



Analyse et optimisation des batteurs dynamiques non linéaires

Fathi Djemal

► **To cite this version:**

Fathi Djemal. Analyse et optimisation des batteurs dynamiques non linéaires. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2015. Français. <NNT : 2015ECAP0007>. <tel-01148497>

HAL Id: tel-01148497

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01148497>

Submitted on 4 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Présentée par **DJEMAL Fathi**

Pour l'obtention du
GRADE DE DOCTEUR

École Doctorale : École Centrale Paris (ED287) \ École Nationale
d'Ingénieurs de Sfax

Spécialité : **Génie Mécanique**

Laboratoire d'accueil : **LISMMA (EA2336) \ LA2MP**

Analyse Et Optimisation Des Batteurs Dynamiques Non Linéaires

Soutenue le : **15/01/2015**

Devant un jury composé de

M. ICHCHOU Mohamed
M. ARGUOUL Pierre
M. CHOUCANE Mnaouar
M. TAWFIQ Imad
M. HADDAR Mohamed
M. DION Jean-Luc
M. CHAARI Fakher
M. RENAUD Franck

Professeur des universités
Maître de Conférences HDR
Professeur des universités
Maître de Conférences

ECL
ENPC
ENIM
SUPMECA
ENIS
SUPMECA
ENIS
SUPMECA

N° 2015ECAP0007

Remerciements

Le travail de recherche exposé dans ce mémoire de thèse a été réalisé en cotutelle entre le Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Productique (LA2MP) à l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Sfax (ENIS- Tunisie) et le Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des Matériaux (LISMMA) à l'institut Supérieur de Mécanique de Paris (SUPMECA- Paris).

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse Monsieur HADDAR Mohamed , Professeur des universités à l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Sfax, et Monsieur TAWFIQ Imad , Professeur des universités à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, pour avoir assuré la direction de mes travaux et pour la qualité de leur encadrement, leurs conseils et la confiance qu'ils m'ont accordée.

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma très vive gratitude à mes encadreurs Monsieur DION Jean-Luc, Maître de conférences HDR à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, et Monsieur CHAARI Fakher Professeur des universités à l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Sfax pour leurs conseils scientifiques, leurs encouragements et la confiance qu'ils m'ont accordée ainsi que pour les discussions scientifiques et les échanges qui nous ont permis de mieux appréhender le sujet de la thèse.

Mes vifs remerciements sont adressés à Monsieur RENAUD Franck, Maître de conférences HDR à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, pour son aide et son encadrement surtout dans la partie expérimentale.

Je remercie Monsieur CHOUCANE Mnaouar, Professeur des universités à L'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, ainsi que Monsieur ARGUOUL Pierre, Professeur des universités à l'École des Ponts Pari-Tech, d'avoir accepté de rapporter mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur ICHCHOU Mohamed, Professeur des universités à l'Ecole centrale de Lyon, pour avoir accepté de prendre part au jury.

Mes sincères remerciements s'adressent à tous les membres de LA2MP et de LISMMA et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à achever ce travail.

Finalement, je tiens à remercier du fond du cœur ma famille sans qui je ne serais jamais arrivé là.

Table des matières

Liste des figures.....	
Liste des tableaux.....	

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

CHAPITRE 1 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction.....	4
1.2 Techniques de contrôle des vibrations en ingénierie mécanique...	4
1.2.1 Systèmes passifs.....	4
1.1.1.1. <i>Amortissement de la structure</i>	5
1.1.1.2. <i>Isolement de la structure</i>	5
1.1.1.3. <i>Déplacement du spectre de vibration</i>	7
1.1.1.4. <i>Etouffement ou absorption de fréquence</i>	7
1.2.2 Systèmes actifs.....	9
1.2.3 Systèmes semi-actifs et adaptatifs.....	11
1.2.4 Contrôle des vibrations grâce à un absorbeur non linéaire.....	11
1.3 Modèles d'absorbeurs de vibration.....	13
1.4 Dispositifs expérimentaux.....	18
1.5 Dynamique des structures non linéaires.....	22
1.5.1 Principales sources de non linéarité en mécanique.....	22

1.6 Méthodes de résolution des systèmes non linéaires et calcul des modes non linéaires.....	23
1.6.1 Méthodes de résolution des systèmes non linéaires.....	23
<i>1.6.1.1. Méthode d'intégration temporelle.....</i>	<i>23</i>
<i>1.6.1.2. Méthode de différences finies.....</i>	<i>23</i>
<i>1.6.1.3. Méthode de Shooting.....</i>	<i>24</i>
<i>1.6.1.4. Méthode de perturbation.....</i>	<i>24</i>
<i>1.6.1.5. Méthode de balance harmonique.....</i>	<i>25</i>
<i>1.6.1.6. Méthode de collocation.....</i>	<i>26</i>
1.6.2 Calcul des modes non linéaires.....	26
<i>1.6.2.1. Approche de Rosenberg.....</i>	<i>27</i>
<i>1.6.2.2. Approche de Shaw et Pierre.....</i>	<i>27</i>
<i>1.6.2.3. Approche 'formes normales'.....</i>	<i>28</i>
1.7 Conclusion.....	29

CHAPITRE 2 : RESOLUTION DE L'EQUATION DE MOUVEMENT NON LINEAIRE

2.1 Introduction.....	30
2.2 Modèle dynamique du système à deux degrés de liberté.....	30
2.3 Méthode de Newton-Raphson.....	33
2.4 Méthode asymptotique numérique.....	36
2.4.1 Introduction.....	36
2.4.2 Forme quadratique.....	36
2.4.3 Algorithme implicite d'ordre élevé.....	37
<i>2.4.3.1. Changement de variable</i>	<i>37</i>
<i>2.4.3.2. Discrétisation en temps</i>	<i>38</i>
<i>2.4.3.3. Technique d'homotopie</i>	<i>39</i>
<i>2.4.3.4. Technique de perturbation</i>	<i>39</i>
2.5 Comparaison des deux méthodes.....	42

2.6	Influence du jeu sur la réponse dynamique calculée par la MAN..	44
1.6.1	Cas d'un grand jeu.....	44
1.6.2	Cas d'un petit jeu.....	45
2.7	Représentation des modes dans l'espace de configuration et de phase..	49
2.7.1	Représentation des modes en fonction du jeu.....	50
2.7.2	Représentation des modes en fonction de l'amplitude d'excitation....	57
2.8	Conclusion.....	61

CHAPITRE 3 : ANALYSE DES MODES NON LINEAIRES

3.1	Introduction.....	62
3.2	Formulation non linéaire.....	62
3.2.1	Introduction.....	62
3.2.2	Formulation des coefficients non linéaires.....	63
3.2.2.1	<i>Fonction décrivant de la rigidité cubique.....</i>	<i>64</i>
3.2.3	Vecteur et matrice non linéaire.....	68
3.3	Formulation explicite des FRFs non linéaires pour des systèmes à multiples degrés de liberté.....	70
3.3.1	Introduction.....	70
3.3.2	Formulation explicite.....	71
3.4	Analyse modale linéaire et modes non linéaires.....	72
3.4.1	Analyse modale linéaire.....	72
3.4.2	Analyse des modes non linéaires.....	74
3.4.2.1	<i>Détermination des valeurs propres non linéaires.....</i>	<i>75</i>
3.4.2.2	<i>Détermination des vecteurs propres non linéaires.....</i>	<i>75</i>
3.4.2.3	<i>Procédure de calcul.....</i>	<i>76</i>
3.5	Étude du système avec absorbeur de vibration non linéaire.....	79
3.5.1	Formulation non linéaire de la force de contact.....	79
3.5.2	Simulation numérique.....	82
3.6	Conclusion.....	89

CHAPITRE 4 : ETUDE EXPERIMENTALE

4.1	Introduction.....	91
4.2	Conception du démonstrateur.....	91
4.3	Description du dispositif expérimental.....	95
4.3.1	Instrumentation.....	95
4.3.2	Mode opératoire.....	96
4.3.3	Interprétation des résultats expérimentaux.....	98
4.3.4	Validation des résultats numériques.....	107
4.4	Conclusion.....	108
	CONCLUSION GENERALE.....	109
	Références bibliographiques.....	
	Publications scientifiques.....	

Liste des figures

Chapitre 1

Figure 1.1. Utilisation de matériaux dissipatifs dans une automobile

Figure 1.2. Suspension d'essieu à ressort à lames avec dissipation par frottement sec entre les lames

Figure 1.3. Schéma d'un amortisseur télescopique à dissipation visqueuse

Figure 1.4. Suspension magnétorhéologique installée sur un pont

Figure 1.5. Absorbeur dynamique accordé de la tour de Taipei 101

Figure 1.6. Absorbeur dynamique installé dans voiture de formule 1

Figure 1.7. Système mécanique classique à deux degrés de liberté

Figure 1.8. Schéma du modèle étudié [Gourc et al., 2011]

Figure 1.9. Système avec un absorbeur de vibration non linéaire [Jordanov et al., 1988]

Figure 1.10. Absorbeur MRE; (a) configuration schématique et (b) photo [Dong et al., 2009]

Figure 1.11. Modèle de l'absorbeur de vibration MRE [Dong et al., 2009]

Figure 1.12. Absorbeurs de vibration dynamique (a) modèle passif et (b) modèle semi-actif [Koo et al., 2008]

Figure 1.13. (a) Absorbeur à 2 d.d.l et (b) deux absorbeurs à 1 d.d.l. séparés, accordés à un système primaire [Zuo et al., 2006]

Figure 1.14. Support expérimental pour le pompage de l'énergie non-linéaire (a) [McFarland et al., 2005], (b) [Kerschen et al., 2007].

Figure 1.15. Montage expérimental et force de rappel cubique [Gourc et al., 2011]

Figure 1.16. Structure avec VI NES attaché à l'étage supérieur (a) modèle, (b) photo, et (c) détail de VI NES [Nucera et al., 2007].

Figure 1.17. Structure avec VI NES (NES 1) attaché à l'étage inférieur et NES avec non linéarité cubique (NES 2) attaché à l'étage supérieur (a) modèle, (b) photo, et (c) détail de NES 2 [Nucera et al., 2007].

Figure 1.18. Principe et photo du montage expérimental [Bellet et al., 2009]

Chapitre 2

Figure 2.1. Système à deux degrés de liberté avec butées

Figure 2.2. Force de contact entre la masse M_2 et les butées

Figure 2.3. Organigramme explicatif de la méthode de Newton-Raphson

Figure 2.4. Variation temporelle de ε_m

Figure 2.5. Réponse temporelle du déplacement de la masse $M1$ ($f = 8.5$ Hz; $j_{\text{eu}} = 2$ mm)

Figure 2.6. Comparaison du résidu ($f = 8.5 \text{ Hz}$; jeu = 2 mm)

Figure 2.7. Système linéaire à 2 d.d.l.

Figure 2.8. Variation temporelle du déplacement (jeu = 40 mm) Gauche: masse primaire M_1 (X_1).

Droite: masse de l'absorbeur M_2 (X_2)

Figure 2.9. Fonction de réponse en fréquence (jeu = 40 mm)

Figure 2.10. Système non linéaire à 2 d.d.l

Figure 2.11. Variation temporelle de la force de contact ($f = 8.5 \text{ Hz}$, jeu = 2 mm)

Figure 2.12. Variation temporelle du déplacement (jeu = 2 mm)

Gauche: masse primaire M_1 (X_1). Droite: masse de l'absorbeur M_2 (X_2)

Figure 2.13. Variation temporelle du déplacement de masse M_1 pour deux cas du jeu

Figure 2.14. Fonction de réponse en fréquence (jeu = 2 mm)

Figure 2.15. Influence du jeu sur la fonction de réponse en fréquences

Figure 2.16. Représentation des espaces de configuration et de phase pour le cas d'un grand jeu (jeu = 40 mm). Du gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $f=5\text{Hz}$, $f=8.5\text{Hz}$, $f=10.5\text{Hz}$, $f=14.5\text{Hz}$, $f=40\text{Hz}$

Figure 2.17. Représentation des espaces de configuration et de phase pour le cas d'un petit jeu (jeu = 2 mm). Du gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $f=5\text{Hz}$, $f=8.5\text{Hz}$, $f=10.5\text{Hz}$, $f=14.5\text{Hz}$, $f=40\text{Hz}$

Figure 2.18. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 8.5Hz pour différents valeurs du jeu. Du gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; jeu=2mm, 1mm, 0.5mm

Figure 2.19. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 10.5Hz pour différents valeurs du jeu. Du gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; jeu=2mm, 1mm, 0.5mm

Figure 2.20. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 14.5Hz pour différents valeurs du jeu. Du gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; jeu=2mm, 1mm, 0.5mm

Figure 2.21. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 8.5 Hz pour différents amplitudes d'excitation. Du gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $F=10\text{N}$, 20N , 30N

Figure 2.22. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 10.5Hz pour différents amplitudes d'excitation. Du gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $F=10N, 20N, 30N$

Figure 2.23. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 14.5Hz pour différents amplitudes d'excitation. Du gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $F=10N, 20N, 30N$

Chapitre 3

Figure 3.1. Comportement d'un élément à raideur cubique [Siller et al., 2004]

Figure 3.2. Linéarisation de la raideur cubique [Siller et al., 2004]

Figure 3.3. Organigramme du calcul modal non linéaire

Figure 3.4. Force de contact

Figure 3.5. FRF du système linéaire: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur

Figure 3.6. FRF du système non linéaire: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur

Figure 3.7. Discontinuité des modes normaux non linéaires

Figure 3.8. Discontinuité des composants du vecteur de la matrice modale non linéaire

Figure 3.9. Influence du non linéarité sur la FRF: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur

Figure 3.10. Influence de la force d'excitation sur la FRF: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur

Chapitre 4

Figure 4.1. Modèle géométrique

Figure 4.2. Modèle dynamique du démonstrateur

Figure 4.3. Modèle éléments finis du démonstrateur

Figure 4.4. Montage expérimental

Figure 4.5. Installation d'instrumentation du montage expérimental

Figure 4.6. Accélérations enregistrées pour la masse M_1 : (a) Fréquences croissantes, (b) Fréquences décroissantes

Figure 4.7. Accélérations enregistrées pour la masse M_2 : (a) Fréquences croissantes, (b) Fréquences décroissantes

Figure 4.8. FRF expérimentale des accélérations: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur, (o) Fréquences croissantes, (*) Fréquences décroissantes

Figure 4.9. Effet de la force d'excitation sur la FRF expérimentale de M_1 : (a) Fréquences croissantes, (b) Fréquences décroissantes

Figure 4.10. Effet de la force d'excitation sur la FRF expérimentale de M_2 : (a) Fréquences croissantes, (b) Fréquences décroissantes

Figure 4.11. Evolution de lignes modales expérimentales pour un balayage en fréquences croissantes

Figure 4.12. Evolution de lignes modales expérimentales pour un balayage en fréquences décroissantes

Figure 4.13. Harmoniques de la réponse expérimentale : (a) M_1 , (b) M_2

Figure 4.14. FRF numérique et expérimentale: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur, (*) Simulation, (o) Expérimental

Liste des tableaux

Chapitre 2

Tableau 2.1. Valeurs de ε_m

Tableau 2.2. Propriétés mécaniques

Tableau 2.3. Comparaison du nombre d'itérations

Chapitre 3

Tableau 3.1. Propriétés mécaniques

Tableau 3.2. Valeurs des fréquences propres

Chapitre 4

Tableau 4.1. Caractéristiques géométriques

Tableau 4.2. Cinq premières fréquences propres et modes correspondants

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

CADRE DU PROBLEME

L'isolation des systèmes mécaniques est un domaine d'étude privilégié pour un grand nombre de domaines de l'ingénierie. Dans le domaine spatial par exemple, on cherche à isoler les éléments optiques des micro-vibrations créées par différentes pièces tournantes. Dans le domaine de l'automobile, l'atténuation du bruit due aux vibrations de certaines pièces est une priorité chez les constructeurs. Dans ces deux secteurs, les solutions techniques utilisées pour absorber ces vibrations, sont principalement l'utilisation de polymères qui vont isoler les pièces concernées sur certaines bandes de fréquences.

Une autre solution est utilisée et consiste à ajouter un système masse ressort TMD (Tuned Mass Damper) au système vibrant. Ainsi, en utilisant les propriétés d'antirésonance d'un système à deux degrés de liberté, on arrive à isoler le système vibrant. Cette technique reste cependant limitée. En effet, l'anti résonance n'ayant lieu qu'à une fréquence donnée, on ne peut isoler que des systèmes ayant une unique fréquence de vibration. De plus, le fait que l'antirésonance se trouve très proche de la seconde résonance du système peut causer de graves dommages au système en cas de dérèglement de la vitesse d'oscillation.

L'étude d'un système non-linéaire à un degré de liberté avec butées permet de faire persister la résonance pour une large bande de fréquences. L'idée est d'incorporer ce système à un oscillateur linéaire dans le but de faire persister l'antirésonance sur une large bande de fréquences. Si ce phénomène se produit, il sera alors possible de mettre en place un système d'isolation dynamique.

OBJECTIFS DE L'ETUDE

L'objet de la thèse proposée consiste à étudier de nouveaux concepts de batteurs dynamiques (étouffeurs) non linéaires dont les performances s'étendent sur une bande de fréquences beaucoup plus large que les batteurs dynamiques linéaires.

Le travail consistera à :

- Réaliser une étude bibliographique sur la limitation des vibrations par étouffeur dynamique.
- Elaborer un modèle dynamique d'un système à deux degrés de liberté mettant en équation le comportement non linéaire d'un absorbeur.
- Déterminer les réponses dynamiques du système envisagé par l'usage des méthodes de résolutions numériques.
- Analyser le comportement dynamique non linéaire pour l'optimisation du système étudié.
- Mettre en place un démonstrateur sur la base d'un système simple à deux degrés de liberté.
- Recaler les modèles envisagés sur la base des résultats expérimentaux du démonstrateur.

PLAN DU DOCUMENT

Le premier chapitre de cette de thèse est constitué d'une recherche bibliographique sur les techniques de contrôle des vibrations en ingénierie mécanique, notamment l'utilisation des absorbeurs de vibration non linéaires. En plus, quelques modèles développés et dispositifs expérimentaux réalisés dans la littérature sont décrits. Un aperçu sur les méthodes de résolution des systèmes mécaniques non linéaires est présenté. Les différentes approches de calcul des modes non linéaires sont encore détaillées.

Dans le deuxième chapitre, un modèle dynamique d'un système à deux degrés de liberté non linéaire est mis en place. La résolution des équations régissant le mouvement de ce modèle est effectuée par la méthode asymptotique numérique et la méthode Newton-Raphson. Le développement des deux méthodes est détaillé et les résultats sont comparés. Une étude paramétrique tenant en compte l'influence du jeu et l'amplitude de l'excitation sur la réponse dynamique du système et sur ses modes normaux est réalisée.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse des modes non linéaires du système à deux degrés de liberté présenté dans le deuxième chapitre. La dynamique de ce système, ayant une non linéarité cubique, est étudiée via une formulation explicite des fonctions de réponse en fréquence non linéaires (FRFs) et les modes normaux non linéaires. L'étude de l'influence du degré de non linéarité, de la masse et de la rigidité de l'absorbeur sur les FRFs est abordée.

Le quatrième chapitre présente l'étude expérimentale. Un démonstrateur permettant la mise en évidence d'un absorbeur de vibration non linéaire est développé. Les résultats obtenus expérimentalement sont discutés et comparés avec ceux numériques.

Les conclusions et les perspectives pour la continuité de ce travail sont apportées à la fin de ce document.

Chapitre 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Introduction

Afin d'explorer au mieux le domaine des absorbeurs de vibrations non linéaires, un passage en revue des différentes techniques d'atténuation vibratoire des systèmes mécaniques sera effectué dans ce chapitre. Les travaux consacrés aux absorbeurs de vibration non linéaires sont mis en valeur. Une attention particulière sera accordée aux modèles développés dans ces travaux. Plusieurs types de non-linéarités sont traités. Ces modèles sont plus ou moins difficiles à résoudre selon la complexité du système, la nature de la non-linéarité et s'il s'agit de déterminer des régimes transitoires ou permanents. Les dispositifs expérimentaux sont aussi présentés pour différents domaines d'application : ingénierie mécanique, civile et acoustique.

Les méthodes de résolution des systèmes mécaniques non linéaires sont analysées. L'étude s'est limitée au calcul de réponse des structures soumises à une excitation périodique. Les différentes approches de calcul des modes non linéaires sont encore détaillées.

1.2. Techniques de contrôle des vibrations en ingénierie mécanique

Les vibrations qui sont en général source de dérangement, d'usure et même de destruction des machines et structures mécaniques doivent être contrôlées ou éliminées. Pour cette raison, la lutte contre les vibrations est devenue depuis des années un enjeu majeur pour les chercheurs de laboratoire et de développement dans l'industrie afin de développer des solutions efficaces contre ces problèmes. De nombreuses technologies ont donc été développées. Dans ce qui suit, les principales techniques de contrôle des vibrations en ingénierie mécanique sont présentées en précisant leurs avantages et inconvénients.

1.2.1. Systèmes passifs

Les systèmes passifs permettent d'isoler les structures et de dissiper l'énergie grâce à leurs caractéristiques mécaniques et propriétés dynamiques. Ils sont moins coûteux que les systèmes actifs et d'une conception relativement simple. Ils permettent d'atténuer considérablement les vibrations des structures soumises à des sollicitations extérieures. Des solutions permettent de réduire au mieux les vibrations soit par l'augmentation de l'amortissement, l'isolation de la structure, le déplacement du spectre de vibration ou l'étouffement de fréquences.

1.2.1.1. Amortissement de la structure

L'augmentation artificielle de l'amortissement naturel par ajout d'un matériau dissipatif sur la structure permet d'atténuer au mieux les vibrations. L'amortissement est dû à la transformation de l'énergie mécanique en énergie thermique. Les matériaux viscoélastiques sont les plus utilisés dans les automobiles et ont pour but de réduire le bruit et les vibrations, par exemple dans les amortisseurs et dans les tôles sandwichs de la carrosserie.

Pour atténuer les vibrations des structures telles que les plaques et les coques, une couche de matériau viscoélastique collée à la surface permet de dissiper de l'énergie sans altérer leurs propriétés de résistance mécanique. Ce type de matériau est utilisé également en aéronautique pour isoler les systèmes électroniques malgré le surplus de masse et de coût.

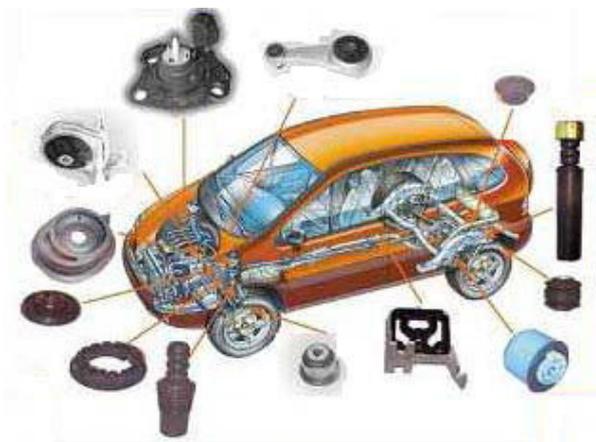


Figure 1.1. Utilisation de matériaux dissipatifs dans une automobile [Harari et al.,2009]

1.2.1.2. Isolement de la structure

L'isolement de la structure consiste à empêcher les vibrations de se propager. L'utilisation d'une suspension est la solution la plus adoptée. La réalisation des suspensions performantes se base sur différents principes physiques: frottement, pertes de charge d'un fluide, comportements hystérétiques, etc. L'application de ces principes se trouve dans les amortisseurs à friction, hydraulique et magnétorhéologique.

Les dissipateurs par friction sont basés sur le glissement entre deux surfaces dont le frottement est responsable de la dissipation de l'énergie des vibrations. Un exemple simple de ce type d'absorbeur est la suspension à lame qui est constitué d'un ensemble de ressorts à lames travaillant en flexion et frottant les unes sur les autres.



Figure 1.2. Suspension d'essieu à ressort à lames avec dissipation par frottement sec entre les lames [Bellet et al., 2010]

Les suspensions hydrauliques sont très couramment utilisées, surtout dans le domaine automobile. Ces systèmes à amortissement visqueux dissipent l'énergie vibratoire par échauffement du fluide circulant dans une enceinte close. L'inconvénient de ce type d'amortisseur est que la viscosité du fluide ne permet pas d'amortir les vibrations sur une large bande de fréquence.

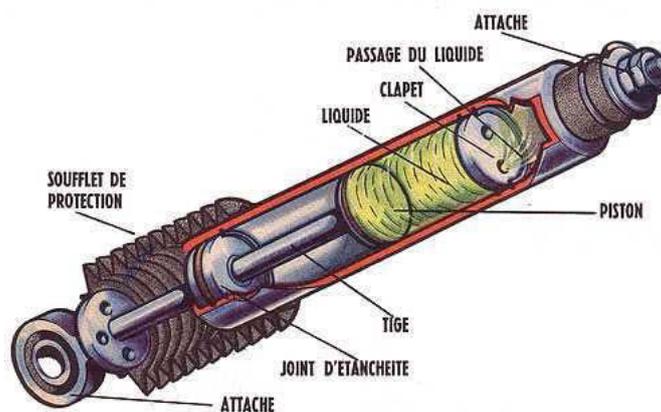


Figure 1.3. Schéma d'un amortisseur télescopique à dissipation visqueuse [Bellet et al., 2010]

L'importance des suspensions magnétorhéologiques réside dans leurs performances et leurs caractéristiques pilotables. Leur principe est basé sur un fluide ayant un comportement qui varie sous l'application d'un champ magnétique. Elles sont largement utilisées dans certaines voitures de luxe [Sassi et al., 2005] et des machines à laver [Aydar et al., 2007]. Elles sont également utilisées en génie civil, par exemple pour diminuer la vibration des ponts en cas de vent, pluie ou trafic important.



Figure 1.4. Suspension magnétorhéologique installée sur un pont [Harari et al., 2009]

L'inconvénient majeur de ces dispositifs est qu'ils doivent être placés entre la structure à isoler et son environnement. Cet inconvénient restreint leur domaine d'application à des systèmes bien particuliers.

1.2.1.3. Déplacement du spectre de vibration

Le principe de cette méthode consiste à déplacer les modes propres de la structure des fréquences d'excitation afin d'éviter la résonance. Une première solution est d'augmenter la masse de la structure avec des matériaux à haute densité. Cette solution est efficace sur la bande des hautes fréquences de la structure mais perd son efficacité en basses fréquences et provoque une augmentation substantielle de la masse.

La deuxième solution consiste à agir sur la conception de la structure en augmentant sa raideur afin de décaler les fréquences de résonances au delà du spectre d'excitation. Pour cela, une étude d'optimisation est nécessaire afin d'avoir un rapport coût/performance acceptable. De ce fait, l'étouffement ou l'absorption de fréquence est une alternative plus adaptée que le déplacement du spectre de vibration.

1.2.1.4. Etouffement ou absorption de fréquence

La réduction des niveaux vibratoires peut être assurée par des absorbeurs de vibrations dynamiques accordés connus encore sous le nom d'étouffeurs ou batteurs (ou Tuned Mass Damper TMD en anglais). Ces absorbeurs sont des systèmes oscillants composés de masses attachées à une structure par l'intermédiaire d'éléments souples.

