

**Modellierung von Kapitalmarktrenditen  
mittels asymmetrischer GARCH-Modelle**

**DISSERTATION**

zur Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften der Universität Dortmund

Dem Fachbereich Statistik der Universität Dortmund

vorgelegt von

**Olaf Schoffer**

aus Dortmund

Dortmund 2003

**Erstgutachter:** Prof. Dr. W. Krämer

**Zweitgutachter:** Prof. Dr. G. Trenkler

**Tag der mündlichen Prüfung:** 15. Juli 2003

# Danksagung

Allen, die mich bei der Arbeit an meiner Dissertation auf unterschiedlichste Weise unterstützt haben, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

An erster Stelle danke ich meinem wissenschaftlichen Betreuer Herrn Prof. Dr. Walter Krämer für seine intensive fachliche Betreuung sowie wertvolle Anregungen und Ratschläge.

Herrn Prof. Dr. Götz Trenkler danke ich für die Freiräume, die er mir im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an seinem Lehrstuhl zur Erstellung dieser Arbeit einräumte sowie seine wertvollen Hinweise auf benötigte Fachliteratur.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Lars Tschiersch, der mir in jeder Phase meiner Promotion besonders hilfsbereit zur Seite stand und dessen intensives Korrekturlesen wesentlich zum Charakter der Arbeit beigetragen hat.

Für intensive und fruchtbare fachliche Diskussionen danke ich Herrn Dr. Philipp Sibbertsen, Herrn Dr. Christian Kleiber sowie Herrn Dipl.-Stat. Evgenij Hasanov.

Ich danke weiterhin meinen Kollegen Herrn Dr. Matthias Zerbst, Herrn Dipl.-Stat. Uwe Ligges, Frau M.A. Eva Brune, Herrn PD Dr. Jürgen Groß, Herrn Dr. Sven-Oliver Troschke sowie Herrn Dipl.-Stat. Michael Barowski für ihre vielfältige Unterstützung.

Für die finanzielle Förderung im Rahmen des Graduiertenkollegs „Angewandte Statistik“ danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meinen Freunden und meiner Familie, insbesondere meiner Frau Michaela Schoffer, die mich während meiner Promotion begleiteten und mir den nötigen Rückhalt gaben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modellierung bedingter Heteroskedastie</b>	<b>5</b>
2.1	Charakteristika von Kapitalmarktdaten . . . . .	5
2.2	Datenbeschreibung . . . . .	6
2.3	Das GARCH-Modell . . . . .	8
2.3.1	Notation und Definition des GARCH-Prozesses . . . . .	8
2.3.2	Ausgewählte Eigenschaften von GARCH-Prozessen . . . . .	9
2.3.3	Verteilungsannahmen in GARCH-Modellen . . . . .	13
2.4	Schätzmethoden und Algorithmen für GARCH-Modellanpassungen	19
2.4.1	ML- vs. QML-Methode . . . . .	19
2.4.2	Algorithmen zur Maximierung der Likelihood-Funktion . . . . .	20
2.5	Programmüberblick zur Schätzung von GARCH-Modellen . . . . .	23
2.6	Beurteilung von GARCH-Modellen . . . . .	25
2.6.1	Informationskriterien . . . . .	25
2.6.2	Test für die Modellparameter . . . . .	27
2.6.3	Residuen und Vorhersagegüte . . . . .	27
2.6.4	Test auf serielle Unkorreliertheit der (quadrierten) Residuen	28
<b>3</b>	<b>Asymmetrische Modelle</b>	<b>30</b>
3.1	Asymmetrie als weiteres Charakteristikum von Kapitalmarktdaten	30
3.2	Das Asymmetrische Power-GARCH-Modell (A-PARCH) . . . . .	30
3.2.1	Definition des A-PARCH-Prozesses . . . . .	31
3.2.2	Ausgewählte Eigenschaften von A-PARCH-Prozessen . . . . .	32
3.2.3	Symmetrische Spezialfälle und asymmetrische Alternativen	34

3.2.4	Vergleich von A-PARCH mit anderen GARCH-Varianten . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Die Hebelwirkungshypothese</b>	<b>39</b>
4.1	Hebelwirkung als eine Erklärung für Asymmetrie . . . . .	39
4.2	Untersuchung der Asymmetrie mittels GARCH-Modellen . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Fraktionale Integration im A-PARCH-Modell</b>	<b>46</b>
5.1	Langes Gedächtnis von Kapitalmarktdaten . . . . .	46
5.2	Das Fraktional Integrierte A-PARCH-Modell (FI-A-PARCH) . . . . .	47
5.3	Abschätzung des Fraktionalen Differenzenoperators . . . . .	49
5.4	Eigenschaften von FI-A-PARCH-Prozessen . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Ein stationäres A-PARCH-Modell mit langem Gedächtnis</b>	<b>58</b>
6.1	Das Hyperbolische A-PARCH-Modell (HY-A-PARCH) . . . . .	58
6.2	Volterra-Entwicklung Asymmetrischer Power-Garch-Modelle . . . . .	61
6.3	Eigenschaften von HY-A-PARCH-Prozessen . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>70</b>
	<b>Abkürzungs- und Symbolverzeichnis</b>	<b>73</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Strenge Stationarität von GARCH-Modellen</b>	<b>I</b>
<b>B</b>	<b>Abbildungen</b>	<b>II</b>

# 1 Einleitung

Eigenschaften von Finanzmarktdaten wie Renditen bzw. Änderungsraten von Aktien- und Wechselkursen werden häufig mit Modellen der Zeitreihenanalyse nachgebildet. So werden beispielsweise stochastische Prozesse zur Beschreibung von zeitabhängigen Strukturen verwendet. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Eigenschaften einiger dieser Modelle herauszuarbeiten, um zu überprüfen, ob sie die in der empirischen Kapitalmarktforschung festgestellten Eigenschaften von Kapitalmarktrenditen nachbilden können. Zudem wird ein Modell entwickelt, welches ermöglicht, alle in dieser Arbeit vorgestellten Charakteristika von Kapitalmarktrenditen zu reproduzieren.

Kapitalmarktrenditen werden oft mittels der von Engle (1982) eingeführten Klasse der autoregressiven bedingt heteroskedastischen Prozesse (ARCH-Prozesse) modelliert. Diese stochastischen Prozesse ermöglichen die Beschreibung verschiedener Charakteristika von Kapitalmarktrenditen. Die quadrierten Beobachtungen dieser Reihen sind häufig seriell positiv korreliert. Diese Eigenschaft wird als Charakteristikum der Volatilitätsschwankungen bezeichnet. Weiterhin weist die standardisierte unbedingte Verteilung von Renditen in der Regel eine höhere Wölbung auf, als die Standardnormalverteilung, sie ist also hochgipflig.

Grundlage für die in dieser Arbeit eingeführten stochastischen Prozesse ist der verallgemeinerte ARCH-Prozeß (GARCH-Prozeß) nach Bollerslev (1986). Dieses Modell, welches die Charakteristika der Volatilitätsschwankungen und der Hochgipfligkeit nachbilden kann und seine Eigenschaften werden in Kapitel 2 vorgestellt. Das Charakteristikum der Asymmetrie von Kapitalmarktdaten, insbesondere von Aktienkursen, d.h. die negative Korrelation quadrierter Beobachtungen der Renditereihe mit verzögerten Renditewerten, kann mit diesem Modell jedoch nicht reproduziert werden. In der vorliegenden Arbeit werden daher Erweiterungen des ursprünglichen GARCH-Ansatzes untersucht, welche diese Eigenschaft von Kapitalmarktrenditen wiedergeben können. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem von Ding et al. (1993) eingeführten Asymmetrischen Power-GARCH-Modell (A-PARCH-Modell). Eigenschaften dieses Modells sowie der Vergleich mit anderen symmetrischen und asymmetrischen GARCH-Modellen sind in Kapitel 3 zu finden.

Obwohl das Vorliegen von Asymmetrie in bestimmten Arten von Kapitalmarktrenditen nahezu unumstritten ist, gibt es bisher keine endgültige Aussage über die Ursache dieses Phänomens. Eine häufig verwendete Erklärung dieser Eigenschaft ist die Hebelwirkungshypothese von Black (1976). Die in Kapitel 4 mittels asymmetrischer GARCH-Modelle durchgeführte Untersuchung bestätigt die Plausibilität dieser Hypothese, bietet jedoch ebenfalls keine endgültige Antwort auf die Frage nach der wahren Ursache der Asymmetrie.

Umstritten ist hingegen das Vorliegen von langem Gedächtnis in Kapitalmarktrenditen. Mit dieser Eigenschaft wird der Umstand der sehr langfristigen Nachwirkung von sogenannten Schocks beschrieben. In derartigen Zeitreihen läßt der Einfluß zuvor eingetretener Ereignisse auf nachfolgende Werte nur sehr langsam nach. Ein erster Ansatz zur Modellierung dieser Eigenschaft mittels GARCH-Prozessen ist der von Baillie et al. (1996) eingeführte FIGARCH-Prozeß. Für dieses Modell kann aufgrund nichtexistierender zweiter Momente jedoch keine Aussage über die Autokorrelationsstruktur und somit über das Vorliegen von langem Gedächtnis getroffen werden. Dies gilt ebenso für die von Tse (1998) vorgestellte asymmetrische Erweiterung dieses Ansatzes zum FI-A-PARCH-Modell. Die Eigenschaften beider Modelle werden in Kapitel 5 untersucht. Insbesondere wird dabei die Anzahl von Beobachtungen betrachtet, welche in diesen Modellen zur Abschätzung des fraktionalen Differenzenoperators benötigt wird. Der fraktionale Differenzenoperator  $(1 - B)^d$  als Teil der Modellgleichung von FIGARCH- und FI-A-PARCH-Prozessen dient gerade zur Erzeugung der langfristigen Abhängigkeitsstruktur.

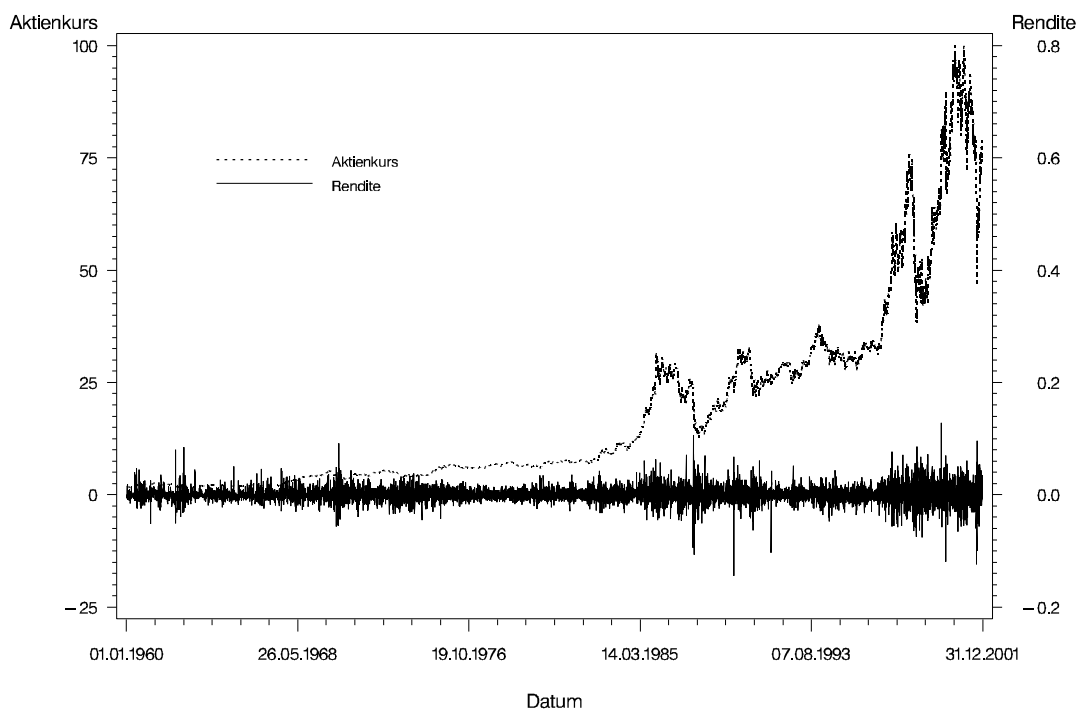
Um die Eigenschaft nichtexistierender zweiter Momente von FI-A-PARCH-Prozessen zu umgehen, wird als neuer Ansatz der Hyperbolische A-PARCH-Prozeß (HY-A-PARCH-Prozeß) vorgestellt. Diese asymmetrische Erweiterung des HYGARCH-Modells von Davidson (2002) ermöglicht es, die in dieser Arbeit vorgestellten Charakteristika der Volatilitätsschwankungen, der Hochgipfligkeit, der Asymmetrie und des langen Gedächtnisses nachzubilden. Zur Untersuchung der Eigenschaften dieses Modells wird unter anderem die von Priestley (1988) eingeführte Volterra-Reihenentwicklung benötigt. Das HY-A-PARCH-Modell, die Methode der Volterra-Entwicklung und Folgerungen über die Eigenschaften dieses Modells werden in Kapitel 6 vorgestellt.

## 2 Modellierung bedingter Heteroskedastie

### 2.1 Charakteristika von Kapitalmarktdaten

Wie aus empirischen Untersuchungen bekannt ist, sind quadrierte Beobachtungen von Kapitalmarktdaten, insbesondere Änderungsraten von Wechselkursen und Renditen von Aktienkursen (zur Definition von Änderungsraten und Renditen siehe Abschnitt 2.2), häufig seriell positiv korreliert. Dies ist dadurch begründet, daß die erwähnten Daten zwar häufig im Mittel konstant sind, ihre bedingte Streuung bzw. Volatilität über die Zeit aber schwankt.

Das Phänomen der Volatilitätsschwankungen beschreibt also das zeitliche Verhalten von Kapitalmarktdaten abwechselnder Perioden tendenziell stärkerer sowie Perioden geringerer Streuung. Diese Perioden, auch Volatilitätscluster genannt, sind beispielhaft im Zeitverlauf der Rendite für die Aktie der Deutschen Bank in Abbildung 2.1 erkennbar.



**Abbildung 2.1:** Zeitverlauf der (bereinigten) Aktienkurse und Renditen für die Deutsche Bank

Eine andere häufig festgestellte Eigenschaft von Kapitalmarktrenditen ist eine gegenüber der Standardnormalverteilung deutlich erhöhte Wölbung (bzw. Kur-

tosis). So weist die standardisierte Renditereihe für die Aktie der Deutschen Bank eine empirische Wölbung von 11.62 auf. Zum Vergleich: die Wölbung der Standardnormalverteilung besitzt einen Wert von 3. Diese Eigenschaft wird als Hochgipfligkeit oder Leptokurtosis bezeichnet.

Auf weitere spezifische Eigenschaften einiger Kapitalmarktrenditen (Asymmetrie und langes Gedächtnis) wird in den Kapiteln 3 und 4 näher eingegangen.

## 2.2 Datenbeschreibung

In der vorliegenden Arbeit sollen unter anderem die Eigenschaften von Modellanpassungen mit verschiedenen GARCH-Modellen untersucht werden. Dabei werden Renditen des DAX, verschiedener deutscher Aktienkurse, Änderungsraten von Wechselkursen und Edelmetallpreisen sowie erste Differenzen von Zinssätzen verwendet.

Als Rendite wird im folgenden die zeitstetige Rendite zum Zeitpunkt  $t$

$$R_t = \ln\left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right) \quad \forall t \in \mathbf{Z}, \quad (2.1)$$

wobei  $K_t$  den Wert der betreffenden Reihe zum Zeitpunkt  $t$  angibt, bezeichnet. Änderungsraten von Wechselkursen zum Zeitpunkt  $t$  werden hier ebenfalls mit Hilfe der Formel (2.1) berechnet. Die erste Differenz zum Zeitpunkt  $t$  errechnet sich als

$$D_t = K_t - K_{t-1} \quad \forall t \in \mathbf{Z}. \quad (2.2)$$

In Tabelle 2.1 werden die in dieser Arbeit verwendeten Daten näher beschrieben.



**Tabelle 2.1:** Kürzel, Beschreibung und Zeitraum der untersuchten Daten

Renditen täglicher Aktienkurse und -indizes		
DAX	Deutscher Aktienindex DAX	05.01.1960 bis 31.12.2001
DOW	Dow Jones Aktienindex	02.01.1901 bis 30.10.1998
BAS	BASF	05.01.1960 bis 29.09.1995
BAY	Bayer	05.01.1960 bis 31.12.2001
DAI	Daimler	05.01.1960 bis 29.09.1995
RWE	RWE	05.01.1960 bis 29.09.1995
SIE	Siemens	05.01.1960 bis 29.09.1995
Änderungsraten täglicher Wechselkurse		
GBPDEM	Britisches Pfund - Deutsche Mark	07.04.1988 bis 11.01.1994
GBPUSD	Britisches Pfund - US Dollar	03.08.1982 bis 31.12.1998
JPYUSD	Japanischer Yen - US Dollar	12.04.1988 bis 10.01.1994
SFRDEM	Schweizer Franken - Deutsche Mark	04.01.1978 bis 31.12.1998
USDDEM	US Dollar - Deutsche Mark	04.01.1978 bis 31.12.1998
Renditen täglicher Gold- und Silberpreise		
XAU.X	S&P Gold & Silver Index	01.09.1988 bis 22.08.2000
S.LME	Silberpreis an der LME	06.08.1999 bis 31.07.2000
1. Differenzen wöchentlicher Zinssätze der Deutschen Bundesbank		
Zins1	Ein-Monats-Zinssatz	17.07.1970 bis 30.06.1995
Zins6	Sechs-Monats-Zinssatz	17.07.1970 bis 30.06.1995
ZinsLang	Langfrist-Zinssatz	17.07.1970 bis 30.06.1995

Zusätzlich sei darauf hingewiesen, daß die beschriebenen Reihen vor Modellanpassungen mittelwertadjustiert werden, da in der vorliegenden Arbeit ausschließlich die zeitliche Struktur der bedingten Volatilitäten von Interesse ist.

Die verwendeten Kursdaten des Deutschen Aktienindex und der vier im Deutschen Aktienindex enthaltenen Aktien wurden von der Karlsruher Kapitalmarktdatenbank zur Verfügung gestellt, die Wechselkursdaten von der Bonner Finanzmarktdatenbank<sup>1</sup>, die Edelmetallpreisdaten von S&P Comstock bzw. der London Metal Exchange (LME) und die Zinsreihen von der Deutschen Bundesbank.

<sup>1</sup>Bonner Finanzmarktdatenbank: Statistische Abteilung der Universität Bonn, Adenauerallee 24-26, 53113 Bonn, <http://sonder.finasto.uni-bonn.de>.

## 2.3 Das GARCH-Modell

Zur Beschreibung der in Abschnitt 2.1 erwähnten Autokorrelationsstruktur der quadrierten Beobachtungen wurde von Engle (1982) die Klasse der autoregressiven bedingt heteroskedastischen Prozesse (ARCH-Prozesse) eingeführt. Insbesondere das verallgemeinerte ARCH-Modell (GARCH-Modell) von Bollerslev (1986) findet oft Anwendung bei der Modellierung von Kapitalmarktdaten und der Vorhersage ihrer bedingten Volatilitäten. Dieses Modell ist Grundlage für verschiedenste Verallgemeinerungen, von denen einige im Verlauf dieser Arbeit noch vorgestellt werden.

### 2.3.1 Notation und Definition des GARCH-Prozesses

Da in der Literatur über GARCH-Modelle die verschiedensten Schreibweisen verwendet werden, dient die nachfolgende Definition auch zur Festlegung der in dieser Arbeit verwendeten Notation.

**Definition 2.1:** Ein stochastischer Prozeß  $\{y_t\}$  heißt **verallgemeinerter autoregressiver bedingt heteroskedastischer Prozeß** der Ordnungen  $p$  und  $q$ , kurz  $GARCH(p, q)$ -Prozeß, wenn er für  $t \in \mathbf{Z}$  den folgenden Gleichungen genügt

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \cdot \sigma_t, & \varepsilon_t &\stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{P}_{0,1} \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j y_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{P}_{0,1}$  eine beliebige Verteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Um zu vermeiden, daß  $\sigma_t^2$  in der rekursiven Gleichung (2.3) negativ werden kann, soll zusätzlich folgende Nichtnegativitätsrestriktion für die Parameter gelten

$$\alpha_0, \alpha_q, \beta_p > 0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{1-q}, \beta_1, \dots, \beta_{p-1} \geq 0. \quad (2.4)$$

Die Restriktion (2.4) ist nach Nelson, Cao (1992) jedoch nur hinreichend, aber nicht notwendig.

Das GARCH-Modell enthält das bereits erwähnte ARCH-Modell als Spezialfall, indem die Modellordnung  $p$  in (2.3) zu Null gesetzt wird (d.h.  $GARCH(0, q) \hat{=}$

ARCH( $q$ )). Ein weiterer Zusammenhang ergibt sich aus der Tatsache, daß sich GARCH-Modelle beliebiger Modellordnung als ARCH( $\infty$ )-Modell formulieren lassen, wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $cP(\cdot)$  mit

$$cP(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \beta_j z^j \quad (2.5)$$

außerhalb des Einheitskreises liegen (vgl. Bollerslev, 1986).

Das ARCH-Modell wird jedoch seltener verwendet, da es im Vergleich zu GARCH-Modellen in der Regel mehr Parameter benötigt, d.h. bei Anpassung von GARCH( $p, q$ )- und ARCH( $\tilde{p}$ )-Modellen mit gleicher Anpassungsgüte gilt nach Stier (2001), S. 354 oft

$$p + q \leq \tilde{p} . \quad (2.6)$$

Eine Analogie zu den bekannten ARMA-Modellen ergibt sich mit  $\forall j > q : \alpha_j = 0$  und  $\forall j > p : \beta_j = 0$  sowie  $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2$ , denn

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j y_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \\ \Leftrightarrow y_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\max\{p,q\}} (\alpha_j + \beta_j) y_{t-j}^2 + u_t + \sum_{j=1}^p \beta_j u_{t-j}^2 . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Der GARCH( $p, q$ )-Prozeß  $\{y_t\}$  kann somit als ARMA( $\max\{p, q\}, p$ )-Prozeß für  $\{y_t^2\}$  mit den Innovationen  $\{u_t\}$  beschrieben werden.

### 2.3.2 Ausgewählte Eigenschaften von GARCH-Prozessen

Viele Aussagen über GARCH-Prozesse gelten nur unter der Bedingung strenger oder schwacher Stationarität. Andere erfordern die Existenz bestimmter Momente. Daher ist es von großem Interesse, für welche Parameterkonstellationen im GARCH-Modell diese Bedingungen erfüllt sind.

Nach Theorem 1 in Bollerslev (1986) ist der GARCH( $p, q$ )-Prozeß aus Definition 2.1 mit Bedingung (2.4) genau dann schwach stationär, wenn gilt

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 . \quad (2.8)$$

Eine auf dem größten Ljapunow-Exponenten basierende hinreichende und notwendige Bedingung zur strengen Stationarität ist in Bougerol, Picard (1992) gegeben. Die exakte Notation dieser Bedingung erfordert erheblichen Aufwand und wird daher im Anhang A dargestellt.

Mit den Methoden aus Kapitel 6 werden übrigens weitere hinreichende Bedingungen für schwache und strenge Stationarität gegeben (vgl. Giraitis et al., 2000, Theorem 2.1).

Eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz bestimmter Momente des GARCH( $p, q$ )-Prozesses aus Definition 2.1 ist in Ling, McAleer (2002) gegeben. Demnach gilt  $E(y_t^{2m}) < \infty$  genau dann, wenn für die Matrix

$$\mathbf{A}_t = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 \varepsilon_t^2 & \dots & \alpha_q \varepsilon_t^2 & \beta_1 \varepsilon_t^2 & \dots & \beta_p \varepsilon_t^2 \\ \mathbf{I}_{(q-1) \times (q-1)} & \mathbf{0}_{(q-1) \times 1} & & \mathbf{0}_{(q-1) \times p} & & \\ \hline \alpha_1 & \dots & \alpha_q & \beta_1 & \dots & \beta_p \\ & & \mathbf{0}_{(p-1) \times q} & \mathbf{I}_{(p-1) \times (p-1)} & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} & \end{array} \right) \quad (2.9)$$

folgende Bedingung erfüllt ist

$$\min\{|\text{Eigenwerte der Matrix } E(\mathbf{A}_t^{\otimes m})|\} < 1. \quad (2.10)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{A}^{\otimes m}$  das  $m$ -fache Kronecker-Produkt der Matrix  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{I}_{n \times n}$  die Einheitsmatrix der Dimension  $n \times n$  und  $\mathbf{0}_{r \times s}$  die Nullmatrix der Dimension  $r \times s$ .

Für verschiedene Spezialfälle des in Definition 2.1 vorgestellten GARCH-Modells sind einfacher zu berechnende Bedingungen für die Existenz von Momenten beispielsweise in He, Teräsvirta (1999a,b) zu finden.

Um das Verhalten von GARCH-Prozessen zu illustrieren und mit den in Abschnitt 2.1 beschriebenen Eigenschaften von Kapitalmarktrenditen zu vergleichen, ist es an dieser Stelle notwendig, einige Aussagen über Momente zu treffen. Die Existenz der jeweiligen Momente sei dabei vorausgesetzt.

Zunächst wird dazu der bedingte Erwartungswert eines GARCH-Prozesses  $\{y_t\}$

aus Definition 2.1 zum Zeitpunkt  $t$  betrachtet

$$\begin{aligned}
 E(y_t|\psi_{t-1}) &= E(\varepsilon_t \cdot \sigma_t|\psi_{t-1}) \\
 &= E(\varepsilon_t|\psi_{t-1}) \cdot \sigma_t \quad , \text{ da } \sigma_t|\psi_{t-1} \text{ konstant ist} \\
 &= E(\varepsilon_t) \cdot \sigma_t \quad , \text{ da } \varepsilon_t \text{ unabhängig von } \psi_{t-1} \text{ ist} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$\psi_t$  repräsentiert dabei alle Realisationen der Reihe  $\{y_t\}$  bis einschließlich Zeitpunkt  $t$ . Gleichung (2.11) beschreibt, daß GARCH-Prozesse um 0 schwanken, also im Mittel konstant sind.

Weiterhin ist die bedingte Varianz von  $\{y_t\}$  zum Zeitpunkt  $t$  von Interesse

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(y_t|\psi_{t-1}) &= \text{Var}(\varepsilon_t \cdot \sigma_t|\psi_{t-1}) \\
 &= \text{Var}(\varepsilon_t) \cdot \sigma_t^2 \\
 &= \sigma_t^2.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Es wird deutlich, daß die bedingte Varianz von GARCH-Prozessen vom Zeitpunkt  $t$  abhängig ist. Diese Eigenschaft der zeitlich schwankenden Volatilität wird bedingte Heteroskedastizität genannt und motiviert somit die Namensgebung der oben eingeführten Modelle.

Nachfolgend wird außerdem die bedingte Wölbung des Prozesses mit der unbedingten verglichen (Notation für Wölbung:  $\kappa(\cdot)$ )

$$\begin{aligned}
 \kappa(y_t|\psi_{t-1}) &= \frac{E(y_t^4|\psi_{t-1})}{E(y_t^2|\psi_{t-1})^2} \\
 &= \frac{E(\varepsilon_t^4 \cdot \sigma_t^4|\psi_{t-1})}{E(\varepsilon_t^2 \cdot \sigma_t^2|\psi_{t-1})^2} \\
 &= \frac{\sigma_t^4 \cdot E(\varepsilon_t^4)}{(\sigma_t^2)^2 \cdot E(\varepsilon_t^2)^2} \\
 &= \kappa(\varepsilon_t)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

und

$$\begin{aligned}
\kappa(y_t) &= \frac{E(y_t^4)}{E(y_t^2)^2} \\
&= \frac{E(E(y_t^4|\psi_{t-1}))}{E(E(y_t^2|\psi_{t-1}))^2} \\
&= \frac{E(\sigma_t^4 \cdot E(\varepsilon_t^4))}{E(\sigma_t^2 \cdot E(\varepsilon_t^2))^2} \\
&= \frac{E(\sigma_t^4)}{E(\sigma_t^2)^2} \cdot \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} \\
&= \frac{E(\sigma_t^4)}{E(\sigma_t^2)^2} \cdot \kappa(\varepsilon_t). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Gleichung (2.13) besagt, daß die bedingte Wölbung gerade die Wölbung der Verteilung von  $\varepsilon_t$  ist, wohingegen Gleichung (2.14) beschreibt, daß sich die unbedingte Wölbung mit dem Vorfaktor  $\frac{E(\sigma_t^4)}{E(\sigma_t^2)^2}$  aus der bedingten ergibt.<sup>2</sup>

Nach der Jensenschen Ungleichung gilt aber

$$\begin{aligned}
E(\sigma_t^4) &\geq E(\sigma_t^2)^2 \\
\Rightarrow \frac{E(\sigma_t^4)}{E(\sigma_t^2)^2} &\geq 1 \\
\Rightarrow \kappa(y_t) &\geq \kappa(y_t|\psi_{t-1}). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Somit ist die unbedingte Wölbung des Prozesses höher als die bedingte.

Insgesamt wird mit den Eigenschaften (2.11), (2.12) und (2.15) deutlich, daß die eingangs beschriebenen Charakteristika von Kapitalmarktdaten (Konstanz im Erwartungswert, Volatilitätsschwankungen und Hochgipfligkeit) durch GARCH-Prozesse wiedergegeben werden können.

