 T_2 = T_2 T_1$ und $T_2 T_2 = \mathrm{id}$ zu T_1 verkürzen könnte.
Es sei nun für $l = 2, \dots, n+1$

$$\tau_l := T_2 W_l \cdots T_2 W_{n+1} \tau_1 \,.$$

Es gilt

$$\mathrm{Re}\, \tau_2 = \mathrm{Re}\, W_1^{-1} V \tau_1 \overset{2.34}{<} 0 \,.$$

Haben wir $\mathrm{Re}\, \tau_l < 0$ für ein $l = 2, \dots, n$, so ist $\mathrm{Re}\, T_2 \tau_l > 0$ und

$$\mathrm{Re}\, \tau_{l+1} = \mathrm{Re}\, W_l^{-1} T_2 \tau_l \overset{2.34}{<} 0 \,.$$

Damit ist induktiv $\mathrm{Re}\, \tau_{n+1} < 0$ gezeigt.
Andererseits gilt aber (2.34) $\mathrm{Re}\, W_{n+1} \tau_1 < 0$, also

$$\mathrm{Re}\, \tau_{n+1} = \mathrm{Re}\, T_2 W_{n+1} \tau_1 > 0 \,.$$

Korollar 2.35
Gilt

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \overline{G}(\lambda) \,,$$

so ist mit $n \in \mathbb{Z}$

$$M = \pm \begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Definition 2.36
Für $V \in G(\lambda)$ definieren wir durch

$$L_\lambda(V) := L(V) := \min \left\{ l \in \mathbb{N} \mid V = W_1 \cdots W_l \text{ mit } W_j \in \{T\} \cup \{S_\lambda^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \right\}$$

die *Eichler-Länge von V in $G(\lambda)$*.

Da $G(\lambda)$ von T und S_λ erzeugt wird und T die Ordnung 2 hat, ist $L(V)$ wohldefiniert. Eine Abschätzung von $L(V)$ gab Eichler in [3] an. Einen fehlerbereinigten Beweis dazu findet man in [9].

Satz 2.37
Zu jedem λ gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $V \in G(\lambda)$ mit

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt

$$L(V) \leq k_1 \ln(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + k_2 \,.$$

Lemma 2.38
Es sei $\rho\colon \overline{G}(\lambda) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ ein Gruppenhomomorphismus. Gilt

$$\|\rho(\overline{T})\|_\infty,\ \|\rho(\overline{S}_\lambda^n)\|_\infty \leq c_1$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}^{\geq 1}$, dann gibt es $c_2, C \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{G}(\lambda)$$

gilt:

$$p\|\rho(V)\|_\infty \leq c_2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{C \ln(pc_1)} \,.$$

Beweis:
Ein vorgegebenes $V \in \overline{G}(\lambda)$ schreiben wir in der Form

$$V = \pm W_1 \cdots W_L \,, \quad W_j \in \{\overline{T}\} \cup \{\overline{S}_\lambda^k \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$$

mit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ und

$$L \leq k_1 \ln(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + k_2$$

gemäß 2.36, 2.37. Damit folgt

$$\rho(V) = \rho(W_1) \cdots \rho(W_L) = \left(\sum_{m_1, \ldots, m_{L-1} = 1}^{p} \rho_{jm_1}(W_1)\rho_{m_1m_2}(W_2) \cdots \rho_{m_{L-1}n}(W_L) \right)_{j,n=1,\ldots,p} ,$$

also (Dreiecksungleichung, p^{L-1} Summanden, L-Faktoren $\leq c_1$ in jedem Summanden)

$$\|\rho(V)\|_\infty \leq p^{L-1} c_1^L \,.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} p\|\rho(V)\|_\infty &\leq (pc_1)^L = \mathrm{e}^{L \ln(pc_1)} \leq \mathrm{e}^{(k_1 \ln(a^2+b^2+c^2+d^2)+k_2)\ln(pc_1)} \\ &\leq c_2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{c_3 \ln(pc_1)} \,. \end{aligned}$$

Satz 2.39
Es gibt eine Rechtstransversale $\mathcal{R}$ von $\langle S_\lambda \rangle$ in $G(\lambda)$ und ein $k \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $R \in \mathcal{R}$ mit $\overline{R} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \le k(c^2 + d^2)$$

gilt.

Beweis:
Aus jeder Rechtsnebenklasse $\langle S_\lambda \rangle R$ von $\langle S_\lambda \rangle$ in $G(\lambda)$ wählen wir einen Vertreter R, so dass $-\frac{\lambda}{2} \le \operatorname{Re} R(2i) \le \frac{\lambda}{2}$ gilt; dies ist durch Vorschaltung einer geeigneten Translation aus $\langle S_\lambda \rangle$ ohne Zerstörung der Vertretereigenschaft möglich. Diese R bilden eine gewünschte Rechtstransversale $\mathcal{R}$:
Nach Satz 2.7 haben wir

$$0 < \operatorname{Im} R(2i) = \frac{2}{|2ci + d|^2} = \frac{2}{4c^2 + d^2}.$$

Da c und d nicht beide verschwinden können, ergibt sich $|\operatorname{Im} R(2i)| \le 2$ mit Satz 2.26. Insgesamt erhalten wir

$$\frac{4a^2 + b^2}{4c^2 + d^2} = \left| \frac{2ai + b}{2ci + d} \right|^2 = |R(2i)|^2 \le 4 + \frac{\lambda^2}{4} \le 5$$

also

$$a^2 + b^2 \le 4a^2 + b^2 \le 5(4c^2 + d^2) \le 20(c^2 + d^2)\,.$$

Wir können also $k = 21$ wählen.

Bemerkungen 2.40

i) Ist $\mathcal{R}$ eine Rechtstransversale von $\langle S_\lambda \rangle$ in $G(\lambda)$, so ist $\overline{\mathcal{R}} := \Phi^{-1}[\mathcal{R}]$ wegen $-E_2 \notin \langle \overline{S}_\lambda \rangle$ eine Rechtstransversale von $\langle \overline{S}_\lambda \rangle$ in $\overline{G}(\lambda)$. Satz 2.39 gilt also analog für $\overline{G}(\lambda)$.

ii) Ist $\overline{\mathcal{R}}$ eine Rechtstransversale von $\langle \overline{S}_\lambda \rangle$ in $\overline{G}(\lambda)$, so verstehen wir unter $\overline{\mathcal{R}}^{c \ne 0}$ die Menge aller $M \in \overline{\mathcal{R}}$ mit $c \ne 0$. Wegen Korollar 2.35 und $-E_2 \notin \langle \overline{S}_\lambda \rangle$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}}^{c \ne 0} \cup \{E_2\,, -E_2\}$$

im folgenden annehmen.

iii) Ist $\overline{\mathcal{R}}$ eine Rechtstransversale von $\langle \overline{S}_\lambda \rangle$ in $\overline{G}(\lambda)$, $V \in \overline{G}(\lambda)$, so ist dies auch $\overline{\mathcal{R}}V$, denn die Rechtmultiplikation mit V ist eine Bijektion in $\overline{G}(\lambda)$.

Satz 2.41
Es seien $k \in \mathbb{R}$, $k > 2$, $\overline{\mathcal{R}}$ eine Rechtstransversale von $\langle \overline{S}_\lambda \rangle$ in $\overline{G}(\lambda)$.

i) *$\overline{\mathcal{R}}$ ist abzählbar und die Reihe*

$$\sum_{M \in \overline{\mathcal{R}}} \frac{1}{|M : \tau|^k}$$

konvergiert für alle $\tau \in \mathbb{H}$.

ii) *In jedem Vertikalstreifen $V_\varepsilon := \{\tau = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| \leq \varepsilon^{-1}, y \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, konvergiert die Reihe gleichmäßig.*

iii) *Die Reihe ist in $\mathbb{H}$ kompakt konvergent.*

iv) *Es gilt*

$$\lim_{\tau \to i\infty} \sum_{M \in \overline{\mathcal{R}}^{c \neq 0}} \frac{1}{|M : \tau|^k} = 0\,.$$

Beweis:
[16], Seiten 68–70, 72

3 Multiplikatorsysteme, Strichoperator

Definition 3.1
Es sei $k \in \mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\upsilon : \begin{cases} \overline{G}(\lambda) \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ \quad V \mapsto \upsilon(V) \end{cases}$$

heißt ein *k-Multiplikatorsystem für $\overline{G}(\lambda)$*, falls gilt:

i)
$$\upsilon(V_1V_2)((V_1V_2) : \tau)^k = \upsilon(V_1)\upsilon(V_2)(V_1 : V_2\tau)^k(V_2 : \tau)^k$$
für $V_1, V_2 \in \overline{G}(\lambda)$, $\tau \in \mathbb{H}$,

ii)
$$\upsilon(-E_2) = (-1)^{-k}\,.$$

Bemerkung 3.2
Setzt man in 3.1 i) $V_1 = V_2 = E_2$, so sieht man, dass

$$\upsilon(E_2) = 1$$

gilt.