Lorsqu'il s'agit d'une fréquence d'excitation unique, connue et loin des autres fréquences de résonance, l'utilisation de l'absorbeur de vibrations permet d'introduire une antirésonance à cette fréquence d'excitation et cela en ajustant sa fréquence propre à cette fréquence d'excitation. Ce type d'absorbeur est efficace seulement sur une gamme de fréquences limitée et n'est plus utile si la fréquence d'excitation évolue au cours du temps ou si elle est mal précisée.

Les étouffeurs de vibrations sont largement rencontrés dans le secteur de l'automobile et du génie civil. En effet, tout système oscillant peut jouer le rôle d'étouffeur s'il est bien accordé. Par exemple, il peut s'agir d'un radiateur d'automobile pour filtrer la résonance de la caisse ou d'un réservoir d'eau placé au sommet d'un bâtiment pour protéger contre les séismes.

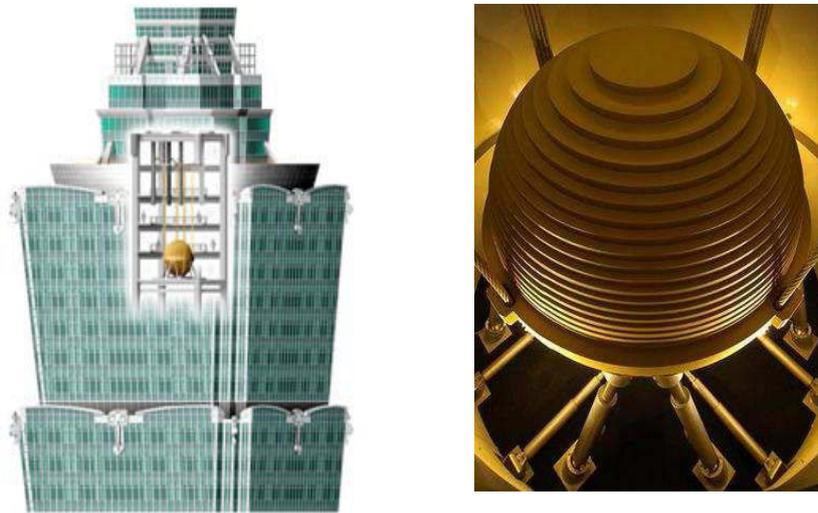


Figure 1.5. Absorbeur dynamique accordé de la tour de Taipei 101

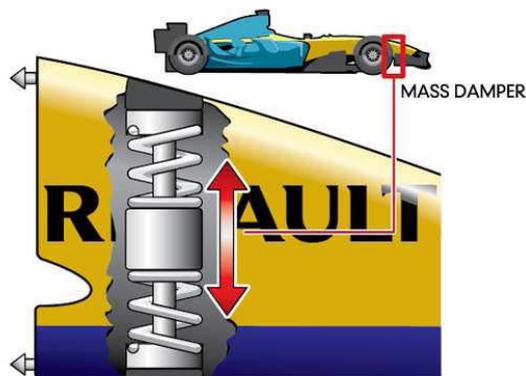


Figure 1.6. Absorbeur dynamique installé dans une voiture de formule 1

L'utilisation des absorbeurs de vibrations dynamiques est avantageuse en raison de leur mobilité et leur capacité à être intégré dans la structure après la phase de conception. Ceci permet souvent de monter l'absorbeur sans affecter le montage entre la structure et la fondation de support, fournissant par conséquent un montage rigide avec un minimum de vibration.

Les absorbeurs de vibration dynamiques ont été inventés en 1911 par [Frahm, 1911]. [Ormondroyd et al., 1928] ont déterminé dans leurs travaux la valeur optimale de l'amortissement de l'absorbeur pour la minimisation de l'amplitude de vibration d'un système à un degré de liberté à la résonance. Ce critère d'optimisation est connu sous le nom d'optimisation H_∞ .

La théorie des points fixes de [DenHartog, 1985] était couramment utilisée pour déterminer la fréquence d'antirésonance optimale et l'amortissement correspondant d'un absorbeur attaché à un système vibrant.

Une autre méthode d'optimisation est l'optimisation H_2 . [Crandall et al., 1963] ont proposé un autre principe d'optimisation de l'absorbeur de vibration dynamique en termes de minimisation de l'énergie totale de vibration de la structure primaire sous l'excitation d'un bruit blanc. La solution exacte de l'optimisation H_2 a été déterminée respectivement pour un absorbeur de vibration dynamique attaché au système primaire non amorti par [Warburton, 1981] et à un système primaire amorti par [Asami et al., 2002].

Après 1963, Les travaux sur les absorbeurs ont été entrepris avec rigueur lors du développement de pales de rotor d'hélicoptère [Flannelly, 1963], [Jones, 1971] et [Flannelly et Jones, 1978], et plus récemment, pour la protection contre les séismes.

[Igusa et Xu, 1994] ont étudié la performance de plusieurs absorbeurs de vibration dynamique, de différentes fréquences de résonance pour le contrôle de vibration sur une bande de fréquence. Ils ont constaté que l'utilisation de plusieurs absorbeurs est plus efficace et robuste qu'un seul absorbeur de masse totale égale.

1.2.2. Systèmes actifs

L'avantage majeur des systèmes actifs est qu'ils permettent d'adapter la réponse des systèmes vibrants en fonction de leur excitation et leur environnement. Ceci est assuré par des capteurs

qui mesurent les vibrations de la structure et les excitations appliquées ; les informations acquises sont ensuite interprétées par des algorithmes de contrôle afin de déterminer la réponse la plus adaptée qui sera appliquée à la structure à l'aide d'actionneurs. Pour cela, un apport d'énergie extérieure est nécessaire.

Les absorbeurs actifs permettent une réduction de vibrations considérable sur une large bande passante. Cependant, ils exigent une puissance importante en plus de la complexité et le coût de réalisation.

[[Hunt, 1979](#)] a étudié l'utilisation d'un absorbeur de vibration dynamique hydraulique dans le domaine du développement de pales de rotor d'hélicoptère. Un vérin à double effet hydraulique est placé entre le rotor et le fuselage, le rotor étant la masse d'absorbeur. Deux signaux sont acquis et amplifiés à partir du rotor et du fuselage, puis envoyés vers une servovalve qui commande alors l'actionneur hydraulique.

Les absorbeurs actifs ont également été utilisés pour supprimer les vibrations dans les poutres qui ont de multiples fréquences de résonance. Les absorbeurs passifs peuvent être efficaces seulement pour une fréquence de résonance unique, et ne peuvent être efficaces à d'autres fréquences de résonance. Un générateur de force développé par [[Rockwell, 1965](#)] agissant comme la masse de l'absorbeur peut être monté sur la poutre. Un capteur monté sur l'autre côté de la poutre détecte son mouvement et envoie un signal de retour au générateur, qui réagit à son tour contre le mouvement de vibration.

[[Filipovic et Schroder, 1998](#)] ont développé un nouveau concept d'absorbeur actif capable d'absorber les vibrations à toutes les fréquences appartenant à l'intervalle d'une bande passante. Le concept proposé garantit la stabilité du système. Il consiste à implanter un actionneur pour la compensation des vibrations et nécessite un contrôle local du déplacement de la masse d'absorbeur.

[[Cunefare et al., 2000](#)] ont développé un type d'absorbeur de commutation statique qui est un oscillateur à un seul degré de liberté, mais avec un ressort dont la raideur peut supposer un certain nombre de valeurs discrètes. Il peut contrôler les excitations à fréquences multiples.

[[Holdhusen, 2005](#)] a utilisé des élastomères magnétorhéologique pour fabriquer un absorbeur de commutation statique pour le contrôle des vibrations du système continu. Les résultats ont

montré que l'absorbeur de commutation statique a été efficace sur une plus grande bande passante que celle d'un amortisseur de vibrations classique.

1.2.3. Systèmes semi-actifs et adaptatifs

Ces dernières années, les absorbeurs de vibrations semi-actifs ont été proposés pour supprimer les excitations harmoniques de fréquences variables. Les absorbeurs semi-actifs peuvent être classés en plusieurs types : raideur variable grâce à des mécanismes mécaniques [Walsh et al., 1992], [Nagaya et al., 1999] et [Yong et al., 2004], inductance variable connectées en série avec le patch piézoélectrique [Morgan et al., 1998], [Morgan et al., 2002] et [Davis et al., 2000] ou utilisant de nouveaux matériaux contrôlables [Williams et al., 2002] et [Williams et al., 2005].

Un grand nombre d'absorbeurs de vibrations adaptatifs [Ryan et al., 1994] avec raideur variable ont été proposés et vérifiés expérimentalement pour leurs qualités de suppression des vibrations de la structure primaire sur une bande de fréquence plus large.

Contrairement aux absorbeurs actifs où le contrôle porte une action directement sur la masse, pour les absorbeurs adaptatifs le contrôle porte action sur la raideur du ressort, et par suite le contrôle de la fréquence naturelle de l'absorbeur. D'où, les absorbeurs adaptatifs consomment moins d'énergie puisque la puissance nécessaire pour ajuster la raideur du ressort est inférieure à la puissance nécessaire pour agir directement sur la masse.

1.2.4. Contrôle des vibrations grâce à un absorbeur non linéaire

L'utilisation des absorbeurs de vibrations dynamiques linéaires est limitée du fait que l'antirésonance n'ayant lieu qu'à une fréquence connue. Une solution alternative a été mise en évidence et consiste à attacher au système primaire un absorbeur non linéaire composé typiquement d'une masse et d'un ressort à raideur non linéaire [Gendelman et al., 2001], [Vakakis, 2001] et [Vakakis et al., 2001].

A cause de cette raideur non linéaire, l'absorbeur n'a pas de fréquence de résonance unique et peut vibrer à différentes fréquences. Il peut ainsi agir dans une large bande de fréquence et être efficace dès les basses fréquences. Parmi les défauts de l'absorbeur non linéaire, notons que le transfert d'énergie n'apparaît que lorsque le niveau vibratoire du système primaire est assez élevé, ce qui limite son application pratique.

Ces dernières années, plusieurs recherches se sont intéressées à l'étude et à l'optimisation des absorbeurs de vibrations dynamiques non-linéaires. Les aspects techniques ont été envisagés pour sa mise en œuvre [Hunt et al., 1982], [Nissen et al., 1985], [Vakakis et al., 2003] et [Vakakis et al., 2004].

L'optimisation a été également effectuée pour les absorbeurs de vibrations dynamiques linéaires et non linéaires dans le cas des systèmes amortis. Les systèmes ayant un amortissement non linéaire et une raideur non linéaire ont été étudiés par [Zhu et al., 2004]. La réduction de l'amplitude de vibrations peut être obtenue en ajustant les paramètres d'amortissement et de raideur. L'atténuation de l'amplitude des vibrations au moyen de ressorts non linéaires a été mise en évidence par [Soom et al., 1983], [Nissen et al., 1985], [Jordanov et al., 1988] et [Liu et al., 2005]. Ces absorbeurs présentent des performances dans une large bande de fréquences [Hunt et al., 1982], [Nissen et al., 1985], [Rice et al., 1986] et [Bert et al., 1990]. Mais, malheureusement, la présence des non-linéarités peut introduire des instabilités dynamiques et entraîner une amplification plutôt que la réduction de la vibration [Rice, 1986] et [Natsiavas, 1992].

L'utilisation des absorbeurs de vibration dynamiques non linéaires est caractérisée par le phénomène de pompage énergétique ('energy pumping') appelé aussi ('targeted energy transfer' TET). Il s'agit d'un transfert irréversible d'énergie de la structure primaire vers l'absorbeur non linéaire et qui sera dissipée dans l'absorbeur. De ce fait, il y aura une rapide extinction des vibrations dans le système primaire, alors qu'elle s'accroît dans l'absorbeur.

[Gourdon et al., 2007] et [Kerschen et al., 2005] ont étudié un oscillateur linéaire associé à un absorbeur non linéaire (aussi appelé 'Nonlinear Energy Sink NES') sous chargement transitoire. Ceci permet de transférer l'énergie de façon irréversible à partir de l'oscillateur vers l'absorbeur. Le phénomène de pompage de l'énergie transitoire a été vérifié expérimentalement par [Gourdon et al., 2007], [Kerschen et al., 2006] et [McFarland et al., 2005].

[Gendelman et al., 2006], [Gendelman et al., 2008] et [Starovetsky et al., 2008] ont montré que la réponse stationnaire du NES au voisinage de la résonance est quasi-périodique ce qui entraîne un échange d'énergie entre l'absorbeur et l'oscillateur.

Des études ont été menées sur le système primaire auquel est accroché l'absorbeur non linéaire sous différentes configurations : une poutre [Georgiades et al., 2007], [Panagopoulos et al., 2004] et [Panagopoulos et al., 2007], une plaque [Georgiades et al., 2009], un guide d'onde [Vakakis et al., 2005], un système linéaire à deux degrés de liberté [Kerschen et al., 2007], un système à plusieurs degrés de liberté [Manevitch et al., 2003] et [Ma et al., 2008]. Le système primaire étudié lui-même peut être non linéaire [Zhu et al., 2004], [Viguié et al., 2009] et [Viguié et al., 2010]. Des recherches se sont intéressées au type de non-linéarité abordée : non-linéarité non-polynomiale [Gendelman, 2008], amortissement non linéaire [Starosvetsky et al., 2009], absorbeur à impact [Nucera et al., 2007] et [Lee et al., 2009], ou encore absorbeur à plusieurs degrés de liberté [Tsakirtzis et al., 2005], [Tsakirtzis et al., 2007] et [Lee et al., 2008].

1.3. Modèles d'absorbeurs de vibration

Pour étudier la performance des absorbeurs de vibrations dynamiques, la plupart des auteurs ont utilisé un simple système mécanique à deux degrés de liberté ; un système primaire constitué d'une masse et un ressort linéaire et un oscillateur non linéaire constitué d'une masse et un ressort non linéaire. Un ressort de faible raideur assure le couplage entre ces deux éléments.

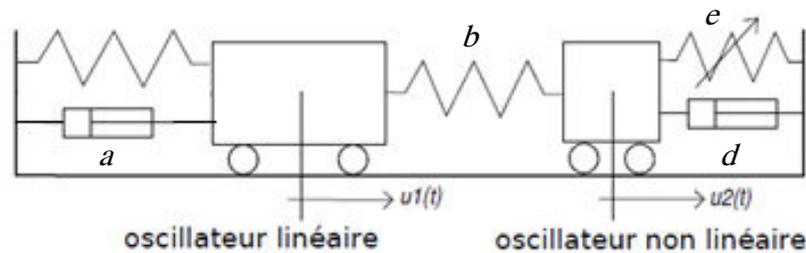


Figure 1.7. Système mécanique classique à deux degrés de liberté

$u_1(t)$ et $u_2(t)$ représentent les déplacements respectifs de l'oscillateur linéaire et non linéaire. En considérant une non-linéarité de type cubique, les équations de mouvement de ce système peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + a\dot{u}_1 + ku_1 + b(u_1 - u_2) = 0 \\ c\ddot{u}_2 + d\dot{u}_2 + eu_2^3 + b(u_2 - u_1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où c est le rapport des masses, b est la faible raideur de couplage et e est le coefficient de raideur cubique du ressort non linéaire. a et d représentent respectivement les coefficients d'amortissement du système primaire et du système non linéaire. Ce système présentant une dynamique très complexe et a fait l'objet de nombreuses publications [Lee et al., 2005] [Starosvetsky et al., 2008], [Vakakis et al., 2003] et [Gendelmen et al., 2005].

[Gourc et al., 2011] ont examiné théoriquement et expérimentalement le comportement dynamique d'un oscillateur linéaire fortement couplé à un oscillateur non linéaire de Duffing et soumis à une excitation périodique. Le modèle de ce système étudié est représenté dans la figure 1.8. Les équations dynamiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x + c_2 (\dot{x} - \dot{y}) + k_2 (x - y)^3 = F \cos(\Omega t) \\ m_2 \ddot{y} + c_2 (\dot{y} - \dot{x}) + k_2 (y - x)^3 = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

k_2 est une raideur non linéaire géométriquement réalisée avec deux ressorts linéaires qui s'étendent axialement et sont libres de tourner. Par conséquent, la relation force-déplacement est considérée non linéaire de type cubique.

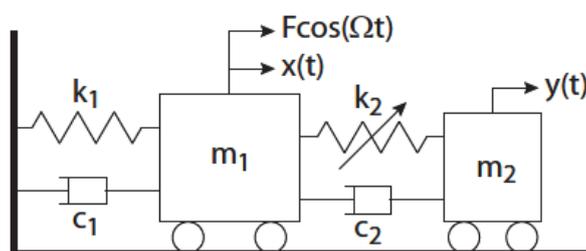


Figure 1.8. Schéma du modèle étudié [Gourc et al., 2011]

[Jordanov et al., 1988] ont appliqué une méthode numérique efficace pour déterminer les paramètres optimaux des absorbeurs de vibration dynamiques amorties linéaires et non linéaires. L'atténuation de vibration a été effectuée pour des systèmes primaires amortis et aussi non amortis avec des raideurs linéaires et non linéaires. Une comparaison est faite avec les paramètres optimaux des absorbeurs linéaires qui sont déterminés en utilisant les résultats classiques de Den Hartog [Den Hartog, 1985]. Le modèle du système considéré est représenté sur la figure 1.9. La masse principale M_1 est soutenue par une suspension non-linéaire ($f_1(X_1)$), avec un amortisseur visqueux (amortissement constant C_1). Elle est excitée par une force harmonique $H \sin(\omega t)$. La masse de l'absorbeur M_2 est fixée au moyen d'un ressort non

linéaire ($f_2(X_2)$) et un amortisseur visqueux (amortissement constant C_2). Les équations régissant la dynamique de ce système sont :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{X}_1 + C_1 \dot{X}_1 + f_1(X_1) = H \sin(\omega t) \\ M_2 \ddot{X}_2 + C_2 \dot{X}_2 + f_2(X_2) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Les forces non-linéaires appliquées par les ressorts sur les masses sont exprimées en tant que :

$$f_i(X_i) = K_i X_i + \bar{\alpha}_i X_i^3, \quad i = 1, 2 \quad (1.4)$$

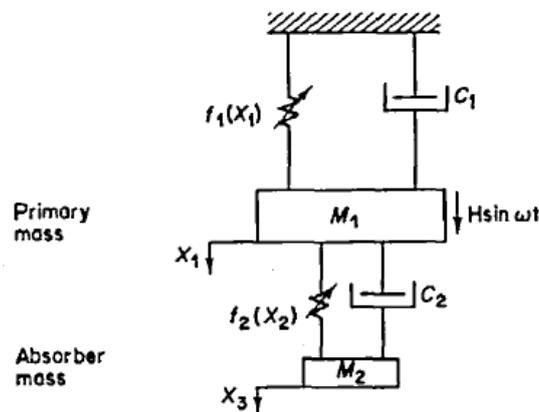


Figure 1.9. Système avec un absorbeur de vibration non linéaire [Jordanov et al., 1988]

La performance d'un absorbeur de vibration dynamique à raideur variable a été étudiée par [Dong et al., 2009]. Il est basé sur un matériau intelligent, élastomère magnétorhéologique (MRE). Avant le développement de l'absorbeur proposé, l'élastomère a été tout d'abord fabriqué par durcissement d'un mélange de caoutchouc de silicium 704, des particules de fer-carbone et une petite quantité d'huile de silicone sous un champ magnétique extérieur.

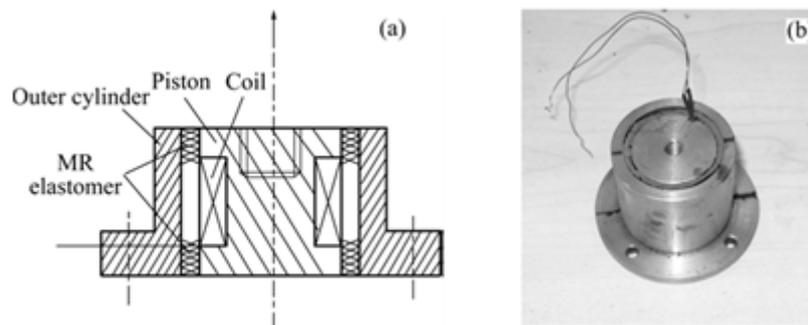


Figure 1.10. Absorbeur MRE; (a) configuration schématique et (b) photo [Dong et al., 2009]

Ensuite, les propriétés mécaniques des MRE fabriquées ont été mesurées. Sur la base des caractéristiques mécaniques mesurées, l'absorbeur MRE a été développé et ses caractéristiques de fonctionnement ont également été testées. Enfin, la réponse d'un système dynamique à deux degrés de liberté avec un absorbeur MRE (Figure 1.10) a été déterminée pour évaluer l'efficacité de cet absorbeur.

L'absorbeur MRE est modélisé par un coefficient d'amortissement équivalent c_e , un coefficient de raideur de base k_e et une force élastique contrôlable F_{MRE} . Les équations régissant ce modèle peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{z}_2 = -c_e (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_e (z_2 - z_1) - F_{MRE} \\ m_1 \ddot{z}_1 = c_e (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_e (z_2 - z_1) + F_{MRE} - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_0) - k_1 (z_1 - z_0) \end{cases} \quad (1.5)$$

Le modèle de l'absorbeur de vibration MRE étudié est représenté par la figure suivante :

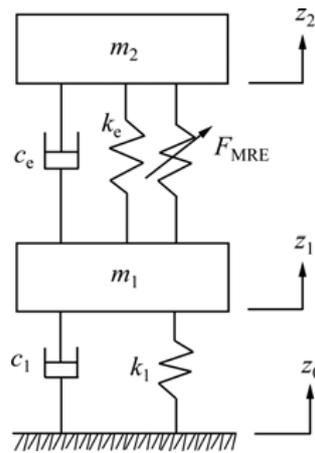


Figure 1.11. Modèle de l'absorbeur de vibration MRE [Dong et al., 2009]

[Koo et al., 2008] ont étudié un absorbeur de vibration dynamique semi-actif dont l'amortissement est contrôlable. Deux modèles numériques ont été élaborés pour l'absorbeur passif et l'absorbeur semi-actif et les paramètres de réglages optimaux des deux modèles ont été obtenus en utilisant un programme d'optimisation.

La figure 1.12 représente le modèle passif et semi actif d'un absorbeur de vibration dynamique. La différence réside dans l'élément d'amortissement contrôlable qui peut être un matériau magnétorhéologique. Les équations du mouvement dynamique du modèle semi-actif sont :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \dot{x}_{in} + k_1 x_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

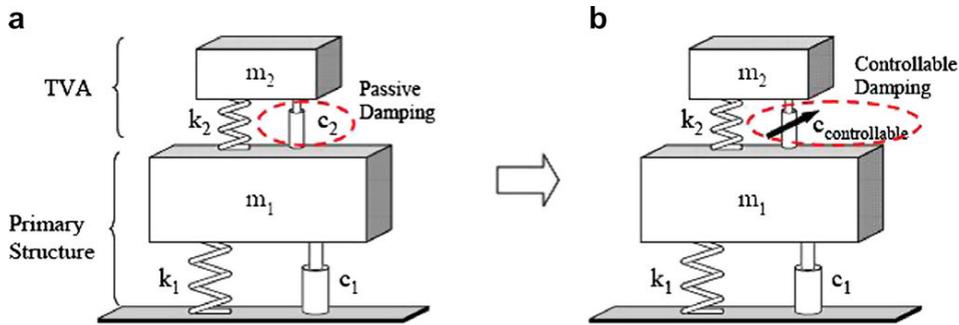


Figure 1.12. Absorbeurs de vibration dynamique
(a) modèle passif et (b) modèle semi-actif [Koo et al., 2008]

[Zuo et al., 2006] ont proposé un absorbeur à deux degrés de liberté pour supprimer la vibration d'un système primaire. Des algorithmes d'optimisation basés sur H_2 et H_∞ sont développés afin de minimiser la réponse à des excitations aléatoires et harmoniques.

L'absorbeur à deux degrés de liberté a montré de meilleures performances que l'absorbeur à un degré de liberté avec ses paramètres optimaux. Avec un emplacement de connexion bien choisi, l'absorbeur à deux degrés de liberté est plus performant dans la suppression des vibrations que deux absorbeurs à un degré de liberté séparés avec une distribution optimisée des masses.

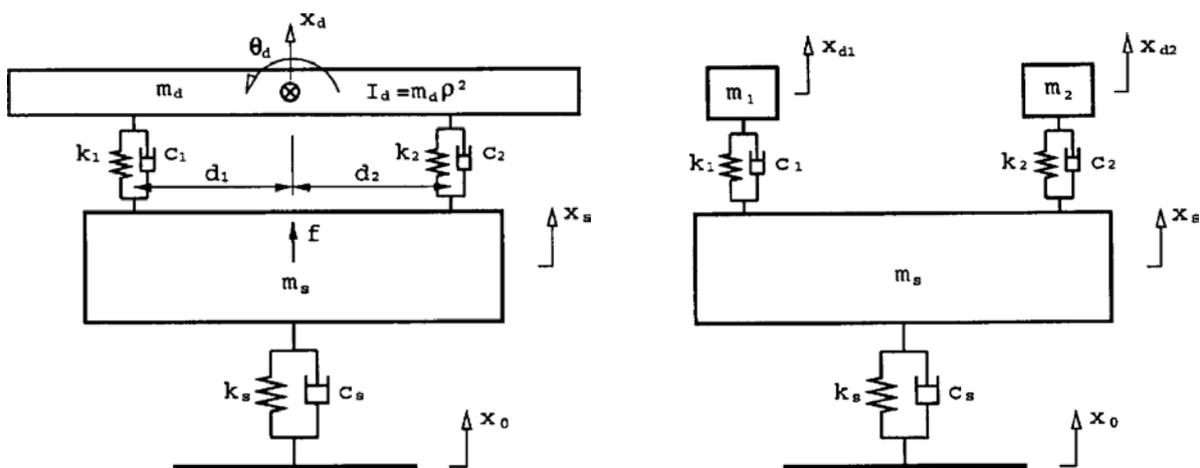


Figure 1.13. (a) absorbeur à 2 d.d.l et (b) deux absorbeurs à 1 d.d.l. séparés, accordés à un système primaire [Zuo et al., 2006]

1.4. Dispositifs expérimentaux

Les études expérimentales décrivant l'utilisation des absorbeurs de vibrations non linéaires sont, à ma connaissance, peu nombreuses dans la littérature. Dans cette partie sont présentés, les quelques dispositifs expérimentaux recensés. Les deux premiers dispositifs sont basés sur le principe de l'oscillateur de Duffing. Le troisième illustre une application en génie civil pour l'atténuation sismique. Le dernier est un absorbeur de vibration non linéaire utilisé pour l'absorption de l'énergie acoustique.

[McFarland et al., 2005] ont vérifié expérimentalement le phénomène de pompage d'énergie passif non linéaire dans un système à deux degrés de liberté comprenant un oscillateur principal amorti lié au bâti avec un ressort linéaire et accordé à un autre oscillateur lié au bâti au moyen d'un ressort non linéaire avec une rigidité cubique. Le pompage de l'énergie se produit à une fréquence unique "rapide" dans le voisinage de la fréquence propre du mode linéaire. Un bon accord entre les résultats expérimentaux et simulés a été observé. Les expériences confirment que (a) le pompage de l'énergie non-linéaire dans des systèmes d'oscillateurs couplés peut se produire seulement au-dessus d'un certain seuil de l'énergie d'entrée, et (b) il existe une valeur optimale de l'énergie d'entrée pour laquelle un grand pourcentage de l'énergie est absorbée et dissipée par l'absorbeur.