---

<sup>2</sup>Für die Normalverteilungsannahme  $\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$  ist in Karanasos (1999) das zweite und vierte Moment von GARCH-Prozessen exakt angegeben. Da jedoch in der vorliegenden Arbeit diese Annahme eine untergeordnete Rolle spielt, wird hier auf eine ausführliche Darstellung verzichtet.

### 2.3.3 Verteilungsannahmen in GARCH-Modellen

Für das in Definition 2.1 eingeführte GARCH-Modell wird sehr oft statt der allgemeinen Verteilungsannahme

$$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{P}_{0,1}$$

die Normalverteilungsannahme

$$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

verwendet.

Es hat sich aber gezeigt, daß GARCH-Modelle mit Normalverteilungsannahme die Hochgipfligkeit der Kapitalmarktrenditen nicht ausreichend wiedergeben können. So ist dabei zwar die Wölbung der unbedingten Verteilung gegenüber der bedingten erhöht, jedoch ist die Wölbung der bedingten Normalverteilung zu gering, um die in Kapitalmarktrenditen übliche Hochgipfligkeit für die unbedingte Verteilung zu reproduzieren.

Dies und die Vorteile alternativer Verteilungsannahmen werden beispielsweise in Bollerslev (1987) und Teräsvirta (1996) diskutiert. Dort wird vorgeschlagen, hochgipflige Verteilungen als bedingte Verteilung in GARCH-Prozessen zu verwenden. Solche sind beispielsweise die nachfolgend vorgestellte *GED* sowie die *t*-Verteilung.

Als hochgipflig oder leptokurtotisch werden Verteilungen bezeichnet, welche im standardisierten Fall (Erwartungswert = 0 und Varianz = 1) eine höhere Wölbung als die Standardnormalverteilung besitzen ( $\kappa_{\mathcal{N}(0,1)} = 3$ ). Oft wird Hochgipfligkeit auch mit der Eigenschaft breiter bzw. schwerer Ränder (mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in den Rändern gegenüber der Standardnormalverteilung) gleichgesetzt. Die Äquivalenz gilt aber nicht für alle hochgipfligen Verteilungen. Da die in dieser Arbeit verwendeten Verteilungen dieser Äquivalenz jedoch nicht widersprechen, werden die genannten Eigenschaften synonym verwendet.

Zum Vergleich wird jedoch zunächst die bedingte Dichte eines GARCH-Prozesses unter der Normalverteilungsannahme

$$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \quad [ \Leftrightarrow y_t | \psi_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2) ] \quad (2.16)$$

dargestellt

$$f(y_t|\psi_{t-1}) = (2\pi\sigma_t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}} . \quad (2.17)$$

Da die Parameter aller in dieser Arbeit betrachteten Modelle mittels der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden, wird an dieser Stelle außerdem die zu maximierende Log-Likelihood-Funktion angegeben

$$\ell(\theta) = \ln(L(\theta)) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \ln(2\pi\sigma_t^2) + \frac{y_t^2}{\sigma_t^2} \right) , \quad (2.18)$$

wobei  $\theta$  hier und nachfolgend jeweils als Parametervektor aller in der Likelihood-Funktion vorkommenden Parameter dient. Für  $y_t$  wird bei ML-Schätzungen der zum Zeitpunkt  $t$  beobachtete Wert der Zeitreihe eingesetzt und  $\sigma_t$  ergibt sich aus der rekursiven Gleichung des jeweiligen GARCH-Modells (beispielsweise (2.3)).

Für die *GED*

$$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} GED(0, 1) \quad [ \Leftrightarrow y_t|\psi_{t-1} \sim GED(0, \sigma_t^2) ] \quad (2.19)$$

mit der Dichtefunktion

$$f(y_t|\psi_{t-1}) = \frac{\nu \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \left|\frac{y_t}{\lambda}\right|^\nu\right\}}{\lambda \cdot 2^{\frac{1+\nu}{\nu}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} , \quad \text{wobei } \lambda = \left(\frac{\sigma_t^2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{2^{\frac{2}{\nu}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

ergibt sich folgende Log-Likelihood-Funktion

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^T \left( \ln(\nu) - \ln\left(\lambda \cdot 2^{\frac{1+\nu}{\nu}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) - \frac{1}{2} \left|\frac{y_t}{\lambda}\right|^\nu \right) , \quad (2.21)$$

wobei  $\Gamma(\cdot)$  die Gamma-Funktion darstellt.

Die von Nelson (1991) verwendete Verallgemeinerte Fehlerverteilung (*GED*) kann sowohl breitere (für  $\nu < 2$ ) als auch schmalere (für  $\nu > 2$ ) Ränder als die Normalverteilung annehmen und enthält diese auch als Spezialfall (für  $\nu = 2$ ). Nelson stellte allerdings auch fest, daß diese Verteilungsfamilie mit einem Parameter nicht flexibel genug ist, gleichzeitig breite Ränder einer Verteilung und hohe Konzentration in der Mitte befriedigend beschreiben zu können. Vor allem die große Zahl



der „Ausreißer“ in Kapitalmarktdaten konnte damit nicht ausreichend erklärt werden.

Für die standardisierte  $t$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden (kurz  $t_n(0, 1)$ )

$$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} t_n(0, 1) \quad [ \Leftrightarrow y_t | \psi_{t-1} \sim t_n(0, \sigma_t^2) ] \quad (2.22)$$

mit der Dichtefunktion

$$f(y_t | \psi_{t-1}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{y_t^2}{\sigma_t^2(n-2)}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi\sigma_t^2(n-2)}} \quad (2.23)$$

ergibt sich folgende Log-Likelihood-Funktion

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln \left( \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{y_t^2}{\sigma_t^2(n-2)}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi\sigma_t^2(n-2)}} \right). \quad (2.24)$$

Von den vorgestellten Verteilungen hat sich insbesondere die standardisierte  $t$ -Verteilung als bedingte Verteilung als fähig erwiesen, die hohe Wölbung für die unbedingte Verteilung zu reproduzieren. Daher werden nachfolgend einige Eigenschaften dieser Verteilung näher vorgestellt.

Für eine  $t_n$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  existieren die  $k$ -ten Momente unter der Bedingung  $k \leq n - 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und haben folgende Form

$$E(X^k) = \begin{cases} n^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)}{(n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot (n-k)}, & k \text{ gerade} \\ 0 & , k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Da sich die standardisierte  $t$ -Verteilung aus der  $t$ -Verteilung nach dem Schema

$$\begin{aligned} X &\sim t_n \quad \text{mit} \quad \text{Var}(X) = \frac{n}{n-2} \quad (n \geq 3) \\ \Rightarrow Y &= \sqrt{\frac{n-2}{n}} \cdot X \sim t_n(0, 1) \end{aligned}$$

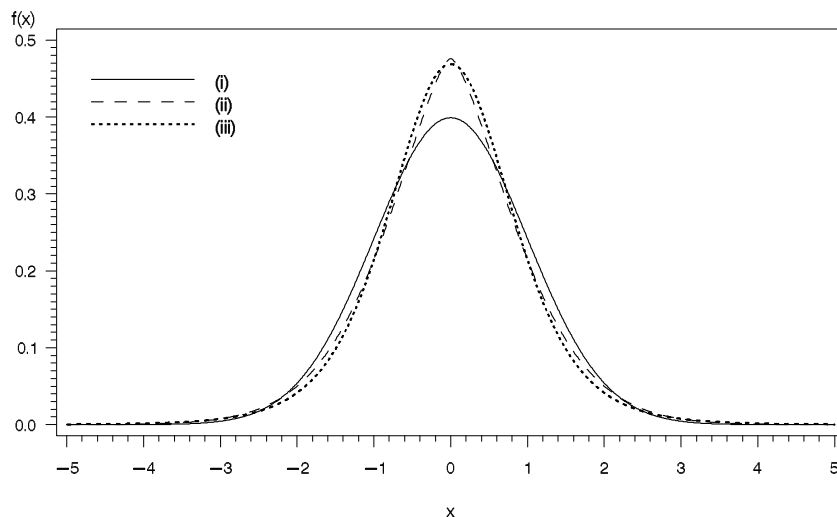
ergibt, berechnet sich ihre Wölbung folgendermaßen

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{n}{n-2} \quad , \quad E(X^4) = \frac{3n^2}{(n-2)(n-4)} \quad (n \geq 5) \\
\Rightarrow \kappa(X) &= \frac{E(X^4)}{E(X^2)^2} = \frac{3n^2}{(n-2)(n-4)} \cdot \frac{(n-2)^2}{n^2} = \frac{3(n-2)}{n-4} \\
\Rightarrow \kappa(Y) &= \frac{E(Y^4)}{E(Y^2)^2} = \frac{E\left(\frac{(n-2)^2}{n^2} \cdot X^4\right)}{E\left(\frac{n-2}{n} \cdot X^2\right)^2} = \frac{\frac{(n-2)^2}{n^2} E(X^4)}{\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 E(X^2)^2} = \kappa(X) \\
\Rightarrow \kappa(Y) &= \frac{3(n-2)}{n-4} \quad . \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Der Gleichung (2.25) läßt sich entnehmen, daß die Wölbung der  $t$ -Verteilung wegen  $n-2 > n-4$  größer als die der Normalverteilung ist und mit fallender Anzahl von Freiheitsgraden steigt.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der  $t$ -Verteilung ist das Verhalten für eine große Anzahl von Freiheitsgraden. So konvergiert ihre Verteilungsfunktion für  $n \rightarrow \infty$  gegen die der Standardnormalverteilung. In Modellanpassungen mittels Maximum-Likelihood-Methode bei zugrundeliegender  $t$ -Verteilung wird der Wert  $\tilde{n} = \frac{1}{n}$  als Parameter gemeinsam mit den anderen Modellparametern geschätzt. Die Schätzung  $\hat{\tilde{n}}$  kann damit als Prüfgröße für einen Test auf Zugrundeliegen einer Normalverteilung verwendet werden, denn es gilt  $H_0 : \tilde{n} = 0 \Leftrightarrow \tilde{H}_0 : \text{„Dem Modell liegt eine Normalverteilung zugrunde“}$ .

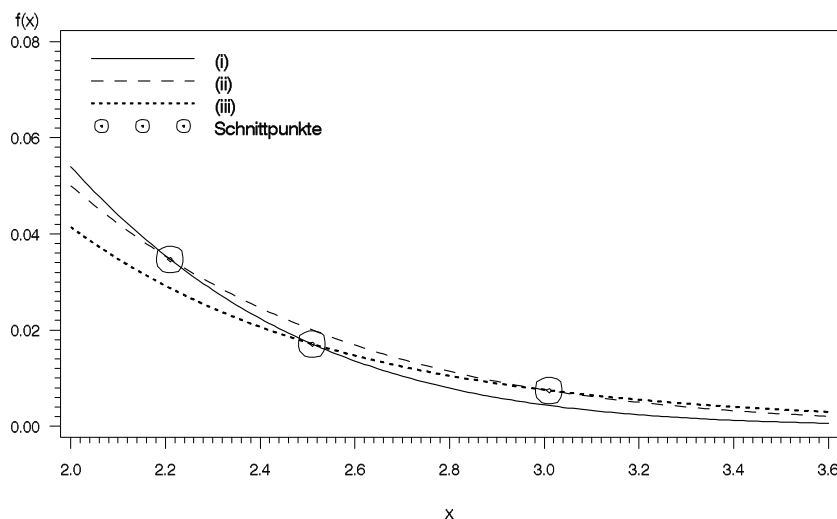
Zur Veranschaulichung der erwähnten Verteilungsannahmen dienen die Graphen der Dichtefunktionen in Abbildung 2.2. Zum Vergleich mit der Standardnormalverteilung wurden beispielhaft die standardisierte  $GED$  mit  $\nu = 1.5$  sowie die standardisierte  $t$ -Verteilung mit 6 Freiheitsgraden ausgewählt.



**Abbildung 2.2:** Dichtefunktionen der Verteilungen:

(i)  $\mathcal{N}(0, 1)$  (ii)  $GED(0, 1)_{\nu=1.5}$  (iii)  $t_6(0, 1)$

Wie in Abbildung 2.2 zu erkennen ist, besitzen  $GED$  und  $t$ -Verteilung sowohl in dem Bereich um  $x = 0$  und als auch an den Rändern mehr Wahrscheinlichkeitsmasse als die Normalverteilung. Sie entsprechen also genau den zuvor beschriebenen Eigenschaften hochgipfliger Verteilungen.



**Abbildung 2.3:** Ausschnitt aus Abbildung 2.2 mit markierten Schnittpunkten –

Dichtefunktionen der Verteilungen:

(i)  $\mathcal{N}(0, 1)$  (ii)  $GED(0, 1)_{\nu=1.5}$  (iii)  $t_6(0, 1)$

Bei genauerer Betrachtung von Abbildung 2.3, eines Detailausschnitts von Abbildung 2.2, insbesondere der dort markierten Schnittpunkte, wird aber deutlich,

daß die *GED* gegenüber der *t*-Verteilung zwar um  $x = 0$  eine höhere Dichtefunktion hat, jedoch weniger breite Ränder aufweist (beachte dabei, daß beide Verteilungen standardisiert sind). Dies bestätigt die bereits beschriebene Eigenschaft der *GED*, nicht gleichzeitig breite Ränder und hohe Konzentration in der Mitte befriedigend beschreiben zu können.

Weitere Verteilungsannahmen, beispielsweise die Verwendung stabiler Verteilungen (beschrieben in McCulloch, 1996, S. 417), sind denkbar, sollen jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Zur Illustration der Vorteile alternativer Verteilungsannahmen (insbesondere der *t*-Verteilungsannahme) werden in Tabelle 2.2 die Werte für das Schwarz-Bayes-Informationskriterium (siehe dazu Abschnitt 2.6.1) bei Modellanpassungen mit den beschriebenen Verteilungen aufgeführt. Dies wird beispielhaft für drei Reihen von Kapitalmarktrenditen durchgeführt. Für andere Reihen aus diesem Bereich lassen sich ähnliche Resultate ableiten.

**Tabelle 2.2:** Werte für *SBC* des GARCH(1,1)-Modells mit verschiedenen Verteilungsannahmen (jeweils kleinster Wert **fett**)

Bezeichnung	$\mathcal{N}$	<i>GED</i>	<i>t</i>
DAX	-67588.2	-67856.5	<b>-68056.9</b>
DAI	-51989.3	-52987.1	<b>-53051.7</b>
JPYUSD	-10264.3	-10364.3	<b>-10366.2</b>

In Tabelle 2.2 wird gemäß *SBC* für alle betrachteten Reihen die *t*-Verteilung als die selektiert, die in Verbindung mit einem GARCH-Modell die Daten am besten repräsentiert. Ähnliche Resultate wie für das GARCH-Modell lassen sich auch für die später in dieser Arbeit betrachteten Verallgemeinerungen des GARCH-Ansatzes ableiten, wie z.B. für das A-PARCH-Modell in Paoletta (1998). Daher wird in dieser Arbeit, falls nicht anders angegeben, zur Anpassung von GARCH-Modellen die *t*-Verteilung als bedingte Verteilung verwendet.

## 2.4 Schätzmethoden und Algorithmen für GARCH-Modellanpassungen

In Abschnitt 2.3.3 wurde bereits erwähnt, daß für Modellanpassungen in dieser Arbeit die Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode) zur Parameterschätzung verwendet wird. Likelihood-Funktionen in GARCH-Modellen sind jedoch rekursiv und insbesondere für höhere Modellordnungen stark nichtlinear. Daher führen einfache Maximierungsverfahren wie Newton-Raphson o.ä. kaum zu zuverlässigen Ergebnissen bzw. sind technisch nicht durchführbar. Es werden somit andere Verfahren bzw. Algorithmen benötigt, die derartige Gleichungen besser handhaben können.

Zunächst wird dazu nachfolgend die zur ML-Methode verwandte Quasi-Maximum-Likelihood-Methode vorgestellt und diese beiden Verfahren verglichen. Anschließend werden Algorithmen zur Optimierung in stark nichtlinearen Gleichungen kurz vorgestellt.

### 2.4.1 ML- vs. QML-Methode

Einen Ausweg aus dem in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Problem, die wahre Form der zugrundeliegenden Verteilung nicht zu kennen, kann die Quasi-Maximum-Likelihood-Methode (QML-Methode) bieten. Eine Beschreibung der QML-Methode sowie die Untersuchung ihrer Eigenschaften für GARCH-Modelle ist in Bollerslev, Wooldridge (1992) gegeben.

ML-Schätzungen, bei denen die zugrundeliegende Verteilung fehlspezifiziert wird, werden als Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzungen (QML-Schätzungen) bezeichnet. Das QML-Verfahren kann demnach auch verwendet werden, wenn keine Annahmen über die Verteilung getroffen wurden. Stattdessen ist es beispielsweise lediglich notwendig, verschiedene Momente der Verteilung zu kennen (bzw. aus der Stichprobe zu schätzen) und diese in eine (Quasi-)Verteilung einzusetzen, die flexibel genug ist, diese Momente nachbilden zu können.

Für GARCH-Modellanpassungen wird dazu jedoch oft nur die Normalverteilung verwendet, die durch erstes und zweites Moment bereits eindeutig festgelegt ist. In diesem Fall unterscheidet sich die Parameterschätzung (und entsprechend die

Schätzergebnisse) nicht von der einer ML-Schätzung bei zugrundegelegter Normalverteilung. Die wesentliche Anpassung findet hierbei allein bei der Schätzung der Standardabweichung für die Parameterschätzer statt.

Durch Anwendung des hier beschriebenen Verfahrens erhält man somit keine bessere Modellanpassung, sondern es wird versucht, die Verfälschtheit von Tests unter der Annahme der Fehlspezifikation der Verteilung zu korrigieren. Dieser Ausweg ist also nur anzuwenden, falls kaum Informationen über die zugrundeliegende Verteilung vorliegen. Da es für die in dieser Arbeit durchgeführten Modellanpassungen begründete Einwände gegen die Verwendung der Normalverteilung (zugunsten der  $t$ -Verteilung) gibt, erscheint es sinnvoller, ML-Schätzungen mit zugrundeliegender  $t$ -Verteilung durchzuführen.

#### 2.4.2 Algorithmen zur Maximierung der Likelihood-Funktion

Da die Likelihood-Funktion für GARCH-Modelle stark nichtlinear ist und nach Doornik, Ooms (2001) sogar mehrere lokale Maxima aufweisen kann, erfordert ihre Maximierung Algorithmen, die trotz der höheren Komplexität plausible Schätzergebnisse liefern. Zu diesem Zweck werden nachfolgend die Algorithmen BHHH (Berndt-Hall-Hall-Hausman) und BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) vorgestellt. Einen Vergleich einiger Algorithmen im Kontext der GARCH-Modelle ist in Fiorentini et al. (1996) und Lombardi, Gallo (2002) zu finden.

Das Problem der Konvergenz zu einem lokalen Maximum kann mit deterministischen Algorithmen nur ansatzweise gelöst werden. Bessere Ansätze zur Lösung dieses Problems liefern eventuell nichtdeterministische Verfahren, wie die Markow-Ketten-Monte-Carlo-Methode (siehe dazu Polasek, 1999), die hier jedoch nicht genutzt werden.

Da dieses Problem in Abhängigkeit von der Wahl der Startwerte für die verwendeten Algorithmen auftritt, bietet sich auch der Ausweg an, das Verfahren mit mehreren alternativen Startwertekombinationen durchzuführen, sowie Startwerte zu verwenden, die sich bei ähnlichen Problemen bewährt haben.

Die beiden nachfolgend beschriebenen Algorithmen beruhen auf den Eigenschaften stetig differenzierbarer Funktionen. So sind einerseits Extrema dieser Funktio-

nen Nullstellen der entsprechenden Ableitungen bzw. Gradienten und andererseits beschreibt der Gradient als Vektor die Richtung des stärksten Anstiegs. Folgt ein Algorithmus dieser Richtung iterativ in bestimmten Schrittweiten, so konvergiert er gegebenenfalls zu einem Maximum der Funktion. Voraussetzung dafür ist die Existenz eines Maximums sowie die Wahl geeigneter Startwerte.

### Der BHHH-Algorithmus

Der von Berndt et al. (1974) eingeführte BHHH-Algorithmus ist eine Weiterentwicklung des Newton-Raphson-Verfahrens, welches eine direkte Umsetzung des oben beschriebenen Vorgehens darstellt.

Bezeichne

$$\nabla f(\theta^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1^{(k)}} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_2^{(k)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_n^{(k)}} \end{pmatrix}$$

den Gradienten der zu maximierenden Funktion  $f$  im  $k$ -ten Iterationsschritt an der Stelle  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)'$ . Weiter sei  $\theta^{(1)}$  der Vektor der vorgegebenen Startwerte für den Algorithmus.

Weiterhin sei  $\tilde{\mathbf{H}}(\theta^{(k)})$  eine Approximation der Hessematrix von  $f$  im Punkt  $\theta^{(k)}$ . Bei Berndt et al. (1974) wird dazu die empirische Kovarianzmatrix des Gradienten, multipliziert mit der quadrierten Anzahl von Beobachtungen, verwendet (diese konvergiert für wachsende Beobachtungszahl gegen die wahre Hessematrix).

Anders als beim Newton-Raphson-Verfahren wird nun statt des Gradienten als Richtungsvektor  $d^{(k)}$  für die Aktualisierung der Startwerte im  $k$ -ten Iterationsschritt

$$d^{(k)} = \tilde{\mathbf{H}}(\theta^{(k)})^{-1} \cdot \nabla f(\theta^{(k)})$$

verwendet. Diese Transformation und die auf diese Weise beschränkte Auswahl der Richtungen soll die Konvergenzgeschwindigkeit deutlich erhöhen. Genauer siehe dazu: Berndt et al. (1974).

Die Bestimmung des Wertes  $\theta^{(k+1)}$  aus  $\theta^{(k)}$  erfolgt dann analog zum Newton-

Raphson-Verfahren

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot d^{(k)} .$$

Dabei gibt  $\lambda^{(k)}$  die Schrittweite der  $k$ -ten Iteration an. Sie wird in der Regel als Lösung des eindimensionalen Maximierungsproblems

$$\lambda^{(k)} = \operatorname{argmax}_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \theta^{(k)} + \lambda \cdot d^{(k)} \}$$

numerisch bestimmt.

Dieses Vorgehen wird dann so oft iteriert, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Übliche Abbruchkriterien für vorgegebene Werte  $k_{maxit} \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+$  sind beispielsweise

- (i)  $k = k_{maxit}$  ,
- (ii)  $(\nabla f(\theta^{(k)}))' (\nabla f(\theta^{(k)})) < \varepsilon_1$      oder
- (iii)  $(\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)})' (\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}) < \varepsilon_2$  .

### Der BFGS-Algorithmus

Der unter anderem von Goldfarb (1976) eingeführte BFGS-Algorithmus ist eine Modifikation des DFP-Algorithmus (Davidon-Fletcher-Powell) und hat große Parallelen zum BHHH-Algorithmus. So wird gegenüber dem dort beschriebenen Vorgehen nur die Approximation der Hesse-Matrix verändert.

Sei zunächst folgende abkürzende Notation eingeführt

$$\begin{aligned} \Delta_k \theta &= \theta^{(k)} - \theta^{(k-1)} , \\ \Delta_k g &= \nabla f(\theta^{(k)}) - \nabla f(\theta^{(k-1)}) , \\ h_1 &= \tilde{\mathbf{H}}(\theta^{(k-1)})^{-1} (\Delta_k g) , \\ h_2 &= (\Delta_k g) \tilde{\mathbf{H}}(\theta^{(k-1)})^{-1} (\Delta_k g)' \quad \text{und} \\ h_3 &= \frac{(\Delta_k \theta) (\Delta_k \theta)'}{(\Delta_k g) (\Delta_k g)'} - \frac{h_1}{h_2} . \end{aligned}$$

Die Approximation der Hessematrix erfolgt im BFGS-Algorithmus iterativ. So wird die Inverse dieser Matrix im  $k$ -ten Iterationsschritt ( $k > 1$ ) folgendermaßen



bestimmt

$$\tilde{\mathbf{H}}(\theta^{(k)})^{-1} = \tilde{\mathbf{H}}(\theta^{(k-1)})^{-1} + \frac{(\Delta_k \theta) (\Delta_k \theta)'}{(\Delta_k g) (\Delta_k \theta)'} + \frac{h_1 h_1'}{h_2} + h_2 (h_3 h_3') .$$

Initialisiert wird diese Iteration, indem für  $k = 1$  die Einheitsmatrix verwendet wird

$$\tilde{\mathbf{H}}(\theta^{(1)})^{-1} = \mathbf{I}_{n \times n} .$$

Bei der Implementierung beider Verfahren wird eine analytische Darstellung des Gradienten benötigt. Leider läßt sich diese Darstellung mitunter nur mit sehr großem Aufwand herleiten. Dieses Problem kann jedoch durch Verwendung einer Approximation des Gradienten, des sogenannten numerischen Gradienten, behoben werden.

## 2.5 Programmüberblick zur Schätzung von GARCH-Modellen

Die in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Algorithmen sind in den verschiedensten mathematischen und statistischen Programmpaketen implementiert. Um GARCH-Modelle mit der Maximum-Likelihood-Methode schätzen zu können, muß dem Programm jedoch auch die (Log-)Likelihood-Funktion zur Verfügung stehen. Über eine solche Funktionalität verfügen beispielsweise die folgenden Programme:

- Eviews,
- GAUSS mit Paket Fanpac,
- Ox mit Paket G@RCH,
- PcGive,
- R mit Paket tseries,
- RATS,
- S-Plus mit Modul S+FinMetrics,
- SAS/ETS,
- TSP.

Weiterhin wurde eine Schätzung von GARCH-Modellen mit der in Abschnitt 2.4.2 erwähnten Markow-Ketten-Monte-Carlo-Methode in einem Programm namens BASEL Package implementiert.

Die Programme unterscheiden sich stark hinsichtlich Modellvielfalt und Anzahl verfügbarer bedingter Verteilungen. Ein dahingehender Vergleich eines Großteils der erwähnten Programmpakete ist in Laurent, Peters (2002) zu finden. Daher wird an dieser Stelle nur auf drei dieser Pakete näher eingegangen.

Das Paket G@RCH<sup>3</sup> für Ox ist ein für die nichtkommerzielle Nutzung frei verfügbares Programm. Mit der zur Programmiersprache C ähnlichen Syntax von Ox steht in G@RCH eine breite Palette univariater GARCH-Modelle zur Verfügung. Beispielhaft seien hier die in dieser Arbeit später eingeführten Modelle GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, A-PARCH, FI-A-PARCH und HY-GARCH genannt. Die Schätzung dieser Modelle ist unter Verwendung der Normalverteilung, *t*-Verteilung, *GED* sowie einer hier nicht näher betrachteten Verteilung „skewed-*t*“ möglich. Als Algorithmus wird dazu BFGS verwendet. Die in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse aus Modellanpassungen wurden, wenn nicht anders gekennzeichnet, mit diesem Programm erstellt.

Eine ähnlich breite Modellpalette bietet das Modul S+FinMetrics<sup>4</sup> für das statistische Programmpaket S-Plus. So können Modelle wie GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, A-PARCH und FIGARCH wie auch verschiedene multivariate GARCH-Modelle unter Verwendung der Normalverteilung, *t*-Verteilung, *GED* und Doppel exponentialverteilung geschätzt werden. Die verwendete Syntax entspricht dabei der im Bereich der Statistik verbreiteten S-Language. Zur Optimierung wird eine leicht veränderte Version des BHHH-Algorithmus verwendet.

Das Programm RATS<sup>5</sup> (Regression Analysis of Time Series) bietet umfangreiche Werkzeuge aus dem Bereich der Ökonometrie und Zeitreihenanalyse. Anhand eines mitgelieferten Beispielprogramms werden die beiden implementierten Algorithmen BHHH und BFGS verwendet, um Modelle wie GARCH, EGARCH und GJR-GARCH zu schätzen. Im Programm kann die Likelihood-Funktion mit ei-

---

<sup>3</sup>Dokumentation sowie aktuelle Programmversionen unter: <http://www.crest.fr/pageperso/lfa/sebastien.laurent/garch/default.htm> verfügbar

<sup>4</sup>Produkt- und Lizenzinformationen unter: <http://www.insightful.com/products/product.asp?PID=31>

<sup>5</sup>Produkt- und Lizenzinformationen unter: <http://www.estima.com/>

ner leicht verständlichen Syntax vom Benutzer selbst spezifiziert werden. Somit kann die Modellpalette, ebenso wie die Anzahl der zugrundeliegenden Verteilungen, leicht ergänzt werden. Kann also für ein Modell die Likelihood-Funktion analytisch hergeleitet und in entsprechenden Programmcode übersetzt werden, ist es auch möglich, dieses Modell zu schätzen. Im Vergleich mit G@RCH und S+FinMetrics findet die Optimierung, insbesondere für kompliziertere Modelle, jedoch sehr langsam statt.

## 2.6 Beurteilung von GARCH-Modellen

Es gibt eine Vielzahl von Erweiterungen des GARCH-Modells aus Definition 2.1. Zudem existieren Erklärungsansätze für Kapitalmarktrenditen, die sich von der Idee der GARCH-Modelle wesentlich unterscheiden (Übersicht beispielsweise in Campbell et al., 1997). Daher ist es notwendig, anhand objektiver Kriterien beurteilen zu können, ob ein Modell plausibel für den jeweiligen Datensatz ist bzw. welches der Modelle die Struktur in den Daten am besten wiedergeben kann. Nachfolgend werden Kriterien bzw. Verfahren vorgestellt, die es erlauben, Modellanpassungen miteinander zu vergleichen oder die Plausibilität eines Modells einzuschätzen.