Definition 3.3
Es seien $k \in \mathbb{R}$, υ ein k-Multiplikatorsystem für $\overline{G}(\lambda)$.

i) Wir definieren (*Strichoperator*)
$$f|_k V(\tau) := f|_k^\upsilon V(\tau) := \upsilon(V)^{-1}(V : \tau)^{-k} f(V\tau)$$
für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$, $V \in \overline{G}(\lambda)$, $\tau \in \mathbb{H}$.

ii) Es seien $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ und
$$F := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}.$$

Dann sei

$$F|_k V(\tau) := F|_k^\upsilon V(\tau) := \begin{pmatrix} f_1|_k V(\tau) \\ \vdots \\ f_p|_k V(\tau) \end{pmatrix}$$

für $V \in \overline{G}(\lambda)$, $\tau \in \mathbb{H}$.

Satz 3.4

Es seien $k \in \mathbb{R}$, υ ein k-Multiplikatorsystem für $\overline{G}(\lambda)$.

i) Für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ und $V \in \overline{G}(\lambda)$, $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)|_k^\upsilon V(\tau) = c_1\, f_1|_k^\upsilon V(\tau) + c_2\, f_2|_k^\upsilon V(\tau)\,.$$

ii) Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ und $V_1, V_2 \in \overline{G}(\lambda)$, $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$f|_k^\upsilon V_1 V_2(\tau) = (f|_k^\upsilon V_1)|_k^\upsilon V_2(\tau)\,.$$

Beweis: i) folgt nach Definition.
Zu ii):

$$\begin{aligned} f|_k^\upsilon V_1 V_2(\tau) &\overset{3.3\text{ i)}}{=} \upsilon(V_1V_2)^{-1}\,(V_1V_2 : \tau)^{-k} f(V_1V_2\tau) \\ &\overset{3.1\text{ i)}}{=} \upsilon(V_2)^{-1}\,(V_2 : \tau)^{-k}\,\upsilon(V_1)^{-1}(V_1 : V_2\tau)^{-k} f \circ V_1(V_2\tau) \\ &= \upsilon(V_2)^{-1}\,(V_2 : \tau)^{-k}\,(\upsilon(V_1)^{-1}(V_1 : \tau)^{-k} f \circ V_1)(V_2\tau) \\ &\overset{3.3\text{ i)}}{=} (f|_k^\upsilon V_1)|_k^\upsilon V_2(\tau) \end{aligned}$$

4 Vektorwertige Heckeformen

Definition 4.1
Es sei G eine Gruppe.
Eine komplex-lineare Darstellung der Gruppe G vom Grad p ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$.

Definition 4.2
Es seien $k \in \mathbb{R}$, υ ein k-Multiplikatorsystem auf $\overline{G}(\lambda)$, $p \in \mathbb{N}^*$ und $\rho\colon \overline{G}(\lambda) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ eine komplex-lineare Darstellung vom Grad p für die $\rho(-E_2) = E_p$ gilt.
Weiter seien $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$,

$$F := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}.$$

Dann heißt (F, ρ) (genauer (F, υ, ρ)) eine *vektorwertige Heckeform vom Gewicht k* auf $\overline{G}(\lambda)$ genau dann, wenn gilt:

i) Für alle $V \in \overline{G}(\lambda)$ und $\tau \in \mathbb{H}$ ist

$$F|_k^\upsilon V(\tau) = \rho(V)F(\tau)$$

ii) Jede Funktion f_j hat eine in $\mathbb{H}$ absolut kompakt konvergente Entwicklung

$$f_j(\tau) = \sum_{n \geq m_j} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j} \tau}$$

mit $m_j \in \mathbb{Z}$, $N_j \in \mathbb{N}^*$.

Vereinbarung 4.3
Im folgenden seien $k \in \mathbb{R}$ und das Multiplikatorsystem υ fest gewählt.
Weiter sei $\varkappa \in [0, 1[$ so bestimmt, dass $\upsilon(\overline{S}_\lambda) = \mathrm{e}^{2\pi i \varkappa}$.

Bemerkungen 4.4
i) Man setzt oft $q := \mathrm{e}^{2\pi i \tau}$ und schreibt dann als *q-Entwicklung*

$$f_j(\tau) = \sum_{n \geq m_j} a_n(j) q^{\frac{n}{\lambda N_j}}.$$

ii) Die Funktionen f_j sind auf $\mathbb{H}$ holomorph mit Periode λN_j, besitzen höchstens einen Pol in $i\infty$ und die obige Fourierreihentwicklung ist die eindeutig bestimmte aus Satz 1.3.

iii) Man erkennt sofort, dass die N_j durch die f_j nicht eindeutig bestimmt sind. Wählt man $l \in \mathbb{N}^*$, so ist f_j periodisch mit Periode $\lambda(lN_j)$. Setzt man für $n \in \mathbb{Z}, n \geq lm_j$

$$\tilde{a}_n := \begin{cases} a_m & \text{für } n = lm \text{ mit } m \in \mathbb{Z}, n \geq m_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

gilt für $\tau \in \mathbb{H}$

$$f_j(\tau) = \tilde{f}_j(\tau) = \sum_{n \geq lm_j} \tilde{a}_n(j) e^{2\pi i \frac{n}{\lambda(lN_j)}\tau}.$$

Zu f_j gehört nach Satz 1.3 $\hat{f}_j(z) = \sum_{n \geq m_j} a_n(j) z^n$ und zu $\tilde{f}_j$ gehört $\hat{\tilde{f}}_j(z) = \hat{f}_j(z^l) = \sum_{n \geq m_j} a_n(j) z^{ln} = \sum_{n \geq lm_j} \tilde{a}_n(j) z^n$.

Gibt es umgekehrt ein $l \in \mathbb{N}^*$ mit $l | N_j$ sowie (†) $a_n(j) = 0$ für $n \in \mathbb{Z}, l \nmid n$ und definiert man $\tilde{a}_n(j) := a_{ln}(j)$ für $n \in \mathbb{Z}, n \geq \lceil m_j/l \rceil$, gilt für $\tau \in \mathbb{H}$

$$f_j(\tau) = \tilde{f}_j(\tau) = \sum_{n \geq \lceil m_j/l \rceil} \tilde{a}_n(j) e^{2\pi i \frac{n}{\lambda(N_j/l)}\tau}.$$

Zu f_j gehört nach Satz 1.3 $\hat{f}_j(z) = \sum_{n \geq m_j} a_n(j) z^n = \sum_{n \geq \lceil m_j/l \rceil} a_{ln}(j) z^{ln}$ und zu $\tilde{f}_j$ gehört $\hat{\tilde{f}}_j(z) = \sum_{n \geq \lceil m_j/l \rceil} \tilde{a}_n(j) z^n$.

Man sieht: (†) $\Leftrightarrow$ f_j hat Periode $\lambda N_j / l$

iv) Eine q-Entwicklung nach i) heißt *elementar*, wenn N_j elementar ist, d.h.:
Für konstante f_j ist $N_j = 1$. Ist f_j nicht konstant mit positiver reeller Elementarperiode ω_j (Satz 1.2), so gilt $\lambda N_j = k_j \omega_j$ mit $k_j \in \mathbb{N}^*$, N_j und k_j teilerfremd. Nach iii) besitzt jedes f_j einer vektorwertigen Heckeform genau eine elementare q-Entwicklung.

v) Auch jede beliebige Linearkombination der $f_1, \dots, f_p$ besitzt eine q-Entwicklung $\sum_{n \geq m} a_n q^{\frac{n}{\lambda N}}$. Setzt man nämlich $N := \mathrm{kgv}(N_1, \dots, N_p)$, so sind alle $f_1, \dots, f_p$ periodisch mit Periode $N\lambda$; diese Periode besitzt auch jede Linearkombination der $f_1, \dots, f_p$. Satz 1.3 liefert das Gewünschte!