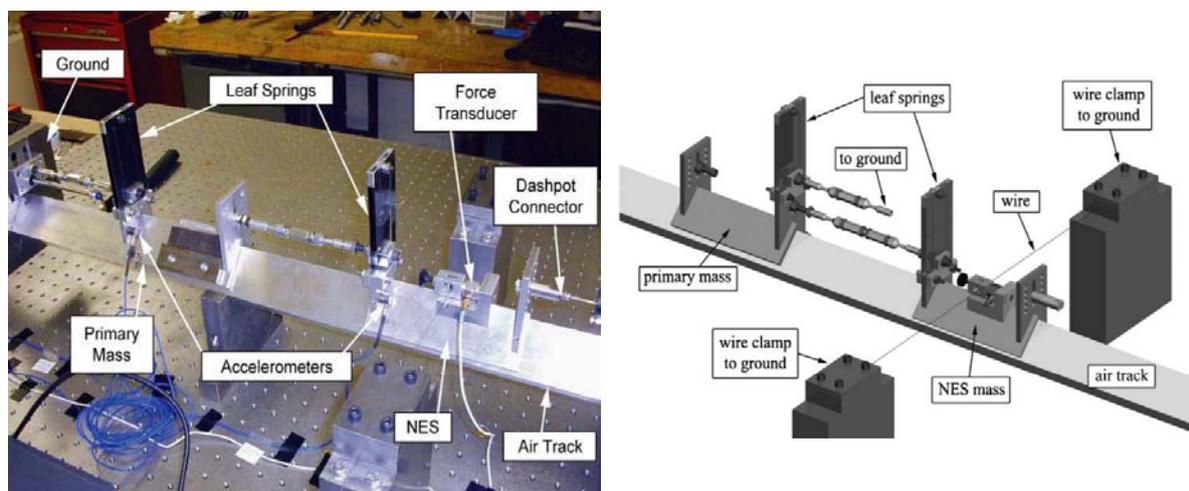


Figure.1.14. support expérimental pour le pompage de l'énergie non-linéaire
(a) [McFarland et al., 2005], (b) [Kerschen et al., 2007].

[Kerschen et al., 2007] a utilisé le même dispositif pour montrer expérimentalement la capture par résonance transitoire qui peut se produire dans un système de deux oscillateurs

couplés avec une raideur essentiellement non linéaire. Lors de la capture de résonance transitoire, les deux oscillateurs sont en résonance, dont la fréquence varie avec le temps, ce qui conduit à un transfert d'énergie non linéaire ciblée (TET).

Le modèle représenté par la figure 1.8 est étudié expérimentalement [Gourc et al., 2011]. L'oscillateur linéaire se compose d'une masse principale liée d'un côté au bâti par l'intermédiaire d'un ressort linéaire, et de l'autre côté excitée par un pot vibrant. L'oscillateur non linéaire est intégré sur cette masse principale. La masse de cet oscillateur non linéaire est liée à la masse principale par deux ressorts linéaires qui s'étendent axialement et sont libres de tourner comme illustré à la figure 1.15. La relation force-déplacement développée en série de Taylor est approximativement cubique :

$$f = 2k_l u + \frac{2u(P - k_l)}{\sqrt{l^2 + u^2}} \approx \frac{2P}{l} u + \frac{k_l - P}{l^3} u^3 + O(u^5) \quad (1.7)$$

Où u est le déplacement, k_l est la raideur de ressort linéaire, l est la longueur initiale du ressort, et P est la tension initiale.

Les expériences réalisées consistent à mesurer le déplacement de l'oscillateur tout en augmentant et en diminuant les fréquences autour de la résonance fondamentale de l'oscillateur linéaire. Beaucoup de phénomènes dynamiques non linéaires sont observés sur le dispositif expérimental, comme les sauts, bifurcation et des régimes quasi-périodiques.

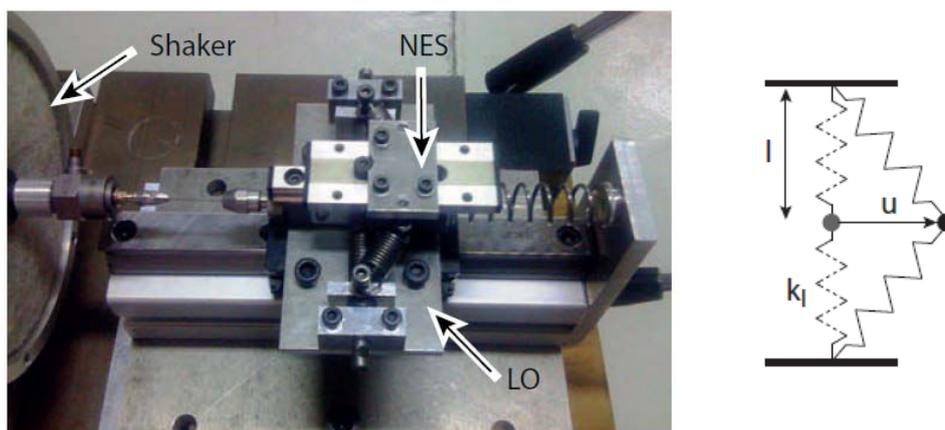


Figure 1.15. Montage expérimental et force de rappel cubique [Gourc et al., 2011]

[Nucera et al., 2007] ont montré numériquement que l'atténuation sismique est possible avec l'utilisation du transfert d'énergie ciblée (TET). Pour la validation expérimentale de ces résultats, une série de tests expérimentaux sont effectués sur une structure de trois étages soumise à deux types d'excitations sismiques différentes. L'atténuation sismique expérimentale est testée soit pour un seul absorbeur non linéaire (Nonlinear Energy Sink NES) ou une combinaison des deux NES(s) attachés aux étages de la structure étudiée.

Avec un seul vibro-impact NES (VI NES) accroché à l'étage supérieur de la structure, une réduction significative des niveaux de réponse est constatée. Pour améliorer encore l'efficacité de l'atténuation sismique, une combinaison de deux NES(s) est considérée : un NES avec une rigidité non linéaire à l'étage supérieur et un VI NES à l'étage inférieur.

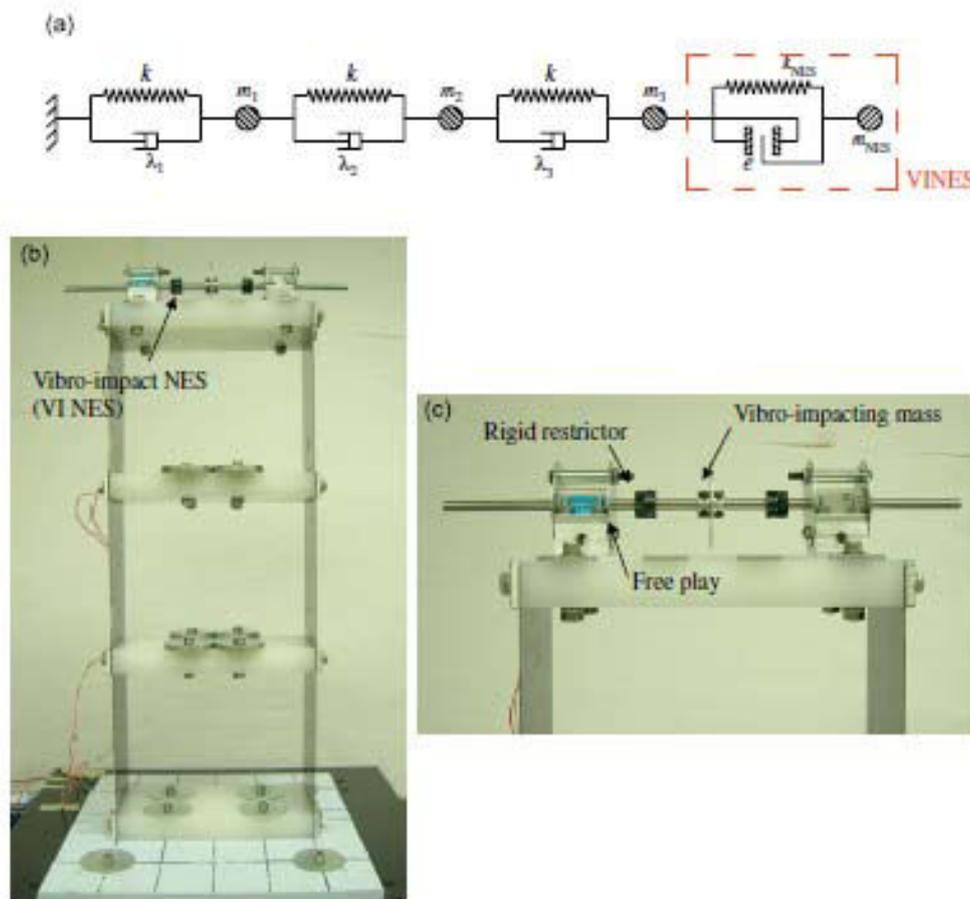


Figure 1.16. Structure avec VI NES attaché à l'étage supérieur
(a) modèle, (b) photo, et (c) détail de VI NES [Nucera et al., 2007]

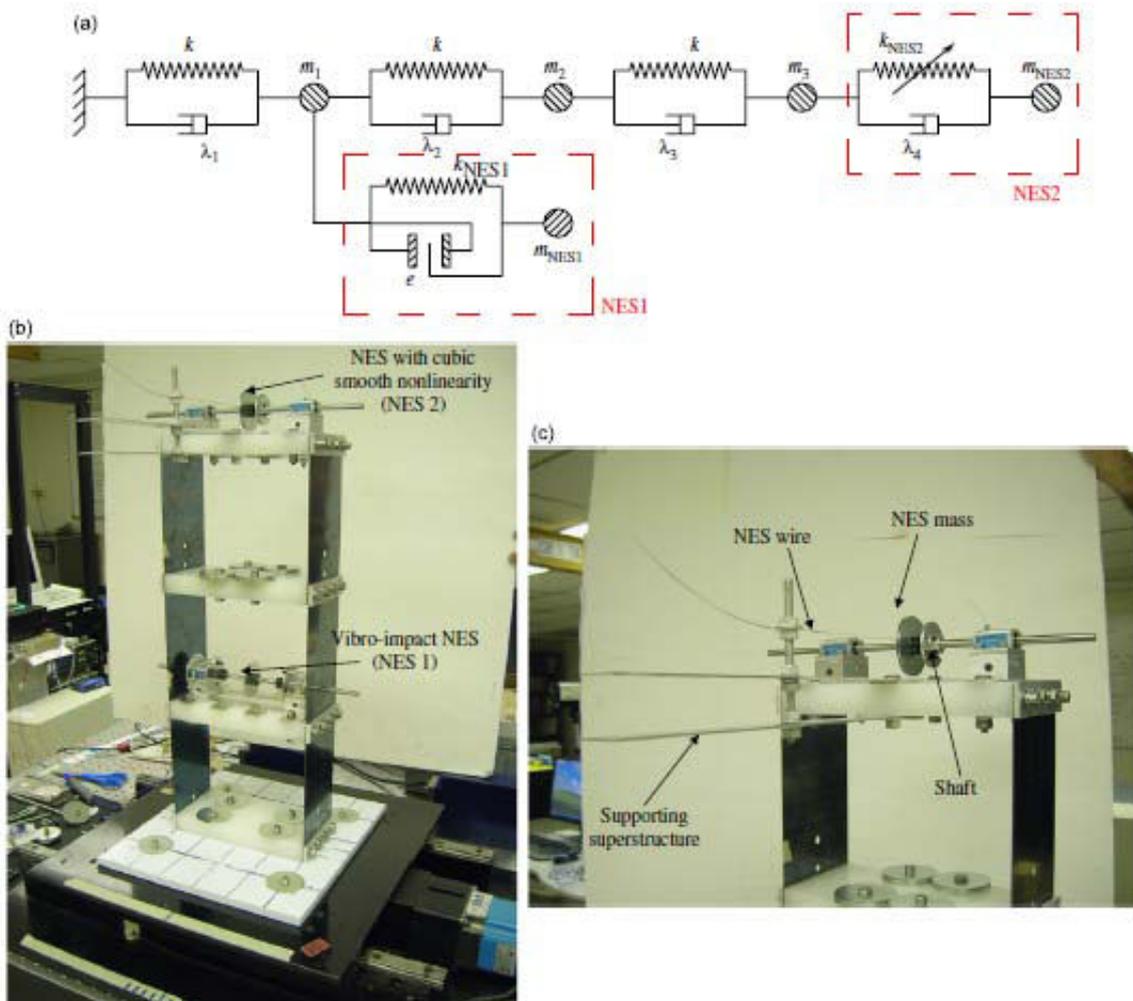


Figure 1.17. Structure avec VI NES (NES 1) attaché à l'étage inférieur et NES avec non-linéarité cubique (NES 2) attaché à l'étage supérieur (a) modèle, (b) photo, et (c) détail de NES 2 [Nucera et al., 2007]

[Bellet et al., 2009] ont développé un montage expérimental académique pour mettre en évidence le phénomène de transfert énergétique ciblé 'Target Energy Transfer (TET)' (appelé aussi pompage énergétique). Il consiste à utiliser l'air à l'intérieur d'un tube en tant que milieu acoustique primaire. Une fine membrane circulaire viscoélastique joue le rôle d'un oscillateur à raideur essentiellement cubique et l'air contenu dans une boîte de grande taille assure un couplage faible entre ces deux éléments. Ce dispositif a montré son efficacité dans l'extinction sonore grâce au transfert irréversible de l'énergie acoustique du milieu primaire et qui est dissipée dans la membrane.

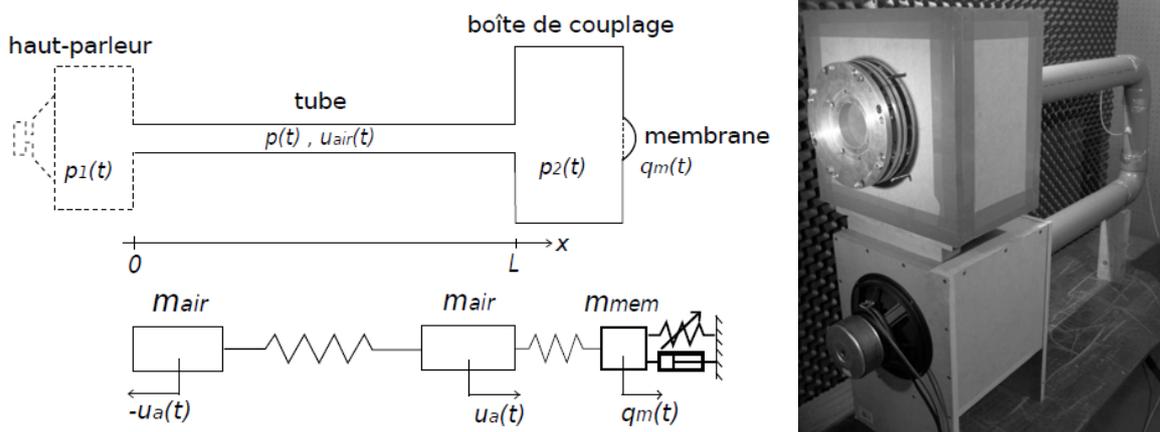


Figure 1.18. Principe et photo du montage expérimental [Bellet et al., 2009]

1.5. Dynamique des structures non linéaires

Les systèmes mécaniques rencontrés dans l'industrie sont le siège de plusieurs sources de non-linéarités. Les problèmes issus de ces systèmes sont autant difficiles à modéliser qu'à résoudre. En effet, pour ce type de problèmes l'application du principe de superposition modale n'est pas valable comme dans le cas des systèmes linéaires. En plus, la fréquence des oscillations est variable au cours du temps et bien évidemment elle varie en fonction des amplitudes des excitations. Les non-linéarités rencontrées dans les structures vibrantes sont dues soit à la géométrie, soit au matériau et son comportement, soit à des phénomènes de frottement, de contact ou de jeu entre solides, etc. La caractérisation du type de non-linéarité présent dans le comportement dynamique de la structure est très difficile.

1.5.1. Principales sources de non-linéarité en mécanique

Comme mentionné plus haut les non-linéarités rencontrées lors de la vibration des structures peuvent être classés en trois grandes familles [Thomas et al., 2005]:

- **Non-linéarités géométriques** : pour le cas de grands déplacements, la relation entre la déformation et le déplacement ne reste plus linéaire. Ce genre de problèmes est souvent rencontré dans le cas des structures minces de type poutres, plaques et coques et qui sont soumises aux grands déplacements. La modélisation du comportement des structures minces, en tenant compte des non-linéarités géométriques dues aux grandes amplitudes, présente un axe de recherche très intéressant et extrêmement actif.

- **Non-linéarités matériaux** : Elles sont dues à la composition structurale et aux caractéristiques du matériau dont la relation entre la contrainte et la déformation n'est plus linéaire. Ce type des non-linéarités est présent pour des matériaux élastoplastiques, viscoélastiques, etc.

- **Non-linéarités de contact** : Elles sont dues aux phénomènes de contact, de frottement et de jeu au niveau de la jonction entre solides.

1.6. Méthodes de résolution des systèmes non linéaires et calcul des modes non linéaires

L'étude des vibrations des structures non linéaires se fait généralement soit par la résolution des équations de mouvement soit par le calcul des modes non linéaires. La réponse de systèmes dynamiques non linéaires à une sollicitation périodique est souvent périodique. Plusieurs méthodes sont développées afin de calculer ces solutions. Le calcul des modes non linéaires est effectué en utilisant l'approche de 'formes normales' ou l'approche de Rosenberg ou l'approche de Shaw et Pierre.

1.6.1. Méthode de résolution des systèmes mécaniques non linéaires

1.6.1.1. Méthode d'intégration temporelle

Les méthodes d'intégration temporelle permettent la résolution d'un système d'équations différentielles en temps. En effet, elles consistent à construire à partir des conditions initiales la solution pas à pas du système. Ces méthodes sont adaptables à tous types de non-linéarités. En plus, elles permettent de calculer tous types de réponses vibratoires, aussi bien transitoire que périodique, voir même chaotique. Cependant, ces méthodes nécessitent un temps de calcul énorme. Les algorithmes d'intégration les plus utilisés sont ceux de Newmark et de Taylor [Newmark, 1959].

1.6.1.2. Méthode de différences finies

Pour éviter de passer par le calcul du régime transitoire comme pour Les schémas d'intégration temporelle, la méthode de différences finies propose d'utiliser le schéma d'intégration uniquement sur la période du régime permanent et de résoudre ensuite un

problème aux limites vérifiant la condition de périodicité. L'inconvénient de cette méthode est la taille importante du système obtenu afin d'avoir une bonne précision.

1.6.1.3. Méthode de Shooting

La méthode de Shooting est une méthode appliquée au calcul de solutions périodiques des problèmes aux limites particuliers (la période de la solution présente des conditions identiques à ses deux extrémités). À partir des conditions initiales, la méthode consiste à calculer les conditions finales de la solution par intégration temporelle, ensuite des corrections seront appliquées sur les conditions initiales afin d'obtenir des conditions finales identiques.

La méthode de Shooting est associée à une méthode de continuation suivant un paramètre de contrôle dans le but d'étudier la stabilité et la bifurcation sur les branches des solutions. [Sundararajan et al., 1998] ont combiné ces deux méthodes pour le calcul de la réponse des systèmes non linéaires soumises à des excitations périodiques.

Les vibrations périodiques des plaques et poutres non linéaires en régime forcé sont étudiées par [Ribeiro, 2004]. La modélisation est effectuée par la méthode des éléments finis. La méthode de Shooting est utilisée pour la résolution des équations dynamiques. Elle a permis d'obtenir des branches de solutions qui ne sont pas accessibles par la méthode de balance harmonique.

1.6.1.4. Méthode de perturbation

Les méthodes de perturbation permettent de rechercher la solution sous la forme d'un développement en puissance croissante suivant un petit paramètre ε . La réponse est alors obtenue par perturbation de la solution du système linéaire associé (obtenue pour $\varepsilon = 0$). Ces méthodes permettent d'obtenir des solutions analytiques et de mieux comprendre des phénomènes non linéaires comme la stabilité des solutions et l'apparition des surharmoniques.

L'un des inconvénients de ces méthodes, est la limitation de la taille des systèmes à résoudre. En plus, elles sont restreintes à des non-linéarités faibles malgré que quelques travaux aient permis d'utiliser ces méthodes pour des non-linéarités plus fortes.

La méthode de Poincaré a été proposée par Henri Poincaré en 1892 pour la résolution des équations différentielles non linéaires. Plusieurs variantes ont été développées à partir de cette

méthode : méthode des échelles multiples [Nayfeh et al., 1979], méthode de Krylov-Bogoliubov [Bogoliubov et al., 1961], méthode de la moyenne, etc.

1.6.1.5. Méthode de balance harmonique

Le principe de la méthode de balance harmonique a permis depuis longtemps d'étudier de façon analytique les vibrations de systèmes de taille réduite et possédant une non-linéarité. [Nayfeh et al., 1979] ont étudié de nombreux systèmes à plusieurs degrés de liberté et présentant une non-linéarité quadratique. Toutefois les sources d'erreur peuvent se multiplier et les calculs deviennent fastidieux.

La méthode de balance harmonique consiste à supposer que la réponse est périodique ce qui permet de la développer en série de Fourier. Ce développement infini est tronqué pour ne conserver qu'un nombre bien déterminé d'harmoniques dans la réponse.

De nombreuses variantes de la méthode de balance harmonique de base HBM existent, telles que la méthode de balance harmonique incrémentale, méthode de balance harmonique multiple [Guskov et al., 2008] et [Coudeyras et al., 2009], la méthode de balance harmonique adaptative [Jaumouillé, 2011]. Ces méthodes permettent soit d'améliorer la performance et la robustesse, soit de s'adapter à des systèmes non-lisses [Lau et al., 1982].

Au début des années 1980, La méthode de balance harmonique incrémentale est introduite par Lau [Lau et al., 1982], [Cheung et al., 1982] et [Cheung et al., 1983]. Elle a permis de résoudre des systèmes de taille plus grande et de traiter des non-linéarités quelconques. [Cheung et al., 1982] ont développé une méthode qui consiste à la projection sur les fonctions trigonométriques décrivant la solution et se basant sur une méthode incrémentale de résolution de Newton-Raphson associée à la procédure de Galerkin. Un système algébrique non linéaire qui est obtenu, où les inconnues sont les coefficients de Fourier de la série décrivant la réponse, sera résolu. Le calcul de ces coefficients est la principale difficulté de la méthode de balance harmonique. Plusieurs recherches ont procédé à ce calcul pour divers cas de non-linéarités telles que : une raideur cubique [Raghothama et al., 1999], une raideur linéaire par morceaux [Lau et al., 1992] ou un amortissement de type frottement sec [Pierre et al., 1985].

Une méthode, dénommée AFT 'Alternating Frequency Time', a été introduite par [Cameron et al., 1989] pour surmonter la limitation introduite par le calcul analytique des termes non

linéaires. Elle consiste à utiliser une procédure numérique réalisant des passages fréquentiels/temporels pour l'évaluation des non-linéarités. A partir des coefficients de Fourier de la réponse à chaque itération, l'idée de base est d'évaluer temporellement cette réponse via un algorithme de transformée de Fourier discrète (DFT) puis d'évaluer les termes non linéaires. L'obtention des coefficients de Fourier du terme non linéaire est ensuite réalisée par une transformée de Fourier inverse (IDFT).

Une méthode de balance harmonique a été développée récemment par [Cochelin et al., 2009] afin de simplifier les expressions des termes non linéaires. Il s'agit de transformer les non-linéarités en termes quadratiques en ajoutant des variables internes. Cette méthode est largement inspirée de la méthode asymptotique numérique (MAN) [Damil et al., 1990].

La méthode de Galerkin est utilisée par [Lewandowski, 1997] afin de transformer des équations différentielles de mouvement non linéaires en un système d'équations algébriques résolu par la méthode de continuation. La stabilité des réponses stationnaires est alors étudiée par l'auteur en utilisant la théorie de Floquet.

1.6.1.6. Méthode de collocation

La méthode de collocation permet de déterminer les solutions périodiques d'un système non linéaire. Comme la méthode de balance harmonique, elle donne une forme prédéfinie à la solution cherchée sous forme d'une fonction polynomiale. Elle consiste à vérifier l'équation à résoudre sur un nombre de points, appelés points de collocation et qui présentent des instants de la période de la solution. Un système d'équations algébriques non linéaires est alors obtenu et sera résolu par un solveur non linéaire.

Une alternative à cette méthode utilisant une évaluation des efforts non linéaires par transformée de Fourier discrète est appelée méthode de collocation trigonométrique. [Hwang et al., 1991] ont utilisé cette méthode en conjonction avec la méthode de balance harmonique pour l'étude des rotors non linéaires.

1.6.2. Calcul des modes non linéaires

Les Modes Non Linéaires (MNLs) (Nonlinear Normal Modes) sont utiles pour caractériser la non-linéarité et la localiser. Ils mettent en évidence le phénomène de transfert irréversible d'énergie entre des systèmes couplés.

Les MNLs sont définis de plusieurs manières :

1.6.2.1. Approche de Rosenberg

Une première définition des MNLs a été proposée par [Rosenberg, 1966] où les MNLs d'un système conservatif sont définis comme les vibrations où tous les points de la structure atteignent leur valeurs maximales et passent par leurs positions d'équilibre (zéro) en même temps.

En se basant sur la définition de Rosenberg, plusieurs travaux se sont intéressés à l'étude de la stabilité et la bifurcation des MNLs. La plupart de ces recherches ont considéré des systèmes conservatifs et à deux degrés de liberté. [Vakakis, 1997] s'est intéressé au phénomène de localisation, la stabilité et la bifurcation des MNLs pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté et pour des réponses libres et forcées.

[Bouc et al., 2003] et [Bellizzi et al., 2005] ont proposé, à partir de la forme générale de la réponse libre des systèmes linéaires, une nouvelle formulation pour le calcul des MNLs de type Rosenberg pour des systèmes mécaniques non linéaires discrets et conservatifs. Ils ont défini un MNL par la donnée de deux fonctions de type 'fréquence' et 'forme modale' et qui dépendent de deux variables qui sont appelées respectivement amplitude et phase. Bouc et Bellizzi ont aussi proposé une nouvelle approche de calcul des MNLs pour les systèmes non linéaires dissipatifs avec amortissement proportionnel ou non proportionnel.

1.6.2.2. Approche de Shaw et Pierre

Une seconde définition des MNLs repose sur des variétés de l'espace des phases. Un MNL est défini par Shaw et Pierre [Shaw et al., 1993] et [Shaw et al., 1994] comme un mouvement inclus dans une variété invariante de dimension deux de l'espace des phases. Concrètement, cela revient à choisir un mode comme maître et exprimer les mouvements et les vitesses des degrés de liberté restants, appelées esclaves, en fonction du déplacement et de la vitesse de ce mode maître.

En se basant sur l'approche de Shaw et Pierre, [Pesheck et al., 2002] ont proposé une nouvelle approche 1-mode de MNLs où les surfaces invariantes des MNLs sont paramétrées par l'amplitude et la phase du mode maître au lieu du déplacement et de la vitesse.

[Jiang et al., 2005] ont adapté l'approche de [Pesheck et al., 2001] pour des systèmes soumis à une excitation harmonique et aussi pour des systèmes dont les forces internes non linéaires sont affines par morceaux [Jiang et al., 2004]. Ils ont généralisé cette approche pour le cas des systèmes présentant des résonances internes entre les modes.