### 2.6.1 Informationskriterien

Bei der Schätzung der Parameter eines Modells kann die (Log-)Likelihood-Funktion zur Beurteilung der Modellanpassung dienen. Um jedoch eine zu „gute“ Bewertung von Modellen mit einer großen Anzahl von Parametern zu vermeiden, wird der Wert dieser Funktion mit einem Term korrigiert, der sich (unter anderem) aus der Anzahl der Parameter errechnet. Dies ist das Konzept der Informationskriterien.

Das von Akaike (1978) zuerst entwickelte und sehr verbreitete Akaike-Informationskriterium (*AIC*) wird nach folgender Formel bestimmt

$$AIC = -2 \ell(\hat{\theta}) + 2k . \quad (2.26)$$

Dabei gibt  $\ell(\hat{\theta})$  den Wert der Log-Likelihood-Funktion an der Stelle des geschätzten Parametervektors  $\hat{\theta}$  und  $k$  die Anzahl der Parameter im Modell (bzw. die

Länge des Parametervektors  $\theta$ ) an. Somit wird unter verschiedenen Modellen das ausgewählt, welches für das vorliegenden Problem den kleinsten Wert des Kriteriums besitzt.

Aus Simulationsstudien ist aber bekannt, daß das *AIC* die wahre Modellordnung oft überschätzt. Für ARMA-Prozesse läßt sich unter bestimmten Bedingungen sogar zeigen, daß das Kriterium weder schwach noch stark konsistent ist (zur Definition der Konsistenzarten und zum Beweis siehe Schlittgen, Streitberg, 1997, S. 339f).

Zwei weitere sehr verbreitete Kriterien, die auf der selben Idee basieren, wurden entwickelt, um (unter anderem) die erwähnten Mängel zu beheben. Dabei handelt es sich um das Schwarz-Bayes-Informationskriterium (*SBC*) nach Schwarz (1978)

$$SBC = -2 \ell(\hat{\theta}) + \ln(T)k, \quad (2.27)$$

sowie das Hannan-Quinn-Kriterium (*HQC*) nach Hannan, Quinn (1979)

$$HQC = -2 \ell(\hat{\theta}) + 2c \ln(\ln(T))k \quad \text{mit } c > 1. \quad (2.28)$$

$T$  gibt hierbei den Stichprobenumfang an und die Konstante  $c$  wird „nahe“ 1 gewählt.

Aufgrund der asymptotischen Eigenschaften dieser beiden Kriterien (beide sind für die oben erwähnten ARMA-Modelle stark konsistent) und der Ergebnisse verschiedener Simulationsstudien (wie beispielsweise in Schlittgen, Streitberg, 1997, S. 339) wird zur Festlegung von Modellordnungen *SBC* und *HQC* gegenüber *AIC* oft bevorzugt. Im Vergleich mit *HQC* wird in diesen Simulationsstudien außerdem oft eine leichte Überlegenheit des *SBC* festgestellt.

Da sich das GARCH-Modell auf eine ARMA-Darstellung zurückführen läßt, wird in dieser Arbeit die Modellauswahl ebenfalls abhängig vom Wert des *SBC* getroffen.

Die oben beschriebenen Informationskriterien werden oft noch durch die Stichprobengröße  $T$  geteilt, um auch Modellanpassungen mit verschiedenen SP-Umfängen vergleichen zu können. In dieser Arbeit sollen jedoch die Kriterien wie in (2.26), (2.27) und (2.28) verwendet werden.

### 2.6.2 Test für die Modellparameter

Um den Einfluß eines einzelnen Parameters im Modell nachweisen zu können, wird folgender Test durchgeführt.

Unter der Nullhypothese  $H_0 : \theta_i = 0$  und bestimmten Regularitätsbedingungen (für GARCH-Modelle siehe: Franke et al., 2001, S. 224f) ist die Testgröße

$$T_{\theta_i} = \frac{\hat{\theta}_i}{S_{\hat{\theta}_i}} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (2.29)$$

asymptotisch standardnormalverteilt. Dabei ist  $\hat{\theta}_i$  die  $i$ -te Komponente des mittels Maximum-Likelihood-Methode geschätzten Parametervektors  $\hat{\theta}$  der Länge  $k$  und  $S_{\hat{\theta}_i}$  die geschätzte Standardabweichung von  $\hat{\theta}_i$ .  $S_{\hat{\theta}_i}$  wird für Maximum-Likelihood-Schätzer anhand des äußeren Produkts des Gradienten der Log-Likelihood-Funktion bestimmt.

Die Hypothese, daß der Parameter  $\theta_i$  gleich 0 ist, kann demnach zum Niveau  $\alpha$  abgelehnt werden, wenn für die Teststatistik gilt:  $|T_{\theta_i}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ .

Dieser Test wird in der Literatur über GARCH-Modelle  $t$ -Test genannt, obwohl als Verteilung der Prüfgröße keine  $t$ -Verteilung unterstellt werden kann. Um von dieser Notation nicht abzuweichen, wird diese Bezeichnung auch in der vorliegenden Arbeit verwendet.

### 2.6.3 Residuen und Vorhersagegüte

Für das in Definition 2.1 beschriebene Modell haben die standardisierten Residuen folgende Form

$$\hat{u}_t = \frac{y_t}{\hat{\sigma}_t} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_t = \left( \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^q \hat{\alpha}_j y_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j \hat{\sigma}_{t-j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.30)$$

Die Berechnung der Residuen beruht auf der (Ein-Schritt-)Prognose von  $\sigma_t^2$  aus  $\psi_{t-1}$ . Um den Prognosefehler zu bestimmen, müßte  $\hat{\sigma}_t^2$  mit dem wahren Wert  $\sigma_t^2$

verglichen werden. Dieser ist jedoch nicht beobachtbar. Da aber

$$y_t^2 = \varepsilon_t^2 \cdot \sigma_t^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t^2 = \hat{\varepsilon}_t^2 \cdot \hat{\sigma}_t^2 = E(\varepsilon_t^2 | \psi_{t-1}) \hat{\sigma}_t^2 = \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{=1} \hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_t^2$$

gilt, wird statt  $\sigma_t^2$  oft  $y_t^2$  verwendet und die Differenz  $y_t^2 - \hat{\sigma}_t^2$  als Fehler für die Prognose von  $\sigma_t^2$  sowie  $y_t^2$  betrachtet. Anhand dieses Prognosefehlers kann ein Maß für die Güte der Vorhersage und somit der Plausibilität des angepaßten Modells abgeleitet werden. Ein solches Maß wäre beispielsweise der mittlere quadratische Prognosefehler (MSPE)

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2 .$$

Andere Ansätze, den unbekanntem Wert  $\sigma_t^2$  sinnvoll zu ersetzen, bieten beispielsweise Hansen, Lunde (2001).

#### 2.6.4 Test auf serielle Unkorreliertheit der (quadrierten) Residuen

Nach der Anpassung eines GARCH-Modells ist zu prüfen, ob in den Residuen ARCH-Effekte zu finden sind, die nicht durch das Modell erklärt wurden. Ein Test, der die serielle Unkorreliertheit der quadrierten und standardisierten Residuen untersucht, ist durch den Portmanteau Q-Test gegeben (siehe McLeod, Li, 1983).

Für die Nullhypothese  $H_0 : „\{\hat{u}_t^2\}$  ist seriell unkorreliert“ ist die Teststatistik gegeben durch

$$Q(q) = T(T+2) \sum_{i=1}^q \frac{(\hat{\rho}_{\hat{u}_t^2}(i))^2}{T-i} , \quad (2.31)$$

wobei

$$\hat{\rho}_{\hat{u}_t^2}(i) = \frac{\sum_{t=i+1}^T (\hat{u}_t^2 - S_{\hat{u}_t^2}^2)(\hat{u}_{t-i}^2 - S_{\hat{u}_t^2}^2)}{\sum_{t=1}^T (\hat{u}_t^2 - S_{\hat{u}_t^2}^2)^2} \quad \text{mit}$$

$$S_{\hat{u}_t^2}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$$

die empirische Autokorrelation der quadrierten standardisierten Residuen darstellt.  $Q(q)$  ist unter  $H_0$  asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $q$  Freiheitsgraden.

Die Hypothese  $H_0$  kann somit zum Niveau  $\alpha$  abgelehnt werden, wenn gilt:  $Q(q) > \chi_{q;1-\alpha}^2$ . Dies ist ein Indiz für Autokorrelation der quadrierten Residuen innerhalb der ersten  $q$  Ordnungen, also für ARCH-Effekte, die nicht durch das Modell erklärt werden konnten.

## 3 Asymmetrische Modelle

### 3.1 Asymmetrie als weiteres Charakteristikum von Kapitalmarktdaten

In dem bisher betrachteten GARCH-Modell hängt die bedingte Volatilität von den quadrierten Werten der vorhergehenden Realisationen des Prozesses  $y_{t-j}$  ab, positive und negative Werte gehen gleichwertig (bzw. symmetrisch) in die Volatilitätsgleichung (2.3) ein. Black (1976) und Christie (1982) beobachteten jedoch, daß ein Wertverlust für Aktien eine Erhöhung der bedingten Volatilität nach sich zieht. Diese Eigenschaft der (negativen) Korrelation der Volatilität mit vergangenen Renditen wird als Asymmetrie bezeichnet. Aktuellere Untersuchungen wie in Duffee (1995) bestätigen diesen Zusammenhang. In Franke et al. (2001), S. 227 wird zusammenfassend sogar gesagt:

„Auf jeden Fall besteht aus empirischer Sicht kein Zweifel daran, dass Volatilität asymmetrisch auf das Vorzeichen von Schocks reagiert und man daher im Rahmen von ARCH-Modellen nach Erweiterungen der Standardmodelle suchen muss.“

### 3.2 Das Asymmetrische Power-GARCH-Modell

Das nachfolgend vorgestellte Asymmetrische Power-GARCH-Modell (A-PARCH) wurde von Ding et al. (1993) entwickelt, um diese Eigenschaft zu handhaben. Die Modellierung der Asymmetrie erfolgt dabei durch Berücksichtigung des Vorzeichens vergangener Beobachtungen:  $y_{t-j}$  in der rekursiven Gleichung des GARCH-Modells (2.3) wird durch  $|y_{t-j}| - \eta_j y_{t-j}$  ersetzt. Bisher gingen positive und negative Beobachtungen mit gleichem Gewicht in das Modell ein, nun erhöht bzw. verringert sich die bedingte Volatilität im Modell auch in Abhängigkeit vom Vorzeichen der vergangenen Realisationen.

Eine weitere Modifikation gegenüber dem GARCH-Modell aus Kapitel 2 betrifft das Konzept der „fraktionalen Momente“. Demnach ist es umstritten, ob die bedingte Volatilität besser durch die quadrierten Beobachtungswerte, durch ihre Absolutbeträge oder gar durch nichtganzzahlige Potenzen ihrer Absolutbeträge



repräsentiert wird. Daher werden zur Formulierung des nachfolgenden Modells die Quadrate aus der rekursiven Gleichung (2.3) durch geeignete Potenzen der Absolutbeträge ersetzt. Die erwähnte Potenz muß so nicht mehr festgelegt werden, sondern bleibt als Parameter des Modells flexibel.

### 3.2.1 Definition des A-PARCH-Prozesses

Die beschriebenen Änderungen führen zu dem in der nachfolgenden Definition beschriebenen Modell.

**Definition 3.1:** Ein stochastischer Prozeß  $\{y_t\}$  heißt **Asymmetrischer Power-GARCH Prozeß** der Ordnungen  $p$  und  $q$ , kurz A-PARCH( $p, q$ )-Prozeß, wenn er für  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta > 0$  und  $|\eta_j| < 1$  ( $j = 1, \dots, q$ ) den folgenden Gleichungen genügt

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \cdot \sigma_t, & \varepsilon_t &\stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{P}_{0,1} \\ \sigma_t^\delta &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j (|y_{t-j}| - \eta_j y_{t-j})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dabei werden  $\eta_1, \dots, \eta_q$  als **Asymmetrieparameter** und  $\delta$  als **Power-Parameter** bezeichnet.

Die Nichtnegativitätsrestriktion des GARCH-Modells (2.4) kann für das A-PARCH-Modell identisch angewendet werden.

Da sich die Gleichung (3.1) nicht in Backshiftoperator-Schreibweise umformulieren läßt, wird statt des oben beschriebenen Modells häufig der Spezialfall mit

$$\eta_1 = \dots = \eta_q =: \eta$$

als A-PARCH-Modell verwendet, welcher eine solche Umformulierung gestattet. In der Praxis hat sich gezeigt, daß diese Einschränkung den Erklärungsgehalt des Modells nur unwesentlich verringert. In den nachfolgenden Kapiteln kommt daher auch dieses veränderte A-PARCH-Modell zur Anwendung. Die nachfolgenden Ausführungen betreffen zunächst das wie in Definition 3.1 eingeführte Modell.

### 3.2.2 Ausgewählte Eigenschaften von A-PARCH-Prozessen

Durch die Modifikation, statt des Quadrates nichtganzzahlige Potenzen der Absolutbeträge zu verwenden, ist es schwierig, Momente zu berechnen. Es ist aber durchaus sinnvoll, Momentaussagen über den transformierten Prozeß  $\{|y_t|^\delta\}$  zu treffen, denn dieser ist unter den obigen Annahmen gerade der Prozeß der bedingten Volatilitäten. Zudem entspricht beispielsweise für  $\delta = 2$  das erste Moment des transformierten Prozesses dem zweiten Moment und für  $\delta = 1$  dem ersten absoluten Moment des ursprünglichen Prozesses  $\{y_t\}$ .

Bezeichne zunächst für eine Zufallsvariable  $X$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $\delta \in \mathbb{R}$

$$\mu_{k,\delta}(X) = E(|X|^{k\delta}) \quad (3.2)$$

das  $k$ -te fraktionale Moment von  $X$  zur Potenz  $\delta$ . Für einen A-PARCH-Prozeß erster Ordnung lassen sich damit beispielsweise folgende Momentaussagen treffen.

Nach He, Teräsvirta (1999c) gelten mit den Bezeichnungen

$$\gamma_{k,\delta} = E\left([\alpha_1(|\varepsilon_t| - \eta_1\varepsilon_t)^\delta + \beta_1]^k\right) \quad \text{und} \quad \kappa_\delta(\cdot) = \frac{\mu_{2,\delta}(\cdot)}{\mu_{1,\delta}^2(\cdot)}$$

sowie der Bedingung  $\gamma_{2,\delta} < 1$  für einen A-PARCH(1,1)-Prozeß  $\{y_t\}$  die Gleichungen

$$\mu_{2,\delta}(y_t) = \mu_{2,\delta}(\varepsilon_t) \frac{\alpha_0^2(1 + \gamma_{1,\delta})}{(1 - \gamma_{1,\delta})(1 - \gamma_{2,\delta})} \quad (3.3)$$

und

$$\kappa_\delta(y_t) = \kappa_\delta(\varepsilon_t) \frac{(1 - \gamma_{1,\delta}^2)}{(1 - \gamma_{2,\delta})}. \quad (3.4)$$

Ebenso, wie Momentaussagen für den transformierten Prozeß  $\{|y_t|^\delta\}$  möglich und sinnvoll sind, lassen sich auch Aussagen über dessen Autokorrelationsstruktur herleiten.

So hat nach He, Teräsvirta (1999c) die Autokorrelationsfunktion von  $\{|y_t|^\delta\}$  für einen A-PARCH(1,1)-Prozeß  $\{y_t\}$  mit der Bezeichnung

$$\bar{\gamma}_\delta = E(|\varepsilon_t|^\delta \cdot [\alpha_1(|\varepsilon_t| - \eta_1\varepsilon_t)^\delta + \beta_1])$$

sowie den Bedingungen  $k \geq 1$  und  $\gamma_{2,\delta} < 1$  die Form

$$\begin{aligned} \rho_k(|y_t|^\delta) &= \rho(|y_t|^\delta, |y_{t-k}|^\delta) \\ &= \gamma_{1,\delta}^{k-1} \cdot \frac{\mu_{1,\delta}(\varepsilon_t) \bar{\gamma}_\delta (1 - \gamma_{1,\delta}^2) - \mu_{1,\delta}^2(\varepsilon_t) \gamma_{1,\delta} (1 - \gamma_{2,\delta})}{\mu_{2,\delta}(\varepsilon_t) (1 - \gamma_{1,\delta}^2) - \mu_{1,\delta}^2(\varepsilon_t) (1 - \gamma_{2,\delta})}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aus Gleichung (3.5) folgt sofort

$$\rho_k(|y_t|^\delta) = \rho_1(|y_t|^\delta) \cdot \gamma_{1,\delta}^{k-1} \quad (k \geq 1),$$

d.h. die Autokorrelationsfunktion von  $\{|y_t|^\delta\}$  fällt in  $k$  exponentiell. Ähnliche Aussagen lassen sich (mit erheblichem Aufwand) auch für Modelle höherer Ordnungen ableiten. A-PARCH-Prozesse können somit die in Kapitel 5 beschriebene „langes Gedächtnis“ genannte Eigenschaft von Kapitalmarktdaten nicht nachbilden. Baillie (1996) schreibt dazu:

„The model imposes a power transformation on the conditional standard deviation and the asymmetric absolute innovations; but still implies an exponential decay of the volatility process.“

Analog zu Abschnitt 2.3.2 ist es für das A-PARCH-Modell notwendig, Stationaritätsaussagen zu treffen. Zunächst wird dabei nur die schwache Stationarität berücksichtigt. Mit den Mitteln aus Kapitel 6 lassen sich aber auch Aussagen zur strengen Stationarität ableiten.

In Ding et al. (1993) wurde die Bedingung

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot E\left(|\varepsilon_{t-i}| - \eta_i \varepsilon_{t-i}\right)^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \quad (3.6)$$

für die Existenz der fraktionalen Momente  $E(\sigma_t^\delta)$  bzw.  $E(|y_t|^\delta)$  hergeleitet und daraus gefolgert, daß  $\{y_t\}$  schwach stationär ist, falls  $\delta \geq 2$  und (3.6) gelten (dabei ist  $\delta \geq 2$  nur eine hinreichende Bedingung).

Der Term  $E\left(|\varepsilon_{t-i}| - \eta_i \varepsilon_{t-i}\right)^\delta$  aus (3.6) ist verteilungsabhängig. Nachfolgend wird er daher explizit für die in Abschnitt 2.3.3 betrachteten Verteilungen aufgeführt.

Für eine bedingte Normalverteilung wie in Gleichung (2.16) gilt (Ding et al., 1993)

$$E\left(\left(|\varepsilon_{t-i}| - \eta_i \varepsilon_{t-i}\right)^\delta\right) = \frac{2^{\frac{\delta-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \left((1 + \eta_i)^\delta + (1 - \eta_i)^\delta\right), \quad (3.7)$$

für eine bedingte *GED* wie in Gleichung (2.19) (Laurent, Peters, 2002)

$$E\left(\left(|\varepsilon_{t-i}| - \eta_i \varepsilon_{t-i}\right)^\delta\right) = \frac{2^{\frac{\delta-\nu}{\nu}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{\nu}\right) \lambda^\delta}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} \left((1 + \eta_i)^\delta + (1 - \eta_i)^\delta\right) \quad (3.8)$$

und für eine bedingte *t*-Verteilung wie in Gleichung (2.22) (Lambert, Laurent, 2001)

$$E\left(\left(|\varepsilon_{t-i}| - \eta_i \varepsilon_{t-i}\right)^\delta\right) = \frac{(n-2)^{\frac{1+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-\delta}{2}\right)}{2\sqrt{(n-2)\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left((1 + \eta_i)^\delta + (1 - \eta_i)^\delta\right). \quad (3.9)$$

### 3.2.3 Symmetrische Spezialfälle und asymmetrische Alternativen

Das A-PARCH-Modell ist eine Verallgemeinerung des in Kapitel 2 betrachteten GARCH-Modells. Es enthält jedoch auch weitere populäre symmetrische Modifikationen dieses Ansatzes, beispielsweise ARCH, TS-GARCH und NGARCH. So entspricht das A-PARCH( $p, q$ )-Modell einem ARCH( $q$ )-Modell (Engle, 1982) unter den Einschränkungen

$$p = 0, \quad \delta = 2, \quad \eta_j = 0,$$

einem GARCH( $p, q$ )-Modell (Bollerslev, 1986) unter

$$\delta = 2, \quad \eta_j = 0,$$

einem TS-GARCH( $p, q$ )-Modell (Taylor, 1986, Schwert, 1989) unter

$$\delta = 1, \quad \eta_j = 0$$

sowie einem NGARCH( $p, q$ ) (Higgins, Bera, 1992) unter

$$\eta_j = 0.$$

Weitere Zusammenhänge mit einigen symmetrischen und asymmetrischen Modifikationen des GARCH-Modells sind im Anhang von Ding et al. (1993) zu finden.

Es gibt aber auch Ansätze zur Verallgemeinerung von GARCH-Modellen, die sich nicht als Spezialfall von A-PARCH-Modellen darstellen lassen. Nachfolgend werden daher einige Alternativen zur Modellierung der Asymmetrie mit bedingt heteroskedastischen Modellen vorgestellt.

Ersetzt man in Definition 3.1 die rekursive Gleichung (3.1) zur Bestimmung von  $\sigma_t$  durch die Gleichung (3.10), so bildet  $\{y_t\}$  einen exponentiellen GARCH-Prozeß (EGARCH-Prozeß) (Nelson, 1991)

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j (\varepsilon_{t-j} + \gamma [|\varepsilon_{t-j}| - E(|\varepsilon_{t-j}|)]) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2). \quad (3.10)$$

Ersetzt man sie hingegen durch die Gleichung (3.11), so bildet  $\{y_t\}$  einen GJR-GARCH-Prozeß (Glosten et al., 1993)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \eta_j I_{(-\infty, 0)}(y_{t-j})) y_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.11)$$

wobei  $I_{(-\infty, 0)}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ .

Die drei Varianten A-PARCH, EGARCH und GJR-GARCH sind die in der Literatur am häufigsten verwendeten asymmetrischen Modelle. Andere asymmetrische GARCH-Modelle, die jedoch hier nicht weiter betrachtet werden, sind beispielsweise Q-GARCH (Sentana, 1995), LSTGARCH (Hagerud, 1996), TGARCH (Zakoïan, 1994) und VS-GARCH (Fornari, Mele, 1996).

### 3.2.4 Vergleich von A-PARCH mit anderen GARCH-Varianten

Die Varianten des ursprünglichen GARCH-Ansatzes wurden mit verschiedenen Begründungen entwickelt. Sie sollen jedoch alle den zeitlichen Verlauf und die spezifischen Eigenschaften von Kapitalmarktdaten bzw. -renditen möglichst gut wiedergeben. Daher empfiehlt es sich, zu untersuchen, welche(s) der Modelle diesen Anspruch am besten erfüllt.

Dazu muß jedoch zunächst festgelegt werden, welches Kriterium zum diesbezüglichen

chen Vergleich der Modelle verwendet werden soll. An dieser Stelle bieten sich drei Kriterien an.

Zur Beurteilung, ob das Modell die Autokorrelationsstruktur der bedingten Volatilitäten erklärt, dient der Portmanteau  $Q$ -Test. Ist der entsprechende  $p$ -Wert kleiner als das vorgegebene Signifikanzniveau von 5%, so muß die Hypothese unkorrelierter quadrierter Residuen abgelehnt werden, das Modell würde die Autokorrelationsstruktur also nicht hinreichend gut erklären. Ein Maß für die Qualität der Anpassung des Modells an die Daten bei gegebener Zahl an Parametern bietet das Informationskriterium  $SBC$ . Da oft auch bzw. sogar von größerem Interesse ist, ob mit einem Modell gute Vorhersagen möglich sind, wird nachfolgend zusätzlich der mittlere quadratische Vorhersagefehler betrachtet.

Untersuchungen der Vorhersagegüte von GARCH-Modellen finden sich auch in Hansen, Lunde (2001) und Peters (2001). Die dortigen Untersuchungen sind sehr umfangreich, und die Ergebnisse ähneln den im Rahmen dieser Arbeit gefundenen Resultaten stark. Daher werden an dieser Stelle nur beispielhaft die Ergebnisse für einen Aktienkurs sowie einen Aktienindex in Verbindung mit je drei symmetrischen und asymmetrischen GARCH-Modellen erster Ordnung (beschrieben in Abschnitt 3.2.3) betrachtet. Zur Modellierung anderer Arten von Kapitalmarktdaten sei auf Kapitel 4 verwiesen.

Ein Vergleich asymmetrischer GARCH-Modelle mittels Informationskriterien findet sich in Hagerud (1997). Dabei ist allerdings zu beachten, daß dort zur Schätzung die Quasi-ML-Methode verwendet wird, die Parameterschätzung und Modellselektion also unter Normalverteilungsannahme durchgeführt wird. In Tabelle 3.1 sind daher auch die Ergebnisse unter dieser Annahme aufgeführt. Es ist zu erkennen, daß für den Fall der Restriktion auf die Normalverteilung teilweise andere Modelle selektiert würden, so daß zusätzlich zu dem Verlust, eine ungeeignete Verteilungsannahme verwendet zu haben, noch eine Fehlspezifikation des Modells kommen könnte.

**Tabelle 3.1:** Werte für das *SBC*, den mittleren quadratischen Vorhersagefehler (MSPE) und den *p*-Wert des Portmanteau Q-Tests der Ordnung 10 (*p*-*Q*(10)) einiger GARCH-Modelle erster Ordnung unter verschiedenen Verteilungsannahmen (**fett**  $\hat{=}$  bester Wert)

Modell	DAX			BAY		
	<i>SBC</i>	MSPE*	<i>p</i> - <i>Q</i> (10)	<i>SBC</i>	MSPE*	<i>p</i> - <i>Q</i> (10)
$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$						
GARCH	-67588.2	1.6043	0.8267	-62746.2	3.2364	0.6465
TS-GARCH	-67508.4	1.5874	0.4011	-62746.1	3.1757	0.1963
NGARCH	-67579.6	1.5984	0.8353	-62765.4	3.1838	0.5745
EGARCH	-67564.4	1.5702	0.9327	-62764.6	3.1836	0.4792
GJR-GARCH	-67640.0	1.5772	0.8690	-62767.5	3.2413	0.7016
A-PARCH	-67632.8	1.5668	0.8822	-62786.9	3.1716	0.6343
$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} GED(0, 1)$						
GARCH	-67856.5	1.6022	0.8260	-63354.6	3.2224	0.6490
TS-GARCH	-67825.3	1.5906	0.2551	-63359.4	3.1757	0.1023
NGARCH	-67853.0	1.5894	0.8075	-63365.7	3.1789	0.4597
EGARCH	-67860.4	1.5679	0.9041	-63362.7	3.1755	0.3406
GJR-GARCH	-67897.0	1.5776	0.8760	-63364.3	3.2266	0.7027
A-PARCH	-67897.0	1.5602	0.8783	-63376.2	3.1669	0.5238
$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} t(0, 1)$						
GARCH	-68056.9	1.6001	0.8119	-63472.7	3.2177	0.6232
TS-GARCH	-68047.5	1.5932	0.1594	-63482.4	3.1770	0.0458
NGARCH	-68061.0	1.5876	0.7055	-63486.2	3.1777	0.3330
EGARCH	-68075.6	1.5694	0.8678	-63482.0	3.1723	0.2127
GJR-GARCH	-68098.5	1.5767	0.8787	-63482.2	3.2219	0.6853
A-PARCH	<b>-68108.7</b>	<b>1.5593</b>	0.8441	<b>-63496.8</b>	<b>3.1656</b>	0.4096

\*: Werte für MSPE sind mit  $10^{-7}$  zu multiplizieren

Die in Tabelle 3.1 aufgeführten *p*-Werte des Portmanteau Q-Tests der Ordnung 10 sind mit einer Ausnahme (TS-GARCH unter *t*-Verteilung für BAY) größer als das vorgegebene Signifikanzniveau von 5%, in den Residuen der jeweiligen Modelle gibt es also keine Hinweise auf ARCH-Effekte bis zur Ordnung 10. Dies spricht dafür, daß die betrachteten Modelle zur Modellierung der Autokorrelationsstruktur in den bedingten Volatilitäten geeignet sind.

Wird weiterhin die Rangfolge der Modelle, die sich durch den Wert des *SBC* ergeben, mit der gemäß dem MSPE verglichen, fällt eine gewisse Ähnlichkeit der Bewertung durch die genannten Kriterien auf, eine identische Rangfolge wird jedoch

nicht induziert. Dieser Effekt der weitgehend gleichlaufenden Bewertung durch *SBC* und *MSPE* muß jedoch vor dem Hintergrund der Erkenntnisse aus Peters (2001) kritisch betrachtet werden. Dort wird beschrieben, daß die Modellselektion stark vom verwendeten Kriterium für Vorhersagegüte abhängt. Alternativ zu *MSPE* wurden dabei beispielsweise der Median der quadrierten Vorhersagefehler oder der mittlere absolute Vorhersagefehler verwendet.

Für die beiden in Tabelle 3.1 betrachteten Reihen wird jedoch in allen Fällen das A-PARCH-Modell unter *t*-Verteilungsannahme als bestes Modell selektiert. Dies deckt sich mit den Ergebnissen aus Hansen, Lunde (2001) und Peters (2001), wo auch das A-PARCH-Modell im Vergleich mit verschiedenen anderen symmetrischen und asymmetrischen Modellen für Aktienkurse als eines der besten bewertet wird.



## 4 Die Hebelwirkungshypothese

Die im Kapitel 3 vorgestellten Erweiterungen des GARCH-Modells für Kapitalmarktdaten berücksichtigen außer den Volatilitätsschwankungen auch die Beziehung zwischen erstem und zweitem Moment - die sogenannte Asymmetrie.