Definition 4.5
Die Menge aller vektorwertigen Heckeformen (F, υ, ρ) vom Gewicht k bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(k, \upsilon, \rho)$.

Satz 4.6
$\mathcal{F}(k, \upsilon, \rho)$ ist ein $\mathbb{C}$-linearer Vektorraum.

Beweis:
Linearität des $|_k$-Operators, Distributivität der Matrizenmultiplikation, 4.4 v)

Definition 4.7

i) Eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k heißt *ganz*, falls in den q-Entwicklungen die Koeffizienten bei negativen Potenzen von q gleich 0 sind.

ii) Die Menge der ganzen vektorwertigen Heckeformen (F, υ, ρ) vom Gewicht k bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(k, \upsilon, \rho)$.

iii) Eine ganze vektorwertige Heckeform vom Gewicht k heißt *Spitzenform*, falls in den q-Entwicklungen die Koeffizienten bei nichtpositiven Potenzen von q gleich 0 sind.

iv) Die Menge der Spitzenformen (F, υ, ρ) vom Gewicht k bezeichnen wir mit $S(k, \upsilon, \rho)$.

Klar sind:

Satz 4.8
$\mathcal{M}(k, \upsilon, \rho)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(k, \upsilon, \rho)$.
$S(k, \upsilon, \rho)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{M}(k, \upsilon, \rho)$.

Satz 4.9
Es seien

$$(F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho), \; (\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{p}} \end{pmatrix}, \tilde{\rho})$$

zwei vektorwertige Heckeformen vom Gewicht k.

Dann ist mit

$$F \oplus \widetilde{F} := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \\ \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_{\widetilde{p}} \end{pmatrix}, \qquad \rho \oplus \widetilde{\rho} := \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \widetilde{\rho} \end{pmatrix}$$

$$(F \oplus \widetilde{F}, \rho \oplus \widetilde{\rho})$$

eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k.

Definition 4.10
Es sei

$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho \right)$$

eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k mit elementaren N_j. Dann heißt

$$N := \mathrm{kgv}(N_1, \ldots, N_p)$$

ihre *Stufe*.

Satz 4.11
Es sei

$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho \right)$$

eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k. Sie besitze die Stufe N und die Komponentenfunktionen seien linear unabhängig. Dann gilt

$$\rho(\overline{S}_\lambda^N) = \rho(\overline{S}_\lambda)^N = \mathrm{e}^{-2\pi i N \varkappa} E_p \, .$$

Beweis:

Für $j = 1, \dots, p$ und $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{aligned} f_j|_k \overline{S}_\lambda^N(\tau) &= \overline{v}(\overline{S}_\lambda^N)\, f_j(\overline{S}_\lambda^N(\tau)) = \mathrm{e}^{-2\pi i N\varkappa} f_j(\overline{S}_\lambda^N(\tau)) \\ &= \mathrm{e}^{-2\pi i N\varkappa} \sum_{n\geq 0} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j}(\tau + N\lambda)} \\ &= \mathrm{e}^{-2\pi i N\varkappa} \sum_{n\geq 0} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j}\tau} \underbrace{\mathrm{e}^{2\pi i n \frac{N}{N_j}}}_{=1} \\ &= \mathrm{e}^{-2\pi i N\varkappa} f_j(\tau)\,, \end{aligned}$$

also nach 4.2 i)

$$\mathrm{e}^{-2\pi i N\varkappa} f_j(\tau) = \sum_{k=1}^{p} \rho_{jk}(\overline{S}_\lambda^N) f_k\,.$$

Die lineare Unabhängigkeit ergibt die Behauptung.

Definition 4.12
Zwei vektorwertige Heckeformen vom Gewicht k

$$(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho),\ (\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{p}} \end{pmatrix}, \tilde{\rho})$$

heißen f*-äquivalent* (kurz auch *äquivalent*) genau dann, wenn

$$\langle f_1, \dots, f_p \rangle = \langle \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\tilde{p}} \rangle$$

in $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ gilt.

Satz 4.13
Äquivalente vektorwertige Heckeformen vom Gewicht k sind stufengleich.

Beweis:
Es seien

$$(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho),\ (\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{p}} \end{pmatrix}, \tilde{\rho})$$

äquivalente vektorwertige Heckeformen vom Gewicht k und S bzw. $\tilde{S}$ ihre Stufen. Wir können für den Beweis voraussetzen, dass kein f_j konstant ist.
Für $j = 1, \dots, \tilde{p}$ ist $\tilde{f}_j$ als Linearkombination der $f_1, \dots, f_p$ periodisch mit Periode S

(4.4 v)), d.h. einerseits $\lambda S = k\widetilde{\omega}_j$ ($k \in \mathbb{N}^*$, $\widetilde{\omega}_j$ Elementarperiode von $\widetilde{f}_j$). Andererseits gilt mit dem elementaren $\widetilde{N}_j$: $\lambda \widetilde{N}_j = l\widetilde{\omega}_j$ ($l \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{ggt}(\widetilde{N}_j, l) = 1$). Es folgt

$$\frac{S}{k} = \frac{\widetilde{\omega}_j}{\lambda} = \frac{\widetilde{N}_j}{l},$$

also ist S ein Vielfaches von $\widetilde{N}_j$, womit $\widetilde{S} \leq S$ gezeigt ist.
Symmetrie liefert $S \leq \widetilde{S}$ und damit die Behauptung.

Satz 4.14
Es sei (F, ρ) eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k und $U \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$. Definieren wir dann $U\rho U^{-1}\colon G(\lambda) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ durch $U\rho U^{-1}(V) := U\rho(V)U^{-1}$, so ist $(UF, U\rho U^{-1})$ eine zu (F, ρ) äquivalente vektorwertige Heckeform vom Gewicht k.

Beweis:
Mit 3.4 i) und 4.2 i) erhalten wir für $V \in G(\lambda)$, $\tau \in \mathbb{H}$

$$(UF)|_k V(\tau) = U(F|_k V(\tau)) = U\rho(V)F = U\rho(V)U^{-1}(UF).$$

Alles andere ist klar.

Satz 4.15
Es sei

$$\left(F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho\right)$$

eine vektorwertige Heckeform vom Grad k, nicht alle Komponentenfunktionen f_j seien konstant 0.
Dann gibt es zu (F, ρ) eine äquivalente Heckeform

$$\left(\widetilde{F} = \begin{pmatrix} \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_{\widetilde{p}} \end{pmatrix}, \widetilde{\rho}\right),$$

deren Komponentenfunktionen linear unabhängig in $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ sind.

Beweis:
Die Komponentenfunktionen seien linear abhängig. Wir könne ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $(f_1, \ldots, f_r)$ eine Basis von $\langle f_1, \ldots, f_p \rangle$ ist (sonst Umsortierung der $f_1, \ldots, f_p$ und Übergang zu einer äquivalenten Heckeform nach

4.14).
Es sei K die $((p-r)\times r)$-Matrix, deren l-te Zeile die Komponenten von f_{r+l} bezüglich $f_1,\dots,f_r$ enthält, d.h. also
$$\begin{pmatrix} f_{r+1} \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}.$$
Definieren wir
$$U := \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ K & -E_{p-r} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(p,\mathbb{C}),$$
dann gilt
$$UF = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
und nach 4.14 ist $(UF, U\rho U^{-1})$ eine zu (F,ρ) äquivalente Heckeform.
Wir betrachten $U\rho U^{-1}(V)$ als Blockmatrix
$$\begin{pmatrix} \alpha(V) & \beta(V) \\ \gamma(V) & \delta(V) \end{pmatrix}$$
mit einer $(r\times r)$-Matrix $\alpha(V)$.
Nach 4.2 i) gehören die Zeilen $l = r+1,\dots,p$ jeweils zu einer Linearkombination der Form
$$0 = \gamma(V)_{l1}f_1 + \cdots + \gamma(V)_{lr}f_r + \delta(V)_{l1}0 + \cdots + \delta(V)_{l(p-r)}0\,.$$
Die lineare Unabhängigkeit der $f_1,\dots,f_r$ liefert $\gamma(V) = 0$. Da die Spaltenvektoren von $U\rho U^{-1}(V)$ linear unabhängig sind, haben wir $\alpha(V)\in\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$. Wegen
$$f_l|_k V = \alpha(V)_{l1}f_1 + \cdots + \alpha(V)_{lr}f_r + \beta(V)_{l1}0 + \cdots \beta(V)_{l(p-r)}0$$
für $l = 1,\dots,r$ ist also
$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}, \alpha\right)$$
eine Heckeform der gewünschten Art.