1.6.2.3. Approche 'formes normales'

Le principe de cette approche consiste à minimiser le nombre de termes non linéaires, jusqu'à un ordre fixé à l'avance, en faisant des changements de variables. De ce fait, l'équation de la dynamique obtenue sera sous forme simplifiée et appelée 'forme normale' dont l'analyse est facile. Cette méthode est fondée sur la théorie de la 'forme normale' de Poincaré et Poincaré-Dulac [Guckenheimer et al., 1986].

[Nayfeh, 1995] a proposé une méthode directe fondée sur la théorie de la 'forme normale' afin de construire des MNLs pour les systèmes continus. Cette méthode est appliquée à des systèmes conservatifs continus ayant des non-linéarités cubiques. Nayfeh a comparé la méthode de 'formes normales' avec d'autres méthodes et a conclu que cette méthode peut s'appliquer même aux systèmes avec résonance interne.

[Jezequel et al., 1991] ont présenté une variante de cette méthode. Ils ont détaillé la réponse des systèmes non linéaires à deux degrés de liberté sous oscillation libre et oscillation forcée. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux calculés par la méthode à échelles multiples et la méthode numérique de Runge-Kutta.

[Touzé, 2003] a utilisé l'approche de la forme normale pour calculer les MNLs d'un système conservatif non linéaire discret. Cependant, le domaine de validité de cette méthode est limité étant donné qu'elle se base sur une technique de développement asymptotique.

Le calcul des MNLs est accompagné par les méthodes asymptotiques, de continuation, etc. [Kerschen et al., 2006] a montré que ces outils ne sont pas encore applicables à tous les systèmes. Chaque cas doit être étudié à part tout en tenant compte du nombre de degré de liberté, le type d'excitation, la nature de la non-linéarité, ...

1.7. Conclusions

Ce chapitre est constitué d'une synthèse bibliographique sur les vibrations non linéaires de systèmes mécaniques, notamment les techniques de contrôle des vibrations et les méthodes numériques de résolution.

Dans un premier temps, les techniques de contrôle de vibration en ingénierie mécanique ont été présentées. Plusieurs techniques sont efficaces notamment les absorbeurs de vibrations non linéaires qui ont une performance considérable dans l'atténuation vibratoire. L'optimisation de ces absorbeurs constitue un champ de recherche fertile à explorer.

Les méthodes numériques de résolution des systèmes non linéaires sont analysées et les différentes approches de calcul des modes non linéaires sont présentées. L'accent est mis encore sur les modèles développés dans la littérature. Pour cela, un système à deux degrés de liberté présentant une non-linéarité géométrique de contact est étudié. L'étude du comportement dynamique de ce système est effectuée et comparée par deux méthodes : la méthode de Newton-Raphson et la méthode asymptotique numérique.

L'analyse des modes est réalisée avec une formulation explicite développée par [\[Siller et al., 2004\]](#) pour la détermination des fonctions de réponse en fréquence et les modes non linéaires. Des phénomènes non linéaires sont mis en valeur notamment le phénomène du saut.

Une attention particulière est encore portée sur les différents dispositifs expérimentaux réalisés dans des travaux de recherche. Il s'est avéré que les essais expérimentaux sont rares et beaucoup moins abordés que les développements numériques.

Chapitre 2

RESOLUTION DE L'EQUATION DE MOUVEMENT NON LINEAIRE

2.1. Introduction

Afin d'étudier les performances des absorbeurs des vibrations non linéaires, un système à deux degrés de liberté avec des butées est proposé. Ce système présente un comportement non linéaire dû au contact entre les butées et la masse de l'absorbeur. La résolution de l'équation du mouvement est assurée suite au développement d'un algorithme implicite préconditionné d'ordre élevé. Cet algorithme, mentionné dans [Braikat et al, 2004] et [Cochelin et al, 2007], est basé sur l'introduction d'une homotopie, un schéma implicite de Newmark et l'utilisation de la méthode asymptotique numérique (MAN). Le modèle dynamique du système à deux degrés de liberté avec des butées inclue une force de contact dont l'expression n'est pas analytique. Pour surmonter la difficulté de la singularité de ce modèle, nous proposons de remplacer l'expression non-analytique de la force de contact par une autre qui est régularisée. Une comparaison avec la technique Newton-Raphson permet de montrer les avantages de la méthode proposée.

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article intitulé "Asymptotic numerical method for the dynamic study of nonlinear vibration absorbers" et publié dans « *International Journal of Applied Mechanics* » [Djemaal et al., 2014].

2.2. Modèle dynamique du système à deux degrés de liberté

Le système étudié est un oscillateur linéaire attaché à un absorbeur de vibration non linéaire. Il s'agit d'un système à deux degrés de liberté avec butées dont la composition est la suivante (figure 2.1) :

- Bâti fixe
- La masse M_1 (masse à isoler) est soumise à une force sinusoïdale $F = F_0 \sin(\omega t)$.
- Les butées sont fixées sur la masse M_1 et agissent sur la masse M_2 .
- K_1 et K_2 représentent respectivement les rigidités de la liaison entre le bâti et M_1 et entre M_1 et M_2 .
- C_1 et C_2 représentent respectivement l'amortissement aux niveaux des masses M_1 et M_2 .

- K_c est la raideur de contact au niveau des butées.

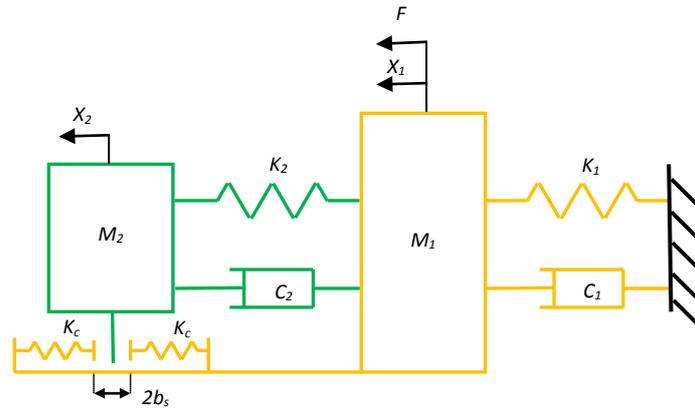


Figure 2.1. Système à deux degrés de liberté avec butées

L'équation du mouvement de ce système est donnée par:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F_c\} = \{F_{ext}\} \quad (2.1)$$

$\{q\} = \{x_1, x_2\}^T$, $\{\dot{q}\}$ et $\{\ddot{q}\}$ représentent les vecteurs déplacement, vitesse et accélération généralisés respectivement, avec les conditions initiales suivantes :

$$\{q\}(t=0) = \{q_0\}; \quad \{\dot{q}\}(t=0) = \{\dot{q}_0\} \quad (2.2)$$

$[M]$ est la matrice des masses du système :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

$[C]$ est la matrice d'amortissements du système :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

$[K]$ est la matrice des rigidités du système :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

$\{F\}$ est le vecteur forces extérieures appliquées sur le système :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\{F_c\}$ est le vecteur force de contact non linéaire entre les deux butées et la masse M_2 :

$$\{F_c\} = \begin{Bmatrix} -F_c \\ F_c \end{Bmatrix}$$

Le déplacement relatif entre les deux masses M_1 et M_2 peut être écrit comme suit :

$$\delta = x_1 - x_2 = \langle u \rangle \{q\} \quad (2.3)$$

$$\text{Avec: } \langle u \rangle = \{1, -1\}$$

La force de contact F_c peut être définie par l'expression non analytique comme suit :

$$F_c = \begin{cases} 0 & \text{si } |\delta| < b_s \\ K_c(\delta - b_s) & \text{si } \delta > b_s \\ K_c(\delta + b_s) & \text{si } \delta < -b_s \end{cases} \quad (2.4)$$

Où $2b_s$ est le jeu total entre les deux butées.

L'utilisation de la méthode de Newton-Raphson ou la méthode asymptotique numérique exige que la fonction non linéaire doive être régulière. A cet effet, l'expression non-analytique de la force de contact (2.4) est remplacée par une autre régularisée comme suit [El Ouehabi et al, 2011]:

$$F_c(\delta) = K_c \delta + \frac{1}{2} \sqrt{K_c^2 (\delta - b_s)^2 + 4\eta^2 b_s^2} - \frac{1}{2} \sqrt{K_c^2 (\delta + b_s)^2 + 4\eta^2 b_s^2} \quad (2.5)$$

Où η est un paramètre de régularisation très petit. Sa valeur est choisie de telle sorte que la fonction régularisée (2.5) tend à la forme donnée dans l'équation (2.4).

La figure 2.2 présente l'évolution de la force de contact régularisée (2.5) en fonction du déplacement relatif pour différentes valeurs de η .

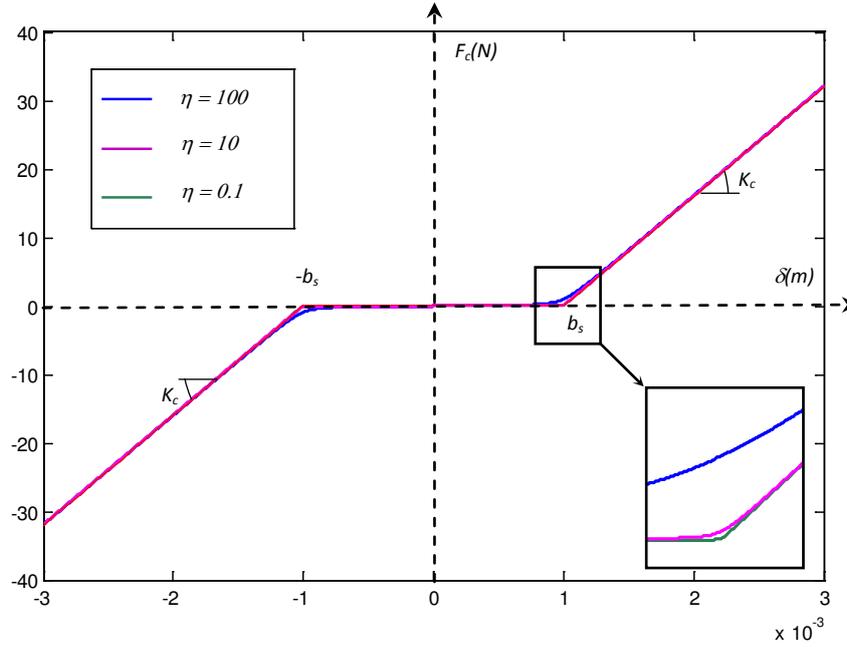


Figure 2.2. Force de contact entre la masse M_2 et les butées

2.3. Méthode de Newton-Raphson

Pour résoudre l'équation dynamique non linéaire de ce système, la méthode classique de Newton-Raphson couplée avec le schéma implicite de Newmark est utilisée.

La méthode de Newmark permet de retrouver les vecteurs déplacement, vitesse et accélération à chaque instant. Le principe de cette méthode consiste à calculer les vecteurs déplacement, vitesse et accélération à l'instant $(t+1)$ à partir des grandeurs de ces vecteurs calculées à l'instant (t) .

L'équation de mouvement dynamique du système étudié peut s'écrire à l'instant $(t+1)$ de la façon suivante :

$$[M] \left\{ \ddot{X} \right\}_{t+1} + [C] \left\{ \dot{X} \right\}_{t+1} + [K] \left\{ X \right\}_{t+1} + \left\{ F_c \left(\left\{ X \right\}_{t+1} \right) \right\} = \left\{ F \right\}_{t+1} \quad (2.6)$$

Le vecteur déplacement et vitesse à l'instant $(t+1)$ peuvent être approximés par :

$$\left\{ X \right\}_{t+1} = \left\{ X \right\}_t + h \left\{ \dot{X} \right\}_t + b * h^2 \left[\left(\frac{1}{2*b} - 1 \right) \left\{ \ddot{X} \right\}_t + \left\{ \ddot{X} \right\}_{t+1} \right] \quad (2.7)$$

$$\left\{ \dot{X} \right\}_{t+1} = \left\{ \dot{X} \right\}_t + h * (1-a) \left\{ \ddot{X} \right\}_t + (a*h) \left\{ \ddot{X} \right\}_{t+1} \quad (2.8)$$

Avec :

- h est le pas du temps.
- a et b sont les constantes de Newmark généralement égales à 0.5.

A partir des deux équations précédentes, le vecteur accélération à l'instant $(t+1)$ est déduit :

$$\left\{ \ddot{X} \right\}_{t+1} = \frac{1}{b^* h^2} \left[\left\{ X \right\}_{t+1} - \left\{ X \right\}_i - h \left\{ \dot{X} \right\}_t \right] - \left(\frac{1}{2a} - 1 \right) \left\{ \ddot{X} \right\}_t \quad (2.9)$$

En remplaçant les expressions des vecteurs déplacement, vitesse et accélération dans l'équation de mouvement, l'équation suivante est obtenue :

$$\left[\overline{K} \right] \left\{ X \right\}_{t+1} + \left\{ F_c \right\} = \left\{ \overline{F} \right\}_{t+1} \quad (2.10)$$

Avec :

$$\left[\overline{K} \right] = \left[K \right] + \frac{1}{b^* h^2} \left[M \right] + \frac{a}{b^* h} \left[C \right] \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{F} \right\}_{t+1} = & \left\{ F \right\}_{t+1} + \left[M \right] \left(\frac{1}{b^* h^2} \left\{ x \right\}_i + \frac{1}{b^* h} \left\{ \dot{x} \right\}_t + \left(\frac{1}{2^* a} - 1 \right) \left\{ \ddot{x} \right\}_t \right) \\ & + \left[C \right] \left(a^* h \left\{ x \right\}_t + (a^* h^2 - 1) \left\{ \dot{x} \right\}_t - \frac{h}{2} \left\{ \ddot{x} \right\}_t \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

On calcule le résidu afin de corriger les valeurs du déplacement, de la vitesse et de l'accélération à l'itération k . Ce résidu s'exprime par :

$$\left\{ R^k \right\} = \left[\overline{K} \right] \left\{ X \right\}_{t+1} + \left\{ F_c \right\} - \left\{ \overline{F} \right\}_{t+1} \quad (2.13)$$

Si le résidu n'est pas acceptable c.à.d. $R^k > \varepsilon$, on attribue au vecteur déplacement la correction ΔX suivante :

$$\left\{ \Delta X \right\} = \left(\frac{\partial R}{\partial X} \Big|_{t+1}^k \right)^{-1} \left\{ -R_{t+1}^k \right\} \quad (2.14)$$

Avec :

$$\frac{\partial R}{\partial X} \Big|_{t+1}^k = \left[\overline{K} \right] + \left[\frac{\partial F_c}{\partial X} \right] \quad (2.15)$$

Et par suite le vecteur déplacement corrigé sera :

$$\left\{ X \right\}_{t+1} = \left\{ X \right\}_{t+1} + \left\{ \Delta X \right\} \quad (2.16)$$

Une fois le déplacement est calculé à l'instant $(t+1)$, on peut retrouver facilement la vitesse et l'accélération à l'instant $(t+1)$ en utilisant les équations (2.7) et (2.8).

Cette méthode est résumée dans l'organigramme présenté dans la figure 2.3.

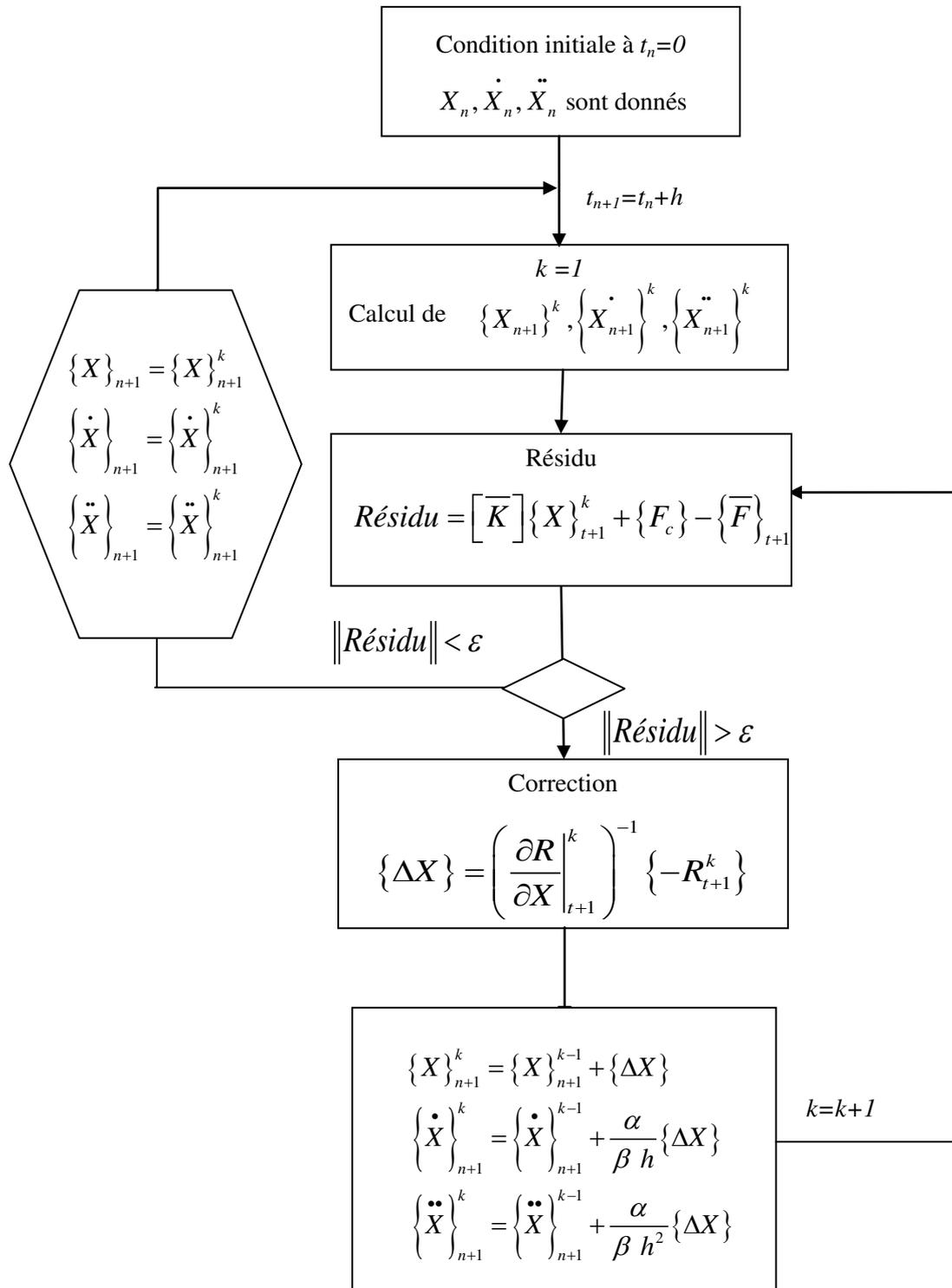


Figure 2.3. Organigramme explicatif de la méthode de Newton-Raphson

2.4. Méthode asymptotique numérique

2.4.1. Introduction

La Méthode Asymptotique Numérique (MAN) est une technique de résolution d'ordre élevé qui est basée sur un quasi développement en série de Taylor par étape. Cette méthode est capable de fournir une solution utile pour suivre les courbes de réponse fortement non-linéaire, comme dans les problèmes de contact ou en présence de bifurcations ou quasi-bifurcations. [Cochelin et al., 2007] ont appliqué la MAN pour résoudre des équations aux dérivées partielles lisses telles que l'élasticité non-linéaire. La méthode a été utilisée aussi pour l'étude des vibrations des plaques [Azrar et al., 1998] et l'étude statique des coques en grandes rotations [Zahrouni et al., 1999]. Plusieurs auteurs ont traité les bifurcations par la MAN: [Damil et Poitier-Ferry, 1990], [Vannucci et al., 1998] et [Baguet et Cochelin 2003].

[Potier-Ferry et al., 1997] ont proposé des techniques de régularisation afin d'adapter la MAN aux modèles non lisses comme le contact unilatéral, la plasticité ou dommage. En effet, la série de Taylor ne peut être appliquée que si les fonctions non linéaires sont définies par des fonctions lisses. [Braikat et al., 1997] ont utilisé la MAN pour étudier la déformation de plasticité et [Assidi et al., 2009] ont proposé des procédures de régularisation qui permettent de résoudre les problèmes élastoplastiques.

2.4.2. Forme quadratique

En utilisant l'expression analytique de la force de contact (2.5), l'équation de mouvement (2.1) devient:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + F_c(\delta)\langle u \rangle^T = \{F_{ext}\} \quad (2.17)$$

L'expression de la force de contact non linéaire est mise sous forme quadratique afin de faciliter le développement des paramètres inconnus en série de puissance et de calculer numériquement ces séries jusqu'à un ordre élevé.

Pour obtenir un problème quadratique, nous réécrivons (2.5) sous la forme suivante:

$$F_c(\delta) = K_c \delta + \frac{1}{2}(h(\delta) - g(\delta)) \quad (2.18)$$

Où $h(\delta)$ et $g(\delta)$ sont donnés par:

$$h^2(\delta) = K_c^2 (\delta - b_s)^2 + 4\eta^2 b_s^2 \quad (2.19)$$

$$g^2(\delta) = K_c^2 (\delta + b_s)^2 + 4\eta^2 b_s^2 \quad (2.20)$$

En tenant compte des équations (2.18), (2.19) et (2.20), le problème (2.17) admet une solution analytique. Dans ce cas, l'application de la technique de perturbation est possible.

2.4.3. Algorithme implicite d'ordre élevé

L'algorithme proposé [Jamal et al, 2002] et [El Ouehabi et al, 2011], pour résoudre le problème (2.17), (2.18) et (2.3) avec les conditions initiales (2.2), se compose de quatre étapes. En premier lieu, un changement de variables est réalisé dans le but de réduire les conditions initiales à zéro. Deuxièmement, le schéma de Newmark est utilisé pour la discrétisation en temps. Troisièmement, la technique d'homotopie sert à transformer le problème en un autre problème artificiel en introduisant un paramètre ε . Enfin, le problème transformé est résolu en appliquant la technique de perturbation.

2.4.3.1. Changement de variable

Soit $\langle w \rangle$ le vecteur des paramètres inconnus du problème (2.17), (2.18) et (2.3) avec des conditions initiales (2.2) $\langle w \rangle = \langle q, \delta, h, g \rangle$:

Afin de réduire les conditions initiales à zéro, le changement de variable suivant est introduit :

$$\{w\} = \{w_0\} + \{W\} \quad (2.21)$$

Où $\langle w_0 \rangle = \langle q_0, \delta_0, h_0, g_0 \rangle$ représente la condition initiale du problème d'origine et $\langle W \rangle = \langle Q, D, H, G \rangle$ est le nouvel ensemble de paramètres inconnus. L'équation du mouvement (2.17) devient:

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} + (k_c D + \frac{1}{2}(H - G))\langle u \rangle^T = \{S\} \quad (2.22)$$

Avec:

$$D = \langle u \rangle \{Q\} \quad (2.23)$$

$$2h_0 H = k_c^2 (\delta_0 - b_s) D + k_c^2 D^2 - H^2 \quad (2.24)$$

$$2g_0 G = k_c^2 (\delta_0 - b_s) D + k_c^2 D^2 - G^2 \quad (2.25)$$

$$\{Q\}(t=0) = \{0\} \quad (2.26)$$

$$\{\dot{Q}\}(t=0) = \{0\} \quad (2.27)$$

Le nouveau second élément $\{S\}$ en (2.22) est définie par:

$$\{S\} = \{F_{ext}\} - [K] \{q_0\} + F_c(\delta_0) \{v\} \quad (2.28)$$

2.4.3.2. Discrétisation en temps

Dans cette étape, les équations (2.22 à 2.25) sont écrites à l'instant $t = (n+1)\Delta t$ en utilisant le schéma implicite de Newmark:

$$\begin{cases} \{\ddot{Q}^{n+1}\} = a_0 \{Q^{n+1}\} - a_2 \{\ddot{Q}^n\} - a_1 \{\dot{Q}^n\} - a_0 \{Q^n\} \\ \{\dot{Q}^{n+1}\} = b_0 \{\dot{Q}^n\} + b_1 \{\ddot{Q}^n\} + b_2 \{\ddot{Q}^{n+1}\} \end{cases} \quad (2.29)$$

Où Δt est l'incrément du temps, les coefficients dans (2.29) sont:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} & a_1 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ b_0 &= 1 & b_1 &= \Delta t(1 - \beta) & b_2 &= \Delta t \beta \\ \alpha &= \frac{1}{2} & \beta &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

En utilisant les approximations de la vitesse et de l'accélération en (2.29), l'équation de mouvement (2.22) est écrite à l'instant $t = (n+1)\Delta t$ en tant que :

$$\left[K_t^{n+1} \right] \{Q^{n+1}\} + \{FQ(Q^{n+1}, Q^{n+1})\} = \{E^{n+1}\} \quad (2.30)$$

La forme quadratique dans (2.30) est donnée par :

$$\{FQ(Q^{n+1}, Q^{n+1})\} = \frac{1}{4h_0g_0} \left(k_c^{2^{n+1}} (g_0 - h_0) D^{2^{n+1}} + g_0 G^{2^{n+1}} - h_0 H^{2^{n+1}} \right) \{v\}$$

La matrice tangente et le second membre dans (2.30) sont donnés par:

$$[K_t^{n+1}] = a_0 [M] + a_0 b_2 [C] + [K]$$

$$\{E^{n+1}\} = \{S^{n+1}\} - [M] \{\gamma^n\} - [C] \{V^n\}$$

Où $\{\gamma^n\}$ et $\{V^n\}$ sont donnés par:

$$\{\gamma^n\} = - \left(a_0 \{Q^n\} + a_1 \{\dot{Q}^n\} + a_2 \{\ddot{Q}^n\} \right)$$

$$\{V^n\} = -a_0 b_2 \{Q^n\} + (b_0 - a_1 b_2) \{\dot{Q}^n\} + (b_1 - a_2 b_2) \{\ddot{Q}^n\}$$

2.4.3.3. Technique d'homotopie

Au lieu de résoudre le problème (2.30), un problème artificiel est résolu. Une matrice arbitraire $[K^*]$ et un paramètre ε sont introduits dans le problème (2.30) de sorte que si $\varepsilon = 0$, un problème facile à résoudre est obtenu et pour $\varepsilon = 1$, le problème (2.30) est obtenu:

$$[K^*] \{Q^{n+1}\} + \varepsilon \left(([K_t^{n+1}] - [K^*]) \{Q^{n+1}\} + \{FQ(Q^{n+1}, Q^{n+1})\} \right) = \{E^{n+1}\} \quad (2.31)$$

La matrice arbitraire est introduite afin d'éviter l'inversion à chaque pas de temps puisque la matrice de rigidité dépend du temps. Au lieu de résoudre le problème (2.30), nous résolvons le problème artificiel (2.31) en prenant ε égal à un.