Eine häufig verwendete Erklärung für diese Charakteristik von Kapitalmarktdaten bietet die nachfolgend vorgestellte Hebelwirkungshypothese. Eine Hebelwirkung, auch leverage effect, ist jedoch nur für bestimmte Arten von Kapitalmarktdaten relevant und entsprechend als Erklärung für eventuell vorliegende Asymmetrie heranziehbar.

Mit empirischen Methoden wird nachfolgend untersucht, ob asymmetrische GARCH-Modelle gegenüber symmetrischen tatsächlich nur für die betreffenden Kapitalmarktdaten, z.B. Aktienkursrenditen, den Erklärungsgehalt erhöhen.

### 4.1 Hebelwirkung als eine Erklärung für Asymmetrie

Die Asymmetrie beschreibt den Effekt der negativen Korrelation zwischen bedingten Volatilitäten mit den vorhergehenden Renditen bzw. die Zunahme der Volatilität nach dem Eintreffen von „schlechten Nachrichten“. Der von Black (1976) gefundene Effekt wird gemäß der Hebelwirkungshypothese darauf zurückgeführt, daß die „schlechten Nachrichten“, welche einen Kursverfall zur Folge haben, den Eigenkapitalanteil einer Firma verringern. Da dadurch ein geringerer Teil am Gesamtkapital das gesamte Risiko der Firma trägt, erhöht sich die bedingte Volatilität (Campbell et al., 1997, S. 497)<sup>6</sup>. Black (1976) schreibt dazu:

„A drop in the value of the firm will cause a negative return on its stock, and will usually increase the leverage of the stock. [...] That rise in the debt-equity ratio will surely mean a rise in the volatility of the stock.“

Diese Hypothese erscheint für Renditen von Aktien sowie von Aktienkursindizes hinreichend plausibel. Für Renditen bzw. Änderungsraten von Wechselkursen und

---

<sup>6</sup>Eine alternative Erklärung für die Asymmetrie schlagen beispielsweise Campbell, Hentschel (1992) vor – die „volatility-feedback“ Hypothese.

Edelmetallpreisen sowie erste Differenzen von Zinsreihen ist ein solcher Mechanismus jedoch nicht anwendbar. Demnach ist es ein Kriterium für die Plausibilität der Hebelwirkungshypothese, ob für Aktienkursrenditen Asymmetrie nachgewiesen werden kann, für die anderen beschriebenen Kapitalmarktdaten jedoch nicht.

Die bereits zu Beginn der Arbeit betrachteten Renditen des Aktienkurses für die Deutsche Bank weisen die beschriebene Asymmetrieeigenschaft beispielsweise tatsächlich auf. So beträgt der Pearsonsche Korrelationskoeffizient zwischen den verzögerten und den quadrierten Werten der Renditereihe  $\hat{\rho} = -0.065$ . Diese Korrelation ist gemäß eines entsprechenden Tests signifikant von Null verschieden ( $p$ -Wert  $< 0.0001$ ).

Um zuverlässig feststellen zu können, ob Asymmetrie in bestimmten Daten vorliegt, erscheint es sinnvoller, diese Eigenschaft nicht getrennt von den anderen Eigenschaften der Daten zu betrachten, sondern eine solche Untersuchung besser im Kontext von Modellen durchzuführen, die alle bekannten Charakteristiken nachbilden können.

## 4.2 Untersuchung der Asymmetrie mittels GARCH-Modellen

Die (A-)Symmetrieeigenschaft der Kapitalmarktdaten wird nachfolgend mittels asymmetrischer GARCH-Modelle und ihrer jeweiligen symmetrischen Entsprechung untersucht. Es werden die in Abschnitt 3.2.1 und 3.2.3 vorgestellten Modelle A-PARCH, EGARCH und GJR-GARCH verwendet. In diesen Modellen gibt es jeweils einen oder mehrere Asymmetrieparameter („leverage term“) zur Beschreibung der Hebelwirkung. Um symmetrische Spezialfälle der Modelle zu erhalten, werden diese Parameter wie im Fall von A-PARCH und GJR-GARCH Null gesetzt ( $\eta_1 = \dots = \eta_q = 0$ ) oder wie im Fall von EGARCH die Modellgleichung geeignet abgeändert (aus  $\varepsilon_{t-j} + \gamma[|\varepsilon_{t-j}| - E(|\varepsilon_{t-j}|)]$  in Gleichung (3.10) wird  $[|\varepsilon_{t-j}| - E(|\varepsilon_{t-j}|)]$ ).

Um zu untersuchen, für welche Arten von Kapitalmarktdaten Asymmetrie nachgewiesen werden kann, müssen die beschriebenen symmetrischen und asymmetrischen GARCH-Modelle an verschiedene Reihen von Kapitalmarktrenditen angepasst werden. Dabei werden Renditen des DAX, verschiedener deutscher Ak-

tienkurse, von Wechselkursen und Edelmetallpreisen sowie erste Differenzen von Zinssätzen der Deutschen Bundesbank verwendet, die in Abschnitt 2.2 beschrieben werden. Nach der Hebelwirkungshypothese sollte dabei nur für die Aktienkurse sowie Aktienkursindizes Asymmetrie auftreten.

Die Modellanpassungen in diesem Kapitel erfolgen mit S+GARCH, dem Vorgänger des in Abschnitt 2.5 beschriebenen S-Plus-Moduls S+FinMetrics. Die Funktionalität dieser Module hinsichtlich der vorliegenden Untersuchung unterscheidet sich jedoch nicht.

Als Kriterium für das Vorliegen von Asymmetrie könnte beispielsweise der  $t$ -Test aus Abschnitt 2.6.2 für den bzw. die Asymmetrieparameter im jeweiligen GARCH-Modell dienen. So kann nicht vom Vorliegen der Asymmetrie ausgegangen werden, wenn sich die Parameter laut  $t$ -Test nicht signifikant von Null unterscheiden. Dabei stellt sich allerdings das Problem der sinnvollen Wahl des Signifikanzniveaus.

Zunächst wird beispielhaft ein A-PARCH(1,1)-Modell mit Asymmetrieparameter an die beschriebenen Reihen angepaßt. Insbesondere wird der Asymmetrieparameter  $\eta_1$  aus Formel (3.1) mittels  $t$ -Test daraufhin untersucht, ob er sich zum 5%-Signifikanzniveau von Null unterscheidet.

**Tabelle 4.1:** Werte für die Teststatistik („ $T$ “) und zugehörige  $p$ -Werte („ $P(T < |t|)$ “) des Asymmetrieparameters  $\eta_1$  im A-PARCH(1,1)-Modell sowie Informationskriterien („ $SBC$ “) für Modellanpassungen mit und ohne  $\eta_1$  (**fett**  $\hat{=}$  kleinerer Wert)

Bezeichnung	$T$	$P(T <  t )$	$SBC$ (mit $\eta_1$ )	$SBC$ (ohne $\eta_1$ )
BAS	-3.944	< 0.0001	<b>-55759.2</b>	-55751.6
DAI	-5.804	< 0.0001	<b>-53069.9</b>	-53048.5
RWE	-3.243	0.0006	<b>-56802.0</b>	-56801.0
SIE	-4.630	< 0.0001	<b>-56886.7</b>	-56873.0
GBPDEM	-2.350	0.0094	-29848.5	<b>-29850.8</b>
GBPUSD	-2.474	0.0067	-9760.7	<b>-9761.9</b>
JPYUSD	0.853	0.1970	-10345.6	<b>-10352.1</b>
SFRDEM	2.306	0.0106	-44842.1	<b>-44844.8</b>
USDDEM	0.037	0.4853	-36117.3	<b>-36125.8</b>
XAU.X	0.194	0.4231	-14754.7	<b>-14762.7</b>
S.LME	0.742	0.2294	-1507.5	<b>-1507.8</b>
Zins1	-1.254	0.1051	-1085.7	<b>-1090.7</b>
Zins6	2.326	0.0101	<b>-1788.5</b>	-1786.4
ZinsLang	2.996	0.0014	<b>-3018.7</b>	-3018.6

In der zweiten und dritten Spalte von Tabelle 4.1 sind die Werte für die Teststatistik sowie die  $p$ -Werte des  $t$ -Tests für den Parameter  $\eta_1$  aufgeführt. Zum Signifikanzniveau von 5% sind gemäß dem  $t$ -Test alle betrachteten Aktienkursdaten als asymmetrisch anzusehen. Dies entspricht der Hebelwirkungshypothese. Jedoch läßt sich bezüglich des des  $t$ -Tests auch für einige Wechselkurse und Zinsreihen Asymmetrie nachweisen (d.h.  $P(T < |t|) \leq 0.05$ ). Dies würde der Annahme widersprechen, daß die Asymmetrie in den Kapitalmarktreihen durch die beschriebene Hebelwirkung verursacht wird.

Andererseits ist es aber fraglich, ob ein  $t$ -Test mit einem Signifikanzniveau von 5% ein geeignetes Mittel zur Entscheidung über Symmetrie oder Asymmetrie darstellt. Wird weiter der Wert der Statistik  $T$  als (deskriptives) Maß für Asymmetrie in den vorliegenden Daten betrachtet, so fallen die Werte für die Aktienkurse im Vergleich mit den anderen Reihen als betragsmäßig größer auf. Das deutet in Bezug auf die (A-)Symmetrieeigenschaft auf einen Unterschied zwischen den Arten von Kapitalmarktdaten hin.

Da es aber nicht zulässig ist, das Signifikanzniveau anzupassen, um die Hypo-

these nur für Aktienkurse ablehnen zu können, erscheint es sinnvoller, mittels des Informationskriteriums *SBC* zu untersuchen, ob für die jeweils vorliegenden Daten eine Modellierung mit oder ohne Asymmetrieparameter günstiger ist.

Daher wird anhand des A-PARCH(1,1)-Ansatzes untersucht, ob die Daten besser durch ein Modell beschrieben werden können, bei dem  $\eta_1 = 0$  fest ist (d.h. „ohne  $\eta_1$ “), als durch das zugehörige asymmetrische Modell (d.h. „mit  $\eta_1$ “). Die Werte des *SBC* für die beiden Modellvarianten sind in Tabelle 4.1 in der vierten und fünften Spalte abgetragen. Im Gegensatz zu der Entscheidung des *t*-Tests zum Niveau von 5% bevorzugt das Informationskriterium für die Wechselkurs- und Edelmetallpreisdaten das symmetrische Modell. Für die Aktienkursdaten bleibt die Entscheidung für die Asymmetrie bestehen. Allerdings läßt sich für die Zinsreihen auch hier keine eindeutige Entscheidung finden. Demnach würde das *SBC* die Hebelwirkungshypothese für alle Daten außer den Zinsreihen bestätigen.

Gemäß dieser Ergebnisse ist ein *t*-Test für den Asymmetrieparameter mit einem Signifikanzniveau von 5% nur bedingt geeignet, über das Vorliegen von Asymmetrie zu entscheiden. Aus diesem Grund wird in der weiteren Untersuchung nur das Informationskriterium verwendet.

Bisher wurde die Plausibilität der Hebelwirkungshypothese anhand des A-PARCH(1,1)-Modells untersucht. Da dieses Modell sicher nicht für alle Daten der optimale Ansatz ist, könnten die bisher gefundenen Ergebnisse auch ein Artefakt der Fehlspezifikation des Modells sein. Somit ist es notwendig, weitere Modelle sowie höhere Modellordnungen in der Untersuchung zu berücksichtigen.

Dazu werden an alle Reihen die „GARCH-Varianten“ A-PARCH, EGARCH und GJR-GARCH jeweils mit den Modellordnungen  $(p, q) \in \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (1, 3)\}$  sowohl mit als auch ohne Asymmetrieparameter angepaßt und die zugehörigen Werte für das *SBC* bestimmt. Höhere Modellordnungen als die beschriebenen werden hier nicht betrachtet, da GARCH-Prozesse niedriger Ordnungen die meisten Finanzzeitreihen bereits hinreichend beschreiben (Bera, Higgins, 1993).

In der Tabelle 4.2 sind die Informationskriterien für die mittels *SBC* selektierten Modelle abgetragen. Ausgewählt wurde dabei jeweils das Modell, welches unter allen betrachteten den kleinsten Wert für das Informationskriterium *SBC* besitzt.

**Tabelle 4.2:** Mittels *SBC* selektiertes Modell und Wert für *SBC**(kursiv  $\hat{=}$  im Widerspruch zur Hebelwirkungshypothese)*

Bezeichnung	selektiertes Modell	<i>SBC</i>
BAS	EGARCH(1,2) mit Asymmetrieparameter	-55766.6
DAI	A-PARCH(2,1) mit Asymmetrieparameter	-53074.1
RWE	A-PARCH(1,3) mit Asymmetrieparameter	-56829.5
SIE	A-PARCH(1,1) mit Asymmetrieparameter	-56886.7
GBPDEM	EGARCH(2,1) ohne Asymmetrieparameter	-29890.5
GBPUSD	EGARCH(2,1) ohne Asymmetrieparameter	-9777.0
JPYUSD	GJR-GARCH(1,1) ohne Asymmetrieparameter	-10357.6
SFRDEM	EGARCH(2,1) ohne Asymmetrieparameter	-44908.1
USDDEM	EGARCH(1,2) ohne Asymmetrieparameter	-36140.1
XAU.X	GJR-GARCH(1,1) ohne Asymmetrieparameter	-14768.2
S.LME	GJR-GARCH(1,1) <i>mit</i> Asymmetrieparameter	-1527.4
Zins1	GJR-GARCH(1,3) ohne Asymmetrieparameter	-1090.9
Zins6	A-PARCH(1,3) ohne Asymmetrieparameter	-1802.0
ZinsLang	A-PARCH(1,3) <i>mit</i> Asymmetrieparameter	-3019.4

Die in Tabelle 4.2 dargestellten Resultate bestätigen größtenteils die Schlußfolgerungen, die bereits anhand des A-PARCH(1,1)-Modells getroffen wurden. So werden für alle Aktienkursdaten asymmetrische Modelle selektiert, während für die betrachteten Wechselkursdaten symmetrische Modelle bevorzugt werden. Für die Edelmetallpreisdaten sowie die Zinsreihen kann hier keine eindeutige Entscheidung über das Vorliegen von Symmetrie oder Asymmetrie getroffen werden.

Dabei sollte die geringe Anzahl von Beobachtungen für einige der untersuchten Datenreihen berücksichtigt werden. Insbesondere besitzt die Reihe S.LME nur ca. 300 Beobachtungen und die Zinsreihen ca. 1400 Beobachtungen (zum Vergleich: die Aktienkursdaten besitzen mehr als 8000 und die Wechselkursdaten mehr als 4000 Beobachtungen). Gemäß der Simulationsergebnisse aus Teräsvirta (1996) kann bei bedingter *t*-Verteilung ein zugrundeliegender GARCH-Prozeß erst für relativ große Stichproben korrekt identifiziert werden. Die Resultate für diese Reihen haben daher nur geringe Aussagekraft. Für die übrigen Daten entsprechen die Untersuchungsergebnisse den Erwartungen gemäß der Hebelwirkungshypothese.

Somit kann die Plausibilität der von Black (1976) aufgestellten Hebelwirkungshypothese für genügend lange Reihen bestätigt werden. Die Ergebnisse für die

kürzeren Zins- und Silberpreisreihen stehen dagegen nicht immer im Einklang mit der Hypothese. Sie sollten aber nur mit großer Vorsicht berücksichtigt werden.

Eine ausführliche Untersuchung der Preise verschiedener an der London Metal Exchange gehandelter Rohstoffe mittels symmetrischer und asymmetrischer GARCH-Modelle ist in McKenzie et al. (2001) zu finden. Dort wird für diese Daten keine Asymmetrie gefunden, was wiederum im Einklang mit der Hebelwirkungshypothese steht.

Hinsichtlich ihrer Vorhersagegüte werden symmetrische und asymmetrische GARCH-Modelle in Hansen, Lunde (2001) untersucht. Diese Untersuchung dient zwar einem anderen Ziel, aber die dort gefundenen Resultate legen ebenfalls eine tendenziell bessere Eignung symmetrischer Modelle für Wechselkurse sowie asymmetrischer Modelle für Aktienkurse nahe. Die in der vorliegenden Arbeit gefundenen Ergebnisse werden somit auch bei Untersuchungen mit Methoden aus Abschnitt 2.6.3 bestätigt.

Insgesamt bietet die von Black (1976) beschriebene Hebelwirkung eine plausible Erklärung für die Asymmetrie in den bedingten Volatilitäten von GARCH-Modellen. Dieser Tatsache sollte bei einer Modellauswahl, d.h. symmetrischer gegenüber asymmetrischer Ansatz, Rechnung getragen werden. Demnach sollten asymmetrische Modelle nur für Daten verwendet werden, für die das Zugrundeliegen einer Hebelwirkung sinnvoll ist.

Die vorliegende Untersuchung kann natürlich keine endgültige Entscheidung drüber liefern, ob tatsächlich (allein) die Hebelwirkung Ursache für die beschriebene Asymmetrie ist. So äußern beispielsweise Figlewski, Wang (2000) Zweifel an dieser Hypothese und schlagen aufgrund ihrer Ergebnisse die Umbenennung des „leverage effect“ in einen „down market effect“ vor. Jedoch stellen auch sie fest, daß es bisher keine eindeutig nachgewiesene ökonomische Erklärung für dieses Phänomen gibt.

## 5 Fraktionale Integration im A-PARCH-Modell

### 5.1 Langes Gedächtnis von Kapitalmarktdaten

In den Kapiteln 2 und 3 wurden Volatilitätsschwankungen, Leptokurtosis sowie Asymmetrie als Eigenschaften verschiedener Kapitalmarktrenditen vorgestellt. Als weiteres Charakteristikum solcher Daten wird das sogenannte „lange Gedächtnis“ angesehen.

Diese Bezeichnung bezieht sich auf die Eigenschaft, daß die Auswirkungen eines zuvor eingetretenen Ereignisses in der zeitlichen Abfolge nur sehr langsam geringer werden. Bei Betrachtung der Autokorrelationsfunktion zeigt sich dieser Effekt darin, daß (asymptotisch) die empirische Autokorrelation steigender Ordnung hyperbolisch abfällt, anstatt exponentiell, wie beispielsweise für stationäre ARMA-Prozesse.

Erstmals beschrieben wurde ein solches Phänomen von dem Hydrologen Hurst (1951). Er stellte fest, daß die jährlichen minimalen Abflusssmengen des Nils noch erheblich von weit zurückliegenden Werten abhängen.

Zur Modellierung von Volatilitätsschwankungen mit GARCH-Prozessen wird oft die Autokorrelationsfunktion der quadrierten Renditewerte untersucht (bzw. diejenige nichtganzzahliger Potenzen der absoluten Renditewerte, wie in Kapitel 3 beschrieben). Für Kapitalmarktdaten wird dabei vielfach die für langes Gedächtnis typische Eigenschaft des extrem langsamen Abfallens der entsprechenden empirischen Autokorrelationen beobachtet (u.a. in Ding et al., 1993). Eine Übersicht über das Vorliegen von langem Gedächtnis in den bedingten Volatilitäten von Kapitalmarktrenditen (hier Aktienkurs-, Wechselkurs- und Zinsreihen) findet sich in Baillie (1996).

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß es bisher sehr umstritten ist, ob tatsächlich langes Gedächtnis Ursache der beschriebenen Autokorrelationsstruktur von Kapitalmarktreihen ist. So können Strukturbrüche in Zeitreihen Formen der (empirischen) Autokorrelationsfunktion erzeugen, welche nicht von der unterscheidbar sind, die durch langes Gedächtnis induziert wurde. Eine kritische Betrachtung der Annahme langen Gedächtnisses für Finanzzeitreihen ist beispielsweise in Krämer et al. (2002) zu finden. Nach Sibbertsen (2003) gibt es für



absolute Aktienkursrenditen aber starke Hinweise auf das Vorliegen von langem Gedächtnis (entgegen einer Strukturbruchhypothese).

Für langes Gedächtnis gibt es verschiedene, teilweise äquivalente Definitionen (siehe Brockwell, Davis, 1991, S. 520). An dieser Stelle wird gemäß der obigen Betrachtungen eine auf den Autokorrelationen beruhende vorgestellt.

**Definition 5.1:** Ein stationärer stochastischer Prozeß  $\{y_t\}$  heißt **stationärer Prozeß mit langem Gedächtnis**, falls für die Autokorrelationsfunktion

$$\rho_k(y_t) = \rho(y_t, y_{t-k}) \quad (k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z})$$

folgende Eigenschaft gilt

$$\exists \alpha \in (0, 1), c_\rho > 0 : \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k(y_t)}{c_\rho k^{-\alpha}} = 1 . \quad (5.1)$$

Diese Definition besagt gerade, daß asymptotisch die Autokorrelationen hyperbolisch abfallen.

## 5.2 Das Fraktional Integrierte A-PARCH-Modell

Zur Modellierung von langem Gedächtnis wird in der Regel der fraktionale Differenzenfilter  $(1 - B)^d$  mit  $d \in \mathbb{R}$  in ein Modell integriert, wie im bekannten ARFIMA-Modell (Granger, Joyeux, 1980 und Hosking, 1981).  $B$  ist dabei der Backshift-Operator und  $d$  wird als Gedächtnisparameter bezeichnet. Durch Entwicklung als binomische Reihe und anschließende Darstellung mittels Gamma-Funktionen erhält man die Rechenregel

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(-d)} B^k . \quad (5.2)$$

Die bisher vorgestellten GARCH-Modelle sind nicht in der Lage, langes Gedächtnis zu reproduzieren (für A-PARCH(1,1) in Abschnitt 3.2.2 gezeigt). Daher wurde von Baillie et al. (1996) vorgeschlagen, diese Modelle um die beschriebene fraktionale Differenz zu erweitern.

Um GARCH-Prozesse mit dem Filter  $(1 - B)^d$  erweitern zu können, ist es zunächst notwendig, dieses Modell in Backshift-Operator-Schreibweise zu formulieren. Mit

der Notation

$$\alpha(B) = \sum_{j=1}^q \alpha_j B^j \quad \text{und} \quad \beta(B) = \sum_{j=1}^p \beta_j B^j$$

läßt sich Gleichung (2.3) in folgende Form bringen

$$\{\sigma_t^2\} = \alpha_0 + \alpha(B) (\{y_t^2\}) + \beta(B) (\{\sigma_t^2\})$$

Die nach äquivalenten Umformungen erhaltene Darstellung

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B)) (\{y_t^2\}) = \alpha_0 + (1 - \beta(B)) (\{y_t^2 - \sigma_t^2\}) \quad (5.3)$$

der GARCH-Modellgleichung, kann nun analog zur Herleitung des ARFIMA-Modells um den fraktionalen Differenzenfilter erweitert werden. Dies führt zu dem von Baillie et al. (1996) vorgestellten FIGARCH-Modell, dessen Modellgleichung durch

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - B)^d (\{y_t^2\}) = \alpha_0 + (1 - \beta(B)) (\{y_t^2 - \sigma_t^2\}) \quad (5.4)$$

statt (5.3) gegeben ist.

Die GARCH-Gleichung (5.3) und entsprechend auch das GARCH-Modell als Spezialfall des FIGARCH-Modells ergibt sich, indem in Gleichung (5.4) der Gedächtnisparameter  $d$  zu Null gesetzt wird.

Nach Baillie (1996) läßt sich ein FIGARCH-Prozeß als ARCH( $\infty$ )-Prozeß mit hyperbolisch fallenden Gewichten darstellen, die Wirkung zurückliegender Ereignisse hält somit sehr lange an, wie auch für stationäre Prozesse mit langem Gedächtnis. Jedoch ist die schwache Stationarität, abgesehen von trivialen Spezialfällen, für diesen Prozeß verletzt (nach Baillie et al., 1996 sind die zweiten Momente der unbedingten Verteilung von  $y_t$  unendlich). Daher sind eine Betrachtung der Autokorrelationsfunktion und entsprechend darauf beruhende Aussagen über die Persistenz von Volatilitätsschocks ausgeschlossen.

Da das FIGARCH-Modell Asymmetrie als Charakteristikum einiger Kapitalmarktrenditen nicht nachbilden kann, ist es naheliegend, statt des symmetrischen GARCH-Modells auch asymmetrische GARCH-Modelle um den fraktionalen Differenzenfilter zu erweitern. Daher wird nachfolgend das von Tse (1998) entwickelte FI-A-PARCH-Modell betrachtet.

**Definition 5.2:** Ein stochastischer Prozeß  $\{y_t\}$  heißt **Fractional Integrierter Asymmetrischer Power-GARCH Prozeß** der Ordnungen  $p$  und  $q$  mit **Gedächtnisparameter**  $d$ , kurz FI-A-PARCH( $p, d, q$ )-Prozeß, wenn er für  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta > 0$ ,  $|\eta| < 1$  und  $0 \leq d \leq 1$  den folgenden Gleichungen genügt

$$y_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{P}_{0,1}$$

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - B)^d(\{z_t\}) = \alpha_0 + (1 - \beta(B))(\{\nu_t\}), \quad (5.5)$$

wobei  $\alpha(B) = \sum_{j=1}^q \alpha_j B^j$ ,  $\beta(B) = \sum_{j=1}^p \beta_j B^j$ ,  $z_t = (|y_t| - \eta y_t)^\delta$  und  $\nu_t = z_t - \sigma_t^\delta$  gilt.

Dieses Modell ist keine direkte Erweiterung des A-PARCH-Modells aus Definition 3.1, sondern die des Spezialfalls mit  $\eta = \eta_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ). Somit enthält das FI-A-PARCH-Modell das A-PARCH-Modell mit  $\eta_1 = \dots = \eta_q$  als Spezialfall für  $d = 0$ . Weitere Spezialfälle sind beispielsweise das FIGARCH-Modell ( $\delta = 2$ ,  $\eta = 0$ ) sowie das GARCH-Modell ( $d = 0$ ,  $\delta = 2$ ,  $\eta = 0$ ).

Um das Verständnis für fractional integrierte Prozesse sowie den Vergleich mit den Modellen aus den Definitionen 2.1 und 3.1 zu erleichtern, wird nachfolgend die Modellgleichung (5.5) in Parameter-Schreibweise formuliert. Dazu wird zunächst eine Darstellung von  $\sigma_t^\delta$  in Abhängigkeit von verzögerten Werten von  $\sigma_t^\delta$  sowie aktuellen und verzögerten Werten von  $z_t$  gesucht. Dabei ergibt sich folgende zu (5.5) äquivalente Gleichung in Backshift-Operator-Schreibweise

$$\{\sigma_t^\delta\} = \alpha_0 + \{z_t\} + \beta(B)(\{\nu_t\}) - (1 - B)^d(1 - \alpha(B) - \beta(B))(\{z_t\}).$$

Dies läßt sich mit der Regel (5.2) in Parameter-Schreibweise formulieren und ergibt

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + z_t + \sum_{j=1}^p \beta_j (\sigma_{t-j}^\delta - z_{t-j})$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} \left( z_{t-k} - \sum_{j=1}^q \alpha_j z_{t-j-k} - \sum_{j=1}^p \beta_j z_{t-j-k} \right). \quad (5.6)$$

### 5.3 Abschätzung des Fractionalen Differenzenoperators

Die Gleichung (5.6) erleichtert nicht nur das Verständnis, sie verdeutlicht auch ein Problem im Umgang mit fractional integrierten Prozessen. So ist die un-

endliche Summierung für den Term der fraktionalen Differenz nicht praktisch umsetzbar. Einerseits haben beliebige Datensätze immer einen endlichen Stichprobenumfang. Andererseits ist auch mit heutiger Rechentechnik eine derartige Summierung nicht realisierbar.

Daher muß in der Praxis statt der Regel (5.2) folgende Abschätzung für den fraktionalen Differenzenoperator verwendet werden

$$(1 - B)^d \approx \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-d)} B^k, \quad (5.7)$$

wobei  $m$  als Summationsgrenze oder „truncation order“ bezeichnet wird.

Dieses Problem tritt insbesondere bei der in der vorliegenden Arbeit verwendeten ML-Methode zur Parameterschätzung auf, da die Modellgleichung (5.6) direkt in die zu maximierende Likelihood-Funktion eingeht. Für Parameterschätzungen ist es weiterhin wichtig, möglichst viele der vorhandenen Beobachtungen zu berücksichtigen. Die  $m$  vergangenen Beobachtungen, die zur Berechnung bzw. Approximation der fraktionalen Differenz verwendet werden, stehen aber zur Parameterschätzung nicht zur Verfügung. Zudem steigt mit  $m$  der Rechenaufwand für Parameterschätzungen.

Gefordert ist eine Wahl der Summationsgrenze  $m$ , die sowohl eine gute Approximation des fraktionalen Differenzenfilters als auch eine ausreichend große Anzahl von Beobachtungen für die eigentliche Parameterschätzung sicherstellt.

Erste Überlegungen zur Wahl von  $m$  finden sich beispielsweise in Baillie et al. (1996) sowie in Haßler (1993), S. 57ff. Ein ähnliches Problem ergibt sich für die Log-Periodogramm-Schätzung bei ARFIMA-Modellen. Dabei ist zu entscheiden, wie viele Frequenzen in die Schätzung eingehen sollen. Dies wird in Hurvich, Deo (1999) diskutiert, bietet jedoch für die Wahl von  $m$  keinen plausiblen Lösungsansatz. Daher werden nachfolgend zwei von dem dortigen Vorgehen deutlich verschiedene Strategien zur Wahl der Summationsgrenze vorgestellt.