Satz 4.16
Sei
$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho\right)$$

eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k. Nicht alle Komponentenfunktionen f_j seien konstant 0.
Dann gibt es eine dazu äquivalente vektorwertige Heckeform

$$(\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{p}} \end{pmatrix}, \tilde{\rho})$$

vom Gewicht k, so dass für diese gilt:

1.) *Die Komponentenfunktionen $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{\tilde{p}}$ sind linear unabhängig in $\mathcal{O}(\mathbb{H})$.*

2.) $\tilde{\rho}(\overline{S}_\lambda) = \mathrm{e}^{-2\pi i \varkappa} \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{2\pi i \varphi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi i \varphi_{\tilde{p}}})$ *mit* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\tilde{p}} \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$

3.) $\tilde{f}_j$ *hat eine q-Entwicklung*
$$q^{\frac{\varphi_j}{\lambda}} \sum_{n \geq m_j} a_n(j) q^{\frac{n}{\lambda}} .$$

Beweis:
Zur Vereinfachung der Notation lassen wir im Beweis die „Äquivalent-Tilden“ fort.
Zunächst gehen wir gemäß Satz 4.15 zu einer äquivalenten Heckeform über, die 1.) erfüllt.
Bezeichnen wir mit N die Stufe unserer Heckeform, so gilt nach 4.11

$$(\mathrm{e}^{2\pi i \varkappa} \rho(S_\lambda))^N = E_p .$$

Wir wählen gemäß 1.7 ein $U \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, so dass

$$U \rho(\overline{S}_\lambda) U^{-1} = \mathrm{e}^{-2\pi i \varkappa} \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{2\pi i \varphi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi i \varphi_p})$$

mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$ gilt.
Der Übergang zu

$$(U \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, U \rho U^{-1})$$

liefert eine äquivalente Heckeform (Satz 4.14) die 1.) und 2.) erfüllt.
Für diese Heckeform ist noch 3.) nachzuweisen. Mit

$$f_j(\tau) = \sum_{n \geq m_j} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j} \tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

aus 4.2 ii) erhalten wir

$$\begin{aligned} f_j|_k \overline{S}_\lambda(\tau) &= \overline{\upsilon}(\overline{S}_\lambda)\, f_j(\overline{S}_\lambda(\tau)) \\ &= \mathrm{e}^{-2\pi i \varkappa} \sum_{n \geq m_j} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j}\tau}\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{N_j}}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit 4.2 i) und 2.) für ein $\varphi_j \in]0\,,1] \cap \mathbb{Q}$

$$\mathrm{e}^{-2\pi i \varkappa} \sum_{n \geq m_j} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j}\tau}\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{N_j}} \quad = \quad \mathrm{e}^{-2\pi i \varkappa}\, \mathrm{e}^{2\pi i \varphi_j} f_j(\tau)\,,$$

also

$$\mathrm{e}^{-2\pi i \varphi_j} \sum_{n \geq m_j} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j}\tau}\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{N_j}} = \sum_{n \geq m_j} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j}\tau}\,.$$

Koeffizientenvergleich (Satz 1.3) liefert

$$\mathrm{e}^{-2\pi i \varphi_j}\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{N_j}}\, a_n(j) = a_n(j)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq m_j$.
$a_n(j)$ kann also nur dann verschieden von 0 sein, wenn

$$n = lN_j + N_j \varphi_j\,, \quad l \in \mathbb{N}\,,$$

ist.
Definieren wir für $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq \lfloor m_j/N_j - 1 \rfloor$

$$b_l(j) := \begin{cases} a_n & \text{falls } l = n/N_j - \varphi_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} f_j(\tau) &= \sum_{n \geq m_j} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda N_j}\tau} \\ &= \sum_{l \geq \lfloor m_j/N_j - 1 \rfloor} b_l(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{lN_j + N_j\varphi_j}{\lambda N_j}\tau} \\ &= \sum_{l \geq \lfloor m_j/N_j - 1 \rfloor} b_l(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{l}{\lambda}\tau}\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{\varphi_j}{\lambda}\tau} \\ &= q^{\frac{\varphi_j}{\lambda}} \sum_{l \geq \lfloor m_j/N_j - 1 \rfloor} b_l(j) q^{\frac{l}{\lambda}}\,. \end{aligned}$$

Definition 4.17
Eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k

$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho\right)$$

heißt *reduziert*, falls sie die Bedingungen 1.), 2.) und 3.) aus 4.16 erfüllt.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Strukturüberlegung.
Ist

$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho\right)$$

eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k, dann spannen $f_1, \dots, f_p$ den endlich-dimensionalen Unterraum $U = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ von $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ auf. Jedes Element von U besitzt eine q-Entwicklung gemäß Definition 4.2 ii) und U ist abgeschlossen bzgl. des Strichoperators (4.2 i)). Dass dies schon die wesentliche Struktur einer vektorwertigen Heckeform beschreibt, zeigt der folgende Satz:

Satz 4.18
Sei U ein endlich-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Jedes Element von U besitzt eine q-Entwicklung 4.2 ii).

ii) U ist abgeschlossen bezüglich des Strichoperators $|_k$.

Bilden dann $f_1, \dots, f_p$ ein Erzeugendensystem von U, so gibt es eine Darstellung $\rho \colon \overline{G}(\lambda) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ derart, dass

$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho\right)$$

eine vektorwertige Heckeform vom Gewicht k ist.

Beweis:
Im Fall $U = \{0\}$ setzen wir $\rho(V) = E_p$ für alle $V \in \overline{G}(\lambda)$.
Sei nun $U \neq \{0\}$ und zunächst $f_1, \dots, f_p$ eine Basis von U. Nach Voraussetzung ist

dann, wie man leicht überprüft, auch $f_1|_k, \ldots, f_p|_k$ eine Basis von U. Definieren wir also $\rho_{jm}(V) \in \mathbb{C}$ durch

$$f_j|_k V(\tau) = \sum_{m=1}^{p} \rho_{jm}(V) f_m(\tau)\,, \tag{1}$$

so ist

$$\rho(V) := \big(\rho_{jm}(V)\big)_{j,m=1,\ldots,p} \in \mathrm{GL}(p\,,\mathbb{C})$$

und wir haben eine Darstellung $\rho\colon \overline{G}(\lambda) \to \mathrm{GL}(p\,,\mathbb{C})$, wenn wir noch $\rho(V_1V_2) = \rho(V_1)\rho(V_2)$ für $V_1, V_2 \in \overline{G}(\lambda)$ nachweisen:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{p} \rho_{jm}(V_1V_2) f_m(\tau) &\overset{(1)}{=} f_j|_k V_1V_2(\tau) \\
&\overset{3.4\ ii)}{=} (f_j|_k V_1)|_k V_2(\tau) \\
&\overset{(1)}{=} (\sum_{n=1}^{p} \rho_{jn}(V_1) f_n)|_k V_2(\tau) \\
&\overset{3.4\ i)}{=} \sum_{n=1}^{p} \rho_{jn}(V_1) f_n|_k V_2(\tau) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{p} \rho_{jn}(V_1) \left(\sum_{m=1}^{p} \rho_{nm}(V_2) f_m(\tau) \right) \\
&= \sum_{m=1}^{p} \left(\sum_{n=1}^{p} \rho_{jn}(V_1)\rho_{nm}(V_2) \right) f_m(\tau)
\end{aligned}$$

Die lineare Unabhängigkeit der f_m liefert wie gewünscht $\rho(V_1V_2) = \rho(V_1)\rho(V_2)$.
Da nach den Defininition 3.1 ii) und 3.3

$$f_j|_k(-E_2)(\tau) = \upsilon(-E_2)^{-1}(-1)^{-k} f_j((-E_2)\tau) = f_j(\tau)$$

gilt, haben wir auch $\rho(-E_2) = E_p$.