2.4.3.4. Technique de perturbation

Pour résoudre le problème (2.31), nous cherchons l'inconnu $\{W^{n+1}\}$ sous la forme d'une série tronquée de ε à l'ordre N :

$$\{W^{n+1}\} = \{W_0^{n+1}\} + \varepsilon \{W_1^{n+1}\} + \varepsilon^2 \{W_2^{n+1}\} + \dots + \varepsilon^N \{W_N^{n+1}\} \quad (2.32)$$

Les solutions polynomiales sont très proches à l'intérieur du rayon de convergence de la série et la séparation de la solution doit être évitée lorsque le rayon est atteint. Afin de s'assurer que la différence entre deux solutions d'ordre consécutif reste faible, le critère suivant est adopté [Cochelin, 1994]:

$$\frac{\|Q_N^{n+1} - Q_{N-1}^{n+1}\|}{\|Q_N^{n+1} - Q_0^{n+1}\|} = \frac{\|\varepsilon^N Q_N^{n+1}\|}{\|\varepsilon Q_1^{n+1} + \dots + \varepsilon^N Q_N^{n+1}\|} \leq \mu \quad (2.33)$$

μ est choisi assez petit de sorte qu'il est possible d'approximer le dénominateur à $\|\varepsilon Q_1^{n+1}\|$.

Dans ce cas, le domaine de validité est donné par l'équation :

$$\varepsilon_m = \left(\mu \frac{\|Q_1^{n+1}\|}{\|Q_N^{n+1}\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (2.34)$$

Le tableau 2.1 présente les valeurs de ε_m pour différentes valeurs du paramètre μ et de l'ordre de troncature N . Il est clair que le domaine de validité diminue avec des petites valeurs de μ et augmente avec des ordres de troncature grands.

	$\mu = 10^{-1}$	$\mu = 10^{-2}$	$\mu = 10^{-3}$	$\mu = 10^{-4}$	$\mu = 10^{-5}$
Ordre 5	0.56	0.32	0.18	0.10	0.06
Ordre 10	0.77	0.60	0.46	0.36	0.28
Ordre 15	0.85	0.72	0.61	0.52	0.44
Ordre 20	0.88	0.78	0.70	0.62	0.54

Tableau 2. 1. Valeurs de ε_m

ε_m reste toujours comprise entre 0 et 1. L'évolution de ε_m en fonction du temps à l'ordre 20 est présentée dans la figure 2.4.

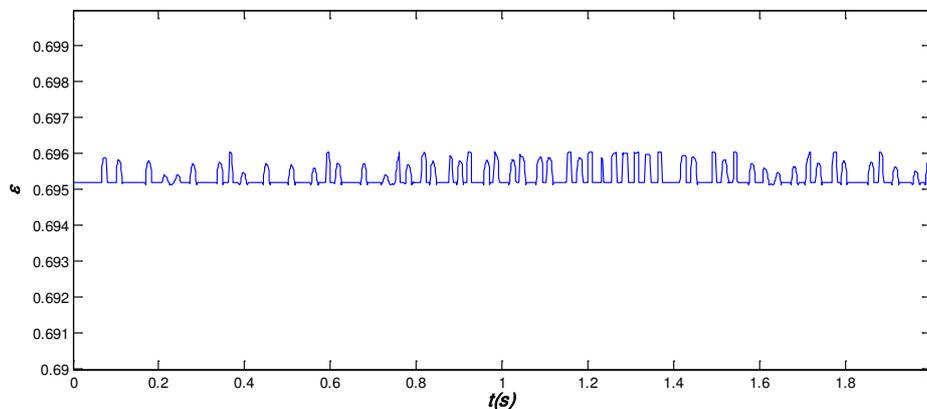


Figure 2.4. Variation temporelle de ε_m

En injectant (2.32) dans (2.31) et en identifiant terme à terme selon les puissances de \mathcal{E} , une série de problèmes vérifiés par les termes de la série est obtenue :

Ordre 0

$$\left\{ \begin{array}{l} [K^*] \{Q_0^{n+1}\} = \{E^{n+1}\} \\ D_0^{n+1} = \langle u \rangle \{Q_0^{n+1}\} \\ H_0^{n+1} = \frac{K_c^2 (\delta_0 - b) D_0^{n+1}}{h_0} + \frac{K_c^2 (D_0^{n+1})^2 - (H_0^{n+1})^2}{2h_0} \\ G_0^{n+1} = \frac{K_c^2 (\delta_0 + b) D_0^{n+1}}{g_0} + \frac{K_c^2 (D_0^{n+1})^2 - (G_0^{n+1})^2}{2g_0} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} [K^*] \{Q_1^{n+1}\} = -([K_t^{n+1}] - [K^*]) \{Q_0^{n+1}\} - \{FQ(Q_0^{n+1}, Q_0^{n+1})\} \\ D_1^{n+1} = \langle u \rangle \{Q_1^{n+1}\} \\ H_1^{n+1} = \frac{K_c^2 (\delta_0 - b) D_1^{n+1}}{h_0} + \frac{K_c^2 (2D_0^{n+1} D_1^{n+1}) - (2H_0^{n+1} H_1^{n+1})}{2h_0} \\ G_1^{n+1} = \frac{K_c^2 (\delta_0 + b) D_1^{n+1}}{g_0} + \frac{K_c^2 (2D_0^{n+1} D_1^{n+1}) - (2G_0^{n+1} G_1^{n+1})}{2g_0} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Ordre2 p >= 2

$$\left\{ \begin{array}{l} [K^*] \{Q_p^{n+1}\} = -([K_t^{n+1} \{q_0\}] - [K^* \{q_0\}]) \{Q_{p-1}^{n+1}\} - \sum_{r=0}^{p-1} \{FQ(Q_r^{n+1}, Q_{p-1-r}^{n+1})\} \\ D_p^{n+1} = \langle \{Q_p^{n+1}\}, \{u\} \rangle \\ H_p^{n+1} = \frac{K_c^2 (\delta_0 - b) D_p^{n+1}}{h_0} + \frac{K_c^2 \left(\sum_{r=0}^{p-1} D_r^{n+1} D_{p-1-r}^{n+1} \right) - \left(\sum_{r=0}^{p-1} H_r^{n+1} H_{p-1-r}^{n+1} \right)}{2h_0} \\ G_p^{n+1} = \frac{K_c^2 (\delta_0 + b) D_p^{n+1}}{g_0} + \frac{K_c^2 \left(\sum_{r=0}^{p-1} D_r^{n+1} D_{p-1-r}^{n+1} \right) - \left(\sum_{r=0}^{p-1} G_r^{n+1} G_{p-1-r}^{n+1} \right)}{2g_0} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Toutes ces équations (2.35), (2.36) et (2.37) admettent la même matrice. Quel que soit l'ordre N , la matrice arbitraire est inversée une fois seulement. Ceci est l'un des principaux avantages de la MAN en comparaison avec la méthode de Newton-Raphson.

2.5. Comparaison des deux méthodes

Dans la suite, un oscillateur linéaire attaché à un absorbeur non linéaire ayant les paramètres indiqués dans le tableau 2.2 est étudié.

Paramètres	Valeurs
Masse M_1 (kg)	1,8
masse M_2 (kg)	0,45
raideur K_1 (N/m)	8000
raideur K_2 (N/m)	2000
raideur K_c (N/m)	$2 * K_1$
Amortissement C_1 (N/m.s ⁻¹)	0.89
Amortissement C_2 (N/m.s ⁻¹)	0.22
Force F_0 (N)	10

Tableau 2.2. Propriétés mécaniques

La masse M_1 est soumise à une force harmonique $F(t) = F_0 \sin(2\pi ft)$, où F_0 est l'amplitude de la force et f est la fréquence d'excitation. L'amortissement est choisi proportionnel à la masse et à la rigidité : $C = \alpha M + \beta K$ ($\alpha = 0.05$ et $\beta = 10^{-4}$).

Afin de valider la procédure de la méthode asymptotique numérique, une comparaison avec les résultats issus de la méthode de Newton-Raphson classique est effectuée. Tous les résultats suivants calculés par la MAN sont obtenus pour un ordre de troncature 20.

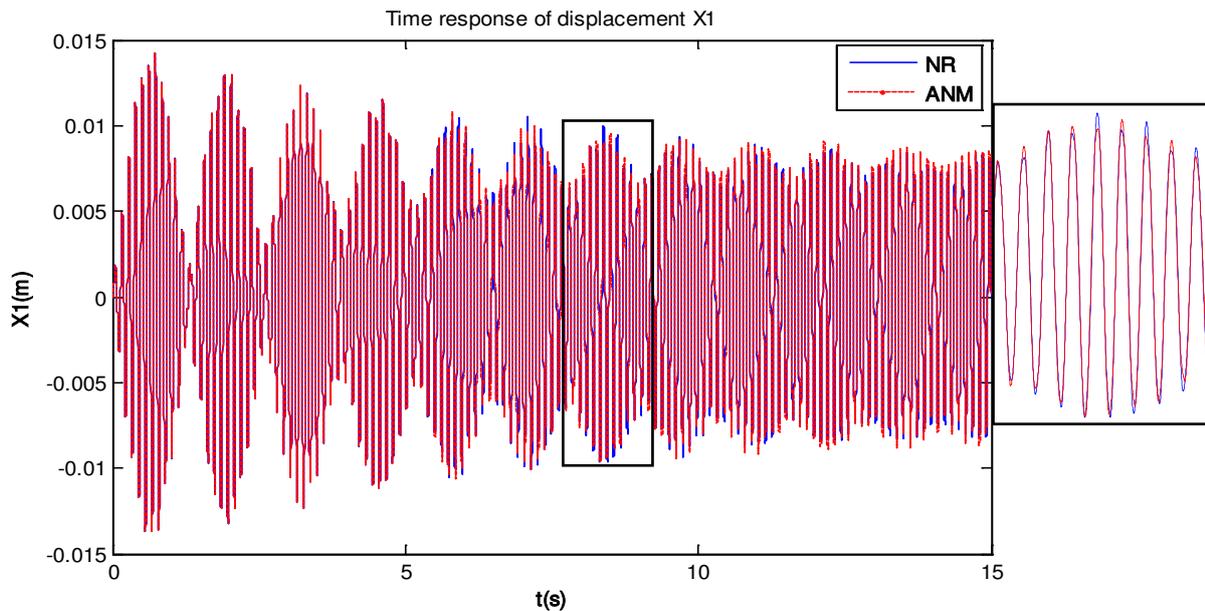


Figure 2.5. Réponse temporelle du déplacement de la masse M_1 ($f = 8.5$ Hz; jeu = 2 mm)

La figure 2.5 présente la réponse temporelle du déplacement de la masse M_I calculée par la MAN et la méthode de Newton-Raphson (NR). On observe bien une coïncidence du comportement dynamique obtenue par les deux méthodes. Avec la méthode NR, il était nécessaire d'inverser plusieurs fois la matrice tangente, alors que pour la MAN une seule inversion est faite. Le nombre d'itérations fait avec la méthode NR peut atteindre 4 itérations pour un petit résidu imposé. Le tableau 2.3 présente le nombre d'itérations pour la méthode de NR pour différents résidus choisis.

	MAN (ordre 10)	NR		
		10^{-6}	10^{-10}	10^{-14}
Nombre d'itérations	1	2	3	4

Tableau 2.3. Comparaison du nombre d'itérations

La figure 2.6 illustre la variation temporelle du résidu pour la méthode NR et la MAN (ordre 5 et ordre 20). Pour la méthode NR, le résidu est choisi inférieur à 10^{-6} . Avec la MAN, il ne dépasse pas 10^{-8} pour l'ordre 5 et il est environ de 10^{-14} pour l'ordre 20. La MAN est plus précise que la méthode NR. Lorsque l'ordre de troncature N augmente, la précision devient meilleure.

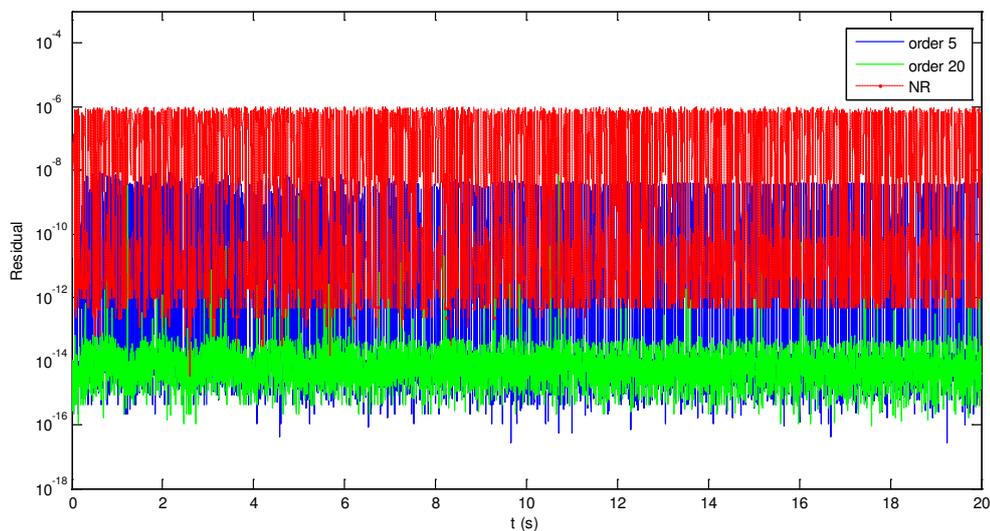


Figure 2.6. Comparaison du résidu ($f = 8.5$ Hz; jeu = 2 mm)

2.6. Influence du jeu sur la réponse dynamique calculée par la MAN

Pour examiner l'influence du jeu sur la réponse dynamique non linéaire du système calculée par la MAN, deux cas sont étudiés : petit et grand jeu.

2.6.1. Cas d'un grand jeu

Un grand jeu de 40 mm est fixé entre les deux butées de sorte qu'il n'y aura pas de possibilité de contact au cours du mouvement. Par conséquent, le système se comporte comme un oscillateur linéaire attaché à un absorbeur linéaire (Figure 2.7).

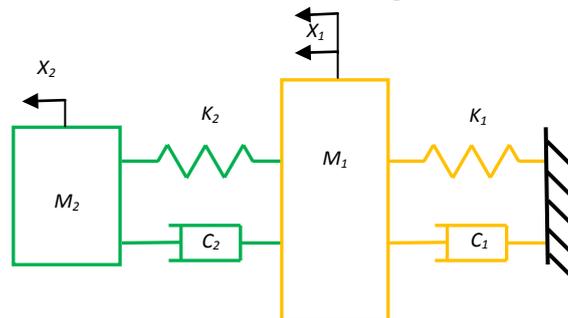


Figure 2.7. Système linéaire à 2 d.d.l.

La figure 2.9 représente la variation temporelle du déplacement de la masse primaire M_1 et la masse de l'absorbeur M_2 pour plusieurs fréquences d'excitation en cas d'un grand jeu. Pour obtenir la fonction de réponse en fréquence du système, un balayage en fréquence d'excitation est effectué entre 5 et 30 Hz (Figure 2.8). Deux pics correspondant aux deux fréquences propres du système sont remarqués ($f_1 = 8,3$ Hz, $f_2 = 13,5$ Hz).

La fréquence d'antirésonance f_a est égale à $\sqrt{K_1/M_1}/2\pi = 10,5$ Hz.

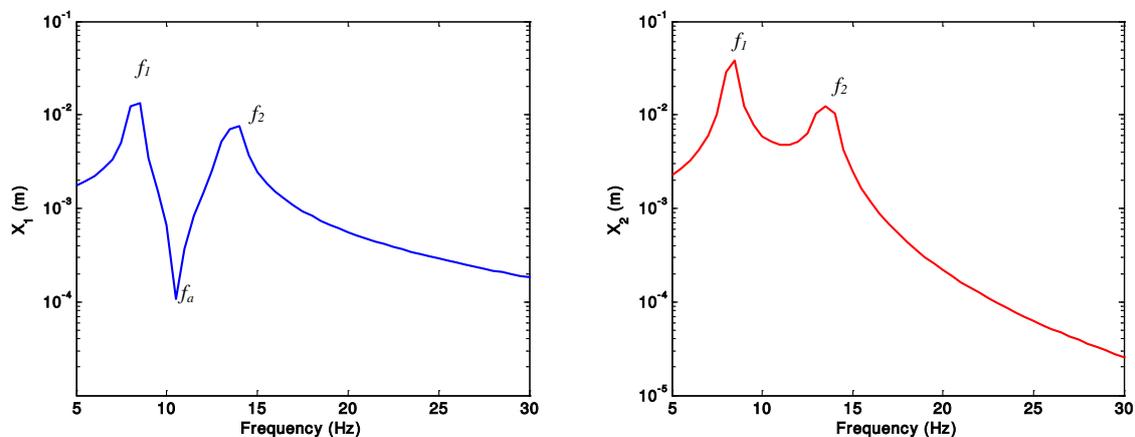


Figure 2.8. Fonction de réponse en fréquence (jeu = 40 mm)

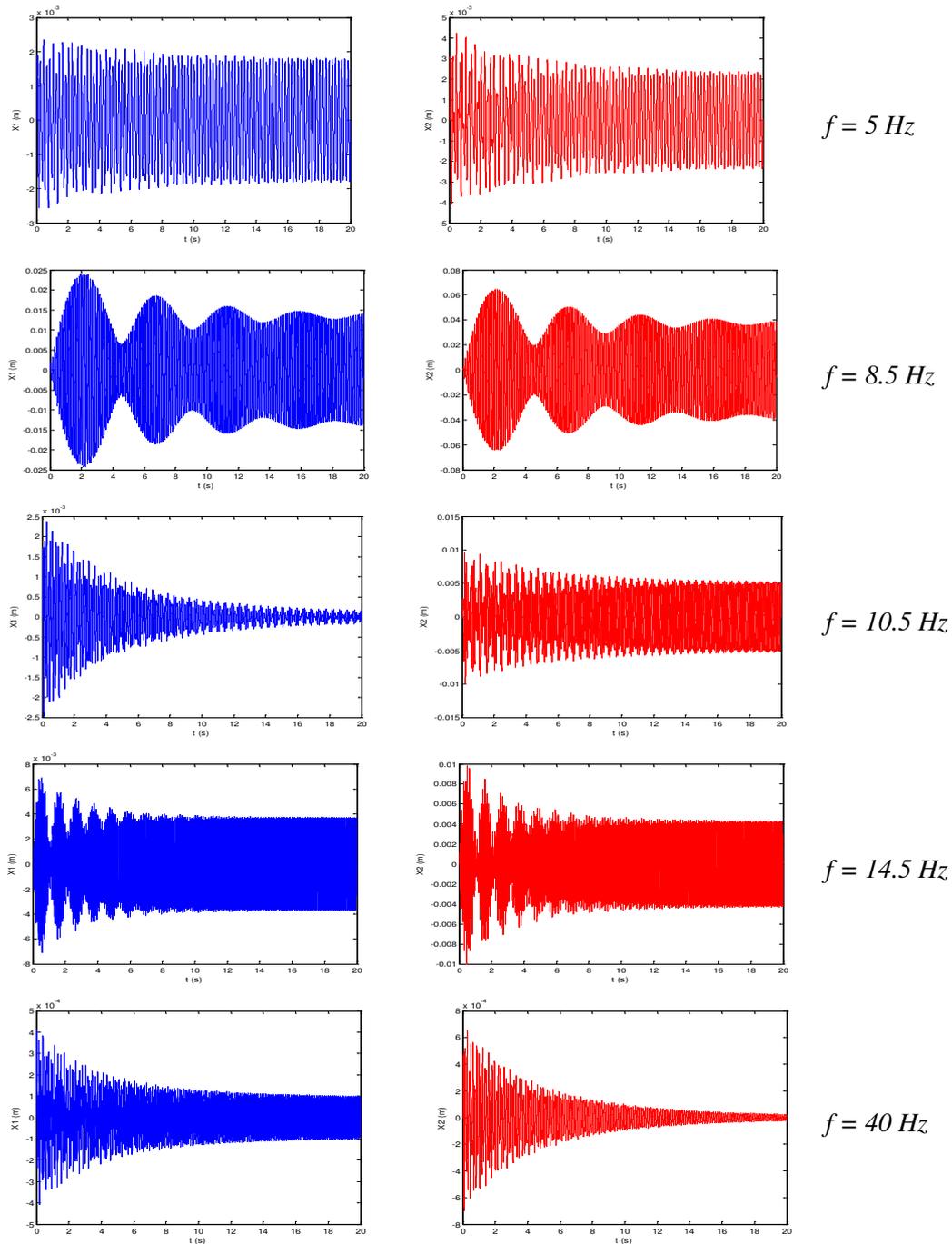


Figure 2.9. Variation temporelle du déplacement (jeu = 40 mm)
Gauche: masse primaire M_1 (X_1). Droite: masse de l'absorbeur M_2 (X_2)

2.6.2. Cas d'un petit jeu

En utilisant un jeu égal à 2 mm, la masse M_2 arrive à taper sur les deux butées. La force de contact F_c suit l'équation (2.4). Ceci est représenté par la variation temporelle de la fonction

de contact dans la figure 2.11. Ainsi, le système se comporte comme un oscillateur linéaire attaché à un absorbeur non linéaire illustré comme suit (figure 2.10):

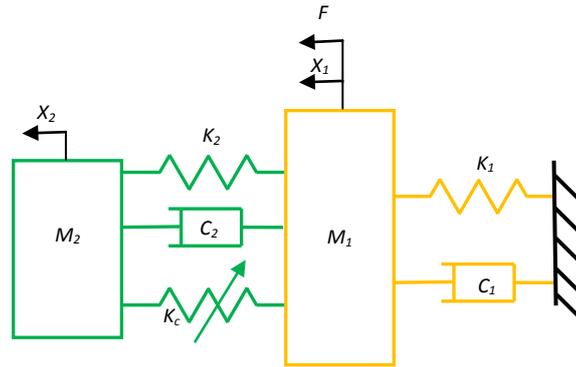


Figure 2.10. Système non linéaire à 2 d.d.l

La figure 2.11 montre la variation temporelle de la force de contact dans le cas d'un petit jeu. Il est clairement observé que la force de contact est égale à zéro quand il n'y a pas de contact et change de signe en fonction de la face de contact avec les butées.

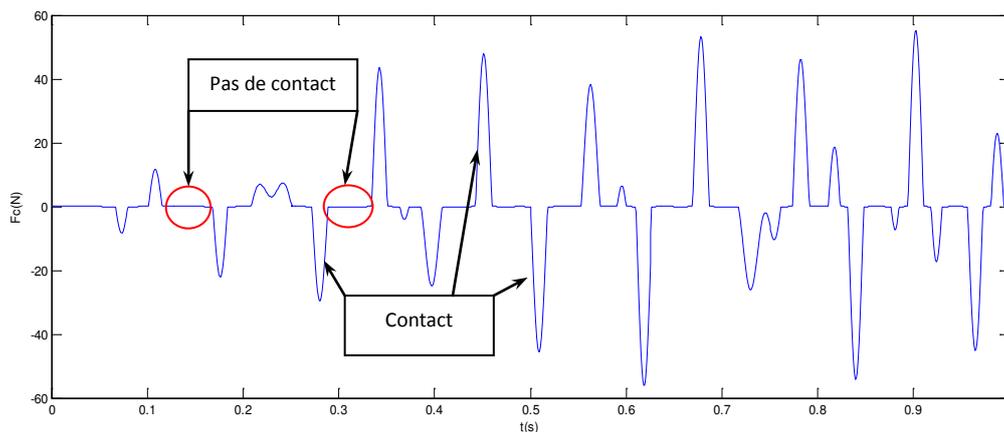


Figure 2.11. Variation temporelle de la force de contact ($f = 8.5$ Hz, jeu = 2 mm)

La figure 2.12 représente la variation temporelle du déplacement de la masse primaire M_1 et la masse de l'absorbeur pour différentes fréquences d'excitation en cas d'un jeu faible. La réponse stationnaire est caractérisée par des oscillations quasi périodiques. Ces oscillations conduisent à l'échange d'énergie entre l'absorbeur et l'oscillateur linéaire (pompage d'énergie) ce qui joue un rôle important dans l'atténuation des vibrations.

Les amplitudes de déplacement dans le cas d'un petit jeu sont plus faibles que dans le cas d'un jeu important surtout au voisinage des fréquences de résonance (Figure 2.13). Donc, un petit jeu a une grande influence sur l'atténuation des vibrations.