Betrachtet wird die Summe

$$S_m = \sum_{k=0}^m d_k \quad \text{mit} \quad d_k = \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-d)}.$$

Nach Haßler (1993), S.58 konvergiert  $S_m$  für  $m \rightarrow \infty$  gegen Null. Daraus leiten

Baillie et al. (1996) als heuristische Regel die Wahl von  $m = 1000$  ab, mit der Begründung,  $S_{1000}$  ergebe für  $d = 0.75$  einen Wert von 0.00155, welcher nahe genug an der Null liegt. Dieses Vorgehen kann jedoch nur einen ersten Hinweis auf die korrekte Wahl von  $m$  liefern.

Haßler (1993) betrachtet alternativ den Wert des  $m$ -ten Summanden  $d_m$  in Abhängigkeit vom Gedächtnisparameter  $d$  und der Summationsgrenze  $m$ . Ein Summand  $d_k$  gibt gerade das Gewicht an, mit dem die um  $k$  Zeitpunkte verzögerte Beobachtung der Reihe in die fraktionale Differenz eingeht.

**Tabelle 5.1:** Summationsgrenze  $m$  für verschiedene Schranken von  $S_m$  sowie  $d_m$  (bei  $d = 0.8, 0.6, 0.4, 0.3, 0.2$ )

	$m$				
$S_m < 0.1$	3	13	117	903	46753
$S_m < 0.05$	7	39	661	9102	$1.5 \cdot 10^6$
$S_m < 0.01$	47	571	36951	$1.9 \cdot 10^6$	*
$ d_m  < 0.001$	19	35	56	67	74
$ d_m  < 0.0001$	65	141	283	389	498
	$d = 0.8$	$d = 0.6$	$d = 0.4$	$d = 0.3$	$d = 0.2$

\*: Wert ist aufgrund begrenzter maschineller Rechengenauigkeit nicht zu ermitteln

In Tabelle 5.1 werden die Werte für die Summe  $S_m$  sowie (analog zu Haßler, 1993, S. 58) die Werte der Summanden  $d_m$  abhängig von  $d$  und  $m$  betrachtet. Die Ergebnisse verdeutlichen das Konvergenzverhalten von  $S_m$  und  $d_m$ . Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt stark von der Größe des Gedächtnisparameters  $d$  ab. Für kleine Werte von  $d$  konvergiert  $S_m$  in  $m$  nur sehr langsam, für eine gute Approximation der fraktionalen Differenz muß nach diesem Kriterium also eine sehr große Anzahl von Beobachtungen in die Abschätzung (5.7) eingehen. Die Konvergenz der Gewichte  $d_m$  wird zwar ebenfalls von  $d$  beeinflusst, für sehr kleine Werte von  $d_m$  sind jedoch deutlich weniger Beobachtungen als für  $S_m$  notwendig.

Gemäß dieser Resultate läßt sich mit (5.7) für ausreichend große  $m$  der fraktionale Differenzenfilter beliebig genau approximieren. Eine Regel für die Wahl von  $m$  in der Praxis kann damit aber nur durch willkürliche Festlegung der Schranken von  $S_m$  oder  $d_m$  abgeleitet werden.

Zusätzlich wird daher auf empirischem Wege untersucht, ob bzw. ab welcher Wahl der Summationsgrenze  $m$  sich die Parameterschätzungen in FI-A-PARCH-

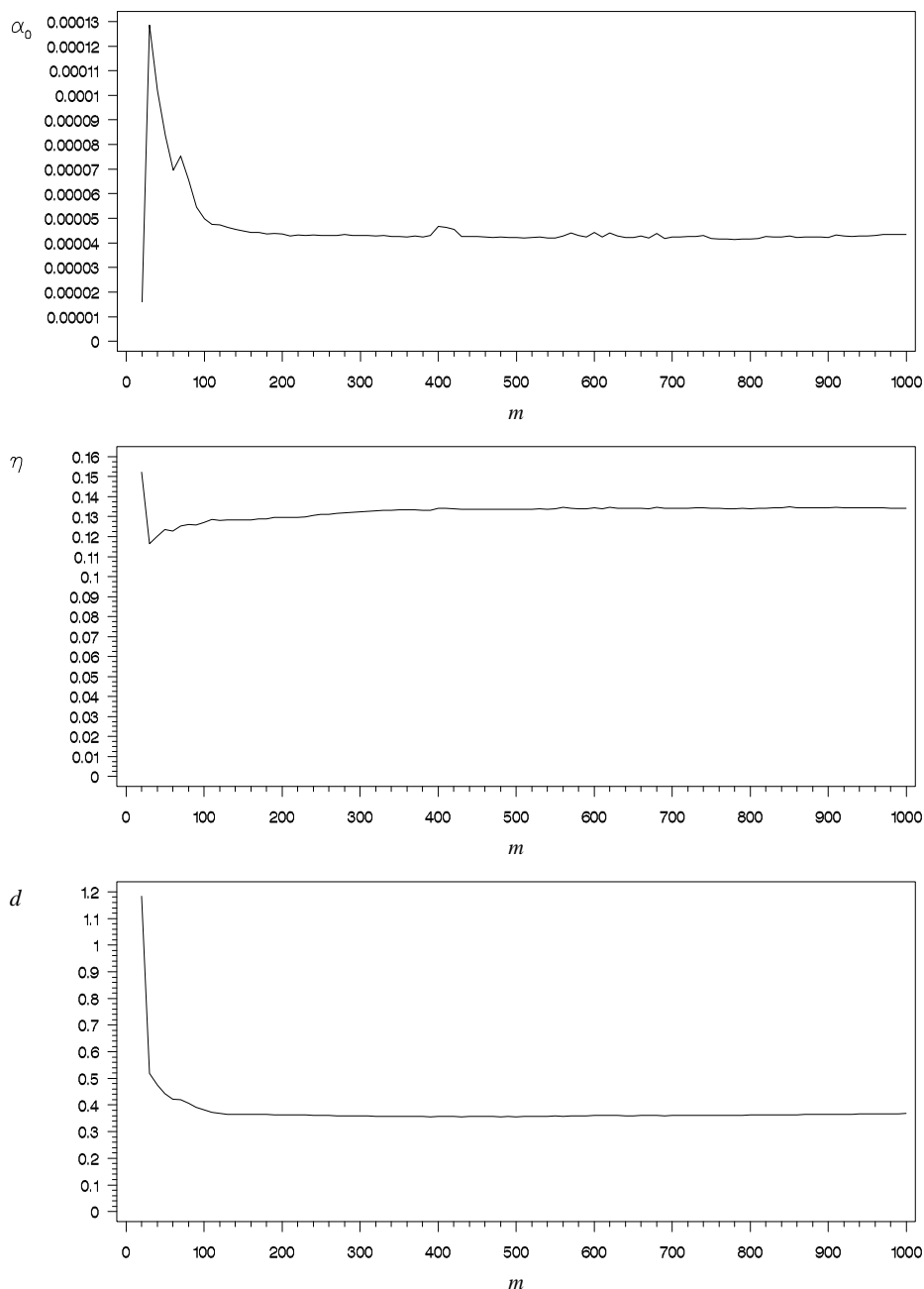
Modellen stabilisieren. Von Konvergenz wird in diesem Zusammenhang bewußt nicht gesprochen, da für verschiedene Werte von  $m$  auch verschiedene Optimierungsprobleme vorliegen. Genauer bilden bei einer Summationsgrenze von  $m$  und einem Stichprobenumfang von  $T$  die Beobachtungen  $m + 1, \dots, T$  die Grundlage für eine Modellanpassung.

Von Interesse ist dabei die Frage, ob die Stabilisierung der Parameterschätzung für wachsende  $m$  tatsächlich vom Wert des Gedächtnisparameters  $d$  abhängt, wie von Tabelle 5.1 induziert wird.

In der folgenden Untersuchung werden daher Parameterschätzungen in FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modellen anhand der in Kapitel 2.2 beschriebenen Datensätze BAS, SIE, DOW, GBPUSD, XAU.X und ZinsLang durchgeführt, wobei die Summationsgrenze jeweils in folgenden Schritten variiert werden soll

$$m = 10, 20, \dots, 1000 .$$

Als bedingte Verteilung wird die  $t$ -Verteilung angenommen. Die geschätzten Parameter werden in Abhängigkeit von  $m$  abgetragen. Typische Verläufe sind in der Abbildung 5.1 zu finden. Eine Zusammenstellung aller hier berücksichtigten Verläufe befindet sich in Anhang B.



**Abbildung 5.1:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\alpha_0$ ,  $\eta$  und  $d$  in Abhängigkeit von  $m$  für die BASF-Renditen ( $T = 8945$ )

In Abbildung 5.1 ist deutlich eine Stabilisierung der Parameterschätzungen für eine wachsende Summationsgrenze erkennbar. Für kleine Werte von  $m$  (beispielsweise  $m < 100$ ) ändern sich die Schätzwerte stark. In der Nähe der von Baillie et al. (1996) vorgeschlagenen Summationsgrenze  $m = 1000$  sind hingegen keine erwähnenswerten Änderungen mehr zu verzeichnen. Ähnliche Aussagen lassen sich auch für die meisten übrigen betrachteten Datensätze und Parameter ablei-

ten. Die einzige Ausnahme hierbei bilden die Ergebnisse für die ersten Differenzen des Langfrist-Zinssatzes. So stabilisieren sich aufgrund numerischer Probleme einige der Parameterschätzungen für diese Reihe auch nicht für große Werte von  $m$ . Daher können die Ergebnisse für diese Reihe bei der Untersuchung der Summationsgrenze nicht weiter berücksichtigt werden. Aus den übrigen Ergebnissen läßt sich jedoch eine Stabilisierung der Parameterschätzer für eine wachsende Summationsgrenze ableiten.

Gesucht ist zudem eine Regel für die Wahl von  $m$ . Nachfolgend wird daher ein Ansatz zur Konstruktion eines objektiven Kriteriums präsentiert, welches auf der Untersuchung des Verhaltens von Parameterschätzungen bezüglich der Summationsgrenze basiert. Sei dafür die Bezeichnung  $\hat{\theta}^{(m)}$  als Wert der Parameterschätzung für  $\theta$  bei Summationsgrenze  $m$  eingeführt.

Ein erster Vorschlag ist, das Quadrat bzw. den Absolutbetrag der standardisierten Abweichungen

$$\frac{\hat{\theta}^{(m)} - \hat{\theta}^{(m-10)}}{\hat{\theta}^{(m)}} \quad \text{oder} \quad \frac{\hat{\theta}^{(m)} - \hat{\theta}^{(m-10)}}{\hat{\theta}^{(1000)}} \quad \text{oder} \quad \frac{\hat{\theta}^{(m)} - \hat{\theta}^{(1000)}}{\hat{\theta}^{(1000)}}$$

zu betrachten und die Entscheidung über eine Wahl von  $m$  analog zum explorativen Kriterium (inflection point criterion) des Scree-Plot aus der Faktorenanalyse zu treffen. Diese Strategie führt jedoch zu keiner plausiblen Regel für die Summationsgrenze.

Ein alternativer Ansatz beruht auf der geschätzten Standardabweichung von  $\hat{\theta}^{(1000)}$ . Wird dieser Wert zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls um  $\hat{\theta}^{(1000)}$  verwendet, ist es möglich, eine Entscheidung über die „Nähe“ von  $\hat{\theta}^{(m)}$  zu  $\hat{\theta}^{(1000)}$  zu treffen, indem die Werte von  $\hat{\theta}^{(m)}$  ( $m < 1000$ ) mit den Konfidenzgrenzen dieses Intervalls verglichen werden.

Die Schätzung der Standardabweichung sowie die Konstruktion des Konfidenzintervalls sind dabei einerseits abhängig von der Verteilung der Parameterschätzungen. Andererseits errechnen sich Konfidenzintervalle für symmetrisch verteilte Parameterschätzer  $\hat{\theta}$  als symmetrische Intervalle um  $\hat{\theta}$ , deren Länge das Produkt aus der Standardabweichung von  $\hat{\theta}$  und einem vom Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  abhängigen Faktor ist. Für verschiedene symmetrische Verteilungen bilden sich bei entsprechender Wahl (verschiedener) Niveaus identische Konfidenzintervalle. Da es zur Wahl dieses Niveaus bisher keine Erkenntnisse gibt, werden zunächst beispielhaft



Intervalle zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0.25$  unter Normalverteilungsannahme berechnet. Die jeweiligen Konfidenzgrenzen sind als horizontale Referenzlinien in die Abbildungen B.1 bis B.10 (in Anhang B) eingezeichnet.

Für die dort betrachteten Verläufe von Parameterschätzungen erscheinen die durch das präsentierte Kriterium induzierten Regeln zur Wahl von  $m$  plausibel im Vergleich mit den subjektiven Entscheidungen durch „Anschauen“ der jeweiligen Graphen. Somit läßt sich hier als pauschale Regel  $m = 300$  für eine hinreichend gute Approximation der fraktionalen Differenz ableiten, da sich für diesen Wert der Summationsgrenze die Parameterschätzungen innerhalb oder zumindest nahe der Konfidenzgrenzen befinden.

Über eine Abhängigkeit dieser Wahl vom Wert des Gedächtnisparameters  $d$  läßt sich nur bedingt folgern, da sich dieser für die Reihen BAS, SIE, DOW, XAU.X und ZinsLang nicht wesentlich unterscheidet ( $\hat{d} \approx 0.4$ ). Für GBPUSD gilt  $\hat{d} \approx 0.15$ , für  $m > 300$  befinden sich jedoch auch die Parameterschätzungen dieser Reihe innerhalb der Konfidenzgrenzen.

## 5.4 Eigenschaften von FI-A-PARCH-Prozessen

Eine erste Untersuchung der Eigenschaften von FI-A-PARCH-Prozessen ist in Níguez (2002) zu finden. So sind zur Vermeidung negativer Werte für  $\sigma_t^\delta$  in der rekursiven Gleichung (5.5) positive Gewichte in den Filtern  $\beta(B)$  sowie  $1 - (1 - B)^d(1 - \alpha(B) - \beta(B))$  hinreichend. Für FI-A-PARCH-Modelle der Ordnungen  $p, q \leq 1$  werden zusätzlich die jeweils resultierenden Parameterkonstellationen angegeben. Zur Stationarität von FI-A-PARCH-Prozessen wird weiter festgestellt, daß sie für  $0 < d \leq 1$  zwar streng jedoch nicht schwach stationär sind.

Zudem wird in Níguez (2002) das FI-A-PARCH-Modell mit einigen zugehörigen Spezialfällen bezüglich des  $AIC$ ,  $SBC$  und  $MSPE$  verglichen. Die Modellanpassungen werden für die täglichen Renditen des spanischen Aktienindex IBEX35 durchgeführt. Gemäß der Informationskriterien wird dabei das FI-A-PARCH-Modell mit einer bedingten  $t$ -Verteilung bevorzugt, während gemäß  $MSPE$  dieses Modell mit einer bedingten Normalverteilung am besten bewertet wird. Wie bereits für die Modelle in Abschnitt 3.2.4 müssen die Ergebnisse des  $MSPE$  jedoch

mit großer Vorsicht interpretiert werden, da nach Peters (2001) verschiedene Kriterien die Qualität von Volatilitätsprognosen in GARCH-Modellen oft uneinheitlich bewerten.

Da die Ergebnisse aus Níguez (2002) nur auf einem Datensatz basieren sowie zur besseren Vergleichbarkeit, werden in Tabelle 5.2 die Ergebnisse von Modellanpassungen für die Datensätze DAX und BAY aufgeführt. Berücksichtigt werden dabei das FI-A-PARCH-Modell sowie dessen Spezialfälle GARCH, FIGARCH und A-PARCH für die Modellordnung  $p = q = 1$  unter Normal- und  $t$ -Verteilung als bedingter Verteilung. Die Summationsgrenze für die fraktional integrierten Modelle wird gemäß der Folgerungen aus Abschnitt 5.3 auf  $m = 300$  festgesetzt. Da die Ergebnisse für die Modelle GARCH und A-PARCH identisch mit denen aus Abschnitt 3.2.4 sind, kann die vorliegende Tabelle als Fortsetzung von Tabelle 3.1 angesehen werden.

**Tabelle 5.2:** Werte für das  $SBC$ , den mittleren quadratischen Vorhersagefehler (MSPE) und den  $p$ -Wert des Portmanteau Q-Tests der Ordnung 10 ( $p-Q(10)$ ) einiger GARCH-Modelle erster Ordnung unter verschiedenen Verteilungsannahmen (**fett**  $\hat{=}$  bester Wert)

Modell	DAX			BAY		
	$SBC$	MSPE*	$p-Q(10)$	$SBC$	MSPE*	$p-Q(10)$
$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$						
GARCH	-67588.2	1.6043	0.8267	-62746.2	3.2364	0.6465
FIGARCH	-67693.9	1.5885	0.8078	-62864.3	3.1986	0.9053
A-PARCH	-67632.8	1.5668	0.8822	-62786.9	3.1716	0.6343
FI-A-PARCH	-67776.4	1.5504	0.7361	-62882.1	3.2036	0.9019
$\varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} t(0, 1)$						
GARCH	-68056.9	1.6001	0.8119	-63472.7	3.2177	0.6232
FIGARCH	-68098.4	1.5896	0.7172	-63528.8	3.1974	0.8981
A-PARCH	-68108.7	1.5593	0.8441	-63496.8	<b>3.1656</b>	0.4096
FI-A-PARCH	<b>-68147.2</b>	<b>1.5385</b>	0.7050	<b>-63531.0</b>	3.1832	0.8764

\*: Werte für MSPE sind mit  $10^{-7}$  zu multiplizieren

Gemäß der  $p$ -Werte des Portmanteau Q-Tests in Tabelle 5.2 gibt es zum 5%-Signifikanzniveau für keines der betrachteten Modelle Hinweise auf ARCH-Effekte in den Residuen. Weiter ergibt die Bewertung der Modelle mittels  $SBC$  für beide Datensätze eine Präferenz für das FI-A-PARCH-Modell, was im Einklang mit den Ergebnissen von Níguez (2002) steht. Im Gegensatz dazu entsprechen die

Resultate für das Kriterium MSPE nicht denen von Níguez (2002). So schneidet für beide Datensätze im direkten Vergleich eine zugrundeliegende bedingte  $t$ -Verteilung jeweils besser ab als die Normalverteilung. Bezüglich der Vorhersagegüte ist das FI-A-PARCH-Modell nur für die Reihe DAX das beste Modell, für BAY erreicht hingegen das A-PARCH-Modell den kleinsten Wert für MSPE. Trotz dieser uneinheitlichen Bewertung erscheint das FI-A-PARCH-Modell als sinnvolle Erweiterung der bisher vorgestellten GARCH-Modelle. Es sollte jedoch für jeden Datensatz einzeln überprüft werden, ob eine Anwendung dieses Modells plausibel ist.

Da FI-A-PARCH-Prozesse analog zu den Eigenschaften der FIGARCH-Prozesse unendliche unbedingte zweite Momente besitzen, ist auch hier die Autokorrelationsfunktion nicht definiert. Aussagen über die Persistenz ließen sich eventuell aus der Untersuchung der empirischen Autokorrelationsfunktion quadrierter Beobachtungen von FI-A-PARCH-Prozessen analog zu Krämer, Runde (1998) (für ARMA-Prozesse), Davis, Mikosch (1998) und Mikosch, Stărică (2000) (für ARCH- und GARCH-Prozesse) sowie Maheu (2002) (für FIGARCH-Prozesse) ableiten. Dies wird jedoch nicht an dieser Stelle durchgeführt, sondern bleibt der künftigen Forschung vorbehalten.

## 6 Ein stationäres A-PARCH-Modell mit langem Gedächtnis

In Analogie zur Theorie der ARMA-Prozesse lassen sich viele GARCH-Modelle in eine ARCH( $\infty$ )-Darstellung umformen. Ausgehend von dieser einheitlichen Form kann mittels einer Volterra-Reihenentwicklung (siehe Priestley, 1988) für diese Modelle eine Darstellung abgeleitet werden, die es erleichtert, Moment- und Stationaritätsaussagen zu treffen. Insbesondere leiten Giraitis et al. (2000), basierend auf der Volterra-Darstellung von ARCH-Prozessen, hinreichende Bedingungen für strenge und schwache Stationarität, die Existenz bestimmter Momente sowie Aussagen über die Form der Autokovarianzfunktion und somit über das Vorliegen von langem Gedächtnis her.

Da die bisher vorgestellten fraktional integrierten Modelle FIGARCH und FI-A-PARCH aufgrund unendlicher bedingter zweiter Momente keine Aussagen über die Autokovarianzfunktion zulassen, wird im Kontext der Umformungen zur Volterra-Entwicklung ein neues Modell, das Hyperbolische A-PARCH-Modell, vorgestellt. Es soll ermöglichen, alle vorgestellten Charakteristika von Kapitalmarktrenditen (Volatilitätscluster, Hochgipfligkeit, Asymmetrie, langes Gedächtnis) zu reproduzieren und dabei die Erkenntnis zu berücksichtigen, daß die bedingte Volatilität am besten durch nichtganzzahlige Potenzen von Absolutbeträgen der Beobachtungen repräsentiert wird. Diese Weiterentwicklung des A-PARCH-Ansatzes wird analog zu dem von Davidson (2002) vorgestellten HYGARCH-Modell formuliert. Abschließend werden erste Eigenschaften dieses Modells basierend auf seiner Volterra-Entwicklung abgeleitet.

### 6.1 Das Hyperbolische A-PARCH-Modell

Zur Herleitung des neuen Modells sowie zur Vorbereitung der Volterra-Reihenentwicklung wird zunächst das FI-A-PARCH-Modell betrachtet, welches die Modelle GARCH, A-PARCH und FIGARCH als Spezialfälle einschließt. Die zugehörige Modellgleichung ist nach Definition 5.2, den dabei verwendeten Bezeichnungen sowie  $z_t = (|y_t| - \eta y_t)^\delta$  und  $\nu_t = z_t - \sigma_t^\delta$  gegeben als

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - B)^d(\{z_t\}) = \alpha_0 + (1 - \beta(B))(\{\nu_t\}) . \quad (6.1)$$

Falls  $(1 - \beta(B))^{-1}$  existiert, läßt sich  $\{\sigma_t^\delta\}$  in Abhängigkeit von  $\{z_t\}$  daher folgendermaßen darstellen

$$\{\sigma_t^\delta\} = (1 - \beta(B))^{-1} \left( \alpha_0 - \alpha(B) + (1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - (1 - B)^d) \right) (\{z_t\}) .$$

Bezeichnet dabei  $\varphi(B)$  den Filter

$$\varphi(B) := (1 - \beta(B))^{-1} \left( \alpha_0 - \alpha(B) + (1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - (1 - B)^d) \right) ,$$

ergibt sich aus (6.1) die verkürzte Darstellung

$$\{\sigma_t^\delta\} = \varphi(B)(\{z_t\}) .$$

In Parameter-Schreibweise ist die Modellgleichung eines FI-A-PARCH-Prozesses somit gegeben als

$$\sigma_t^\delta = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j z_{t-j} = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (|y_{t-j}| - \eta y_{t-j})^\delta , \quad (6.2)$$

wobei  $\varphi_j$  gerade das Gewicht des Filters  $\varphi(B)$  zur  $j$ -ten Verzögerung angibt ( $j \in \mathbb{N}$ ).

Gleichung (6.2) ist eine Darstellung von  $\{y_t\}$  als A-PARCH(0,  $\infty$ )-Prozeß. Für  $\{z_t\}$  ist dies sogar eine ARCH( $\infty$ )-Darstellung mit den Innovationen  $(|\varepsilon_t| - \eta \varepsilon_t)^\delta$ . Außerdem ist der Filter  $\varphi(B)$  identisch zu dem des FIGARCH-Modells bei entsprechender ARCH( $\infty$ )-Darstellung, da die Einschränkungen  $\delta = 2$  und  $\eta = 0$  gegenüber dem FI-A-PARCH-Modell auf die Form von  $\varphi(B)$  keinen Einfluß haben.

Um die Schwäche der Instationarität von FIGARCH-Modellen zu beheben, modifiziert Davidson (2002) diesen Ansatz zu einem Hyperbolischen GARCH-Modell. Die Modifikation gegenüber dem FIGARCH-Modell besteht darin, den fraktionalen Differenzenfilter  $(1 - B)^d$  durch  $((1 - \tau) + \tau(1 - B)^d)$  mit  $\tau \geq 0$  zu ersetzen. Unter der Bedingung  $\tau < 1$  und weiteren Restriktionen an die übrigen Parameter des Modells ist der resultierende stochastische Prozeß schwach stationär und für die quadrierten Reihenwerte kann außerdem das Vorliegen von langem Gedächtnis gezeigt werden. Das HYGARCH-Modell kann somit die Charakteristika Volatilitätscluster, Hochgipfligkeit und langes Gedächtnis reproduzieren.

Durch die beschriebene Modifikation der FIGARCH-Modellgleichung (5.4) ergibt sich als HYGARCH-Modellgleichung

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))((1 - \tau) + \tau(1 - B)^d)(\{y_t^2\}) = \alpha_0 + (1 - \beta(B))(\{y_t^2 - \sigma_t^2\}).$$

Dieses Modell berücksichtigt weder die Asymmetrie noch den Umstand, daß die bedingte Volatilität am besten durch nichtganzzahlige Potenzen von Absolutbeträgen der Beobachtungen repräsentiert wird. Daher wird als neuer Ansatz vorgeschlagen, die Fähigkeiten des HYGARCH-Modells mit denen des A-PARCH-Modells zu kombinieren. Die dazu notwendige Modifikation gegenüber dem HYGARCH-Modell besteht darin,  $y_t^2$  durch  $z_t = (|y_t| - \eta y_t)^\delta$  sowie  $\sigma^2$  durch  $\sigma^\delta$  zu ersetzen. Dies führt zu folgendem Modell.

**Definition 6.1:** Ein stochastischer Prozeß  $\{y_t\}$  heißt **Hyperbolischer Asymmetrischer Power-GARCH Prozeß** der Ordnungen  $p$  und  $q$  mit **Gedächtnisparameter**  $d$ , kurz *HY-A-PARCH*( $p, d, q$ )-Prozeß, wenn er für  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta > 0$ ,  $|\eta| < 1$ ,  $0 \leq d \leq 1$  und  $\tau \geq 0$  den folgenden Gleichungen genügt

$$y_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{u.i.v.}{\sim} \mathcal{P}_{0,1}$$

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))((1 - \tau) + \tau(1 - B)^d)(\{z_t\}) = \alpha_0 + (1 - \beta(B))(\{\nu_t\}), \quad (6.3)$$

wobei  $\alpha(B) = \sum_{j=1}^q \alpha_j B^j$ ,  $\beta(B) = \sum_{j=1}^p \beta_j B^j$ ,  $z_t = (|y_t| - \eta y_t)^\delta$  und  $\nu_t = z_t - \sigma_t^\delta$  gilt.

Da dieses Modell eine direkte Verallgemeinerung der Modelle HYGARCH und FI-A-PARCH darstellt, enthält es diese als Spezialfälle. Das HY-A-PARCH-Modell entspricht dem HYGARCH-Modell für  $\delta = 2$ ,  $\eta = 0$  sowie dem FI-A-PARCH-Modell für  $\tau = 1$ .

Analog zum zuvor betrachteten FI-A-PARCH-Modell läßt sich ein HY-A-PARCH-Prozeß als A-PARCH( $0, \infty$ )-Prozeß mit

$$\{\sigma_t^\delta\} = \varphi(B)(\{z_t\})$$

darstellen. Der dabei benötigte ARCH( $\infty$ )-Filter  $\varphi(B)$  hat die Form

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= (1 - \beta(B))^{-1}(\alpha_0 + \alpha(B)) \\ &\quad + \tau(1 - \beta(B))^{-1}(1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - (1 - B)^d). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Daher läßt sich das HY-A-PARCH-Modell mit den gegenüber FI-A-PARCH veränderten Gewichten  $\varphi_j$  als A-PARCH( $0, \infty$ )-Prozeß mit Gleichung (6.2) in Parameter-Schreibweise beschreiben. In Analogie zur Einschränkung (2.4) für GARCH- und A-PARCH-Modelle ist daher die Formulierung einer Nichtnegativitätsrestriktion möglich

$$\varphi_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} .$$

Zur Vereinfachung der in Abschnitt 6.3 durchgeführten Untersuchung zur schwachen Stationarität von HY-A-PARCH-Prozessen bezeichne

$$\phi^{(1)}(B) := (1 - \beta(B))^{-1} (\alpha_0 + \alpha(B))$$

und

$$\phi^{(2)}(B) := (1 - \beta(B))^{-1} (1 - \alpha(B) - \beta(B)) (1 - (1 - B)^d) .$$

Für HY-A-PARCH-Prozesse gilt dann folgender Zusammenhang für die Gewichte der Filter  $\varphi(B)$ ,  $\phi^{(1)}(B)$  und  $\phi^{(2)}(B)$

$$\varphi_j = \phi_j^{(1)} + \tau \phi_j^{(2)} . \tag{6.5}$$

## 6.2 Volterra-Entwicklung Asymmetrischer Power-Garch-Modelle

Die Reihenentwicklung nach Volterra (siehe Priestley, 1988, S. 25ff) ermöglicht es, verschiedene asymptotische Aussagen über Stationarität, Momente sowie die Autokorrelationsstruktur stochastischer Prozesse abzuleiten. Daher wird diese Methode im vorliegenden Abschnitt am Beispiel der Asymmetrischen Power-GARCH-Modelle durchgeführt. Es ist dabei nicht notwendig, sich auf eines der Modelle A-PARCH, FI-A-PARCH oder HY-A-PARCH zu beschränken, da sich diese für entsprechende Gewichte  $\varphi_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) jeweils mit der Gleichung (6.2) beschreiben lassen. Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt der Reihenentwicklung nach Volterra.