Sei nun $f_1, \ldots, f_p$ ein Erzeugendensystem von U; dabei seien o.B.d.A. die ersten $r < p$ Funktionen eine Basis von U. Wir wählen dann wie gerade ausgeführt eine Darstellung $\rho\colon \overline{G}(\lambda) \to \mathrm{GL}(r\,,\mathbb{C})$, so dass

$$(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}, \rho)$$

eine vektorwertige Heckeform vom Grad k ist. Nach 4.9 ist dann auch

$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & E_{p-r} \end{pmatrix}\right)$$

eine vektorwertige Heckeform vom Grad k.
Es sei K die $((p-r)\times r)$-Matrix, deren l-te Zeile die Komponenten von f_{r+l} bezüglich $f_1, \dots, f_r$ enthält, d.h. also

$$\begin{pmatrix} f_{r+1} \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}.$$

Definieren wir

$$U := \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ K & E_{p-r} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}),$$

dann liefert nach Satz 4.14

$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, U \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & E_{p-r} \end{pmatrix} U^{-1}\right)$$

das Gewünschte.

5 Erste Dimensionsaussagen

Vereinbarung 5.1
Im Rest dieser Arbeit setzen wir voraus, dass für alle betrachteten $\rho\colon \overline{G}(\lambda) \to \mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$ und alle Heckeformen $(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho)$ gilt:

1.) $\rho(\overline{S}_\lambda) = \mathrm{e}^{-2\pi i\varkappa}\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{2\pi i\varphi_1}, \dots, \mathrm{e}^{2\pi i\varphi_p})$ mit $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$, $\varphi_j = \frac{c_j}{d_j}$, $c_j, d_j \in \mathbb{N}^*$, $c_j \le d_j$.

2.) f_j hat eine q-Entwicklung

$$q^{\frac{\varphi_j}{\lambda}} \sum_{n \ge m_j} a_n(j) q^{\frac{n}{\lambda}} = \sum_{n \ge m_j} a_n(j) q^{\frac{d_j n + c_j}{d_j \lambda}},$$

wobei $m_j = 0$, falls $f_j = 0$ und $a_{m_j}(j) \neq 0$ sonst gilt.

Wegen Satz 4.16 ist dies keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit.

Wir definieren $\Lambda(F) := (m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p$ für Heckeformen (F, ρ). Dabei sei $\mathbb{Z}^p$ mit der kanonischen Halbordnung $\le$ versehen: Für $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), \Omega = (\omega_1, \dots, \omega_p) \in \mathbb{Z}^p$ ist $\Lambda \le \Omega$ genau dann, wenn $\lambda_j \le \omega_j$ für $j = 1, \dots, p$ gilt. In diesem Zusammenhang sei $\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$ und $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)$, $G := \{j \mid 1 \le j \le p, \varphi_j = 1\}$ und $\mathbf{G} := (j_1, \dots, j_p)$ mit $j_k = -1$ falls $k \in G$ und $j_k = 0$ sonst.

Wegen 1.) ist

$$\|\rho(S_\lambda^n)\|_\infty = \|\rho^n(S_\lambda)\|_\infty = 1,$$

und wir können $c_1 = \max(\|\rho(T)\|_\infty, 1)$ zur Erfüllung der Prämisse des Lemmas 2.38 wählen. Mit einem C aus diesem Lemma sei

$$\alpha := \alpha(\rho) := C \ln(p \max(\|\rho(T)\|_\infty, 1)).$$

Satz 5.2
Es gibt eine Konstante $\hat{C} \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$|f_j(\tau)| \le \begin{cases} \hat{C} y^{-2\alpha - k} & \text{für } k \ge -2\alpha \\ \hat{C} y^{-\alpha - \frac{k}{2}} & \text{für } k < -2\alpha \end{cases}$$

für alle $\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}, \rho\right) \in \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho)$, $j = 1, \ldots, p$, $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$, $\operatorname{Im}\tau \le 1$ *gilt.*

Beweis:
Wir definieren für $j = 1, \ldots, p$ mit $\tau = x + iy$

$$g_j \colon \begin{cases} \mathbb{H} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- \\ \tau \mapsto y^\sigma \, |f_j(\tau)| \end{cases}, \tag{1}$$

wobei $\sigma := \alpha + \frac{k}{2}$.
Wegen $\operatorname{Im} S_\lambda \tau = \operatorname{Im}\tau$ und (vgl. 5.1 2.))

$$f_j(S_\lambda \tau) \quad = \quad \mathrm{e}^{2\pi i \frac{\varphi_j}{\lambda}\tau} \underbrace{\mathrm{e}^{2\pi i \varphi_j}}_{|\;|=1} \sum_{n \ge 0} a_n(j) \mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{\lambda}\tau} \underbrace{\mathrm{e}^{2\pi i n}}_{=1}$$

folgt

$$g_j(S_\lambda \tau) = g_j(\tau) \tag{2}$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$.
Bei beliebigem

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{G}(\lambda)$$

ist

$$\begin{aligned} g_j(V\tau) &\overset{2.7}{=} \left(\frac{y}{|cz + d|^2}\right)^\sigma |f_j(V\tau)| \overset{3.3}{=} y^\sigma |c\tau + d|^{k-2\sigma} |f_j|_k V\tau| \\ &= y^\sigma |c\tau + d|^{k-2\sigma} \, |\sum_{l=1}^{p} \rho_{jl}(V) f_l(\tau)| \, , \end{aligned}$$

also (Dreiecksungleichung, (1))

$$g_j(V\tau) \le |c\tau + d|^{k-2\sigma} \sum_{l=1}^{p} |\rho_{jl}(V)| g_l(\tau) \, . \tag{3}$$

Für $\tau \in \overline{F}_\lambda$ erhalten wir mit 4.2 ii), 4.4 ii) und 1.3 iii) ($C_1 \in \mathbb{R}^+$)

$$\begin{aligned} g_j(\tau) &= y^\sigma |f_j(\tau)| \le C_1 y^\sigma \, e^{-2\pi \frac{0}{d_j \lambda} y} \\ &\le C_1 y^\sigma \, . \end{aligned} \tag{4}$$

Mit (3), (4), der Wahl von α und Lemma 2.38 ergibt sich mit $C_2 \in \mathbb{R}^+$

$$g_j(V\tau) \le C_2 |c\tau + d|^{k-2\sigma} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^\alpha y^\sigma \tag{5}$$

für $j = 1, \ldots, p$, $\tau \in \overline{F}_\lambda$, $V \in \overline{G}(\lambda)$.
Für beliebiges $V \in \overline{G}(\lambda)$ wählen wir nun ein (Satz 2.39, Bemerkung 2.40 i))

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{G}(\lambda)\,,$$

so dass mit $n \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{R}^+$

$$V = \pm S_\lambda^n R \ \text{ und } \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \le k(c^2 + d^2)$$

gilt.
Es ergibt sich mit (2), (5) und $C_3 \in \mathbb{R}^+$

$$g_j(V\tau) = g_j(R\tau) \le C_3 |c\tau + d|^{k-2\sigma}(c^2 + d^2)^\alpha y^\sigma\,.$$

1.4 liefert

$$g_j(V\tau) \le C_3 |c\tau + d|^{k+2(\alpha-\sigma)} \left(\frac{1 + |\tau|^2}{y^2}\right)^\alpha y^\sigma$$

und mit der Definition von σ haben wir

$$g_j(V\tau) \le C_3 \left(\frac{1 + |\tau|^2}{y^2}\right)^\alpha y^\sigma\,.$$

Für $\tau \in \overline{F}_\lambda$ ist $|\tau|^2 \le \frac{\lambda^2}{4} + y^2$ und $y^2 \ge 1 - \frac{\lambda^2}{4}$, d.h. aber: $\frac{1+|\tau|^2}{y^2}$ ist für $\tau \in \overline{F}_\lambda$ beschränkt, womit ($C_4 \in \mathbb{R}^+$)

$$g_j(V\tau) \le C_4 y^\sigma \tag{6}$$

für $j = 1, \ldots, p$, $V \in \overline{G}(\lambda)$ und $\tau \in \overline{F}_\lambda$ bewiesen ist. Für $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ wählen wir ein $V \in \overline{G}(\lambda)$ und ein $\tilde{\tau} \in \overline{F}_\lambda$, so dass $\tau = V\tilde{\tau}$ gilt. Damit folgt mit $C_5 \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} |f_j(\tau)| &\overset{(1)}{=} y^{-\alpha-\frac{k}{2}} g_j(V\tilde{\tau}) \\ &\overset{(6)}{\le} y^{-\alpha-\frac{k}{2}} C_4 (\operatorname{Im}\tilde{\tau})^{\alpha+\frac{k}{2}} \\ &\overset{2.28}{\le} C_4 \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha+\frac{k}{2}} \left(y + \frac{1}{y}\right)^{\alpha+\frac{k}{2}} \\ &\le C_4 \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^{\alpha+\frac{k}{2}} \\ &\le C_5 y^{-2\alpha-k} \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, p$, $\tau \in \mathbb{H}$, $\operatorname{Im}\tau \le 1$, $k \ge -2\alpha$.
Wegen $\operatorname{Im}\tilde{\tau} \ge \sqrt{1 - \lambda^2/4}$ ist $(\operatorname{Im}\tilde{\tau})^{\alpha+\frac{k}{2}}$ für $k < -2\alpha$ nach oben beschränkt; dies ergibt die Behauptung in diesem Fall.