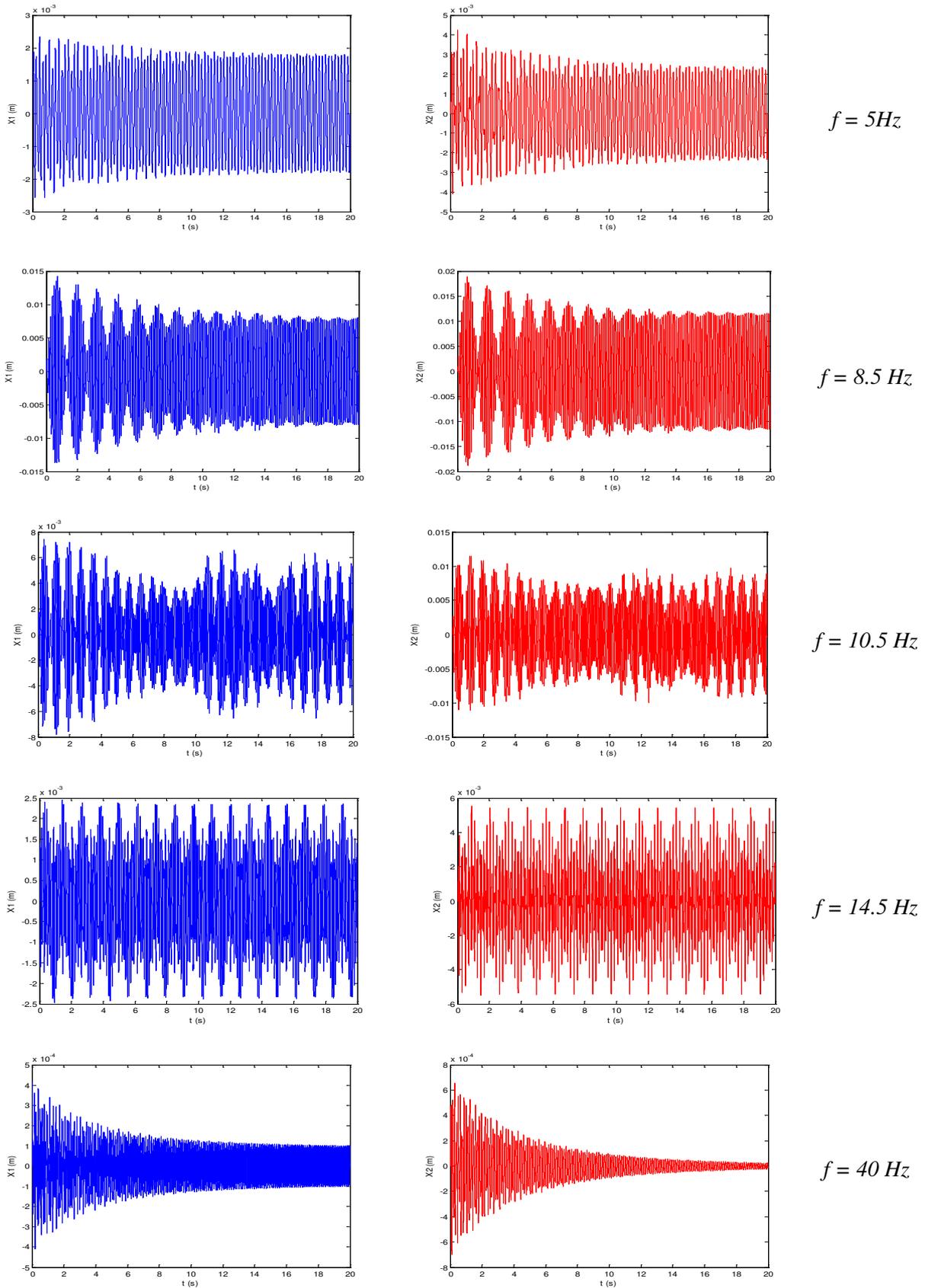


Figure 2.12. Variation temporelle du déplacement (jeu = 2 mm)
 Gauche: masse primaire M_1 (X_1). Droite: masse de l'absorbeur M_2 (X_2)

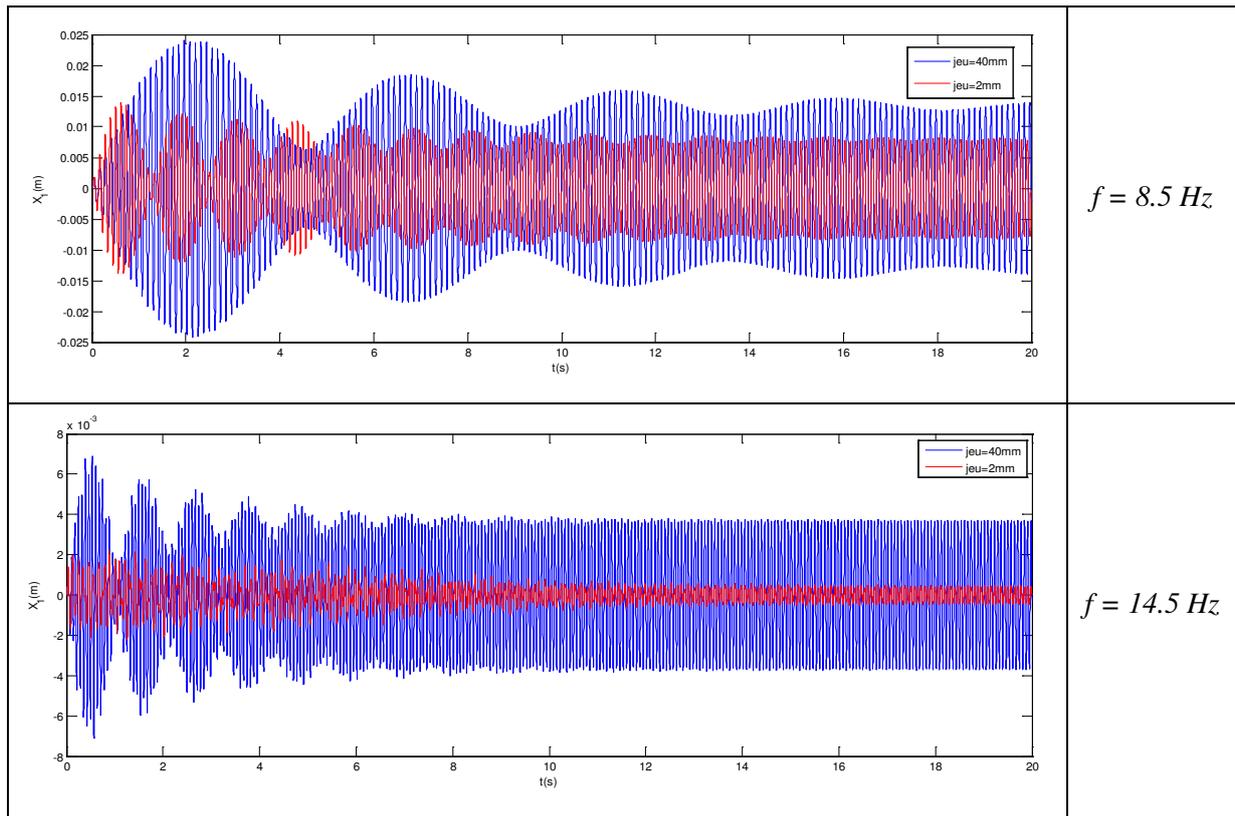


Figure 2.13. Variation temporelle du déplacement de masse M_1 pour deux cas du jeu

La figure 2.14 représente la fonction de réponse en fréquence du déplacement de la masse primaire M_1 et la masse de l'absorbeur M_2 en cas d'un jeu faible. Une grande atténuation du niveau d'amplitude de déplacement est observée surtout au niveau de la seconde fréquence de résonance.

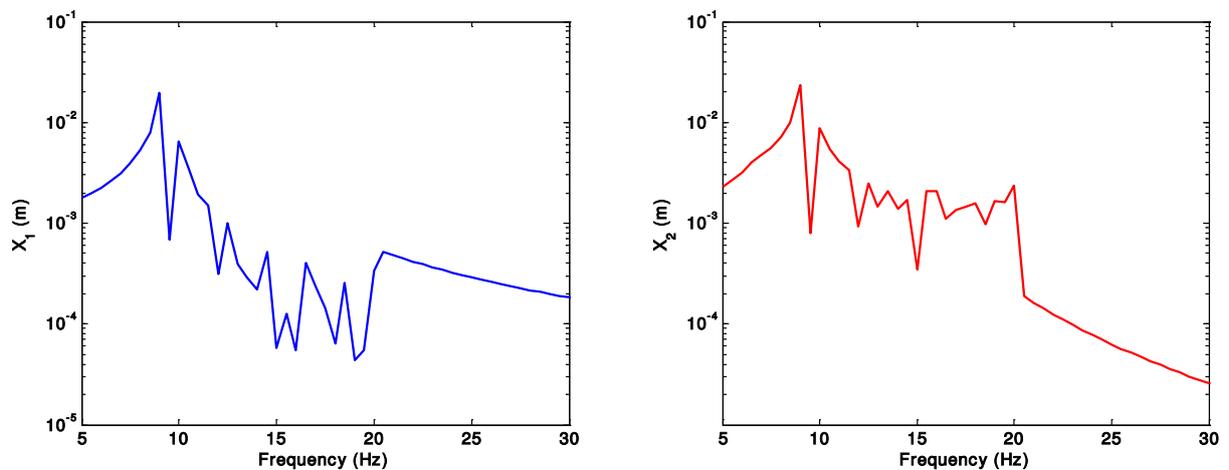


Figure 2.14. Fonction de réponse en fréquence (jeu = 2 mm)

Dans le cas d'un jeu important, le système se comporte comme un système à deux degrés de liberté linéaire ayant deux fréquences de résonance. Lorsque la valeur du jeu diminue, le système devient non linéaire et les fréquences propres sont modifiées en particulier pour la seconde fréquence propre. Cela est dû à ce que la rigidité K_2 est affectée par la valeur du jeu. Lorsque le jeu devient trop faible ($0,002\text{ mm}$), le système se comporte comme un système linéaire à deux degrés de liberté, mais avec deux fréquences propres différentes qui s'étendent sur une bande plus large (Figure 2.15).

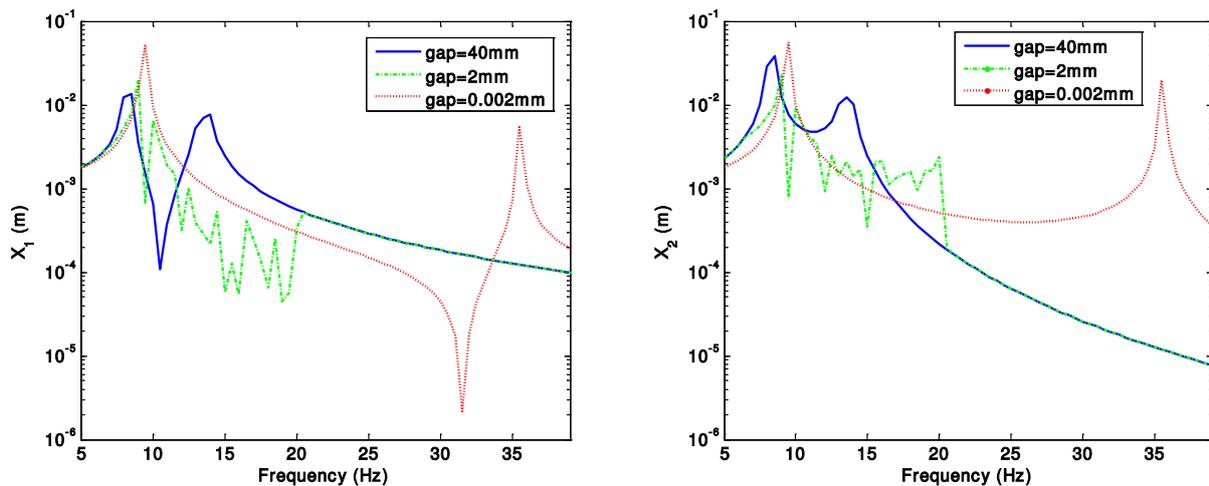


Figure 2.15. Influence du jeu sur la fonction de réponse en fréquences

2.7. Etude des modes dans l'espace de configuration et de phase

La détermination des modes normaux est d'une grande importance dans l'étude des systèmes vibrants. Les modes normaux linéaires (MNLs) sont faciles à interpréter et constituent un outil performant pour les ingénieurs de structure praticiens. En plus des propriétés mathématiques intéressantes (invariance et superposition modale), les MNLs ont des caractéristiques dynamiques pertinentes qui peuvent être exploitées pour divers objectifs, y compris la réduction de modèle (par exemple, techniques de sous-structuration), l'analyse modale expérimentale, méthode des éléments finis et la surveillance de structures.

L'exploitation de ces performances est en aucun cas possible, d'où l'existence d'un besoin énorme pour des techniques d'analyse efficaces, rigoureuses et largement applicables pour l'investigation de la dynamique des structures non linéaires. Dans ce contexte, les modes normaux non linéaires (MNNS) offrent un outil théorique et mathématique solide pour l'interprétation d'une large classe de phénomènes dynamiques non linéaires ; phénomène de

saut, bifurcation, saturation, sous-harmonique, résonance surharmonique et interne, capture de résonance, cycles limites, interactions modales et chaos.

Dans cette partie, les modes normaux sont représentés dans l'espace de configuration et de phase. L'influence du degré de non-linéarité, due aux valeurs du jeu et au niveau de l'excitation, sur ces modes est étudiée.

2.7.1. Représentation des modes en fonction du jeu

La valeur du jeu choisie détermine le degré de non-linéarité du système étudié (Figure 2.1). Pour cela, les modes sont représentés pour plusieurs valeurs du jeu. En premier lieu, deux valeurs du jeu sont choisies pour distinguer le cas linéaire du cas non linéaire (un grand jeu de 40 mm pour le cas linéaire et un jeu de 2 mm pour le cas non linéaire). En deuxième lieu, en se situant dans le cas non linéaire, l'influence du degré de non-linéarité est étudiée pour des valeurs du jeu assez petites (jeu de 2 mm , 1 mm et 0.5 mm).

Le système étudié est excité par une force harmonique d'amplitude $10N$. Les modes sont représentés dans l'espace de configuration et de phase pour des valeurs de fréquences particulières : 5 Hz , 8.5 Hz (proche de la première fréquence propre), 10.5 Hz (proche de la fréquence d'antirésonance), 14.5 Hz (proche de la deuxième fréquence propre) et 40 Hz .

La figure 2.16 illustre la représentation, dans le cas d'un grand jeu ($jeu = 40\text{ mm}$) et pour ces différentes fréquences d'excitation, la réponse temporelle de la masse principale (X_1) et de l'absorbeur (X_2) (première colonne), l'espace de configuration (deuxième colonne) et l'espace de phase de X_1 (troisième colonne). Pour cette valeur de jeu, il n'y a pas contact entre la masse principale et celle de l'absorbeur ce qui traduit le comportement dynamique linéaire du système illustré par un premier mode normal linéaire en phase à la première fréquence propre et un deuxième mode normal linéaire en opposition de phase à la deuxième fréquence propre.

La réponse temporelle du système est présentée dans le régime stationnaire. Quelque soit la fréquence d'excitation, chaque composant du système se déplace avec la même fréquence et avec un rapport fixe.

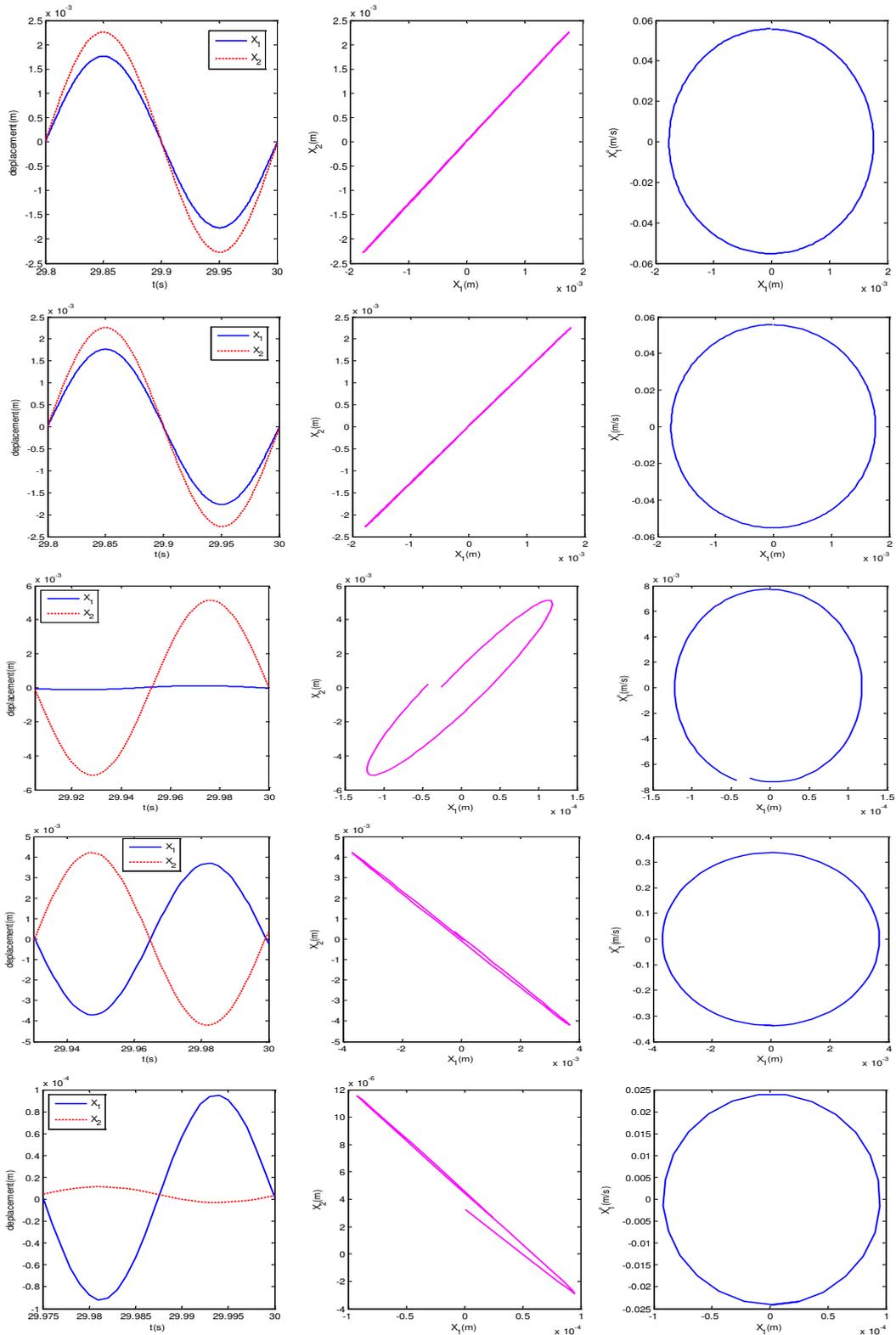


Figure 2.16. Représentation des espaces de configuration et de phase pour le cas d'un grand jeu (jeu = 40 mm). De gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $f=5\text{Hz}$, $f=8.5\text{Hz}$, $f=10.5\text{Hz}$, $f=14.5\text{Hz}$, $f=40\text{Hz}$

La figure 2.17 montre la représentation, dans le cas d'un petit jeu ($jeu = 2 \text{ mm}$) et pour les différentes fréquences d'excitation citées ci-dessus, la réponse temporelle de la masse principale (X_1) et de l'absorbeur (X_2) (première colonne), l'espace de configuration (deuxième colonne) et l'espace de phase de X_1 (troisième colonne).

Pour la première fréquence d'excitation 5 Hz , le contact entre les deux masses n'aura pas lieu. Ce comportement linéaire est traduit par un mode normal linéaire en phase (première ligne de la figure 2.17).

Pour la deuxième fréquence d'excitation 8.5 Hz , le niveau de vibration augmente et un contact se produit entre les deux masses, ce qui engendre un comportement non linéaire. La ligne modale (deuxième ligne de la figure 2.17) est une courbe résultant de la relation non linéaire entre les composants du système pendant le mouvement périodique.

Le même phénomène se produit au voisinage de la deuxième fréquence propre (fréquence d'excitation 14.5 Hz) avec la différence qu'il s'agit d'un mode non linéaire en opposition de phase (quatrième ligne de la figure 2.17).

A la fréquence 10.5 Hz , un phénomène de résonance interne 2:1 se produit (troisième ligne de la figure 2.17). En fait, la masse principale oscille à une fréquence double de celle de la masse de l'absorbeur. Ceci est dû à la propension des systèmes non-linéaires à générer des harmoniques à partir de la fréquence de l'excitation. Donc, le système ne vibre pas à l'unisson.

Quant la fréquence de 40 Hz est atteinte (loin de la deuxième fréquence propre), le niveau de vibration chute et le système présente un comportement linéaire (cinquième ligne de la figure 2.17).

En comparant les réponses dynamiques du système pour les deux cas du jeu, une atténuation de niveau de vibration est retrouvée pour le cas non linéaire correspondant à une faible valeur du jeu.

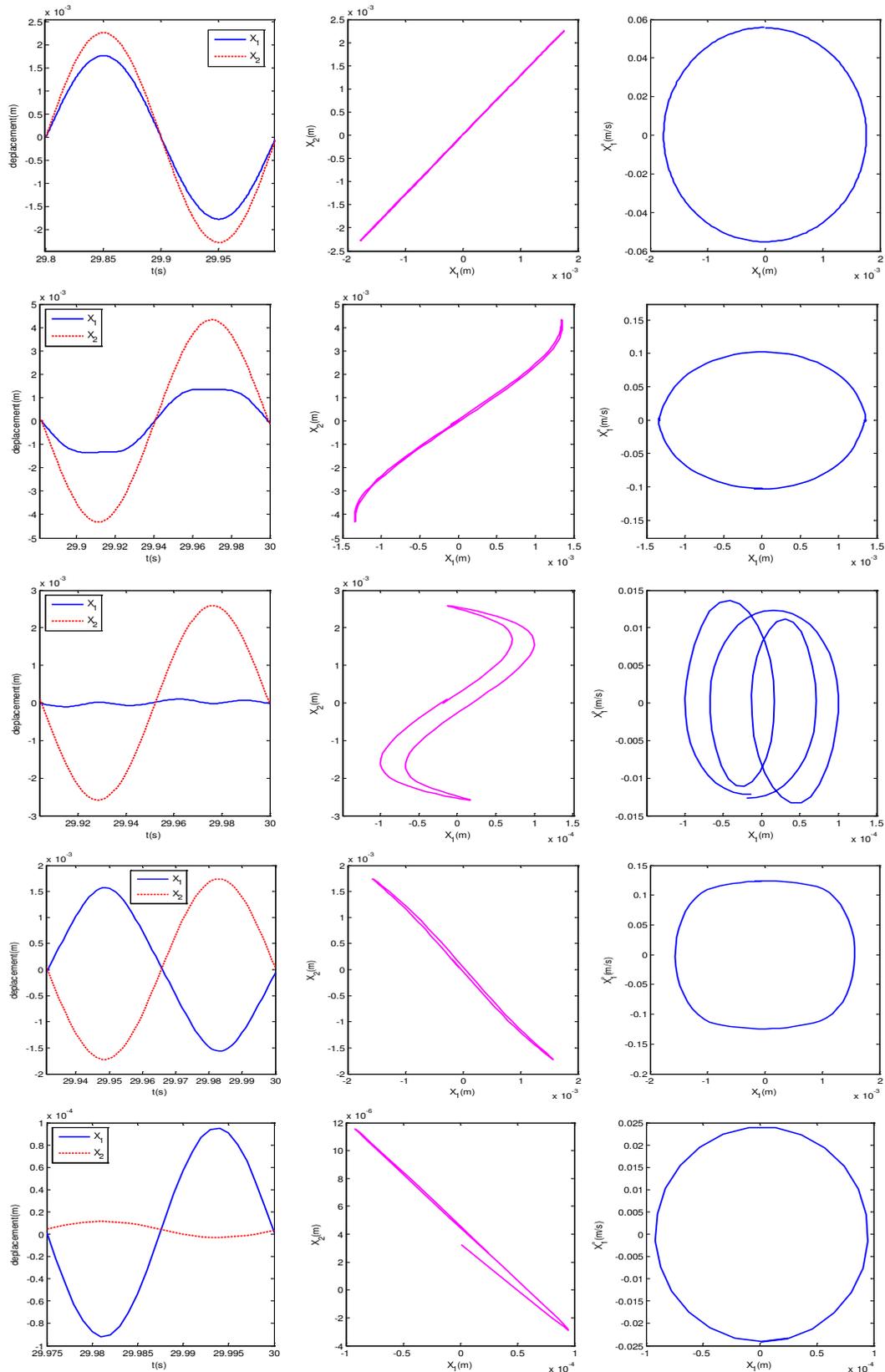


Figure 2.17. Représentation des espaces de configuration et de phase pour le cas d'un petit jeu (jeu = 2 mm). De gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $f=5\text{Hz}$, $f=8.5\text{Hz}$, $f=10.5\text{Hz}$, $f=14.5\text{Hz}$, $f=40\text{Hz}$.

Afin d'étudier l'influence de la non-linéarité sur le comportement dynamique du système, des valeurs de jeu plus faibles sont choisies : 2 mm , 1 mm et 0.5 mm . L'amplitude de la force d'excitation harmonique est de 10 N . La représentation des modes est faite pour les fréquences d'excitation : 8.5 Hz , 10.5 Hz et 14.5 Hz .

La figure 2.18 illustre la représentation des modes non linéaires pour la fréquence d'excitation 8.5 Hz (proche de la première fréquence propre). On constate que la diminution de la valeur du jeu engendre le phénomène de distorsion harmonique. En effet, la diminution du jeu augmente le degré de non-linéarité, ce qui favorise la génération des harmoniques.

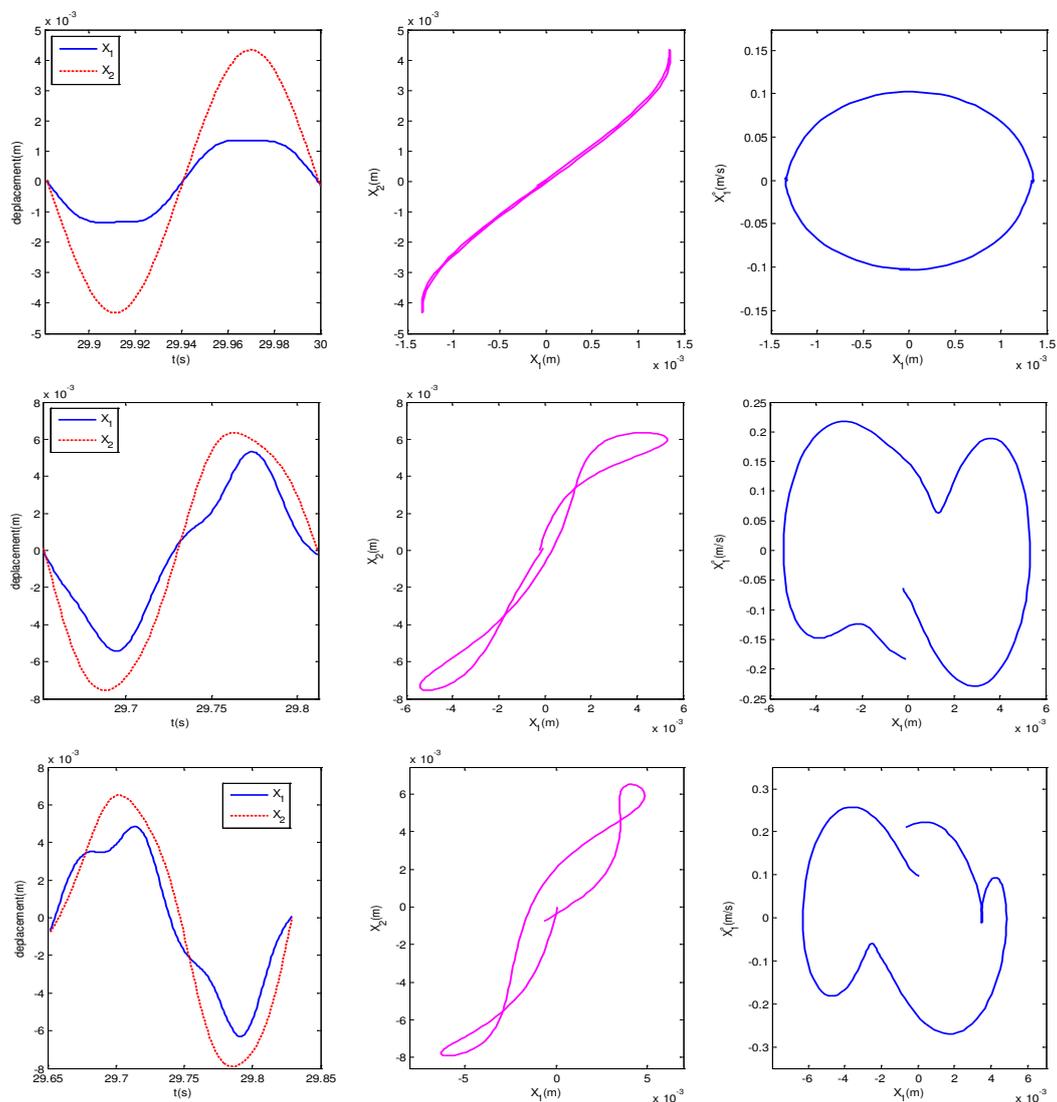


Figure 2.18. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 8.5 Hz pour différentes valeurs du jeu. De gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; jeu = 2 mm , 1 mm , 0.5 mm

Ce phénomène est bien observé dans la réponse temporelle. Pour plus de visibilité, il suffit d'observer les réponses en vitesse et en accélération du système. En effet, les amplitudes des harmoniques dans la réponse en déplacement seront multipliées respectivement par ω et ω^2 . Ceci permet de mieux constater cette distorsion harmonique sur ces grandeurs.

La figure 2.19 fournit une représentation des modes non linéaires pour la fréquence d'excitation 10.5 Hz . Au fur et à mesure que la non-linéarité s'accroît, le phénomène de distorsion harmonique est plus visible. Cependant, pour la valeur du jeu la plus faible le niveau de vibration augmente.