Für alle in dieser Arbeit vorgestellten GARCH-Modelle gilt  $y_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t$ . Wird diese Beziehung in Gleichung (6.2) eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned}\sigma_t^\delta &= \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (|\varepsilon_{t-j} \sigma_{t-j}| - \eta \varepsilon_{t-j} \sigma_{t-j})^\delta \\ &= \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (|\varepsilon_{t-j}| - \eta \varepsilon_{t-j})^\delta \sigma_{t-j}^\delta.\end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung  $\zeta_t := (|\varepsilon_t| - \eta \varepsilon_t)^\delta$  ergibt sich folgende zu Gleichung (6.2) äquivalente rekursive Darstellung

$$\sigma_t^\delta = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \zeta_{t-j} \sigma_{t-j}^\delta. \quad (6.6)$$

Iteratives Auflösen von Gleichung (6.6) liefert

$$\begin{aligned}\sigma_t^\delta &= \varphi_0 + \sum_{j_1=1}^{\infty} \varphi_{j_1} \zeta_{t-j_1} \left( \varphi_0 + \sum_{j_2=1}^{\infty} \varphi_{j_2} \zeta_{t-j_1-j_2} \sigma_{t-j_1-j_2}^\delta \right) \\ &= \varphi_0 + \sum_{j_1=1}^{\infty} \varphi_0 \varphi_{j_1} \zeta_{t-j_1} + \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{\infty} \varphi_{j_1} \varphi_{j_2} \zeta_{t-j_1} \zeta_{t-j_1-j_2} \sigma_{t-j_1-j_2}^\delta \\ &\quad \vdots \\ &= \varphi_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^{\infty} \varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_\ell} \cdot \zeta_{t-j_1} \cdots \zeta_{t-j_1-\dots-j_\ell}.\end{aligned}$$

Diese Darstellung heißt Volterra-Entwicklung der Asymmetrischen Power-GARCH-Modelle. Dabei steht  $\sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^{\infty}$  für die  $\ell$ -fache Hintereinanderausführung der Summation mit den Indizes  $j_1$  bis  $j_\ell$ .

Somit läßt sich  $\{|y_t|^\delta\}$  als Funktion von  $\{\varepsilon_t\}$  darstellen

$$|y_t|^\delta = \varphi_0 |\varepsilon_t|^\delta \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^{\infty} \varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_\ell} \cdot \zeta_{t-j_1} \cdots \zeta_{t-j_1-\dots-j_\ell}. \quad (6.7)$$

Um die auf der Volterra-Entwicklung von ARCH-Prozessen basierenden Aussagen direkt für die Asymmetrischen Power-GARCH-Modelle anwenden zu können, ist folgende zu (6.7) äquivalente Darstellung notwendig

$$z_t = \varphi_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\ell=1}^{\infty} \varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_\ell} \cdot \zeta_t \zeta_{t-j_1} \cdots \zeta_{t-j_1-\dots-j_\ell}. \quad (6.8)$$



Mit der Notation  $X_t = z_t$  sowie  $\xi_t = \zeta_t$  ist diese Darstellung identisch mit der Darstellung (2.1) in Giraitis et al. (2000), der Volterra-Entwicklung von ARCH-Prozessen. Damit können zunächst jedoch nur Aussagen über  $z_t$ , nicht aber über  $|y_t|^\delta$  oder  $y_t$  getroffen werden.

Es gilt aber der Zusammenhang

$$z_t^\delta = (|y_t| - \eta y_t)^\delta = (1 - \eta \cdot \text{sign}(y_t))^\delta \cdot |y_t|^\delta = (1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t))^\delta \cdot |y_t|^\delta,$$

wobei  $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ .

Nach Randles, Wolfe (1979), S. 49 sind  $\text{sign}(\varepsilon_t)$  und  $|\varepsilon_t|$  *st.u.*, wenn die Verteilung von  $\varepsilon_t$  symmetrisch um Null ist. Da außerdem  $\sigma_t$  nur von Werten  $\varepsilon_{t-k}$  mit  $k \geq 1$  abhängt, ist auch  $\sigma_t$  unabhängig von  $\text{sign}(\varepsilon_t)$ . Somit sind  $\text{sign}(\varepsilon_t)$  und das Produkt  $|y_t| = \sigma_t \cdot |\varepsilon_t|$  *st.u.*, ebenso wie deren monotone Transformationen  $(1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t))^\delta$  und  $|y_t|^\delta$ .

Wenn die Verteilung von  $\varepsilon_t$  symmetrisch um Null ist, gilt demnach für beliebige ( $k$ -te) Momente von  $z_t$

$$\begin{aligned} E(z_t^k) &= E((1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t))^{k\delta} \cdot |y_t|^{k\delta}) \\ &= E((1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t))^{k\delta}) \cdot E(|y_t|^{k\delta}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Da  $E((1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t))^{k\delta})$  ein konstanter Faktor ist, lassen sich mit Gleichung (6.9) Momentaussagen über  $|y_t|^\delta$  auf Momentaussagen über  $z_t$  zurückführen.

Bei Annahme der Symmetrie um Null für die Verteilung von  $\varepsilon_t$  gilt außerdem

$$\begin{aligned} E((1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t))^{k\delta}) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \eta \cdot \text{sign}(x))^{k\delta} f_{\varepsilon_t}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (1 + \eta)^{k\delta} f_{\varepsilon_t}(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - \eta)^{k\delta} f_{\varepsilon_t}(x) dx \\ &= (1 + \eta)^{k\delta} \int_{-\infty}^0 f_{\varepsilon_t}(x) dx + (1 - \eta)^{k\delta} \int_0^{\infty} f_{\varepsilon_t}(x) dx \\ &= (1 + \eta)^{k\delta} \cdot \frac{1}{2} + (1 - \eta)^{k\delta} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} ((1 + \eta)^{k\delta} + (1 - \eta)^{k\delta}), \end{aligned}$$

wobei  $f_{\varepsilon_t}$  die unbedingte Dichte von  $\varepsilon_t$  angibt.

Damit läßt sich (6.9) weiter vereinfachen zu

$$E(z_t^k) = \frac{1}{2} \left( (1 + \eta)^{k\delta} + (1 - \eta)^{k\delta} \right) \cdot E(|y_t|^{k\delta}) .$$

In Abschnitt 6.3 werden die Eigenschaften von HY-A-PARCH-Prozessen untersucht. Einige Erkenntnisse beruhen auf Aussagen, die in Giraitis et al. (2000) mittels der Volterra-Entwicklung von ARCH-Prozessen abgeleitet wurden. Daher werden nachfolgend zwei zentrale Ergebnisse dieser Arbeit übertragen auf die hier verwendete Notation präsentiert.

Nach Theorem 2.1 in Giraitis et al. (2000) stellt unter den Bedingungen

$$E(\zeta_t) < \infty \quad \text{und} \quad E(\zeta_t) \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j < 1 \quad (6.10)$$

die Gleichung (6.8) eine streng stationäre Lösung für  $z_t = \sigma_t^\delta \cdot \zeta_t$  und (6.2) mit endlichem erstem Moment  $E(z_t)$  dar. Gilt zusätzlich

$$E(\zeta_t^2) < \infty \quad \text{und} \quad (E(\zeta_t^2))^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j < 1 , \quad (6.11)$$

stellt die Gleichung (6.8) eine eindeutige schwach stationäre Lösung für  $z_t = \sigma_t^\delta \cdot \zeta_t$  und (6.2) dar.

Nach Satz 3.2 in Giraitis et al. (2000) läßt sich unter der Bedingung (6.11) folgende Aussage über die Autokovarianzfunktion treffen. Falls für feste Werte von  $\gamma > 1$ ,  $c_1 > 0$  und  $c_2 > 0$  die Gewichte  $\varphi_j$  für hinreichend große  $j \in \mathbf{N}$  der Ungleichung

$$c_1 j^{-\gamma} \leq \varphi_j \leq c_2 j^{-\gamma} \quad (6.12)$$

genügen, so existieren für hinreichend große  $k \in \mathbf{N}$  Konstanten  $C_1 > 0$  und  $C_2 > 0$ , so daß folgende Ungleichung gilt

$$C_1 k^{-\gamma} \leq \text{Cov}(z_t, z_{t-k}) \leq C_2 k^{-\gamma} . \quad (6.13)$$

Da (6.13) äquivalent zur Eigenschaft (5.1) aus Definition 5.1 ist, bildet  $\{z_t\}$  unter (6.11) einen stationären Prozeß mit langem Gedächtnis, wenn die Gewichte  $\varphi_j$  in  $j$  hyperbolisch fallen.

### 6.3 Eigenschaften von HY-A-PARCH-Prozessen

Der in Definition 6.1 präsentierte HY-A-PARCH-Ansatz soll es ermöglichen, mit einem stationären Prozeß sämtliche in dieser Arbeit vorgestellte Charakteristika von Kapitalmarktrenditen zu modellieren. Nachfolgend werden daher die Eigenschaften von HY-A-PARCH-Prozessen untersucht. Zunächst werden dazu Parameterrestriktionen hergeleitet, welche die schwache Stationarität dieser Prozesse sicherstellen. Anschließend werden mit den Mitteln aus Giraitis et al. (2000) Stationaritätsaussagen für den transformierten Prozeß  $\{z_t\}$  mit  $z_t = (|y_t| - \eta y_t)^\delta$  getroffen und basierend darauf auf das Vorliegen von langem Gedächtnis in  $\{z_t\}$  geschlossen.

Sei  $\varphi(B)$  der ARCH( $\infty$ )-Filter zum HYGARCH-Modell (siehe Davidson, 2002). Damit beschreibt die Gleichung (6.2) einen HY-A-PARCH-Prozeß. Nach dem Gesetz der iterierten Erwartungswerte (law of iterated expectations)

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^\delta) &= \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j E((|y_{t-j}| - \eta y_{t-j})^\delta) \\ &= \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j E((|\varepsilon_{t-j}| - \eta \varepsilon_{t-j})^\delta) E(\sigma_{t-j}^\delta) \\ &\stackrel{u.i.v.}{=} \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j E((|\varepsilon_t| - \eta \varepsilon_t)^\delta) E(\sigma_t^\delta) \end{aligned}$$

gilt unter der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j E((|\varepsilon_t| - \eta \varepsilon_t)^\delta) < 1 \quad (6.14)$$

folgende Gleichung

$$E(\sigma_t^\delta) = \frac{\varphi_0}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j E((|\varepsilon_t| - \eta \varepsilon_t)^\delta)}.$$

Gemäß Ding et al. (1993) ist die Ungleichung (6.14) eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz der Momente  $E(\sigma_t^\delta)$  und  $E(|y_t|^\delta)$ . Unter den Einschränkungen  $\delta = 2$  und  $\eta = 0$  für den Spezialfall HYGARCH reduziert sich mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j E((|\varepsilon_t| - 0\varepsilon_t)^2) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j E(\varepsilon_t^2) \stackrel{u.i.v. \mathcal{P}(0,1)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j$$

die Ungleichung (6.14) als Bedingung für die Existenz der Momente  $E(\sigma_t^2)$  und  $E(|y_t|^2)$  zu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j < 1 .$$

Nach Davidson (2002) ist ein HYGARCH-Prozeß mit den Restriktionen  $0 \leq \tau < 1$  und  $(1 - \beta(1))^{-1}(\alpha_0 - \alpha(1)) > 0$  schwach stationär. Mit  $\tau = 1$ , also für den Spezialfall FIGARCH, ist dieser Prozeß aufgrund nicht existierender zweiter Momente jedoch instationär. Da (6.14) eine hinreichend und notwendige Bedingung für die Existenz dieser Momente ist, gilt für stationäre HYGARCH-Prozesse

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j < 1$$

sowie für FIGARCH-Prozesse

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \geq 1 .$$

Mit der Notation von (6.5) ergeben sich die Gewichte des HYGARCH-Filters nach (6.3) aus denen des entsprechenden FIGARCH-Filters durch die Modifikation „ $\varphi_j = \phi_j^{(1)} + \phi_j^{(2)}$ “ wird zu  $\varphi_j = \phi_j^{(1)} + \tau \phi_j^{(2)}$ “. Für  $0 \leq \tau < 1$  gilt also

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(1)} + \tau \phi_j^{(2)} < 1 \quad \text{sowie} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(1)} + \phi_j^{(2)} \geq 1 .$$

Unter Berücksichtigung von

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(1)} + \tilde{\tau} \phi_j^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(1)} + \tilde{\tau} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)} \quad \forall \tilde{\tau} \in [0, 1]$$

folgt daraus die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(1)} + \phi_j^{(2)} = 1 . \tag{6.15}$$

Aus der Bedingung (6.14) für das HY-A-PARCH-Modell, welche mit den hier verwendeten Bezeichnungen zu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \phi_j^{(1)} + \tau \phi_j^{(2)} \right) E(|\varepsilon_t| - \eta \varepsilon_t)^\delta < 1$$

umformuliert werden kann, läßt sich mit Gleichung (6.15) durch äquivalente Umformung folgende Bedingung für  $\tau$  ableiten

$$\tau < 1 + \frac{1}{E((|\varepsilon_t| - \eta\varepsilon_t)^\delta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)}} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)}}. \quad (6.16)$$

Somit existieren unter der Bedingung (6.16) sowie  $(1 - \beta(1))^{-1}(\alpha_0 - \alpha(1)) > 0$  die Momente  $E(\sigma_t^\delta)$  und  $E(|y_t|^\delta)$ . Gilt zusätzlich die Bedingung  $\delta \geq 2$ , folgt analog zu Appendix B in Ding et al. (1993) die schwache Stationarität des zugehörigen HY-A-PARCH-Prozesses  $\{y_t\}$ .

In der Bedingung (6.16), ebenso wie in Theorem 2.1 aus Giraitis et al. (2000) wird der Erwartungswert

$$E(\zeta_t) = E((|\varepsilon_t| - \eta\varepsilon_t)^\delta)$$

betrachtet. Für  $\varepsilon_t$  als *u.i.v.* Zufallsvariable ist dieser Wert eine ausschließlich von der Verteilung von  $\varepsilon_t$  abhängige Konstante. Diese ist für die Verteilungen  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $GED(0, 1)$  und  $t(0, 1)$  in den Gleichungen (3.7), (3.8) und (3.9) aus Abschnitt 3.2 angegeben.

Um das Vorliegen von langem Gedächtnis für den transformierten Prozeß  $\{z_t\}$  nachzuweisen, genügt es nach Satz 3.2 in Giraitis et al. (2000) zu überprüfen, ob die Bedingung (6.11) erfüllt ist und die Gewichte des zugehörigen Filters  $\varphi(B)$  hyperbolisch fallen.

In Bedingung (6.11) wird  $E(\zeta_t^2)$  betrachtet.  $E(\zeta_t^2) = E((|\varepsilon_t| - \eta\varepsilon_t)^{2\delta})$  ergibt sich aus  $E(\zeta_t) = E((|\varepsilon_t| - \eta\varepsilon_t)^\delta)$  jedoch mit  $\tilde{\delta} = 2\delta$ , diese Konstante läßt sich also wieder mit den Gleichungen (3.7), (3.8) und (3.9) berechnen. Für die in dieser Arbeit betrachteten Verteilungen ist  $E(\zeta_t^2) < \infty$  demnach erfüllt. Die zweite Ungleichung aus (6.11) kann äquivalent umgeformt werden zu

$$\tau < 1 + \frac{1}{(E(\zeta_t^2))^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)}} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)}}. \quad (6.17)$$

Für Werte von  $\tau$ , welche diese Bedingung erfüllen, ist somit die Bedingung (6.11) als erste Voraussetzung für Satz 3.2 in Giraitis et al. (2000) erfüllt.  $\{z_t\}$  stellt also einen schwach stationären Prozeß dar.

Die zweite Voraussetzung für Satz 3.2 in Giraitis et al. (2000), das hyperbolische Abfallen der Gewichte  $\varphi_j$  eines zum HY-A-PARCH-Prozeß gehörenden Filters, läßt sich auf das Verhalten der Gewichte für den entsprechenden HYGARCH-Filter zurückführen, da die Transformation  $g(x) = (|x| - \eta x)^\delta$  diesen Filter nicht verändert.

In Davidson (2002) wird der Filter des HYGARCH-Modells durch

$$\varphi(B) \approx (1 - \beta(B))^{-1} (\alpha_0 + \alpha(B)) + \tau (1 - \beta(B))^{-1} (1 - \alpha(B) - \beta(B)) \psi(B)$$

mit

$$\psi(B) = \zeta(1 + d)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1-d} B^j$$

approximiert, wobei  $\zeta(\cdot)$  die Riemannsche Zeta-Funktion darstellt. Daraus kann das hyperbolische Abstiegsverhalten der Gewichte abgeleitet werden. Dies gilt gleichermaßen für das HYGARCH- wie auch für das HY-A-PARCH-Modell. Mit dieser Eigenschaft sowie einem Wert für  $\tau$ , welcher der Ungleichung (6.17) genügt, folgt aus Satz 3.2 in Giraitis et al. (2000) das Vorliegen von langem Gedächtnis in  $\{z_t\} = \{(|y_t| - \eta y_t)^\delta\}$ .

Für den Prozeß  $\{|y_t|^\delta\}$ , welcher in Asymmetrischen Power-GARCH-Modellen die bedingten Volatilitäten repräsentiert, kann jedoch daraus zunächst keine Aussage abgeleitet werden. Aussagen über die Autokovarianz von  $\{|y_t|^\delta\}$  lassen sich nicht sofort auf Aussagen über die Autokovarianz von  $\{z_t\}$  zurückführen, da nach Konstruktion der A-PARCH-Modelle  $(1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_{t-k}))^\delta$  und  $|y_t|^\delta$  mit  $k > 0$  und  $\eta \neq 0$  nicht *st.u.* sind, es gilt also

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_t, z_{t-k}) &= \text{Cov}\left(\left(1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t)\right)^\delta |y_t|^\delta, \left(1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_{t-k})\right)^\delta |y_{t-k}|^\delta\right) \\ &= E\left(\left(1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t)\right)^\delta\right) \cdot \text{Cov}\left(|y_t|^\delta, \left(1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_{t-k})\right)^\delta |y_{t-k}|^\delta\right) \\ &\neq E\left(\left(1 - \eta \cdot \text{sign}(\varepsilon_t)\right)^\delta\right)^2 \cdot \text{Cov}\left(|y_t|^\delta, |y_{t-k}|^\delta\right) . \end{aligned}$$

Es ist zu vermuten, daß durch die Transformation von  $(|y_t| - \eta y_t)^\delta$  zu  $|y_t|^\delta$  die Form der Autokovarianzfunktion für Verzögerungen hoher Ordnung, d.h. das hyperbolische Abfallen, nicht verändert wird. Eine endgültige Antwort auf die Frage nach dem Gedächtnis von  $\{|y_t|^\delta\}$  bleibt jedoch der künftigen Forschung vorbehalten.

Zunächst kann dazu mittels Simulation verschiedener HY-A-PARCH-Prozesse untersucht werden, ob die empirische Autokorrelationsfunktion von  $\{|y_t|^\delta\}$  ein dem langen Gedächtnis entsprechendes Verhalten aufweist. Für das weitere Vorgehen empfiehlt sich die Methode der Appell-Polynome nach Avram, Taqqu (1987), um auf analytischem Wege das Verhalten der Autokovarianzfunktion unter obiger Transformation zu untersuchen.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird die Modellierung von Kapitalmarktrenditen mittels asymmetrischer GARCH-Prozesse betrachtet. Insbesondere werden die Eigenschaften des A-PARCH-Modells sowie seiner Erweiterungen untersucht. Dieses Modell ermöglicht nicht allein die Modellierung von Volatilitätsschwankungen und Hochgipfligkeit wie das GARCH-Modell. Es ist ebenso geeignet, das Charakteristikum der Asymmetrie nachzubilden. Ferner können bedingte Volatilitäten als nichtganzzahlige Potenz vom Absolutbetrag der Beobachtungen beschrieben werden. Langes Gedächtnis in den bedingten Volatilitäten kann durch einen A-PARCH-Prozeß jedoch nicht modelliert werden, da ihre Autokorrelationsfunktion exponentiell und nicht hyperbolisch abfällt.

Bei dem in Kapitel 3 durchgeführten Vergleich von Modellanpassungen für Renditen von Aktienkursdaten weist der A-PARCH-Prozeß mit bedingter  $t$ -Verteilung gegenüber anderen symmetrischen und asymmetrischen GARCH-Prozessen die kleinsten Werte für das Informationskriterium  $SBC$  sowie für das Maß für die Vorhersagegüte MSPE auf. Er wird somit bei der Modellierung von Strukturen dieser Kapitalmarktdaten bevorzugt.

Mittels der in Kapitel 3 eingeführten symmetrischen und asymmetrischen GARCH-Modelle wird die Hebelwirkungshypothese als mögliche Ursache für Asymmetrie in Kapitalmarktdaten untersucht. Unter anderem wird dabei für Modellanpassungen an Renditen von Aktien- und Wechselkursdaten sowie Edelmetallpreisen und Zinssätzen der Wert für  $SBC$  betrachtet. Die jeweilige Bevorzugung von symmetrischen bzw. asymmetrischen Modellen für die Anpassung an die beschriebenen Kapitalmarktrenditen stützt die Plausibilität der Hebelwirkungshypothese. Obwohl es auch weiterhin keine endgültige Aussage über die Gültigkeit dieser Hypothese gibt, sollte ihr bei der Modellauswahl, d.h. symmetrischer gegenüber asymmetrischem Ansatz, Rechnung getragen werden. Asymmetrische Modelle sollten demnach nur für Daten verwendet werden, für die das Zugrundeliegen einer Hebelwirkung sinnvoll ist.

Um langes Gedächtnis als Eigenschaft von Kapitalmarktrenditen nachzubilden zu können, gibt es verschiedene Erweiterungen des ursprünglichen GARCH-Ansatzes. In der vorliegenden Arbeit wird das FI-A-PARCH-Modell sowie



sein Spezialfall FIGARCH betrachtet. Diese ergeben sich aus A-PARCH- bzw. GARCH-Modellen durch geeignetes Hinzufügen des fraktionalen Differenzoperators  $(1 - B)^d$ . Zur praktischen Umsetzung dieser Modelle ist jedoch eine Abschätzung dieses Operators mittels binomischer Reihe notwendig. Über die in dieser Abschätzung zu verwendende Anzahl von Beobachtungen gibt es jedoch bisher kaum konkrete Aussagen. Daher werden Parameterschätzungen in FI-A-PARCH-Modellen in Abhängigkeit von dieser Beobachtungszahl betrachtet. Es kann festgestellt werden, daß sich die Werte der Schätzungen für die vorliegenden Modellanpassungen etwa ab einem Wert von 300 Beobachtungen stabilisieren. Basierend auf diesem Ergebnis wird empfohlen, für ähnliche Probleme eine Anzahl von ca. 300 Beobachtungen für die Abschätzung von  $(1 - B)^d$  zu verwenden.

Obwohl der FI-A-PARCH-Prozeß zur Modellierung von langem Gedächtnis entwickelt wurde, besitzen seine bedingten Volatilitäten nicht die Eigenschaft langen Gedächtnisses in dem Sinne, daß die Autokorrelationsfunktion hyperbolisch fällt. Da die zweiten Momente analog zu denen des FIGARCH-Prozesses unendlich sind, existiert die betrachtete Autokorrelationsfunktion nicht. In einem weiteren Vergleich von Modellanpassungen nach MSPE wird der FI-A-PARCH-Prozeß mit bedingter  $t$ -Verteilung zwar nicht in jedem Fall bevorzugt, er erzielt jedoch jeweils die kleinsten Werte für  $SBC$  und kann somit als sinnvolle Ergänzung der zuvor vorgestellten Modelle angesehen werden.

Ein Modell, welches die Nachbildung von langem Gedächtnis in den bedingten Volatilitäten ermöglicht, ist das Hyperbolische GARCH-Modell. Jedoch kann damit keine Asymmetrie beschrieben werden. Analog zur Herleitung des HYGARCH-Modells wird daher in der vorliegenden Arbeit das A-PARCH-Modell zum Hyperbolischen A-PARCH-Modell erweitert. Eigenschaften dieses Modells können unter anderem mittels Volterra-Reihenentwicklung von Asymmetrischen Power-GARCH-Modellen hergeleitet werden. Die Existenz der zweiten Momente wird gezeigt sowie die dazu notwendigen Bedingungen hergeleitet. Weiterhin kann das Vorliegen von langem Gedächtnis in  $\{|y_t| - \eta y_t\}^\delta$  nachgewiesen werden. Für den Prozeß  $\{|y_t|^\delta\}$ , welcher die bedingten Volatilitäten repräsentiert, kann daraus zunächst jedoch keine Aussage über die Autokorrelationsstruktur abgeleitet werden. Das HY-A-PARCH-Modell ermöglicht also die Beschreibung der Charakteristika Volatilitätsschwankungen, Hochgipfligkeit und Asymmetrie sowie das

Vorliegen von langem Gedächtnis zumindest für eine Transformation der bedingten Volatilitäten.

Der Nachweis von langem Gedächtnis in der Reihe  $\{|y_t|^\delta\}$  von HY-A-PARCH-Prozessen bleibt somit zunächst der künftigen Forschung vorbehalten. Als Ansatz zur Lösung dieses Problems wird die Methode der Appell-Polynome nach Avram, Taqqu (1987) vorgeschlagen. Geplant ist weiterhin, das HY-A-PARCH-Modell im Rahmen eines der erwähnten statistischen Programmpakete zu implementieren, um Modellanpassungen sowie Vergleiche mit anderen GARCH-Modellen zu ermöglichen.

Analog zur Untersuchung der FIGARCH-Prozesse in Maheu (2002) bietet sich als weiterer Gegenstand künftiger Forschung die empirische Autokorrelationsfunktion quadrierter Beobachtungen von FI-A-PARCH-Prozessen an, da diese unendliche unbedingte zweite Momente besitzen und somit die Autokorrelationsfunktion der bedingten Volatilitäten nicht definiert ist.

## Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

ARMA-Modell	autoregressives Moving-Average-Modell
GARCH-Modell	verallgemeinertes autoregressives bedingt heteroskedastisches Modell
MSPE	mittlerer quadratischer Prognosefehler
$SBC$	Bayes-Informationskriterium nach Schwarz
$st.u.$	stochastisch unabhängig
$u.i.v.$	(stochastisch) unabhängig identisch verteilt
$\mathbf{0}_{r \times s}$	- Nullmatrix der Dimension $r \times s$
$\alpha_i$	- Parameter des ARCH-Anteils von GARCH- und ARCH-Prozessen
$\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$	- Schätzungen für $\alpha_1$ bzw. $\beta_1$
$\beta_i$	- Parameter des GARCH-Anteils von GARCH-Prozessen
$\Gamma(\cdot)$	- Gamma-Funktion
$\varepsilon_t$	- $u.i.v.$ Zufallsvariable zum Zeitpunkt $t$ ( $\{\varepsilon_t\}$ ist „Weißes Rauschen“)
$\kappa(\cdot)$	- Wölbung
$\rho_i(\cdot)$	- Autokorrelation $i$ -ten Grades
$\sigma_t^2$	- zeitabhängiger Anteil an der bedingten Varianz von ARCH- und GARCH-Prozessen zu Zeitpunkt $t$
$\psi_t$	- Information über alle Werte der Reihe $\{y_t\}$ bis zum Zeitpunkt $t$ (einschließlich)
$E(\cdot)$	- Erwartungswert
$\mathbf{I}_{r \times r}$	- Einheitsmatrix der Dimension $r \times r$
$L(\cdot)$	- Likelihood-Funktion
$\ell(\cdot)$	- Log-Likelihood-Funktion
$\mathbb{N}$	- Menge der natürlichen Zahlen
$n$	- Anzahl der Freiheitsgrade der $t$ -Verteilung
$\mathcal{P}_{0,1}$	- Verteilung oder Verteilungsfamilie mit Erwartungswert 0 und Varianz 1
$\mathbb{R}$	- Menge der reellen Zahlen
$S_{\hat{u}_t}^2$	- $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$
$T$	- Länge einer Zeitreihe
$\hat{u}_t$	- standardisiertes Residuum ( $\hat{u}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$ )
$\text{Var}(\cdot)$	- Varianz
$\{y_t\}$	- stochastischer Prozeß oder Reihe von Werten von $y_t$ ( $t \in \mathbb{Z}$ )
$\mathbb{Z}$	- Menge der ganzen Zahlen

## Literaturverzeichnis

- [1] **Akaike, H.** (1978): “On the Likelihood of a Time Series Model”, *Statistician* 27, 217–236.
- [2] **Avram, F., Taqqu, M. S.** (1987): “Noncentral Limit Theorems and Appell Polynomials”, *Annals of Probability* 15, 767–775.
- [3] **Baillie, R. T.** (1996): “Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics”, *Journal of Econometrics* 73, 5–59.
- [4] **Baillie, R. T., Bollerslev, T., Mikkelsen, H. O.** (1996): “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics* 74, 3–30.
- [5] **Bera, A., Higgins, M. L.** (1993): “On ARCH Models: Properties, Estimation and Testing”, *Journal of Economic Surveys* 7, 305–366.
- [6] **Berndt, E., Hall, B., Hall, R., Hausman, J.** (1974): “Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models”, *Annals of Economic and Social Measurement* 3, 653–665.
- [7] **Black, F.** (1976): “Studies of Stock Price Volatility Changes”, in: *1976 Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 177–181.
- [8] **Bollerslev, T.** (1986): “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”, *Journal of Econometrics* 31, 307–327.
- [9] **Bollerslev, T.** (1987): “A Conditionally Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return”, *Review of Economics and Statistics* 69, 542–547.
- [10] **Bollerslev, T., Wooldridge, J. M.** (1992): “Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances”, *Econometric Reviews* 11, 143–172.
- [11] **Bougerol, P., Picard, N.** (1992): “Stationarity of GARCH Processes and of Some Nonnegative Time Series”, *Journal of Econometrics* 52, 115–127.