Korollar 5.3

$$\dim \mathcal{M}(k,\upsilon,\rho) = 0 \quad \textit{für} \quad k < -2\alpha$$

Beweis:
Satz 5.2 für kleine y

Definition 5.4
Es sei $\Lambda \in \mathbb{Z}^p$.

$$\mathcal{M}(k,\upsilon,\rho,\Lambda) := \{F \in \mathcal{F}(k,\upsilon,\rho) \mid \Lambda(F) \geq \Lambda\}$$

Mit dieser Definition können wir

$$\mathcal{M}(k,\upsilon,\rho) = \mathcal{M}(k,\upsilon,\rho,\mathbf{G}) \text{ und } \mathcal{S}(k,\upsilon,\rho) = \mathcal{M}(k,\upsilon,\rho,\mathbf{0})$$

schreiben.

Lemma 5.5
Es sei $\lambda = \lambda_q := 2\cos\frac{\pi}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$.
Es gibt eine skalarwertige Heckeform $\widehat{f}_\infty \in \mathcal{M}(4q,\upsilon \equiv 1,\rho \equiv E_1)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *$\widehat{f}_\infty$ besitzt in $i\infty$ eine $(q-2)$-fache Nullstelle.*
2. *$\widehat{f}_\infty$ ist nullstellenfrei in $\mathbb{H}$.*

Beweis: [2], Theorem 5.5 mit $\widehat{f}_\infty := f_\infty^{q-2}$

Lemma 5.6
Die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1 \cdot \widehat{f}_\infty \\ \vdots \\ f_p \cdot \widehat{f}_\infty \end{pmatrix}$$

definiert einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{M}(k,\upsilon,\rho,\Lambda) \longrightarrow \mathcal{M}(k+4q,\upsilon,\rho,\Lambda+(q-2)\mathbf{1}).$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich mit Lemma 5.5 aus den zugrundeliegenden Definitionen.

Satz 5.7

i)

$$\dim \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho, \Lambda) < \infty \quad \textit{für alle } \Lambda \in \mathbb{Z}^p$$

ii) Für $k \geq -2\alpha$ gilt

$$\dim \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho) \leq p(q-2)\left(\frac{k+2\alpha}{4q} + 1\right).$$

Beweis:
Wir wählen ein $l \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\frac{k+2\alpha}{4q} < l \leq \frac{k+2\alpha}{4q} + 1\,. \tag{7}$$

Damit ist

$$k - 4ql < -2\alpha\,. \tag{8}$$

Zu i): Wir wählen ein $l_0 \in \mathbb{Z}$, $l_0 < 0$, so dass die Koeffizienten in den q-Entwicklungen aller Elemente aus $\mathcal{M}(k-4ql, \upsilon, \rho, \Lambda - (q-2)l\mathbf{1})$ bei n-Exponenten von q mit $n < l_0$ gleich 0 sind. Dann wird eine lineare Abbildung $\mathcal{M}(k-4ql, \upsilon, \rho, \Lambda-(q-2)l\mathbf{1}) \longrightarrow \mathbb{C}^{p|l_0|}$ dadurch definiert, dass man in einer vorgegebenen Anordnung jedem (F, ρ) einen Vektor aller Koeffizienten bei n-Exponenten von q mit $l_0 \leq n \leq -1$ zuordnet. Wegen Korollar 5.3 und (8) ist der Kern dieser Abbildung trivial und damit die Dimension von $\mathcal{M}(k-4ql, \upsilon, \rho, \Lambda - (q-2)l\mathbf{1})$ gleich der Dimension des Bildes der Abbildung, also höchstens $p|l_0|$. $\mathcal{M}(k-4ql, \upsilon, \rho, \Lambda - (q-2)l\mathbf{1})$ ist aber nach Lemma 5.6 isomorph zu $\mathcal{M}(k, \upsilon, \rho, \Lambda)$.

Zu ii): Dies ist der Spezialfall $\Lambda = \mathbf{G}$. Wir können $l_0 = -(q-2)l$ wählen und erhalten mit (7)

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho) &= \dim \mathcal{M}(k-4ql, \upsilon, \rho, \mathbf{G} - (q-2)l\mathbf{1}) \leq p(q-2)l \\ &\leq p(q-2)\left(\frac{k+2\alpha}{4q} + 1\right) \end{aligned}$$

6 Poincaré Reihen

Im folgenden seien $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$ die p Einheitsvektoren aus $\mathbb{C}^p$, $\delta_{j,r}$ bezeichne das Kronecker-Symbol.

Definition 6.1 (Vektorwertige Poincaré Reihen)
Es seien $\nu \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le r \le p$, $\overline{\mathcal{R}}$ Rechtstransversale von $\langle \overline{S}_\lambda \rangle$ in $\overline{G}(\lambda)$.

$$P(\tau) := P_{\nu,r}(\tau) := P(\tau; k, \upsilon, \rho; \nu, r) := \frac{1}{2} \sum_{M \in \overline{\mathcal{R}}} \frac{\exp\left[2\pi i \frac{\nu+\varphi_r}{\lambda} M\tau\right]}{\upsilon(M)(M:\tau)^k} (\rho(M))^{-1} \cdot \vec{e}_r \qquad (1)$$

Satz 6.2
Für $k > 2 + 2\alpha$ ist

$$P \in \mathcal{F}(k, \upsilon, \rho)$$

und die Komponentenfunktionen

$$p_j(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{M \in \overline{\mathcal{R}}} \frac{\exp\left[2\pi i \frac{\nu+\varphi_r}{\lambda} M\tau\right]}{\upsilon(M)(M:\tau)^k} (\rho(M))^{-1}_{jr}$$

besitzen Entwicklungen der Form

$$p_j(\tau) = \delta_{j,r}\, q^{\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}} + q^{\frac{\varphi_j}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(j) q^{\frac{n}{\lambda}} .$$

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

Lemma 6.3
Ein Summand in (1) ändert sich nicht, wenn man M durch einen anderen Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse $\langle \overline{S}_\lambda \rangle M$ ersetzt.