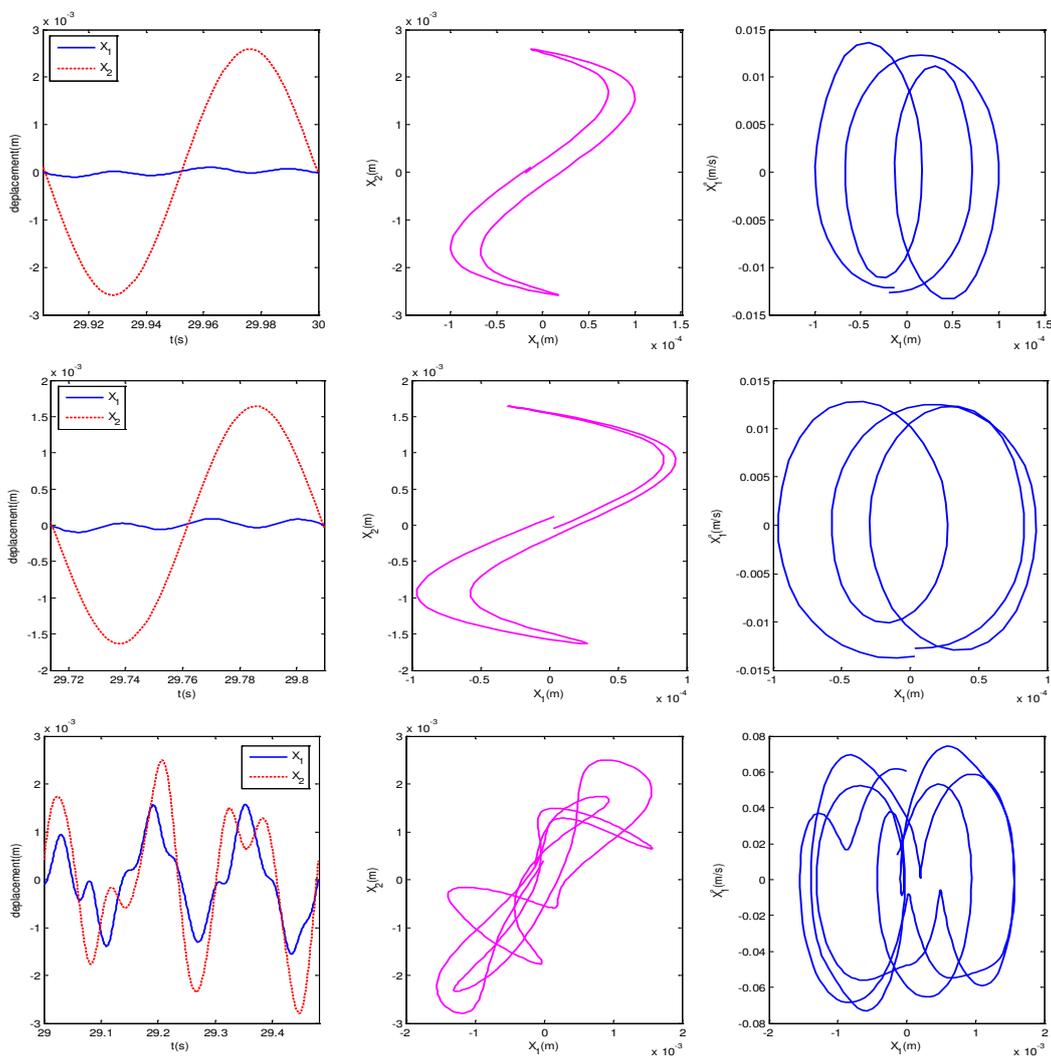


Figure 2.19. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 10.5 Hz pour différents valeurs du jeu. De gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; jeu = 2 mm, 1 mm, 0.5 mm

Les modes non linéaires sont représentés dans la figure 2.20 pour la fréquence d'excitation 14.5 Hz (proche de la deuxième fréquence propre). La diminution de la valeur du jeu est accompagnée par une diminution des amplitudes de vibration. A titre indicatif, l'amplitude du déplacement de la masse M_1 , en régime établi, passe de 1.5 mm (pour un jeu de 2 mm) à une amplitude de 0.6 mm (pour un jeu de 0.5 mm).

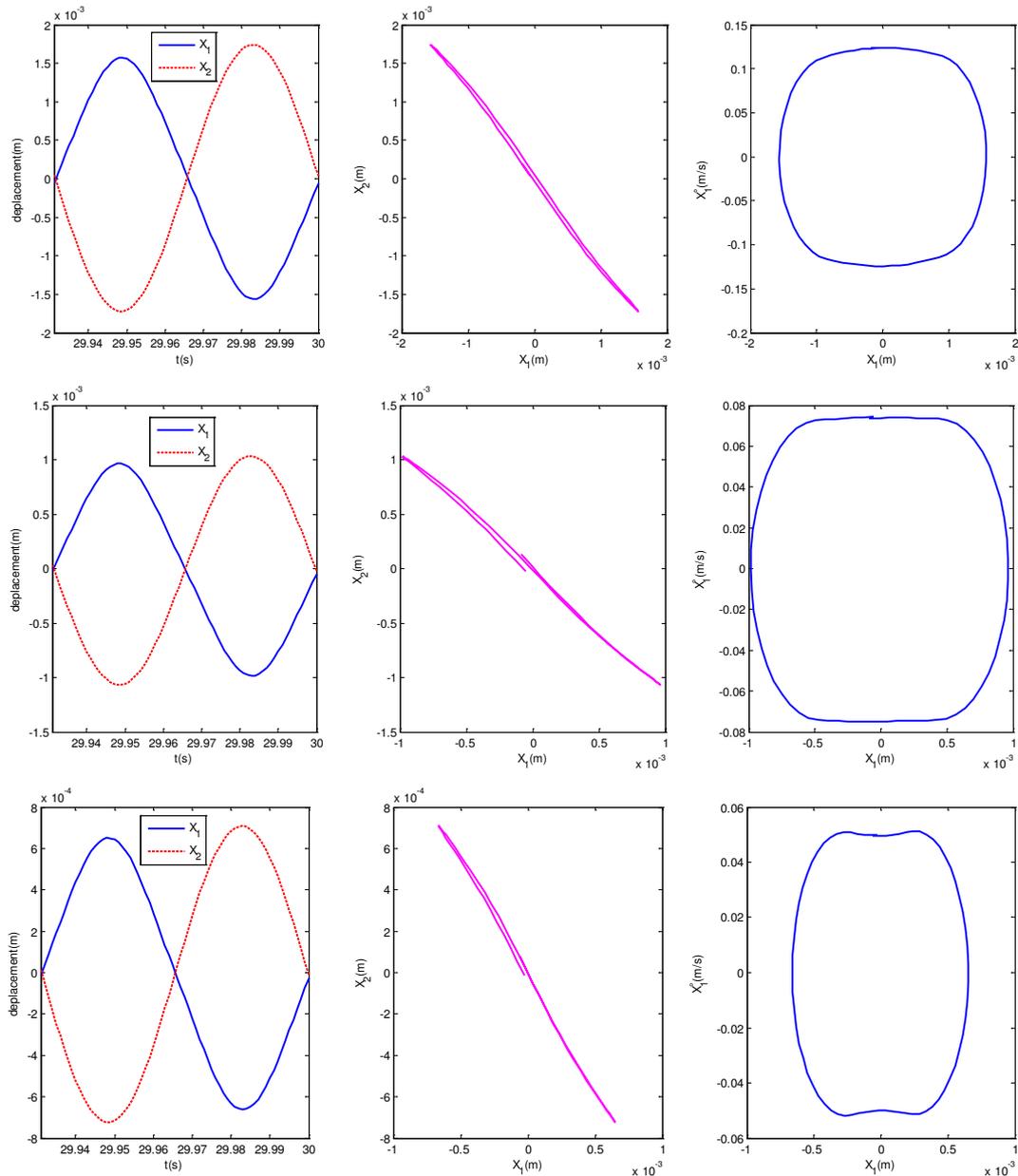


Figure 2.20. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 14.5 Hz pour différents valeurs du jeu. De gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; jeu = 2 mm , 1 mm , 0.5 mm

En conclusion, une faible valeur du jeu entraîne l'apparition des phénomènes non linéaires et par la suite l'atténuation du niveau vibratoire. Continuer à diminuer automatiquement la valeur du jeu, n'implique pas la diminution de l'amplitude des vibrations. Une valeur du jeu optimale est bien évidemment à chercher et à ajuster suivant les conditions et l'environnement du travail.

2.7.2. Représentation des modes en fonction de l'amplitude d'excitation

En fixant une valeur du jeu à 2 mm , l'influence de l'amplitude d'excitation sur le comportement dynamique et les modes non linéaires du système est étudiée pour différents niveaux d'excitation harmonique: 10 N , 20 N et 30 N .

Les figures 2.21, 2.22 et 2.23 illustrent les représentations de la réponse temporelle, de l'espace de configuration et de l'espace de phase pour les fréquences d'excitation 8.5 Hz , 10.5 Hz et 14.5 Hz , respectivement.

Les phénomènes non linéaires, identifiés dans le cas de l'étude de l'influence du jeu sur le comportement dynamique et sur les modes normaux comme la distorsion harmonique et la résonance interne, sont encore présentes et de plus en plus visibles à fur et à mesure que l'amplitude de l'excitation augmente. En plus, les formes des lignes modales dépendent du niveau d'énergie présent dans le système.

En comparant les deux études paramétriques précédentes, on peut remarquer que la diminution de la valeur du jeu est similaire qualitativement à l'augmentation de l'amplitude d'excitation de point de vue comportement dynamique et interprétation des phénomènes non linéaires engendrés.

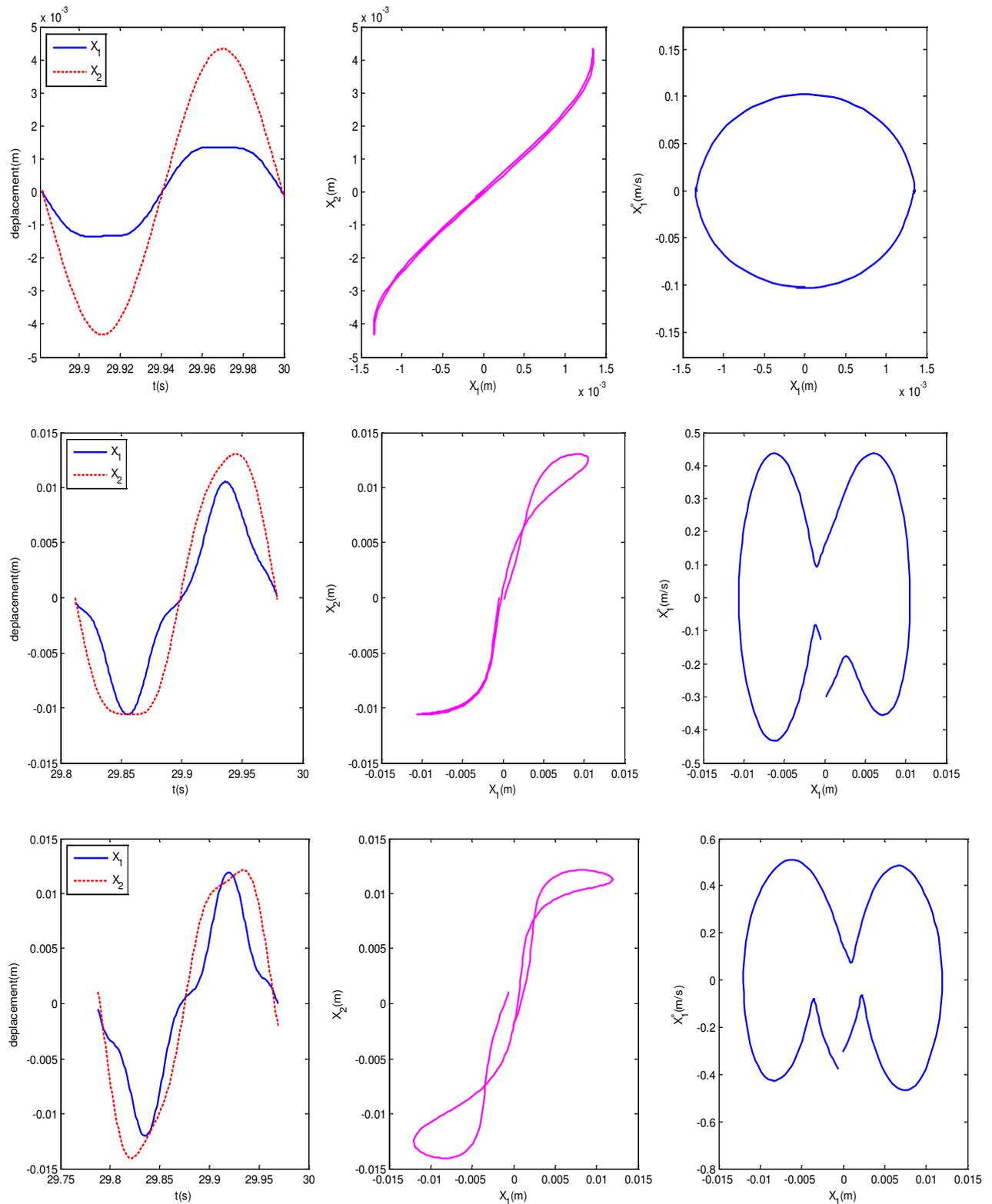


Figure 2.21. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 8.5 Hz pour différents amplitudes d'excitation. De gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $F=10N, 20N, 30N$

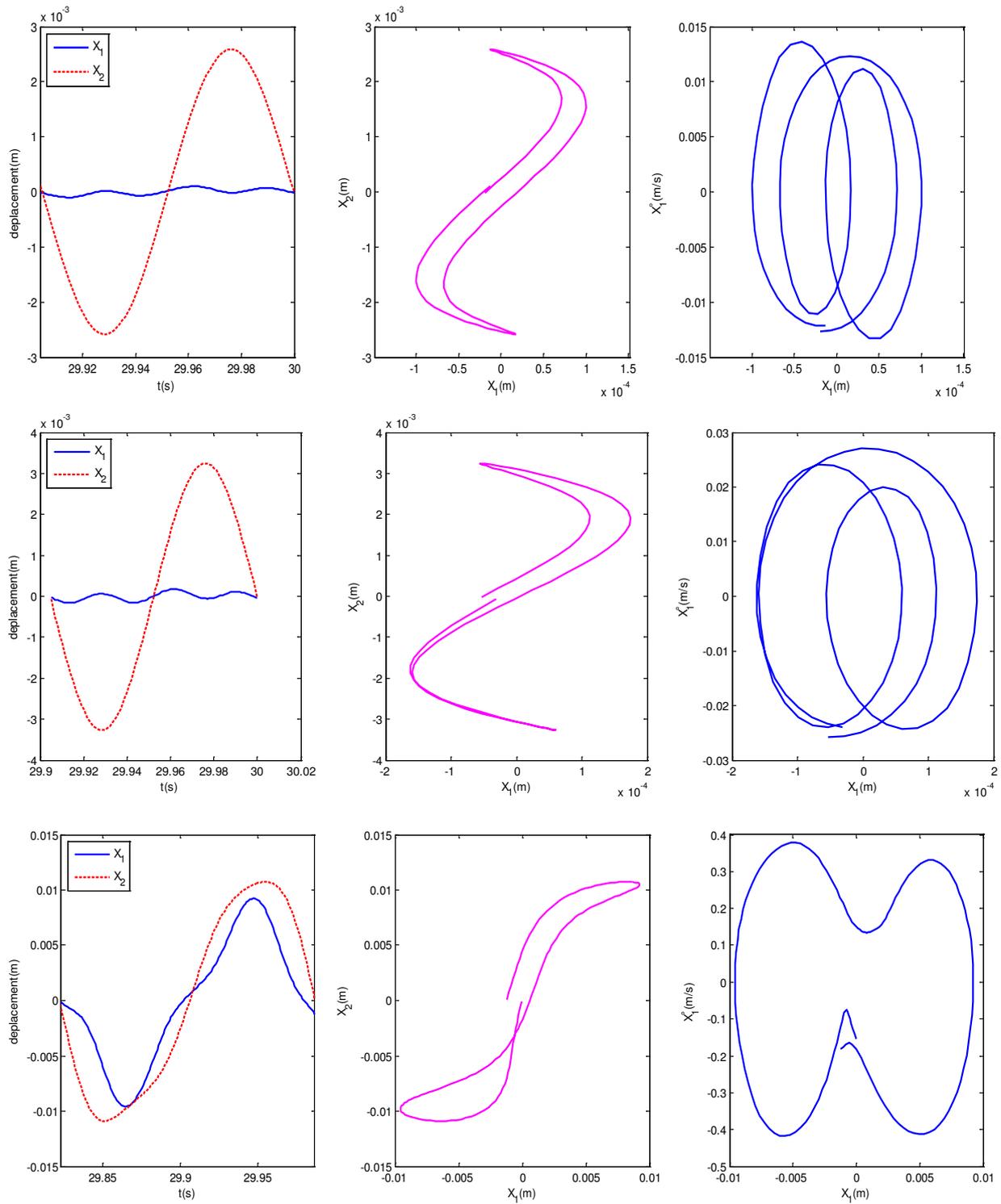


Figure 2.22. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 10.5Hz pour différents amplitudes d'excitation. De gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $F=10N, 20N, 30N$

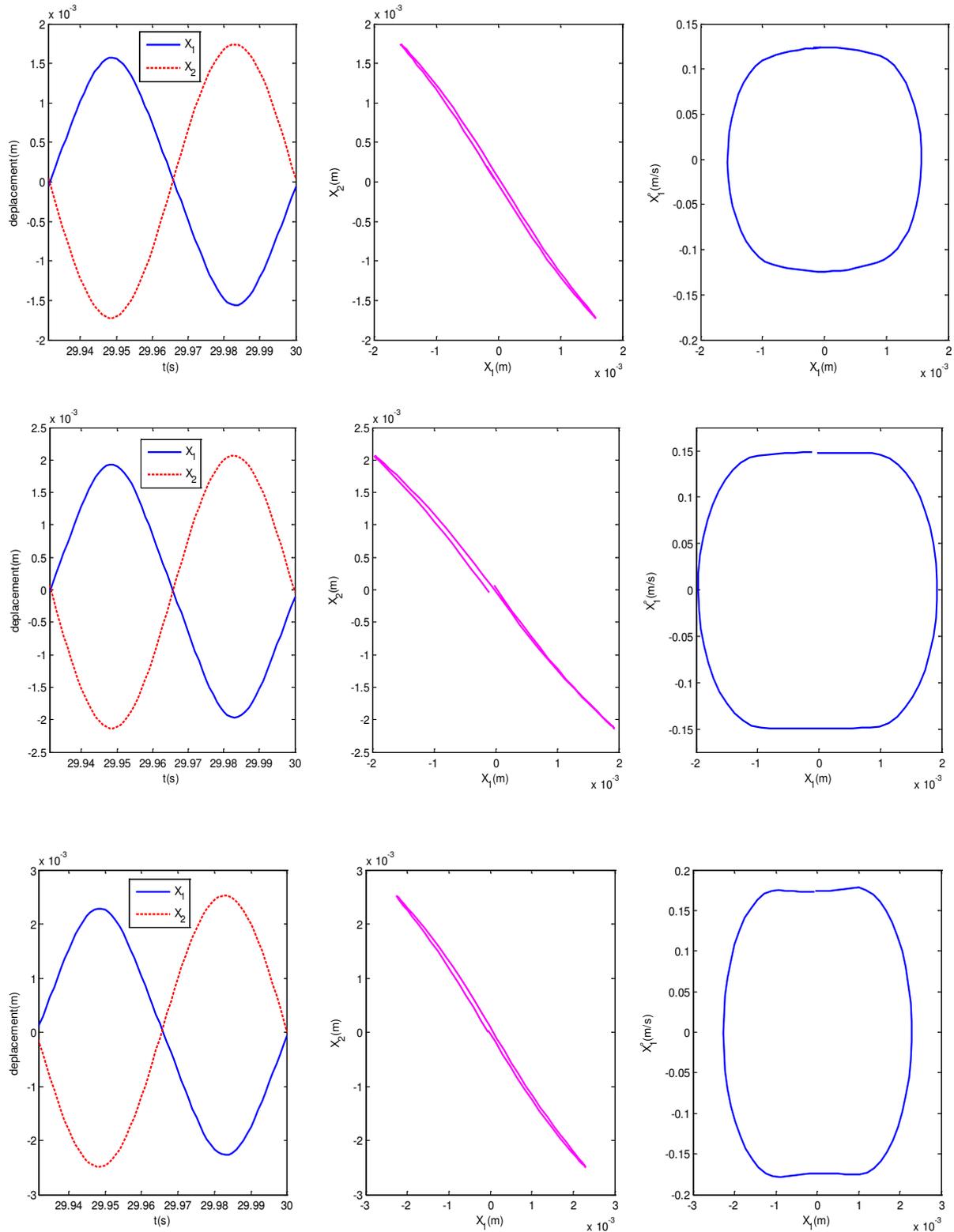


Figure 2.23. Représentation des espaces de configuration et de phase à la fréquence d'excitation 14.5Hz pour différents amplitudes d'excitation. De gauche à droite : réponse temporelle (— $X_1(t)$; - - - $X_2(t)$), espace de configuration, espace de phase de X_1 . Du haut en bas ; $F=10N, 20N, 30N$

2.8. Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, un algorithme implicite d'ordre élevé basé sur des techniques d'homotopie et perturbation est présenté pour résoudre les équations de la dynamique d'un système non linéaire à deux degrés de liberté. Un modèle régularisé de la force de contact est proposé pour éviter la singularité afin de représenter les solutions en série de puissance. Dans cet exemple simple, la réponse dynamique peut être obtenue en utilisant l'algorithme proposé en une seule étape de la MAN, ce qui correspond à une seule inversion de matrice $[K^*]$. La matrice arbitraire a été choisie égale à la matrice tangente évaluée à l'instant initial. La MAN est comparée avec la méthode Newton-Raphson. Les principaux points forts de la MAN, sont la simplicité d'utilisation, la précision et le gain en temps de calcul.

L'étude de l'influence du jeu et de l'amplitude d'excitation sur la réponse dynamique du système et sur ses modes normaux a été l'objet de la deuxième partie du chapitre. Elle a mis en évidence la forte présence des phénomènes non linéaires et leur importance dans la mitigation vibratoire. Citons par exemple, le phénomène de distorsion harmonique engendré par la génération des harmoniques.

Un autre phénomène important des systèmes non linéaires est la présence de résonances internes (lorsque deux ou plusieurs modes non linéaires interagissent). En effet, des composants du système peuvent avoir une fréquence dominante différente de celle des autres composants (des composants peuvent vibrer plus rapidement que des autres). Dans ce cas, le système ne vibre plus à l'unisson.

Chapitre 3

ANALYSE DES MODES NON LINEAIRES

3.1. Introduction

L'analyse vibratoire des structures mécaniques est assez complexe en présence des non-linéarités (jeu fonctionnel, frottement, etc.). En effet, un modèle linéaire est souvent insuffisant pour décrire correctement le comportement dynamique, d'où la nécessité d'introduire des modèles de structures non linéaires qui sont seuls capables de se rapprocher du comportement dynamique réel de ces structures.

L'analyse modale est un outil largement utilisé pour l'étude de la dynamique des systèmes mécaniques tant au niveau analytique qu'expérimental, mais limitée aux cas linéaires. Des travaux intéressés par l'étude du comportement dynamique des systèmes mécaniques non linéaires apportent une forte contribution à l'analyse des modes non linéaires.

Pour l'analyse des modes non linéaires présenté dans le chapitre précédent, la méthode développée par [Siller et al., 2004] est utilisée. Elle consiste, en premier lieu, à une formulation non linéaire pour la construction des matrices non linéaires et ses vecteurs associés et à une formulation explicite pour le calcul de la réponse non linéaire en termes de fonction de réponse en fréquence FRF et des modes non linéaires.

Dans la suite, cette méthode sera détaillée pour des structures à plusieurs degrés de liberté présentant uniquement des non-linéarités de raideur. Elle sera appliquée pour le cas d'un absorbeur de vibration dynamique non linéaire.

Le contenu de ce chapitre et du chapitre 4 ont fait l'objet d'un article intitulé "Performance of a nonlinear dynamic vibration absorber" et publié dans «*Journal of Mechanics*» [Djemaal et al., 2014].

3.2. Formulation non linéaire

3.2.1. Introduction

La discrétisation spatiale d'un système linéaire est une procédure bien connue, et est la base des procédés classiques tels que la méthode des éléments finis et l'analyse modale linéaire. Ceci peut être obtenu par un certain nombre de techniques qui fournissent une approche systématique pour aboutir aux équations différentielles ordinaires régissant le comportement dynamique du système linéaire étudié. Le principal avantage de cette procédure est la représentation compacte d'un système de grande taille sous forme matricielle. Les coefficients

des matrices du système représentent la masse, les éléments d'amortissement et de rigidité, et sont tous constants pour un système linéaire.

Lors de l'examen des systèmes non linéaires, il est impératif de bien formuler la matrice des non-linéarités. Dans cette approche, le système est séparé en composants linéaires et non linéaires, avec une représentation discrète des non-linéarités. La matrice non linéaire est constituée par des coefficients non linéaires locaux (typiquement de rigidité et/ou d'amortissement correspondant), qui sont fonction de l'amplitude.

La construction d'une matrice non linéaire a été abordée par certains chercheurs qui utilise la méthode de la fonction descriptive "Describing Function Method" (DFM) [Budak et al., 1993] [Kuran et al., 1996] et [Besançon-Voda et al., 2002] pour obtenir des coefficients équivalents de non-linéarités de premier ordre telles que la rigidité cubique. Ces coefficients représentent la base d'une analyse non linéaire, permettant la "fusion" des composantes linéaires et non linéaires en une seule représentation matricielle. La formulation des coefficients non linéaires pour une rigidité cubique permet de construire une matrice non linéaire et son vecteur non linéaire associé.

3.2.2. Formulation des coefficients non linéaires [Siller et al., 2004]

L'équation du mouvement d'un simple oscillateur soumis à une excitation harmonique est donnée par l'équation suivante:

$$m\ddot{y} + \tilde{g}(\dot{y}, y) = f \sin \omega t \quad (3.1)$$

$\tilde{g}(\dot{y}, y)$ englobe tous les termes non linéaires qui sont fonction de la vitesse \dot{y} et du déplacement y de la masse m .

Si la réponse y est suffisamment proche d'une sinusoïdale pure, et à condition que l'énergie des surharmoniques soit faible, il est alors, raisonnable de supposer que la fonction non linéaire $\tilde{g}(\dot{y}, y)$ est également périodique. Il est possible de trouver un coefficient linéarisé $\tilde{\nu}(\dot{y}, y)$ qui agit sur l'harmonique fondamentale de la réponse non linéaire ($\tilde{Y}^{1^{er}}$) de telle sorte que:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) \approx \tilde{\nu}(\dot{y}, y) \cdot y \text{ pour } y = \tilde{Y}^{1^{er}} \sin(\omega t + \theta) = \tilde{Y}^{1^{er}} \sin \tau \quad (3.2)$$

Afin de trouver le coefficient non linéaire $\tilde{v}(\dot{y}, y)$, la fonction $\tilde{g}(\dot{y}, y)$ est développée en série de Fourier, en négligeant les termes d'ordre supérieur:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) \approx \tilde{v}(\dot{y}, y) \cdot y = \sigma_a^{1^{er}} y + \sigma_b^{1^{er}} y + \underbrace{\sigma_c^{2^{ème}} y + \sigma_d^{2^{ème}} y + \dots}_{\text{termes négligés}} \quad (3.3)$$

Où les fonctions σ sont donnés par :

$$\begin{cases} \sigma_a^{1^{er}} = \frac{1}{\pi Y^{1^{st}}} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(Y^{1^{er}} \sin \tau, \omega Y^{1^{er}} \cos \tau) \sin \tau d\tau \\ \sigma_b^{1^{er}} = \frac{1}{\pi Y^{1^{st}}} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(Y^{1^{er}} \sin \tau, \omega Y^{1^{er}} \cos \tau) \cos \tau d\tau \end{cases} \quad (3.4)$$

Donc, $\tilde{v}(\dot{y}, y)$ est définie uniquement par :

$$\tilde{v}(\dot{y}, y) = \sigma_a^{1^{st}} + \sigma_b^{1^{st}} \quad (3.5)$$

3.2.2.1. Fonction décrivant de la rigidité cubique

Le modèle mathématique d'un élément de raideur cubique peut être exprimé comme suit:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) = ky + \beta y^3 \quad (3.6)$$

Où k représente le coefficient de la composante linéaire du ressort, tandis que le coefficient β tient compte des effets non linéaires dus au terme y^3 . La figure 3.1 représente le comportement linéaire (ligne pointillée) et non linéaire (ligne continue) d'un élément de raideur cubique. Il est à noter que la rigidité globale change en fonction de l'amplitude y , alors que les coefficients de raideur k et β restent constants et ne dépendent pas de la fréquence.