- [12] **Brockwell, P. J., Davis, R. A.** (1991): *Time Series: Theory and Methods*, 2. Aufl., Springer, New York.
- [13] **Campbell, J. Y., Hentschel, L.** (1992): “No News is Good News. An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns”, *Journal of Financial Economics* 31, 281–318.
- [14] **Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C.** (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, University Press, Princeton.
- [15] **Christie, A.** (1982): “The Stochastic Behaviour of Common Stock Variances: Values, Leverage and Interest Rate Effects”, *Journal of Financial Economics* 10, 15–36.
- [16] **Davidson, J.** (2002): “Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroscedasticity Models”, Discussion paper, Cardiff University.
- [17] **Davis, R. A., Mikosch, T.** (1998): “Limit Theory for the Sample ACF of a Stationary Process with Heavy Tails with Applications to ARCH”, *Annals of Statistics* 26, 2049–2080.
- [18] **Ding, Z., Granger, C. W. J., Engle, R. F.** (1993): “A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model”, *Journal of Empirical Finance* 1, 83–106.
- [19] **Doornik, J. A., Ooms, M.** (2001): “Multimodality and the GARCH Likelihood”, Working Paper 76, Series Computing in Economics and Finance 2001 of the Society for Computational Economics.
- [20] **Duffee, G. R.** (1995): “Stock Returns and Volatility: A Firm-Level Analysis”, *Journal of Financial Economics* 52, 399–420.
- [21] **Engle, R. F.** (1982): “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation”, *Econometrica* 50, 987–1008.
- [22] **Figlewski, S., Wang, X.** (2000): “Is the ‘Leverage Effect’ a Leverage Effect?”, Working Paper 00-37, New York University - Salomon Center.
- [23] **Fiorentini, G., Calzolari, G., Panattoni, L.** (1996): “Analytic derivatives and the computation of GARCH estimates”, *Journal of Applied Econometrics* 11, 399–417.

- [24] **Fornari, F., Mele, A.** (1996): “Modelling the Changing Asymmetry of Conditional Variances”, *Economic Letters* 50, 197–203.
- [25] **Franke, J., Härdle, W., Hafner, W.** (2001): *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*, Springer, Berlin.
- [26] **Giraitis, L., Kokoszka, P., Leipus, R.** (2000): “Stationary ARCH Models: Dependence Structure and Central Limit Theorem”, *Econometric Theory* 16, 3–22.
- [27] **Glosten, L. R., Jagannathan, R., Runkle, D. E.** (1993): “On the Relation between Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks”, *Journal of Finance* 48, 1779–1801.
- [28] **Goldfarb, D.** (1976): “Factorized Variable Metric Methods for Unconstrained Optimization”, *Mathematics of Computation* 30, 796–811.
- [29] **Granger, C. W. J., Joyeux, R.** (1980): “An Introduction to Long-Range Time Series Models and Fractional Differencing”, *Journal of Time Series Analysis* 1, 15–30.
- [30] **Hagerud, G. E.** (1996): “A Smooth Transition ARCH Model for Asset Returns”, Working Paper 162, Stockholm School of Economics.
- [31] **Hagerud, G. E.** (1997): “Modeling Nordic Stock Returns with Asymmetric GARCH Models”, Working Paper 164, Stockholm School of Economics.
- [32] **Haßler, U.** (1993): *Fraktional integrierte Prozesse in der Ökonometrie*, Haag + Herchen, Frankfurt/M.
- [33] **Hannan, E. J., Quinn, B. G.** (1979): “The Determination of the Order of an Autoregression”, *Journal of the Royal Statistical Society (Ser. B)* 41, 190–195.
- [34] **Hansen, P. R., Lunde, A.** (2001): “A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?”, Working Paper 01-04, Brown University - Department of Economics.
- [35] **He, C., Teräsvirta, T.** (1999a): “Fourth Moment Structure of the GARCH( $p, q$ ) Process”, *Econometric Theory* 15, 824–846.

- [36] **He, C., Teräsvirta, T.** (1999b): “Properties of Moments of a Family of GARCH Processes”, *Journal of Econometrics* 92, 173–192.
- [37] **He, C., Teräsvirta, T.** (1999c): “Statistical Properties of the Asymmetric Power ARCH Process”, in: Engle, R. F., White, H. [Hrsg.], *Cointegration, Causality, and Forecasting. Festschrift in Honour of Clive W.J. Granger*, University Press, Oxford, 462–474.
- [38] **Higgins, M. L., Bera, A. K.** (1992): “A Class of Nonlinear ARCH Models”, *International Economic Review* 33, 137–158.
- [39] **Hosking, J. R. M.** (1981): “Fractional Differencing”, *Biometrika* 68, 165–176.
- [40] **Hurst, H.** (1951): “Long-Term Storage Capacity of Reservoirs”, *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 116, 778–808.
- [41] **Hurvich, C. M., Deo, R. S.** (1999): “Plug-in Selection of the Number of Frequencies in Regression Estimates of the Memory Parameter of a Long-Memory Time Series”, *Journal of Time Series Analysis* 20, 331–341.
- [42] **Karanasos, M.** (1999): “The Second Moment and the Autocovariance Function of the Squared Errors of the GARCH Model”, *Journal of Econometrics* 90, 63–76.
- [43] **Krämer, W., Runde, R.** (1998): “Diagnostic Checking in Linear Processes with Infinite Variance”, Technical Report 8, SFB 475.
- [44] **Krämer, W., Sibbertsen, P., Kleiber, C.** (2002): “Long Memory vs. Structural Change in Financial Time Series”, *Allgemeines Statistisches Archiv* 86, 83–96.
- [45] **Lambert, P., Laurent, S.** (2001): “Using GARCH-Type Models with a Skewed Student Distribution for the Innovations”, Discussion Paper 0125, Université Catholique de Louvain - Institut de Statistique.
- [46] **Laurent, S., Peters, J. P.** (2002): “G@RCH 2.2: an Ox Package for Estimating and Forecasting Various ARCH Models”, *Journal of Economic Surveys* 16(3), 447–485.

- [47] **Ling, S., McAleer, M.** (2002): “Necessary and Sufficient Moment Conditions for the GARCH( $r, s$ ) and Asymmetric Power GARCH( $r, s$ ) Models”, *Econometric Theory* 18, 722–729.
- [48] **Lombardi, M. J., Gallo, G. M.** (2002): “Analytic Hessian Matrices and the Computation of FIGARCH Estimates”, Working Paper 2002/03, Università di Firenze - Dipartimento di Statistica.
- [49] **Maheu, J. M.** (2002): “Can GARCH Models Capture the Long-Range Dependence in Financial Market Volatility?”, Working paper, University of Toronto - Department of Economics.
- [50] **McCulloch, J. H.** (1996): “Financial Applications of Stable Distributions”, in: Maddala, G. S., Rao, C. R. [Hrsg.], *Handbook of Statistics, Vol. 14*, North-Holland/Elsevier, Amsterdam, 393–425.
- [51] **McKenzie, M., Mitchell, H., Brooks, R., Faff, R. W.** (2001): “Power ARCH Modelling of Commodity Futures Data on the London Metal Exchange”, *European Journal of Finance* 7, 22–38.
- [52] **McLeod, A. I., Li, W. K.** (1983): “Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations”, *Journal of Time Series Analysis* 4, 269–273.
- [53] **Mikosch, T., Stărică, C.** (2000): “Limit Theory for the Sample Autocorrelations and Extremes of a GARCH(1,1) Process”, *Annals of Statistics* 28, 1427–1451.
- [54] **Nelson, D. B.** (1991): “Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: a new Approach”, *Econometrica* 59, 347–370.
- [55] **Nelson, D. B., Cao, C. Q.** (1992): “Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model”, *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 229–235.
- [56] **Níguez, T.-M.** (2002): “Modelling Daily Value-at-Risk using FIGARCH Type Models”, Working paper, University of Alicante - Department of Quantitative Economics.



- [57] **Paolella, M. S.** (1998): *Tail Estimation and Conditional Modelling of Heteroscedastic Time-Series*, Pro Business, Berlin.
- [58] **Peters, J.-P.** (2001): “Estimating and Forecasting Volatility of Stock Indices using Asymmetric GARCH Models and (Skewed) Student- $t$ ”, Working paper, Université de Liège - Ecole d’Administration des Affaires.
- [59] **Polasek, W.** (1999): *The BASEL Package: A Bayesian Sampling Environment Language*, Universität Basel, Basel.
- [60] **Priestley, M. B.** (1988): *Non-Linear and Non-Stationary Time Series Analysis*, Academic, New York.
- [61] **Randles, R. H., Wolfe, D. A.** (1979): *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics*, Wiley, New York.
- [62] **Schlittgen, R., Streitberg, B. H. J.** (1997): *Zeitreihenanalyse*, 7. Aufl., Oldenbourg, München.
- [63] **Schwarz, G.** (1978): “Estimating the Dimension of a Model”, *Annals of Statistics* 6, 461–464.
- [64] **Schwert, G. W.** (1989): “Why Does Stock Volatility Change Over Time?”, *Journal of Finance* 44, 1115–1153.
- [65] **Sentana, E.** (1995): “Quadratic ARCH Models”, *Review of Economic Studies* 62, 639–661.
- [66] **Sibbertsen, P.** (2003): “Long-Memory in Volatilities of German Stock Returns”, erscheint in: *Empirical Economics*.
- [67] **Stier, W.** (2001): *Methoden der Zeitreihenanalyse*, Springer, Berlin.
- [68] **Taylor, S. J.** (1986): *Modelling Financial Time Series*, Wiley, New York.
- [69] **Teräsvirta, T.** (1996): “Two Stylized Facts and the GARCH(1,1) Model”, Working Paper 96, Stockholm School of Economics.
- [70] **Tse, Y. K.** (1998): “The Conditional Heteroscedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate”, *Journal of Applied Econometrics* 13, 49–55.
- [71] **Zakoïan, J.-M.** (1994): “Threshold Heteroscedastic Models”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 18, 931–955.

# Anhang

## A Strenge Stationarität von GARCH-Modellen

Nachfolgend wird die Bedingung für die strenge Stationarität eines GARCH-Prozesses wie in Bougerol, Picard (1992) nachvollzogen. Zunächst wird dazu die Definition des größten Ljapunow-Exponenten benötigt.

Der größte Ljapunow-Exponent einer Reihe von *u.i.v.* Zufallsmatrizen  $\{\mathbf{A}_j, j \in \mathbf{Z}\}$  ist gegeben als

$$\gamma = \inf_{j \in \mathbb{N}} \left\{ E \left( \frac{1}{j+1} \ln(\|\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{-1} \dots \mathbf{A}_{-j}\|) \right) \right\}, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $\|\mathbf{A}\|$  die Operatornorm für eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^d, \vec{x} \neq 0} \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \right\}$$

darstellt.

Anschließend sei eine Reihe von Zufallsmatrizen  $\{\mathbf{B}_j, j \in \mathbf{Z}\}$  definiert durch

$$\mathbf{B}_j = \left( \begin{array}{c|ccc} \vec{\tau}_j & \beta_p & \vec{\alpha} & \alpha_q \\ \mathbf{I}_{(p-1) \times (p-1)} & & \mathbf{0}_{(p-1) \times q} & \\ \hline \vec{\xi}_j & & \mathbf{0}_{1 \times q} & \\ \mathbf{0}_{(q-2) \times (p-1)} & \mathbf{0}_{(q-2) \times 1} & \mathbf{I}_{(q-2) \times (q-2)} & \mathbf{0}_{(q-2) \times 1} \end{array} \right), \quad (\text{A.2})$$

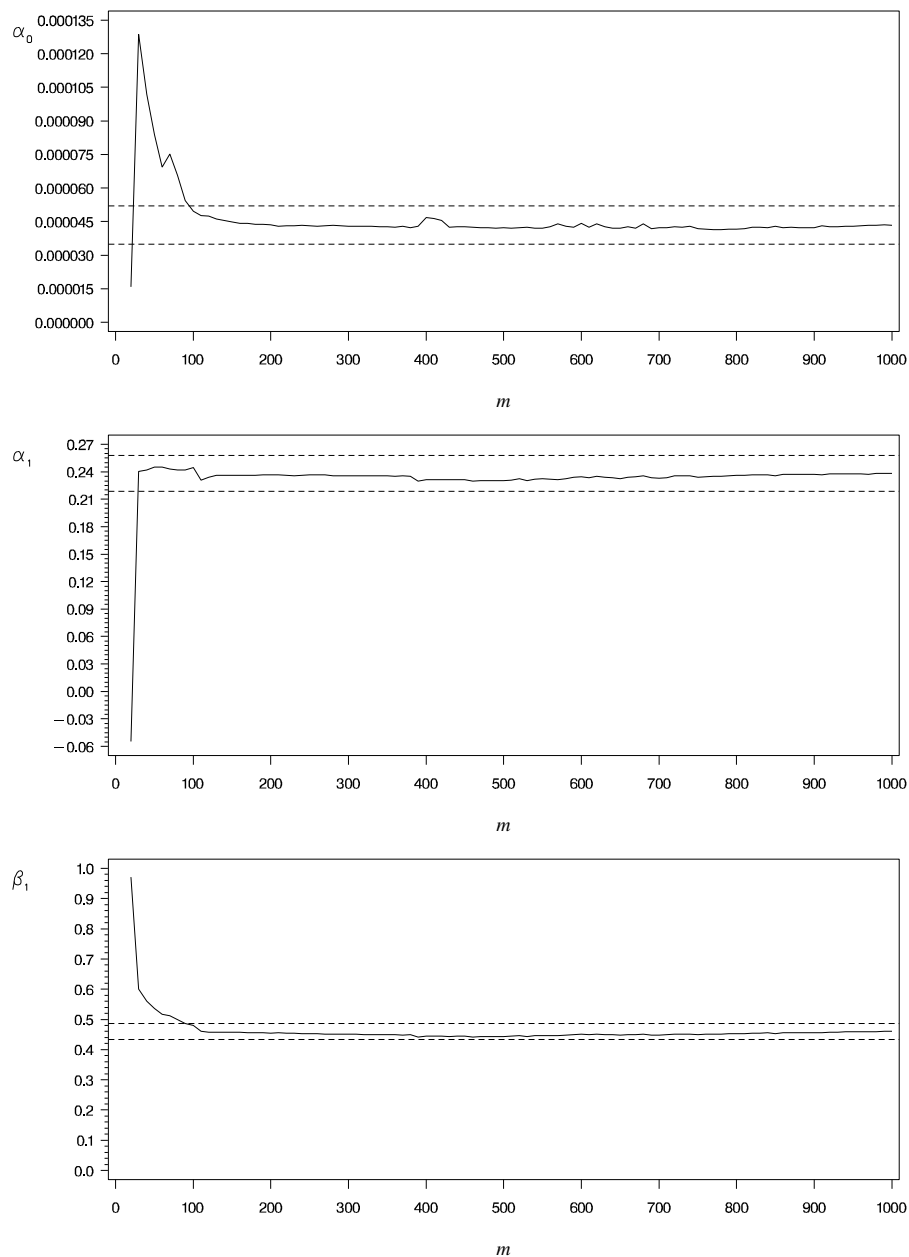
wobei

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_j &= (\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_j^2, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}, \\ \vec{\xi}_j &= (\varepsilon_j^2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{p-1}, \\ \vec{\alpha} &= (\alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-2}. \end{aligned}$$

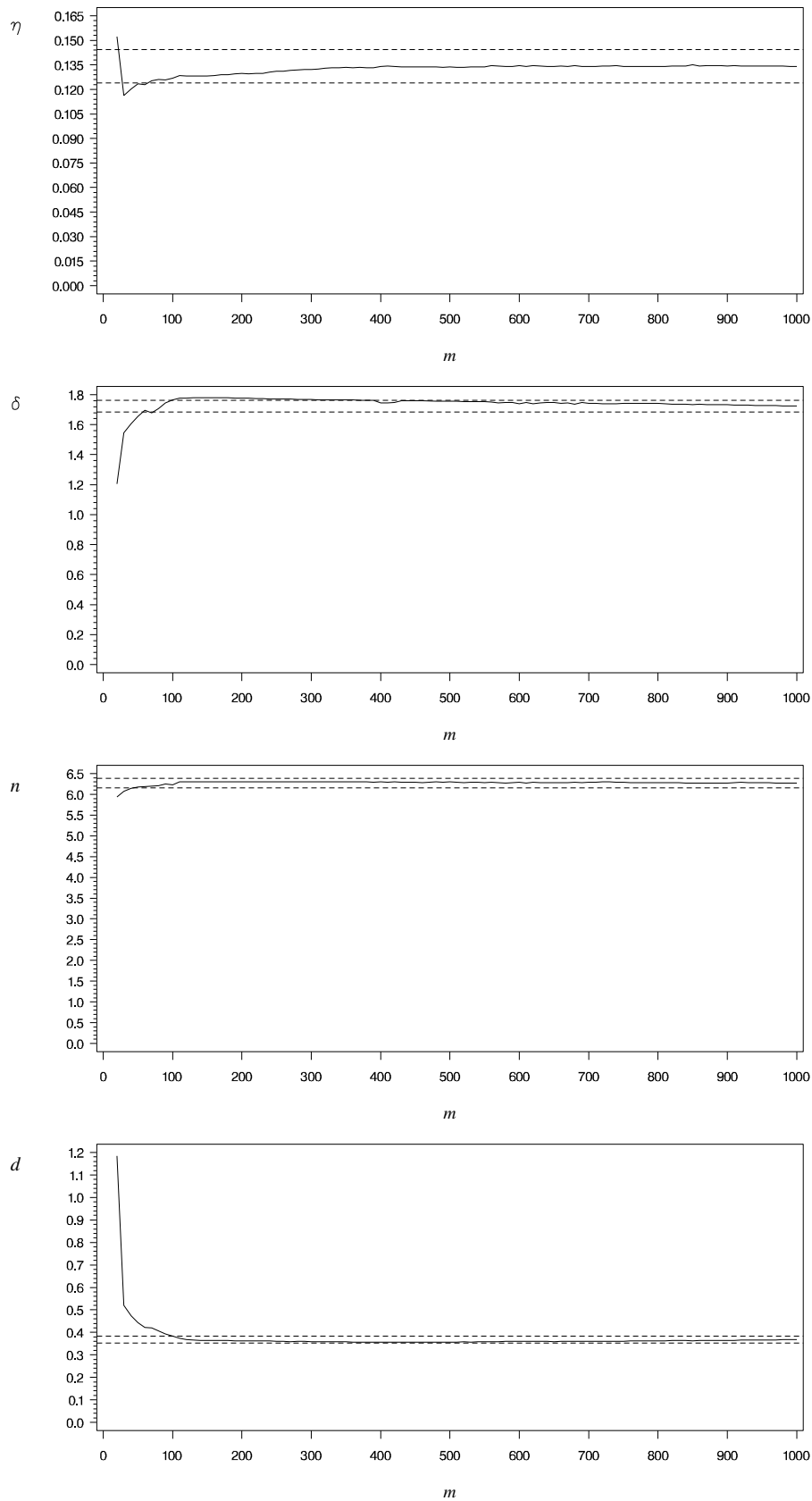
Nach Bougerol, Picard (1992) ist damit ein GARCH-Prozeß mit der Restriktion (2.4) genau dann streng stationär, wenn der größte Ljapunow-Exponent der *u.i.v.* Zufallsmatrizen  $\{\mathbf{B}_j, j \in \mathbf{Z}\}$  negativ ist:

$$\gamma < 1. \quad (\text{A.3})$$

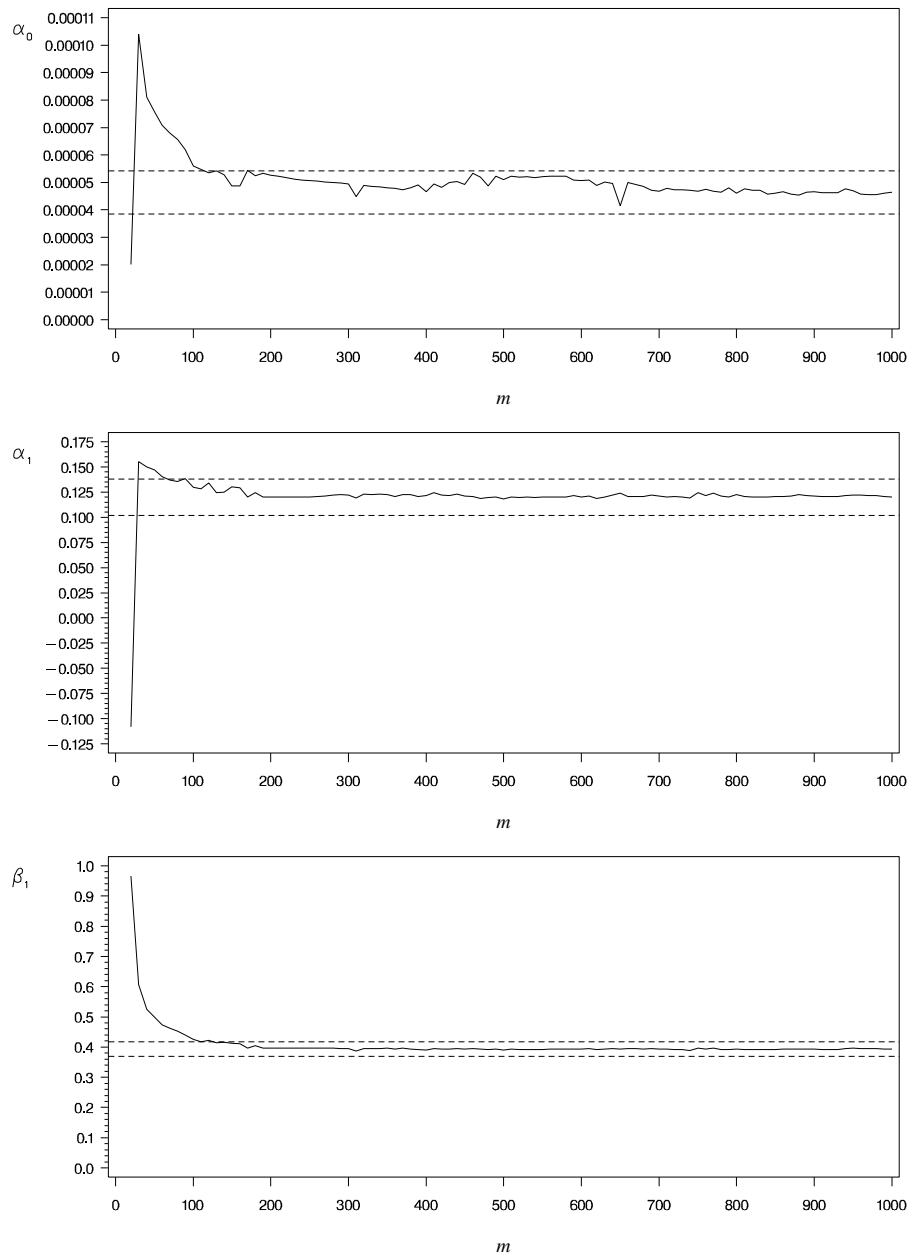
## B Abbildungen



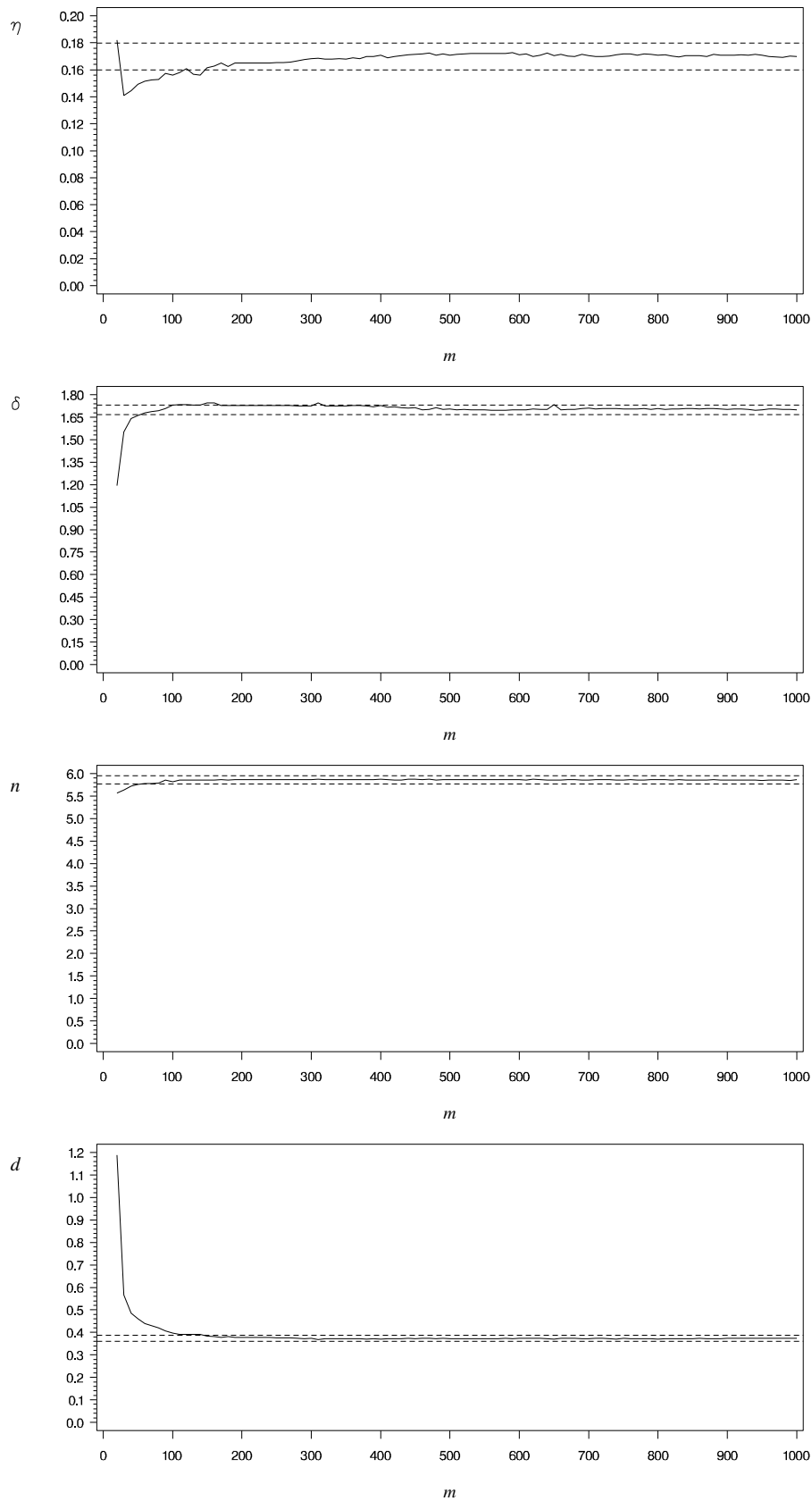
**Abbildung B.1:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Renditen des BASF-Aktienkurses ( $T = 8945$ ) in Abhängigkeit von  $m$



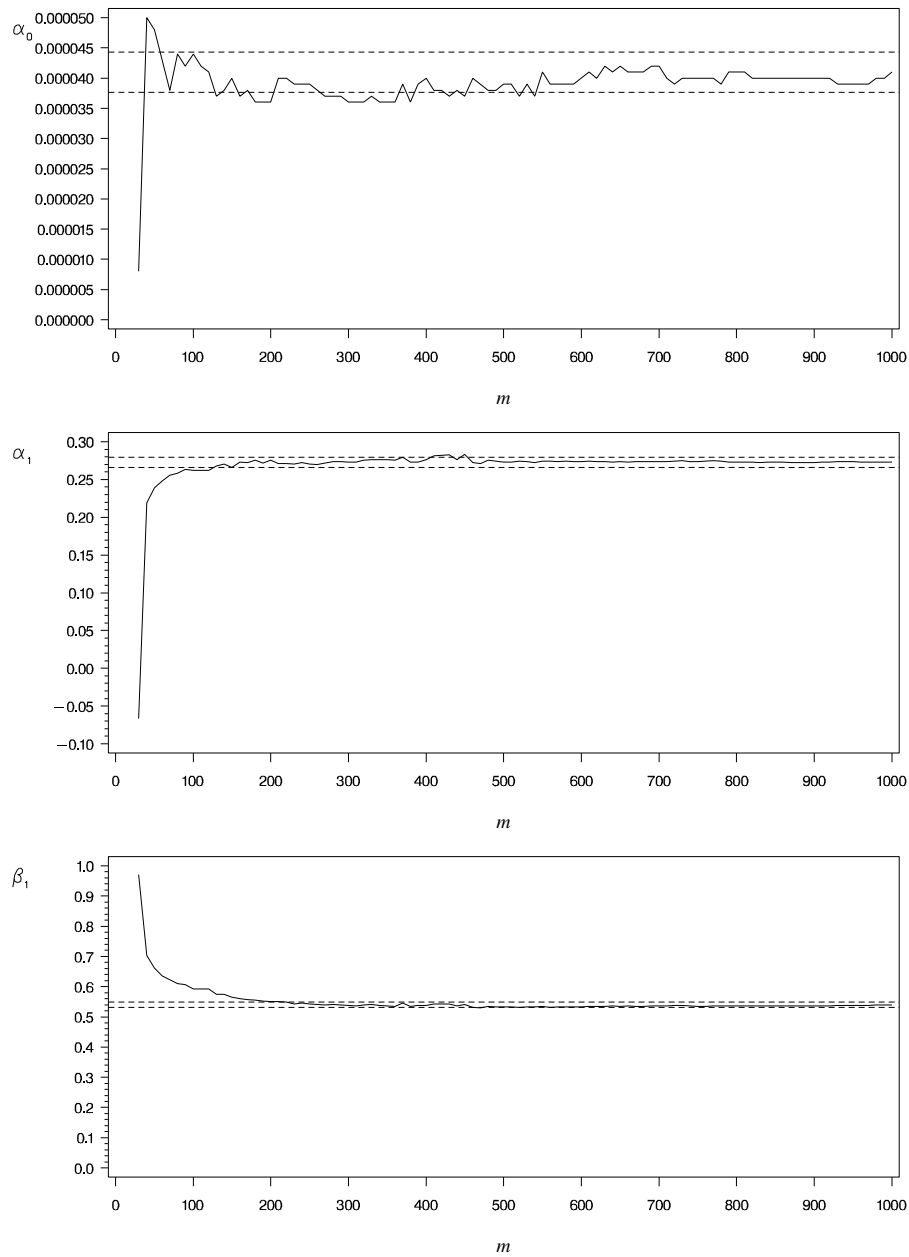
**Abbildung B.2:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\eta$ ,  $\delta$ ,  $n$  (= *d.f.*) und  $d$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Renditen des BASF-Aktienkurses ( $T = 8945$ ) in Abhängigkeit von  $m$