Beweis:
Mit

$$\overline{S}_\lambda^n M\tau = M\tau + n\lambda, \;\; \overline{S}_\lambda{:}\tau = 1, \text{ also (Satz 2.7) } \overline{S}_\lambda^n{:}\tau = 1\,,$$

$$\begin{aligned} \upsilon(\overline{S}_\lambda^n M)((\overline{S}_\lambda^n M){:}\tau)^k &\overset{3.1\text{ i)}}{=} \upsilon(\overline{S}_\lambda^n)\upsilon(M) \cdot 1^k \cdot (M{:}\tau)^k \\ &\overset{3.1\text{ i)}}{=} \upsilon(\overline{S}_\lambda)^n \upsilon(M)(M{:}\tau)^k \\ &\overset{4.3}{=} e^{2\pi i n \varkappa} \upsilon(M)(M{:}\tau)^k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\rho(\overline{S}_\lambda^n M))^{-1} &= (\rho(M))^{-1}(\rho(\overline{S}_\lambda^n))^{-1} = (\rho(M))^{-1}(\rho(\overline{S}_\lambda))^{-n} \\ &\overset{5.1\ 1.)}{=} (\rho(M))^{-1}\mathrm{e}^{2\pi i n\varkappa}\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-2\pi i n\varphi_1},\dots,\mathrm{e}^{-2\pi i n\varphi_p})\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}&\frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}(\overline{S}_\lambda^n M)\tau\right]}{\upsilon(\overline{S}_\lambda^n M)((\overline{S}_\lambda^n M):\tau)^k}(\rho(\overline{S}_\lambda^n M))^{-1}\cdot\vec{e}_r \\ =\;& \frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}M\tau\right]}{\upsilon(M)(M:\tau)^k}\cdot\frac{\exp\left[2\pi i(\nu+\varphi_r)n\right]}{\mathrm{e}^{2\pi i n\varkappa}}\cdot(\rho(M))^{-1}\cdot(\mathrm{e}^{2\pi i n\varkappa}\cdot\mathrm{e}^{-2\pi i n\varphi_r}\cdot\vec{e}_r) \\ =\;& \frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}M\tau\right]}{\upsilon(M)(M:\tau)^k}\cdot\exp\left[2\pi i\nu n\right]\cdot(\rho(M))^{-1}\cdot\vec{e}_r \\ =\;& \frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}M\tau\right]}{\upsilon(M)(M:\tau)^k}\cdot(\rho(M))^{-1}\cdot\vec{e}_r\,.\end{aligned}$$

Lemma 6.4
Es seien $k > 2+2\alpha$, $\overline{\mathcal{R}}$ eine Rechtstransversale von $\langle\overline{S}_\lambda\rangle$ in $\overline{G}(\lambda)$ gemäß Satz 2.39, Bemerkung 2.40. Dann ist die p_j definierende Reihe

$$\frac{1}{2}\sum_{M\in\overline{\mathcal{R}}}\frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}M\tau\right]}{\upsilon(M)(M:\tau)^k}(\rho(M))^{-1}_{jr}$$

in $\mathbb{H}$ absolut kompakt konvergent und

$$\lim_{\tau\to i\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{M\in\overline{\mathcal{R}}^{c\neq 0}}\frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}M\tau\right]}{\upsilon(M)(M:\tau)^k}(\rho(M))^{-1}_{jr}\right)=0\,.$$

Beweis:
Für $M\in\overline{\mathcal{R}}^{c\neq 0}$ erhalten wir unter Beachtung von Korollar 2.28 ($\operatorname{Im}M\tau\le 1/\operatorname{Im}\tau$) und $\operatorname{Im}M\tau,\lambda,\varphi_r>0$, $\nu\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\left|\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}M\tau\right]\right| &= \exp\left[-2\pi\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}\operatorname{Im}M\tau\right] \\ &= \exp\left[-2\pi\frac{\nu}{\lambda}\operatorname{Im}M\tau\right]\cdot\exp\left[-2\pi\frac{\varphi_r}{\lambda}\operatorname{Im}M\tau\right] \\ &\le \exp\left[-2\pi\frac{\nu}{\lambda}\operatorname{Im}M\tau\right]\le\exp\left[2\pi\frac{|\nu|}{\lambda}\frac{1}{y}\right] \qquad (2)\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.38, der Wahl von α in Vereinbarung 5.1, Lemma 1.4 und der speziellen Wahl von $\overline{\mathcal{R}}$ ergibt sich mit geeigneten positiven Konstanten c_1, c_2, c_3:

$$\begin{aligned} |(\rho(M))^{-1}_{jr}| &\le c_1(a^2+b^2+c^2+d^2)^\alpha \le c_2(c^2+d^2)^\alpha \\ &\le c_3 \frac{|M{:}\tau|^{2\alpha}(1+|\tau|^2)^\alpha}{y^{2\alpha}} \end{aligned} \tag{3}$$

(2) und (3) zeigen, dass für $M \in \overline{\mathcal{R}}^{c\neq 0}$

$$\left| \frac{\exp\left[2\pi i \frac{\nu+\varphi_r}{\lambda} M\tau\right]}{\upsilon(M)(M{:}\tau)^k} (\rho(M))^{-1}_{jr} \right|$$

auf jedem Vertikalstreifen V_ε nach oben durch

$$c_4 |M{:}\tau|^{-(k-2\alpha)}$$

mit $c_4 \in \mathbb{R}^+$ majorisiert wird. Satz 2.41 und 2.40 ii) lieferen alle Behauptungen.

Lemma 6.5

Für $k > 2+2\alpha$ wird durch (1), unabhängig von der gewählten Rechtstransversalen $\overline{\mathcal{R}}$, eine Funktion $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}^p$ mit holomorphen Komponentenfunktionen p_j definiert.
Es ist

$$p_j(\tau) = \delta_{j,r} \exp\left[2\pi i \frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}\tau\right] + r_j(\tau)$$

mit $\lim\limits_{\tau \to i\infty} r_j(\tau) = 0.$

Beweis:
Lemma 6.3, Lemma 6.4, Bemerkung 2.40 ii), Definition 3.1 ii), Definition 4.2

Lemma 6.6

Es sei $k > 2+2\alpha$. Für alle $V \in \overline{G}(\lambda)$ ist

$$P|_k^\upsilon V(\tau) = \rho(V)P(\tau)\,.$$

Beweis:
Mit Definition 3.3, Definition 3.1 i), Lemma 6.4, Bemerkung 2.40 iii) und Lemma 6.5

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P|_k^{\upsilon} V(\tau) &= \frac{1}{2}\sum_{M\in\overline{\mathcal{R}}} \frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}M(V\tau)\right]}{\upsilon(M)\upsilon(V)(M{:}V\tau)^k(V{:}\tau)^k}(\rho(M))^{-1}\cdot\vec{e}_r \\
&= \frac{1}{2}\sum_{M\in\overline{\mathcal{R}}} \frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}(MV)\tau\right]}{\upsilon(MV)((MV){:}\tau)^k}(\rho((MV)V^{-1}))^{-1}\cdot\vec{e}_r \\
&= \rho(V)\cdot\left(\frac{1}{2}\sum_{M\in\overline{\mathcal{R}}V} \frac{\exp\left[2\pi i\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}M\tau\right]}{\upsilon(M)(M{:}\tau)^k}(\rho(M))^{-1}\cdot\vec{e}_r\right) \\
&= \rho(V)P(\tau)
\end{aligned}$$

Lemma 6.7
Es sei $k > 2 + 2\alpha$.

$$q^{-\frac{\varphi_j}{\lambda}}p_j$$

ist λ-periodisch.

Beweis:
Unter Benutzung von Definition 3.3, Vereinbarung 4.3, Vereinbarung 5.1 1.) und Lemma 6.6 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\exp\left[-2\pi i\frac{\varphi_j}{\lambda}(\tau+\lambda)\right]p_j(\tau+\lambda) \\
&= q^{-\frac{\varphi_j}{\lambda}}\cdot \mathrm{e}^{-2\pi i\varphi_j}\cdot\nu(\overline{S}_\lambda)\cdot p_j|_k^{\upsilon}\overline{S}_\lambda(\tau) = q^{-\frac{\varphi_j}{\lambda}}\cdot \mathrm{e}^{-2\pi i\varphi_j}\cdot \mathrm{e}^{2\pi i\varkappa}\cdot p_j|_k^{\upsilon}\overline{S}_\lambda(\tau) \\
&= q^{-\frac{\varphi_j}{\lambda}}\cdot \mathrm{e}^{-2\pi i\varphi_j}\cdot \mathrm{e}^{2\pi i\varkappa}\cdot \mathrm{e}^{-2\pi i\varkappa}\cdot \mathrm{e}^{2\pi i\varphi_j}\cdot p_j(\tau) \\
&= q^{-\frac{\varphi_j}{\lambda}}p_j(\tau)
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 6.2:
Mit $q^{-\frac{\varphi_j}{\lambda}}p_j(\tau)$ ist auch $q^{-\frac{\varphi_j}{\lambda}}r_j$ aus Lemma 6.5 λ-periodisch und besitzt gemäß Satz 1.3 eine Fourier-Entwicklung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)q^{\frac{n}{\lambda}}.$$

Wegen

$$\varphi_j = \frac{c_j}{d_j},\ c_j, d_j \in \mathbb{N}^*,\ c_j \le d_j$$

ist

$$r_j(\tau) = q^{\frac{\varphi_j}{\lambda}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)q^{\frac{n}{\lambda}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)q^{\frac{d_jn+c_j}{d_j\lambda}}.$$

Weil $\lim\limits_{\tau \to i\infty} r_j(\tau) = 0$ (Lemma 6.5), kann $a_n \neq 0$ für kein $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ sein. Es folgt

$$\begin{aligned} p_j(\tau) &= \delta_{j,r} q^{\frac{\nu+\varphi_r}{\lambda}} + q^{\frac{\varphi_j}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(j) q^{\frac{n}{\lambda}} \\ &= \delta_{j,r} q^{\frac{d_r \nu + c_r}{d_r \lambda}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(j) q^{\frac{d_j n + c_j}{d_j \lambda}} . \end{aligned}$$

7 Eisenstein Reihen

Im folgenden sei stets $k > 2 + 2\alpha$.

Definition 7.1 (Vektorwertige Eisenstein Reihen)
Wir definieren

$$G_r := P_{-1,r}$$

für $r \in G$ (Vereinbarung 5.1).

Satz 7.2
Für $r \in G$ gilt

$$G_r \in \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho)$$

und die Komponentenfunktionen

$$(g_r)_j(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{M \in \overline{\mathcal{R}}} \frac{(\rho(M))^{-1}_{jr}}{\upsilon(M)(M{:}\tau)^k}$$

besitzen Entwicklungen der Form

$$(g_r)_j(\tau) = \delta_{j,r} + q^{\frac{\varphi_j}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(j) q^{\frac{n}{\lambda}}. \tag{1}$$

Beweis:
Satz 6.2

Definition 7.3

$$\mathcal{E}(k, \upsilon, \rho) := \langle \{G_r | r \in G\} \rangle \subseteq \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho)$$

Satz 7.4

i)

$$\dim \mathcal{E}(k, \upsilon, \rho) = |G|$$

ii)

$$\mathcal{M}(k, \upsilon, \rho) = \mathcal{E}(k, \upsilon, \rho) \oplus \mathcal{S}(k, \upsilon, \rho)$$

Beweis:
Zu i): (1) liefert

$$G_r(\tau) = \vec{e}_r + \begin{pmatrix} a_0(1) q^{\frac{\varphi_1}{\lambda}} \\ \vdots \\ a_0(p) q^{\frac{\varphi_p}{\lambda}} \end{pmatrix} q^{\frac{0}{\lambda}} + \dots .$$

Dies zeigt die lineare Unabhängigkeit der G_r.

Zu ii): Wegen (1) haben wir zunächst $\mathcal{E}(k, \upsilon, \rho) \cap S(k, \upsilon, \rho) = \{0\}$.
Es sei nun $F \in \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho)$, $F \notin S(k, \upsilon, \rho)$. Wir definieren

$$R := \{1 \leq r \leq p \mid \text{Die Fourier-Entwicklung von } f_r \text{ beginnt mit } c_r q^{\frac{0}{\lambda}}, c_r \neq 0\}\,.$$

5.1 ergibt dann $R \subseteq G$ und es ist $(F - \sum_{r \in R} c_r G_r) \in S(k, \upsilon, \rho)$.

Satz 7.5

$$\dim \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho) \geq \dim S(k, \upsilon, \rho) \geq p(q-2)\left(\frac{k-(2+2\alpha)}{4q} - 1\right)$$

Beweis:
Wir wählen ein $l \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{k-(2+2\alpha)}{4q} - 1 \leq l < \frac{k-(2+2\alpha)}{4q}\,. \tag{2}$$

Damit ist

$$k - 4ql > 2 + 2\alpha\,. \tag{3}$$

Nach Lemma 5.6 gilt

$$\mathcal{M}(k, \upsilon, \rho) = \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho, \mathbf{G}) \cong \mathcal{M}(k - 4ql, \upsilon, \rho, \mathbf{G} - (q-2)l\mathbf{1})\,.$$

Auf $\mathcal{M}(k - 4ql, \upsilon, \rho, \mathbf{G} - (q-2)l\mathbf{1})$ können wir wegen (3) Satz 6.2 anwenden: In dem Raum finden wir ($\nu = -1, \ldots, -(q-2)l - 1$; $r = 1, \ldots, p$) $p(q-2)l$ linear unbhängige nicht ganze Heckeformen, dazu die Elemente aus $\mathcal{E}(k - 4ql, \upsilon, \rho)$. Damit haben wir mit (2):

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}(k, \upsilon, \rho) &= \dim \mathcal{M}(k - 4ql, \upsilon, \rho, \mathbf{G} - (q-2)l\mathbf{1}) \\ &\geq p(q-2)l + |G| \geq p(q-2)\left(\frac{k-(2+2\alpha)}{4q} - 1\right) + |G|\end{aligned}$$

Satz 7.4 liefert die behauptete Ungleichung.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}^* := \{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}^+ := \mathbb{R}^{>0} :=]0\,, \infty[$
$\mathbb{R}^- := \mathbb{R}^{<0} :=]-\infty\,, 0[$
$\mathbb{R}^{\geq 1} := [1\,, \infty[$
$\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$:= die von $g_1, \ldots, g_n \in G$, G Gruppe, erzeugte Untergruppe
$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$:= der von $v_1, \ldots, v_n \in V$, V Vektorraum, erzeugte Untervektorraum
$\|.\|_\infty$:= Matrixmaximumsnorm

Literatur

[1] Barbara Behle. Hecke-Gruppen, Hecke-Formen und Dirichletreihen mit Funktionalgleichung. Diplomarbeit, Universität Dortmund, 1983.

[2] Bruce C. Berndt and Marvin I. Knopp. *Hecke's theory of modular forms and Dirichlet series.* Hackensack, NJ: World Scientific, 2008.

[3] M. Eichler. Grenzkreisgruppen und kettenbruchartige Algorithmen. *Acta Arith.*, 11:169–180, 1965.

[4] Martin Eichler and Don Zagier. *The theory of Jacobi forms.* Progress in Mathematics, Vol. 55. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1985.

[5] Ronald Evans. A fundamental region for Hecke's modular group. *J. Number Theory*, 5:108–115, 1973.

[6] Erich Hecke. *Mathematische Werke. Hrsg. im Auftr. der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. 3. durchges. Aufl.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1983.

[7] Andrea Hennekemper. Vektorwertige Heckeformen und ihre Fourierkoeffizienten. Diplomarbeit, Universität Dortmund, 2006.

[8] Andrea Hennekemper, Stefan Kühling, and Gerhard Rosenberger. *Einführung in die Funktionentheorie.* Berichte aus der Mathematik. Aachen: Shaker Verlag, 2003.

[9] Karsten Hinz. Kettenbruchartige Algorithmen bei Hecke-Gruppen. Staatsarbeit, Universität Hamburg, 1975.

[10] Marvin Knopp and Geoffrey Mason. Generalized modular forms. *J. Number Theory*, 99(1):1–28, 2003.

[11] Marvin Knopp and Geoffrey Mason. On vector-valued modular forms and their Fourier coefficients. *Acta Arith.*, 110(2):117–124, 2003.

[12] Marvin Knopp and Geoffrey Mason. Vector-valued modular forms and Poincaré series. *Ill. J. Math.*, 48(4):1345–1366, 2004.

[13] Marvin I. Knopp. Some new results on the Eichler cohomology of automorphic forms. *Bull. Am. Math. Soc.*, 80:607–632, 1974.

[14] Marvin I. Knopp. *Modular functions in analytic number theory. 2nd ed.* New York, NY: Chelsea , 1993.

[15] Max Koecher and Aloys Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen.* Berlin: Springer, 1998.

[16] J. Lehner. *A short course in automorphic functions.* New York-Chicago-San Francisco-Toronto-London: Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[17] Falko Lorenz. *Lineare Algebra I. 2. überarb. Aufl.* Mannheim etc.: B. I.-Wissenschaftsverlag, 1988.

[18] Robert A. Rankin. *Modular forms and functions.* Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1977.

[19] Reinhold Remmert and Georg Schumacher. *Funktionentheorie 1. 5. neu bearb. Aufl.* Berlin: Springer, 2002.

[20] Atle Selberg. On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 8:1–15, 1965.