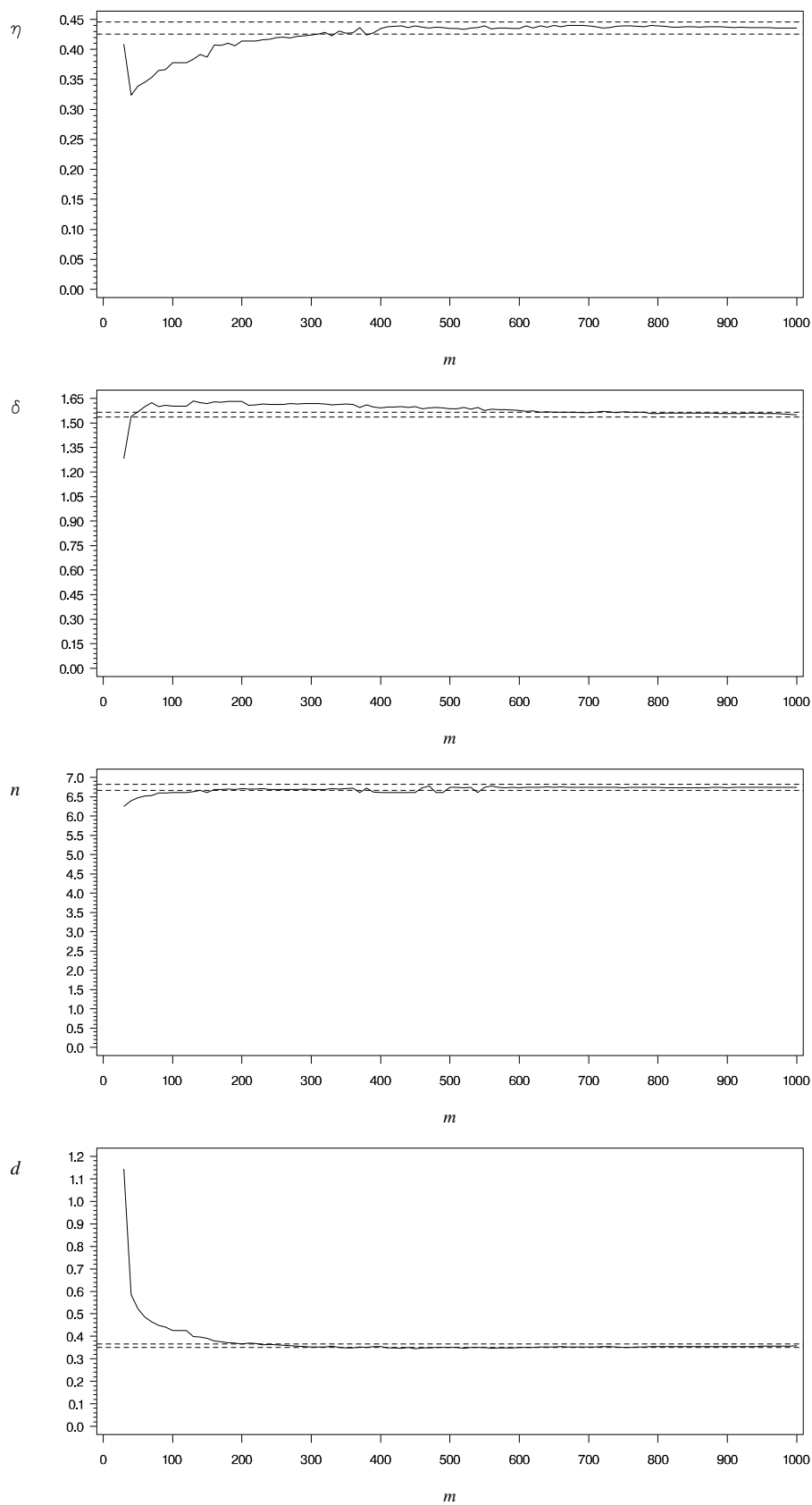
**Abbildung B.3:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Renditen des Siemens-Aktienkurses ( $T = 8945$ ) in Abhängigkeit von  $m$



**Abbildung B.4:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\eta$ ,  $\delta$ ,  $n$  ( $= d.f.$ ) und  $d$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Renditen des Siemens-Aktienkurses ( $T = 8945$ ) in Abhängigkeit von  $m$

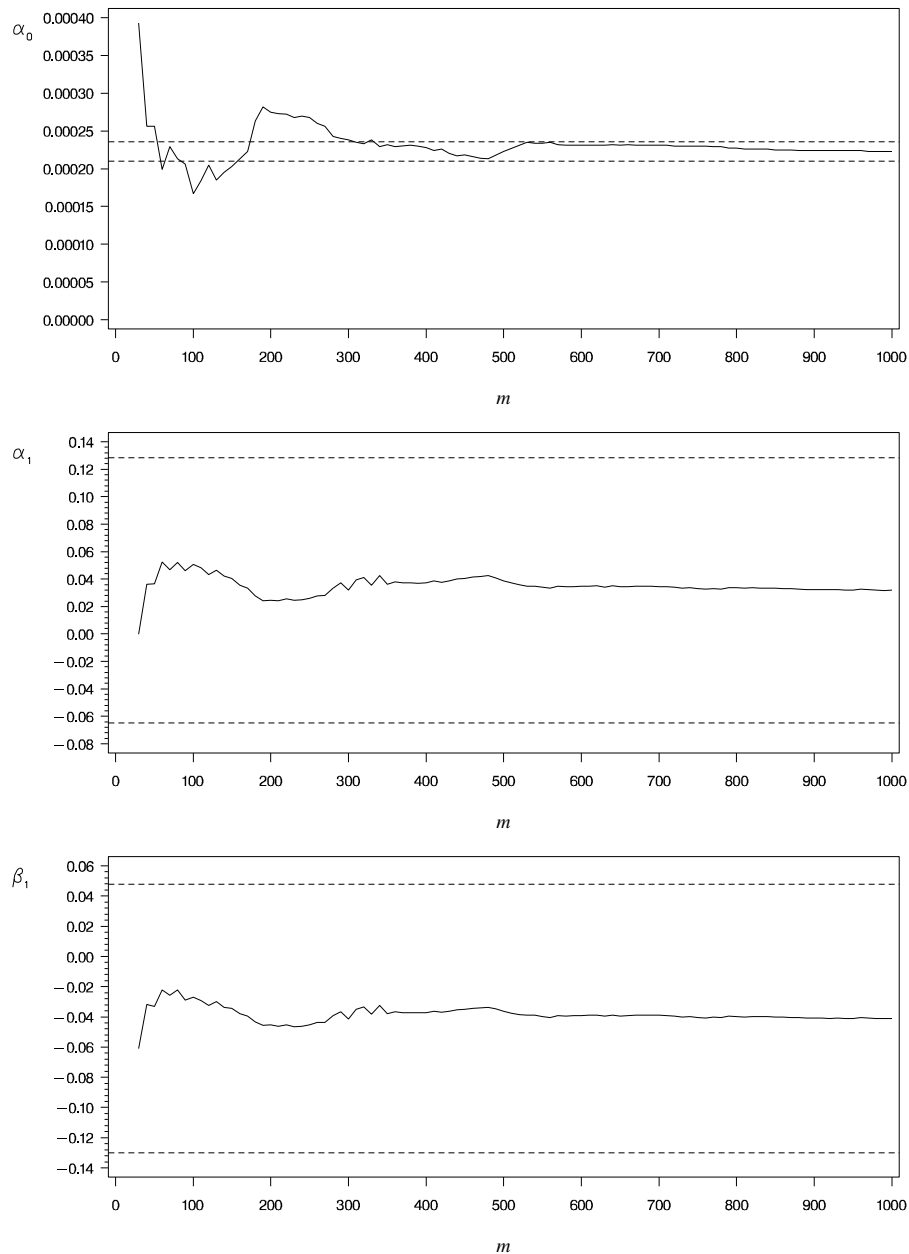


**Abbildung B.5:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Renditen des Dow Jones-Aktienindex ( $T = 26847$ ) in Abhängigkeit von  $m$

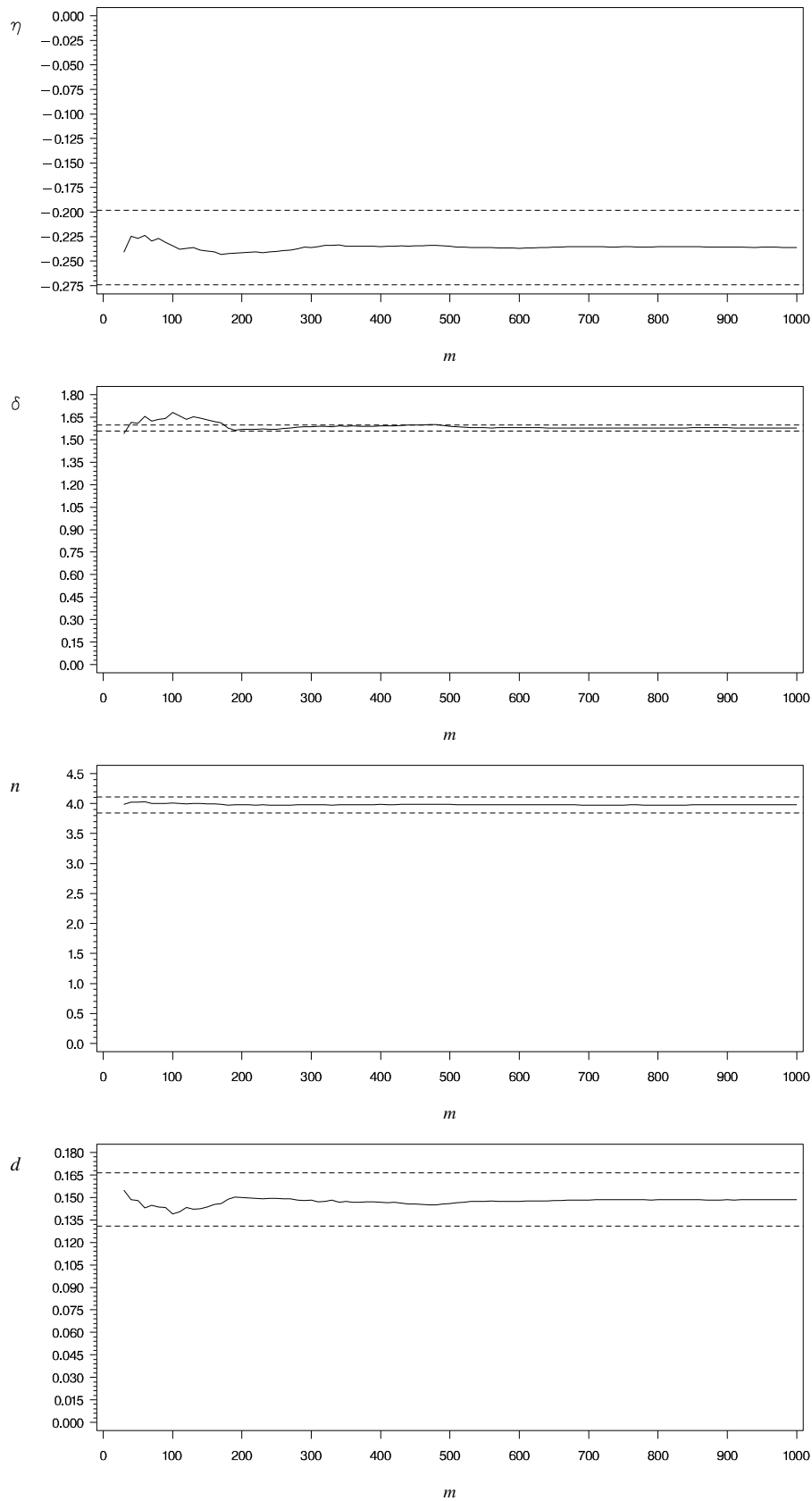


**Abbildung B.6:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\eta$ ,  $\delta$ ,  $n$  ( $= d.f.$ ) und  $d$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Renditen des Dow Jones-Aktienindex ( $T = 26847$ ) in Abhängigkeit von  $m$

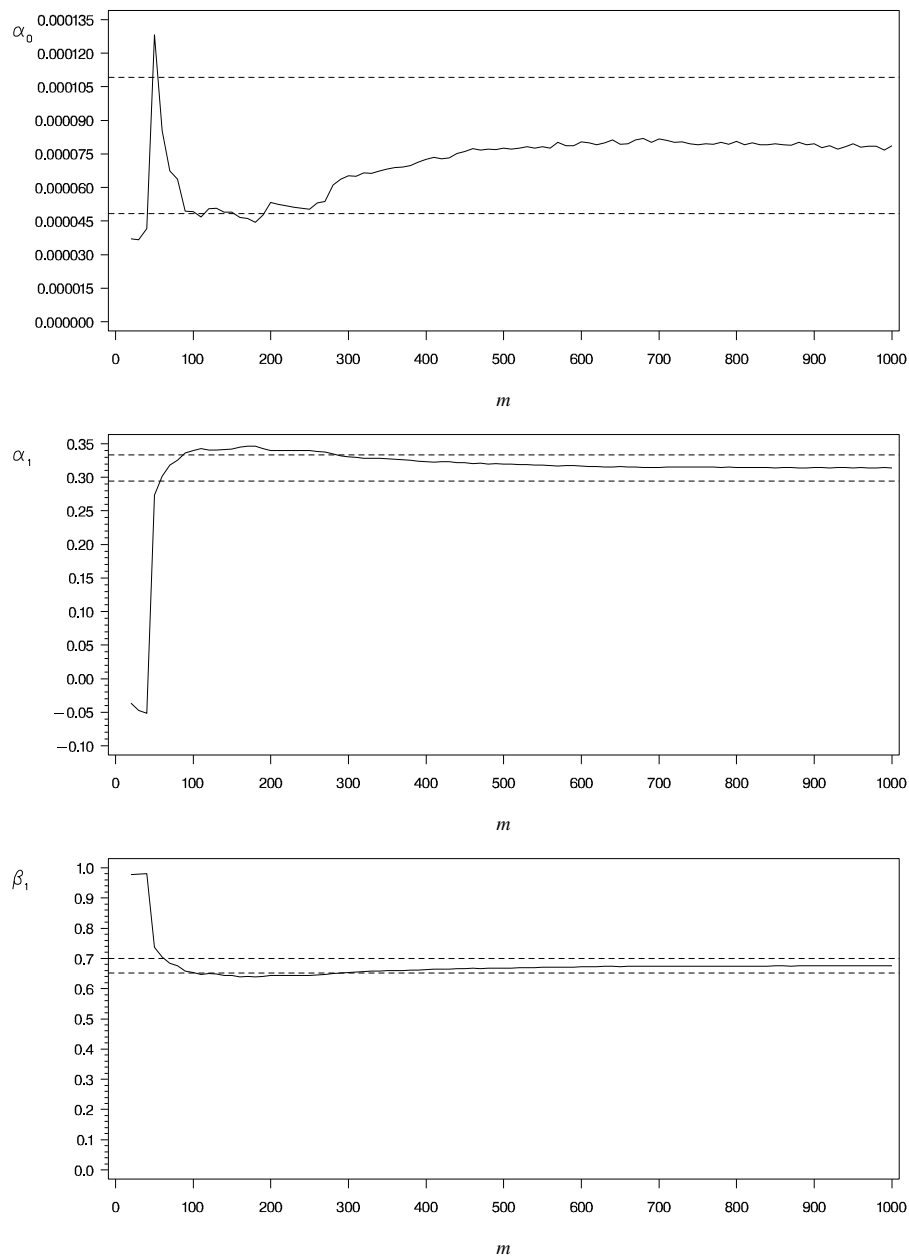




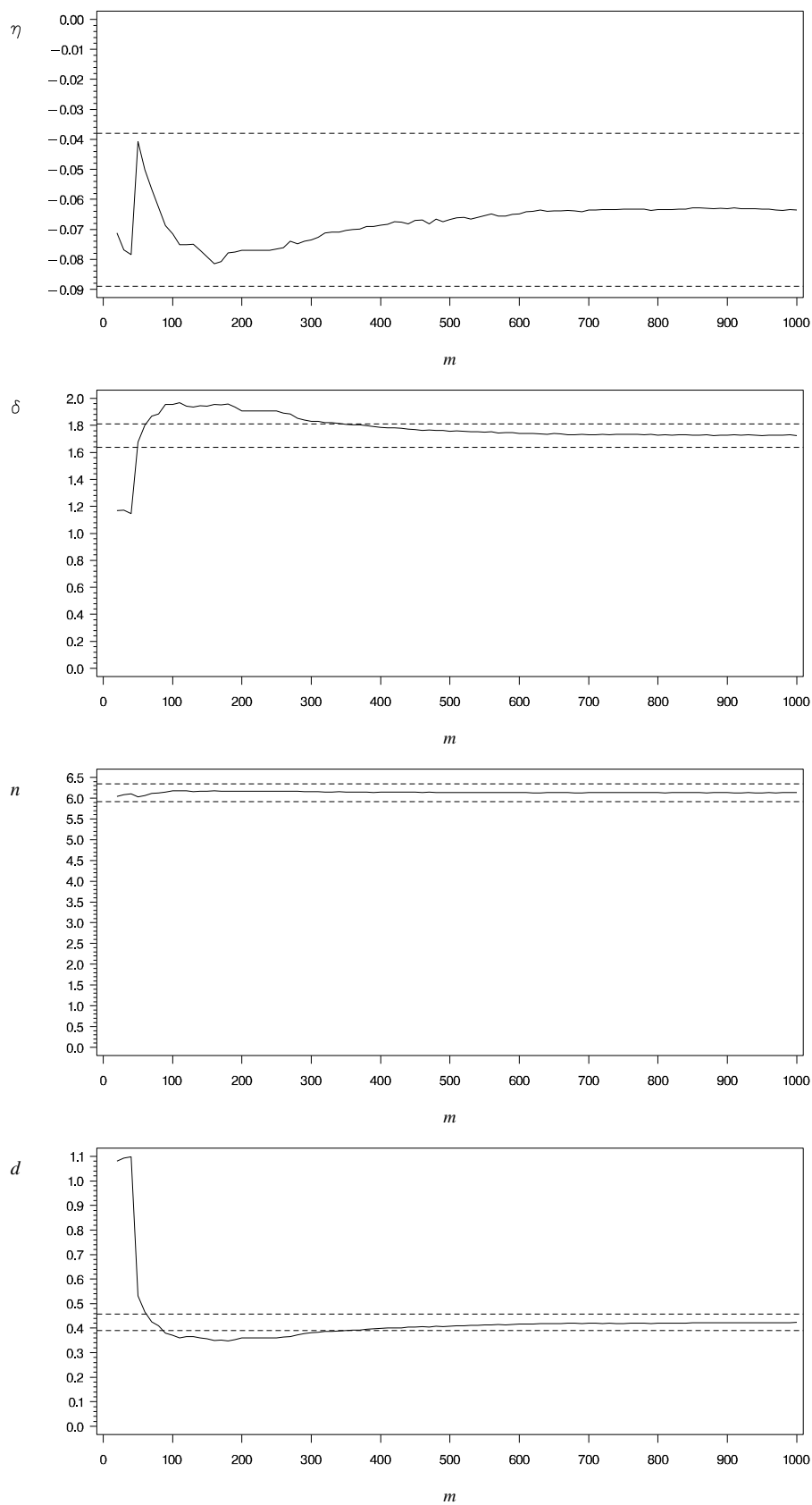
**Abbildung B.7:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Änderungsraten des GBP-USD Wechselkurses ( $T = 1420$ ) in Abhängigkeit von  $m$



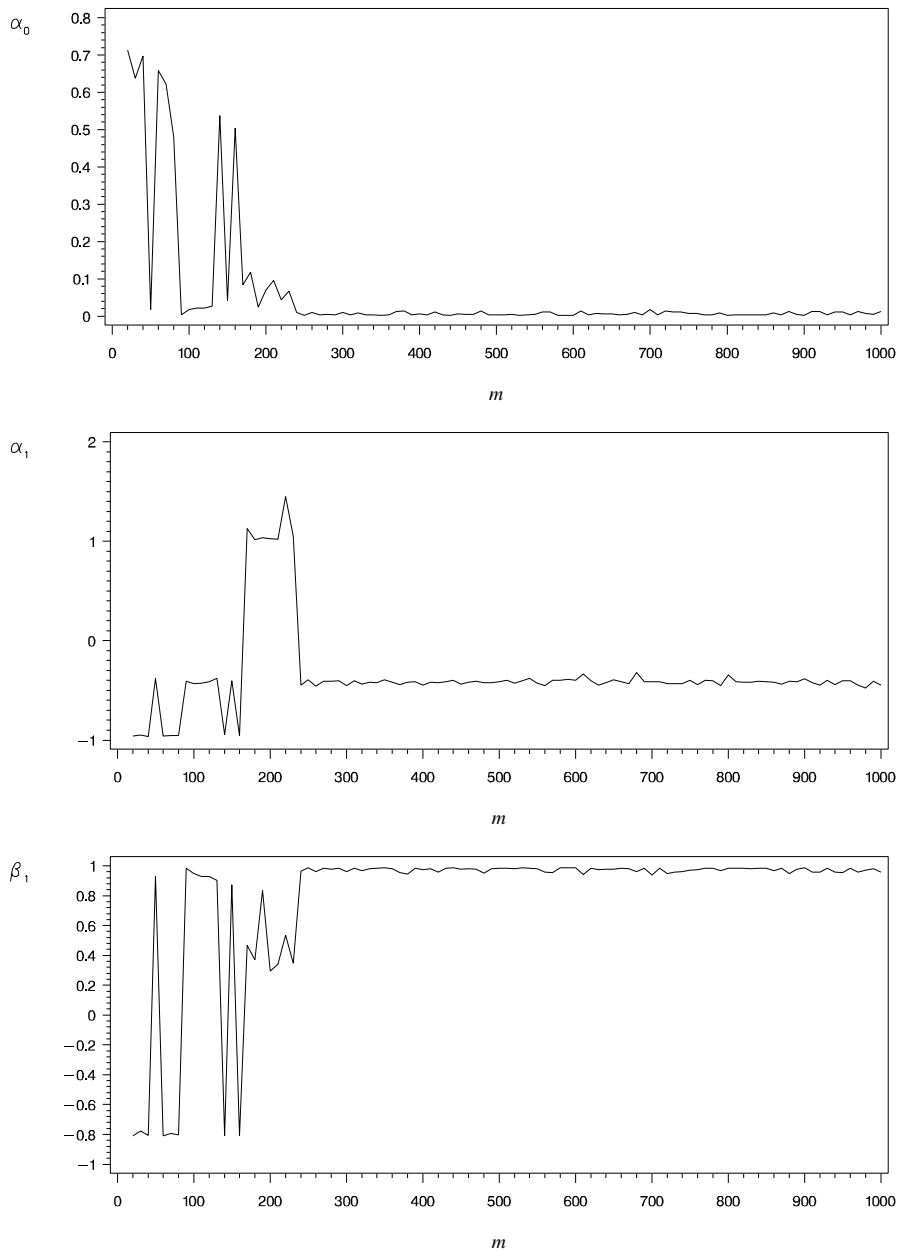
**Abbildung B.8:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\eta$ ,  $\delta$ ,  $n$  ( $= d.f.$ ) und  $d$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Änderungsraten des GBP-USD Wechselkurses ( $T = 1420$ ) in Abhängigkeit von  $m$



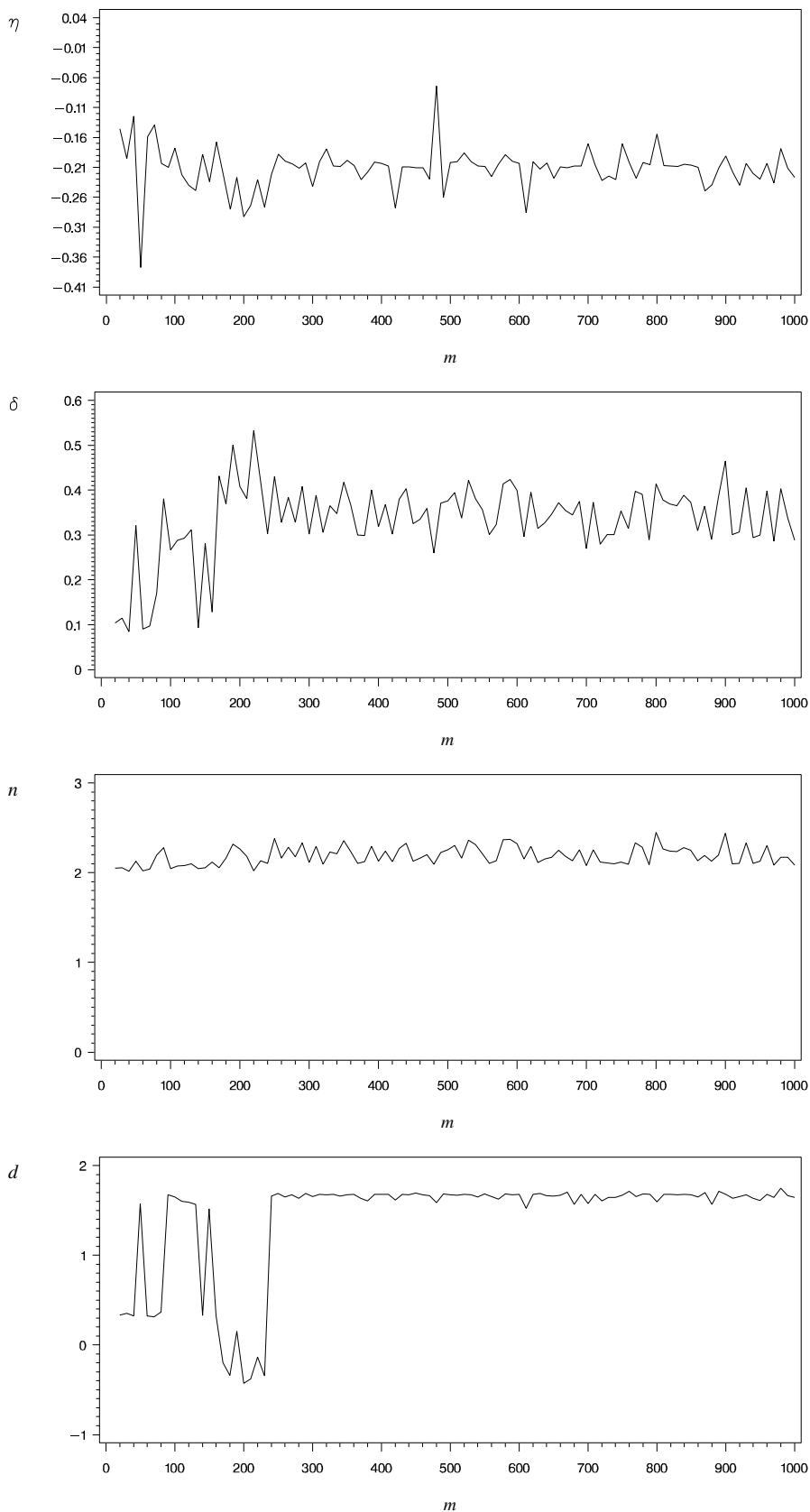
**Abbildung B.9:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Renditen des S&P Gold & Silver Index ( $T = 3018$ ) in Abhängigkeit von  $m$



**Abbildung B.10:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\eta$ ,  $\delta$ ,  $n$  ( $= d.f.$ ) und  $d$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die Renditen des S&P Gold & Silver Index ( $T = 3018$ ) in Abhängigkeit von  $m$



**Abbildung B.11:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die ersten Differenzen des Langfristzinssatzes ( $T = 1354$ ) in Abhängigkeit von  $m$



**Abbildung B.12:** Verlauf der Parameterschätzungen von  $\eta$ ,  $\delta$ ,  $n$  ( $= d.f.$ ) und  $d$  im FI-A-PARCH(1,  $d$ , 1)-Modell für die ersten Differenzen des Langfristzinssatzes ( $T = 1354$ ) in Abhängigkeit von  $m$