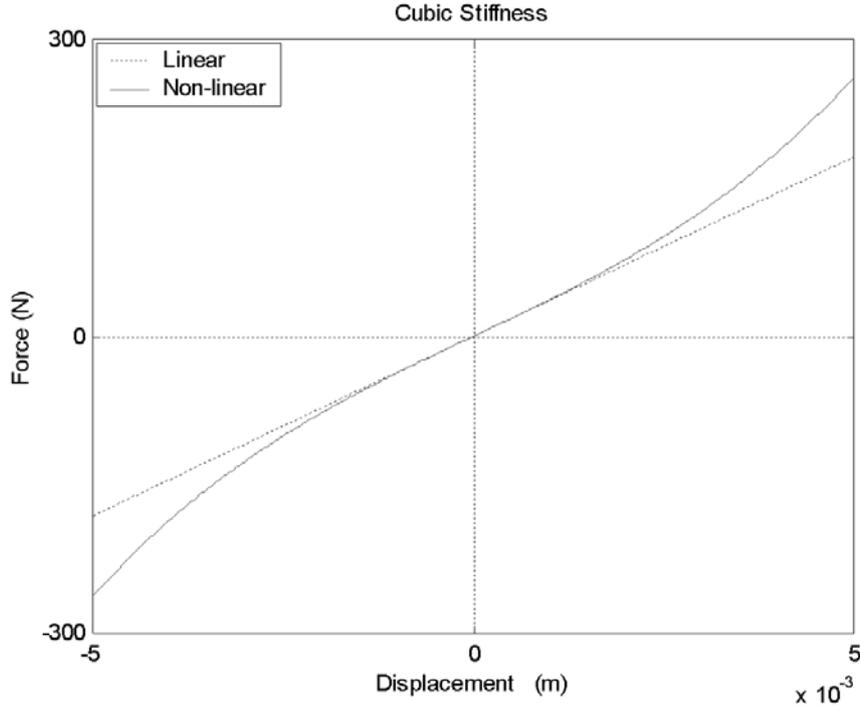


Figure 3.1. Comportement d'un élément à raideur cubique [Siller et al., 2004]

En remplaçant (3.6) dans (3.4), et en ignorant l'exposant l^{er} pour des raisons de clarté, nous aurons :

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} (k\tilde{y} + \beta \tilde{y}^3) \sin \tau d\tau \\ \sigma_b = 2 \sin(\pi) \cos(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

La combinaison de (3.7) et (3.5) donne :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\dot{y}, y) &= \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} (k\tilde{Y} \sin \tau + \beta \tilde{Y}^3 \sin^3 \tau) \sin \tau d\tau \\ \tilde{v}(\dot{y}, y) &= \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} k\tilde{Y} \sin^2 \tau d\tau + \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} \beta \tilde{Y}^3 \sin^4 \tau d\tau \\ \tilde{v}(\dot{y}, y) &= \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau + \frac{\beta \tilde{Y}^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 \tau d\tau \\ \tilde{v}(\dot{y}, y) &= \frac{k}{\pi} (\pi) + \frac{\beta \tilde{Y}^2}{\pi} \left(\frac{3}{4} \pi \right) \end{aligned}$$

La représentation du premier ordre d'un élément de rigidité cubique est alors:

$$\tilde{\nu}(\dot{y}, y) = k + \frac{3}{4}\beta\tilde{Y}^2 \quad (3.8)$$

Le terme non linéaire est donné par: $\frac{3}{4}\beta\tilde{Y}^2$

Le coefficient non linéaire $\tilde{\nu}(\dot{y}, y)$ peut être mieux expliqué par le fait que, d'après l'équation (3.2), la force de rappel $\tilde{g}(\dot{y}, y)$ a été approximée par l'utilisation d'un coefficient linéarisé tel que:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) \approx \tilde{\nu}(\dot{y}, y) \cdot y \quad (3.9)$$

$$(k \cdot \tilde{Y} \sin \tau + \beta \cdot \tilde{Y}^3 \sin^3 \tau) \approx \left(k + \frac{3}{4}\beta\tilde{Y}^2 \right) \cdot \tilde{Y} \sin \tau \quad (3.10)$$

La fonction $\tilde{g}(\dot{y}, y)$ a des termes en \sin et en \sin^3 alors que la fonction linéarisée $\tilde{\nu}(\dot{y}, y)$ a seulement un terme en \sin . Ces deux fonctions sont présentées dans la figure 3.2, où on peut voir que le coefficient linéarisé $\tilde{\nu}(\dot{y}, y)$ moyenne efficacement les changements dans la fonction non linéaire $\tilde{g}(\dot{y}, y)$.

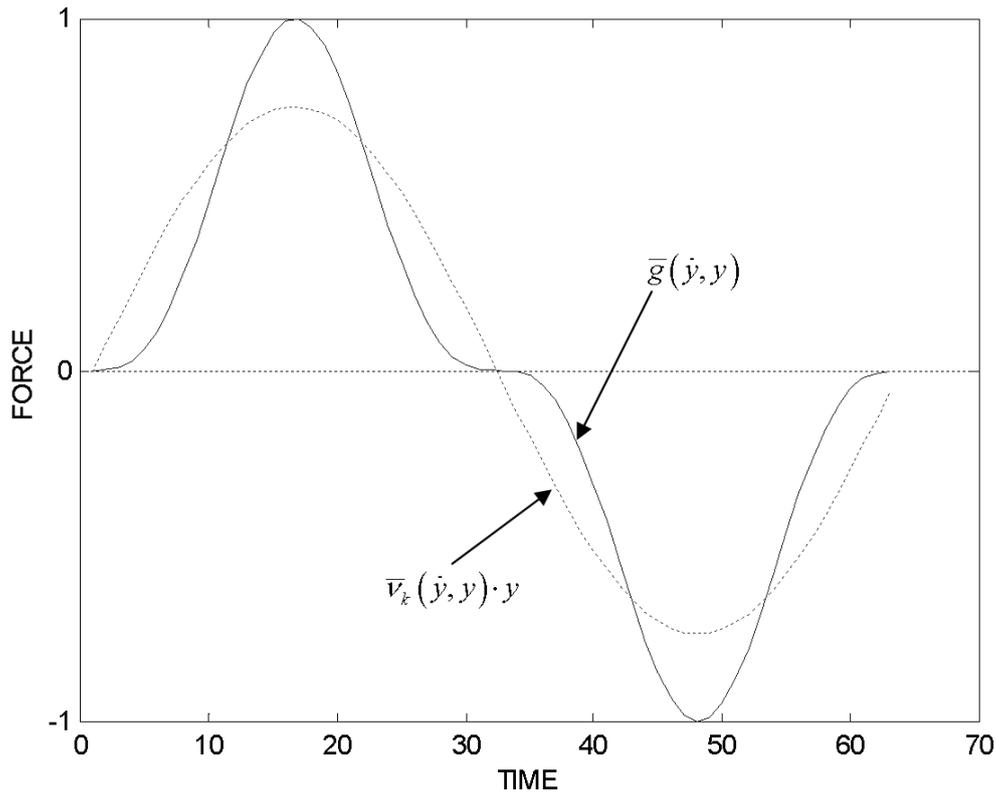


Figure 3.2. Linéarisation de la raideur cubique [Siller et al., 2004]

Jusqu'à maintenant, le développement est appliqué à un élément non linéaire relié à la terre ayant une seule coordonnée en mouvement qui est y . Si l'élément est fixé entre deux nœuds mobiles y_1 et y_2 (ce qui signifie qu'il n'est pas relié à la terre), un changement de variable est nécessaire pour appliquer la même procédure:

$$z = y_1 - y_2 \quad \text{ou} \quad y_1 = \tilde{Y}_1 \sin(\omega t + \theta_1), \quad y_2 = \tilde{Y}_2 \sin(\omega t + \theta_2) \quad (3.11)$$

$$z = \tilde{Z} \sin(\omega t + \theta_z) = \tilde{Z} \sin \tau \quad \text{tel que ;} \quad \tilde{Z} = |z| = |y_1 - y_2| \quad \text{et} \quad \theta_z = \angle(y_1, y_2) \quad (3.12)$$

On aura :

$$\tilde{g}(\tilde{z}, z) \approx \tilde{v}(\tilde{z}, z) \cdot z, \quad \text{avec :} \quad \tilde{v}(\tilde{z}, z) = \frac{3}{4} \beta \tilde{Z}^2 \quad (3.13)$$

3.2.3. Vecteur et matrice non linéaire

La généralisation du développement effectué pour l'oscillateur simple introduit dans (3.1) à un système à plusieurs degrés de liberté donne:

$$[M]\{\ddot{y}\} + \{\tilde{G}(\dot{y}, y)\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (3.14)$$

Où $[M]$ est la matrice des masses. $\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$ et $\{y\}$ sont respectivement les vecteurs d'accélération, de vitesse et de déplacement. $\{F\}$ est le vecteur d'excitation harmonique de pulsation ω .

$\{\tilde{G}(\dot{y}, y)\}$ est un vecteur contenant tous les termes non linéaires qui sont fonction de la vitesse \dot{y} et du déplacement y . L'abréviation de ce vecteur est le vecteur non linéaire VNL. Ce vecteur est écrit sous la forme :

$$\{\tilde{G}(\dot{y}, y)\} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}_1(\dot{y}, y) \\ \tilde{g}_2(\dot{y}, y) \\ \tilde{g}_3(\dot{y}, y) \\ \vdots \\ \tilde{g}_N(\dot{y}, y) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{12} + \tilde{g}_{13} + \cdots + \tilde{g}_{1N} \\ \tilde{g}_{21} + \tilde{g}_{22} + \tilde{g}_{23} + \cdots + \tilde{g}_{2N} \\ \tilde{g}_{31} + \tilde{g}_{32} + \tilde{g}_{33} + \cdots + \tilde{g}_{3N} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{N1} + \tilde{g}_{N2} + \tilde{g}_{N3} + \cdots + \tilde{g}_{NN} \end{Bmatrix}_N \quad (3.15)$$

Où N est la taille du système (nombre de degrés de liberté). Chaque fonction \tilde{g}_{ij} représente la non-linéarité agissant entre les deux degrés de liberté i et j , alors que les \tilde{g}_{ii} représentent la non-linéarité entre le degré de liberté i et la terre. Ainsi, la $i^{\text{ème}}$ ligne du VNL, contenant la fonction $\tilde{g}_i(\dot{y}, y)$, représente la non-linéarité de tous les éléments avec le degré de liberté i ($\tilde{g}_{i1} + \tilde{g}_{i2} + \tilde{g}_{i3} + \cdots + \tilde{g}_{iN}$).

En appliquant la troisième loi de Newton, on aura : $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ji}$.

A ce stade, il serait adéquat de remplacer la fonction \tilde{g}_{ij} par les coefficients linéarisés déjà développés dans la section 3.2.2. Si le système est supposé avoir une réponse harmonique $\{y(t)\} = \{\tilde{Y}\} e^{i\omega t}$, on peut écrire :

- Pour le degré de liberté i :

$$\tilde{g}_{ii} = \tilde{v}_{ii}(\dot{y}_i, y_i) \cdot y_i = \left(k + \frac{3}{4} \beta_{ii} |\tilde{Y}_i|^2 \right) \tilde{Y}_i \quad (3.16)$$

- Entre les deux degrés de liberté i et j ($z_{ij} = (y_i - y_j)$):

$$\tilde{g}_{ij}(z_{ij}) \approx \tilde{v}_{ij}(\dot{z}_{ij}, z_{ij}) \cdot z_{ij} = \tilde{v}_{ij}(\dot{y}_i, \dot{y}_j, y_i, y_j) \cdot (y_i - y_j) \quad (3.17)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\tilde{v}_{ij}(\dot{z}_{ij}, z_{ij}) \cdot z_{ij} = \begin{Bmatrix} k_{ij} & -k_{ij} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_i \\ \tilde{Y}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{3}{4} \beta_{ij} |\tilde{Z}_{ij}|^2 & -\frac{3}{4} \beta_{ij} |\tilde{Z}_{ij}|^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_i \\ \tilde{Y}_j \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Cette formulation produit des coefficients symétriques, à savoir $\tilde{v}_{ij} = -\tilde{v}_{ji}$.

Introduisant ces nouveaux coefficients non linéaires redéfinis dans (3.15), une matrice non linéaire est formée où le vecteur non linéaire (VNL) \tilde{v} et la matrice non linéaire \tilde{G} sont liés par la relation suivante :

$$\{\tilde{G}(y)\} = [\tilde{v}]\{\tilde{Y}\} \quad (3.19)$$

$$\{\tilde{G}(y)\} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \tilde{v}_{1j} & \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{13} & \cdots & \tilde{v}_{1N} \\ \tilde{v}_{21} & \sum_{j=1}^N \tilde{v}_{2j} & \tilde{v}_{23} & \cdots & \tilde{v}_{2N} \\ \tilde{v}_{31} & \tilde{v}_{32} & \sum_{j=1}^N \tilde{v}_{3j} & \cdots & \tilde{v}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{v}_{N1} & \tilde{v}_{N2} & \tilde{v}_{N3} & \cdots & \sum_{j=1}^N \tilde{v}_{Nj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{Y}_N \end{Bmatrix} = [\tilde{v}]\{\tilde{Y}\} \quad (3.20)$$

3.3. Formulation explicite des FRFs non linéaires pour des systèmes à multiples degrés de liberté

3.3.1. Introduction

Le principe de base d'une méthode d'analyse modale consiste à la mesure des FRFs pour le système étudié. Actuellement, l'obtention de modèles mathématiques sur la base de FRFs linéaires est une procédure bien établie, et l'analyse modale linéaire est reconnue comme un outil d'identification robuste et efficace [Ewins, 2000]-[Maia et al., 1997]. Cependant, l'établissement d'un modèle non linéaire général à partir de FRFs disponibles d'un système non linéaire est d'une difficulté majeure.

Le problème rencontré lors de l'identification expérimentale non linéaire est que relativement quelques mesures disponibles doivent être comparées à des FRFs calculées par diverses formulations théoriques. Toutefois, en raison de la nature de couplage d'un problème non linéaire, une approche théorique, telles que la méthode de la balance harmonique, doit pouvoir donner toutes les réponses en même temps. Ce qui résulte en un problème d'optimisation non linéaire avec un grand nombre d'inconnues pour les systèmes de grande taille.

Il est plus logique, du moins lorsqu'il s'agit de données obtenues expérimentalement, d'être capable de formuler les réponses théoriques aux coordonnées mesurées seulement. Cette approche donnera un nombre réduit d'équations non linéaires à résoudre, ce qui simplifie le processus d'identification non linéaire. La méthode décrite dans cette partie aborde cette question en calculant la réponse non linéaire de coordonnées sélectionnées (approche directe).

La technique introduite, appelée «formulation explicite» (EF), fournit les FRFs non linéaires pour les degrés de liberté sélectionnés de façon systématique, indépendamment de la taille du système. Le terme "explicite" vient du fait que le modèle proposé est basé sur les coefficients physiques stockés dans les matrices masse, raideur et amortissement ($[M]$, $[K]$ et $[C]$). Les non-linéarités sont représentées par une matrice non linéaire et son vecteur non linéaire associé, ce qui permet de fusionner parfaitement les composants linéaires et non-linéaires en une seule matrice [Walha et al., 2008].

3.3.2. Formulation explicite

L'équation du mouvement d'un système non linéaire général soumis à une excitation harmonique peut être décrite par l'équation différentielle ordinaire non linéaire suivante :

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + i[D]\{y\} + [K]\{y\} + \{\tilde{G}(y, \dot{y})\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (3.21)$$

Où $[M]$, $[C]$, $[D]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de la masse, d'amortissement visqueux, d'amortissement hystérétique et de rigidité. $\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$ et $\{y\}$ sont respectivement les vecteurs d'accélération, de vitesse et de déplacement. $\{F\}$ est le vecteur d'excitation harmonique de pulsation ω .

La composante non linéaire du système est représentée par le vecteur non linéaire $\{\tilde{G}\}$ qui est, dans le cas général, fonction du déplacement et de la vitesse.

Compte tenu d'une réponse harmonique $\{y(t)\} = \{\tilde{Y}\}e^{i\omega t}$ où $\{\tilde{Y}\} = \{|\tilde{Y}|e^{i\theta}\}$, l'équation de mouvement s'écrit dans le domaine fréquentiel par:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + i[D] + [K])\{\tilde{Y}\} + \{\tilde{G}(\omega, \tilde{Y})\} = \{F\} \quad (3.22)$$

Définissant $[\Lambda]$ comme suit :

$$[\Lambda] = -\omega^2[M] + i\omega[C] + i[D] + [K] \quad (3.23)$$

et connaissant d'après (3.19) que $\{\tilde{G}(y)\} = [\tilde{\nu}]\{\tilde{Y}\}$, on aura :

$$([\Lambda] + [\tilde{\nu}])\{\tilde{Y}\} = \{F\} \quad (3.24)$$

Ce qui conduit à la représentation compacte finale du système non linéaire:

$$[\tilde{\Lambda}]\{\tilde{Y}\} = \{F\}, \text{ où } [\tilde{\Lambda}] = [\Lambda] + [\tilde{\nu}] \quad (3.25)$$

$[\tilde{\Lambda}]$ est une matrice composée de coefficients linéaires et non linéaires. Elle peut être

considérée comme étant la matrice de système.

La réponse de chaque degré de liberté du système i peut être décrite par le rapport de deux déterminants :

$$\tilde{Y}_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{1,1} & \cdots & \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} & \cdots & \tilde{\Lambda}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} F & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\Lambda}_{N,1} & \cdots & \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} & \cdots & \tilde{\Lambda}_{N,N} \end{pmatrix}_{N,N}}{\det(\tilde{\Lambda})} \quad (3.26)$$

↓ $i^{\text{ème}}$ colonne

Où N est la taille du système. La matrice dans le numérateur est formée par le remplacement du vecteur de la force $\{F\}$ dans la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice composite non linéaire $[\tilde{\Lambda}]$.

Pour une structure d'ingénierie typique contenant des non-linéarités localisées (joints, discontinuités géométriques, amortisseurs, etc.), la matrice non linéaire $[\tilde{v}]$ est très éparse avec quelques termes non nuls. On peut noter :

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= (-\omega^2 m_{ij} + i\omega c_{ij} + id_{ij} + k_{ij}) \\ \tilde{\Lambda}_{ij} &= (-\omega^2 m_{ij} + i\omega c_{ij} + id_{ij} + k_{ij} + \tilde{v}_{ij}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Cette notation établit une distinction entre les coefficients linéaire (Λ_{ij}) et non linéaires $(\tilde{\Lambda}_{ij})$, contenus dans $[\tilde{\Lambda}]$.

3.4. Analyse modale linéaire et modes non linéaires

3.4.1. Analyse modale linéaire

La représentation générale d'un système linéaire à amortissement hystérétique et soumis à une excitation harmonique est donnée par l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} + i[D]\{y\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (3.28)$$

Dans le domaine fréquentiel, on a :

$$(-\omega^2 M + K + iD)\{Y\} = \{F\} \quad (3.29)$$

La solution de la partie homogène de l'équation (3.28) met en évidence la matrice des valeurs propres diagonale $[\lambda^2]$ et la matrice de vecteurs propres $[\Phi]$. Les deux matrices sont liées par les propriétés d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M][\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [K + iD][\Phi] &= [\lambda^2] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Où $[I]$ est la matrice d'identité. La propriété de superposition modale permet d'exprimer les réponses $\{Y\}$ en une combinaison linéaire des réponses modales $\{P\}$:

$$\{Y\} = [\Phi]\{P\} \quad (3.31)$$

En substituant (3.30) dans (3.28), et en pré-multipliant par $[\Phi]^T$, nous avons:

$$[\Phi]^T (-\omega^2 M + K + iD)[\Phi]\{P\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (3.32)$$

En introduisant d'avantage les relations d'orthogonalité (3.30), nous aurons:

$$[\lambda^2 - \omega^2]\{P\} = \{\Phi^T F\} \quad (3.33)$$

La réponse du système linéaire $\{Y\}$ peut être facilement établi à partir de (3.33) en multipliant à gauche des deux côtés par $[\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1}$.

$$\{Y\} = [\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1} \cdot \{\Phi^T F\} \quad (3.34)$$

La $i^{\text{ème}}$ composante de (3.34) peut également être exprimée par :

$$Y_i = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{ir} \mathfrak{F}_r}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (3.35)$$

Où M est le nombre total des modes du système et $\mathfrak{F}_r = (\Phi^T F)_r$ est la force d'excitation modale correspondant au mode r .

La fonction de réponse en fréquence (FRF) est définie par:

$$\frac{Y_i}{F_j} = H_{ij} = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (3.36)$$

Où H_{ij} est la FRF du nœud i lorsque le système est excité au nœud j .

3.4.2. Analyse des modes non linéaires

La forme dynamique générale d'un système non linéaire avec un amortissement hystérésis peut être définie par l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} + i[D]\{\dot{y}\} + \{\tilde{G}(y)\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (3.37)$$

Pour une réponse périodique et essentiellement harmonique, le problème est transformé au domaine fréquentiel comme suit :

$$(-\omega^2 [M] + [K] + i[D])\{\tilde{Y}\} + \{\tilde{G}(\tilde{Y})\} = \{F\} \quad (3.38)$$

En multipliant cette équation par le transposé de la matrice modale linéaire $[\Phi]^T$ on obtient :

$$[\Phi]^T (-\omega^2 [M] + [K] + i[D])\{\tilde{Y}\} + \{\Phi^T \tilde{G}(\tilde{Y})\} = \{\Phi^T F\} \quad (3.39)$$

Les réponses physiques et modales sont liées par la relation :

$$\{\tilde{Y}\} = [\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} \quad (3.40)$$

Où $[\tilde{\Phi}]$ est la matrice modale non linéaire qui dépend de l'amplitude et de la fréquence.

Cette matrice peut être décomposée en deux matrices et on peut écrire :

$$\{\tilde{Y}\} = [\Phi + \Delta\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} \quad (3.41)$$

En passant à la base modale, on arrive à la relation suivante :

$$[\Phi]^T (-\omega^2 [M] + [K] + i[D]) [\Phi + \Delta\tilde{\Phi}] \{\tilde{P}\} + \{\Phi^T \tilde{G}\} = \{\Phi^T F\} \quad (3.42)$$

A partir de l'analyse linéaire, on a l'égalité suivante :

$$[\Phi]^T (-\omega^2 [M] + [K] + i[D]) [\Phi] = [\lambda^2 - \omega^2] \quad (3.43)$$

Finalement on aboutit à l'équation suivante:

$$[\lambda^2 - \omega^2] (I + \Phi^{-1} \Delta\tilde{\Phi}) \{\tilde{P}\} + \{\Phi^T \tilde{G}\} = \{\Phi^T F\} \quad (3.44)$$

3.4.2.1. Détermination des valeurs propres non linéaires

Par analogie avec l'analyse linéaire, on peut écrire :

$$[\tilde{\lambda}^2 - \omega^2] \{\tilde{P}\} = \{\tilde{\Phi}^T F\} \quad (3.45)$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres non linéaires peuvent être décomposés en des parties linéaires et des parties non linéaires et on construit par suite :

$$[(\lambda^2 + \Delta\tilde{\lambda}^2) - \omega^2] \{\tilde{P}\} = \{(\Phi + \Delta\tilde{\Phi})^T F\} \quad (3.46)$$

En comparant les deux équations (3.44) et (3.46), on peut conclure à ce que la variation des valeurs propres peut être exprimée par :

$$\Delta\tilde{\lambda}_r^2 = \frac{(\Phi^T \tilde{G})_r + ((\lambda^2 - \omega^2) \Phi^{-1} \Delta\tilde{\Phi} \{\tilde{P}\})_r + (\Delta\tilde{\Phi}^T F)_r}{\{\tilde{P}\}_r} \quad (3.47)$$

3.4.2.2. Détermination des vecteurs propres non linéaires

Après le calcul des fréquences propres non linéaires, il est maintenant possible d'évaluer leurs modes propres associés. Dans la base modale, nous avons l'équation suivante :

$$[\tilde{\lambda}^2 - \omega^2] \{\tilde{P}\} = \{\tilde{\Phi}^T F\} \quad \text{et} \quad \{\tilde{P}\} = [\tilde{\Phi}]^{-1} \{\tilde{Y}\} \quad (3.48)$$

A partir de ces deux équations on peut écrire :

$$\{\tilde{Y}\} = \frac{[\tilde{\Phi}][\tilde{\Phi}]^T F}{[\tilde{\lambda}^2 - \omega^2]} \quad (3.49)$$

A ce niveau, on définit la fonction réponse fréquentielle non linéaire \tilde{H}_{ij} qui relie la réponse i à l'excitation j par la relation suivante :

$$\tilde{H}_{ij} = \frac{\tilde{Y}_i}{F_j} \quad (3.50)$$

En se basant sur ces deux dernières équations on écrit :

$$\tilde{H}_{ij} = \sum_{r=1}^M \frac{\tilde{\phi}_{ir} \tilde{\phi}_{jr}}{\tilde{\lambda}_r^2 - \omega^2} \quad (3.51)$$

Où M est la dimension de la matrice des modes propres. En particulier pour le mode s :

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \tilde{Y}) = \frac{\tilde{\phi}_{is} \tilde{\phi}_{js}}{\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^M \frac{\tilde{\phi}_{ir} \tilde{\phi}_{jr}}{\tilde{\lambda}_r^2 - \omega^2} = \frac{\tilde{Y}_i}{F_j} \quad (3.52)$$

3.4.2.3. Procédure de calcul

Pour le mode s et pour la composante j de ce mode, on a la relation suivante :

$$\tilde{H}_{jj} = \frac{(\tilde{\phi}_{js})^2}{\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^M \frac{(\phi_{jr})^2}{\lambda_r^2 - \omega^2} = \frac{\tilde{Y}_j}{F_j} \quad (3.53)$$

A la fréquence d'excitation ω , la valeur de \tilde{Y}_j est déjà connue. Donc, la composante $\tilde{\phi}_{js}$ de ce mode est calculée par la relation suivante :

$$\tilde{\phi}_{js} = \sqrt{(\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2) \left(\frac{\tilde{Y}_j}{F_j} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^M \frac{(\phi_{jr})^2}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right)} \quad (3.54)$$

Les autres composantes de ce même mode sont ensuite calculées en utilisant la relation suivante :

$$\tilde{\phi}_{is} = \frac{(\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2) \left(\frac{\tilde{Y}_i}{F_j} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^M \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right)}{\tilde{\phi}_{js}} \quad (3.55)$$

On achève ainsi le calcul du premier mode et on passe au mode suivant.

La procédure de calcul des modes non linéaires est représentée par l'organigramme suivant :

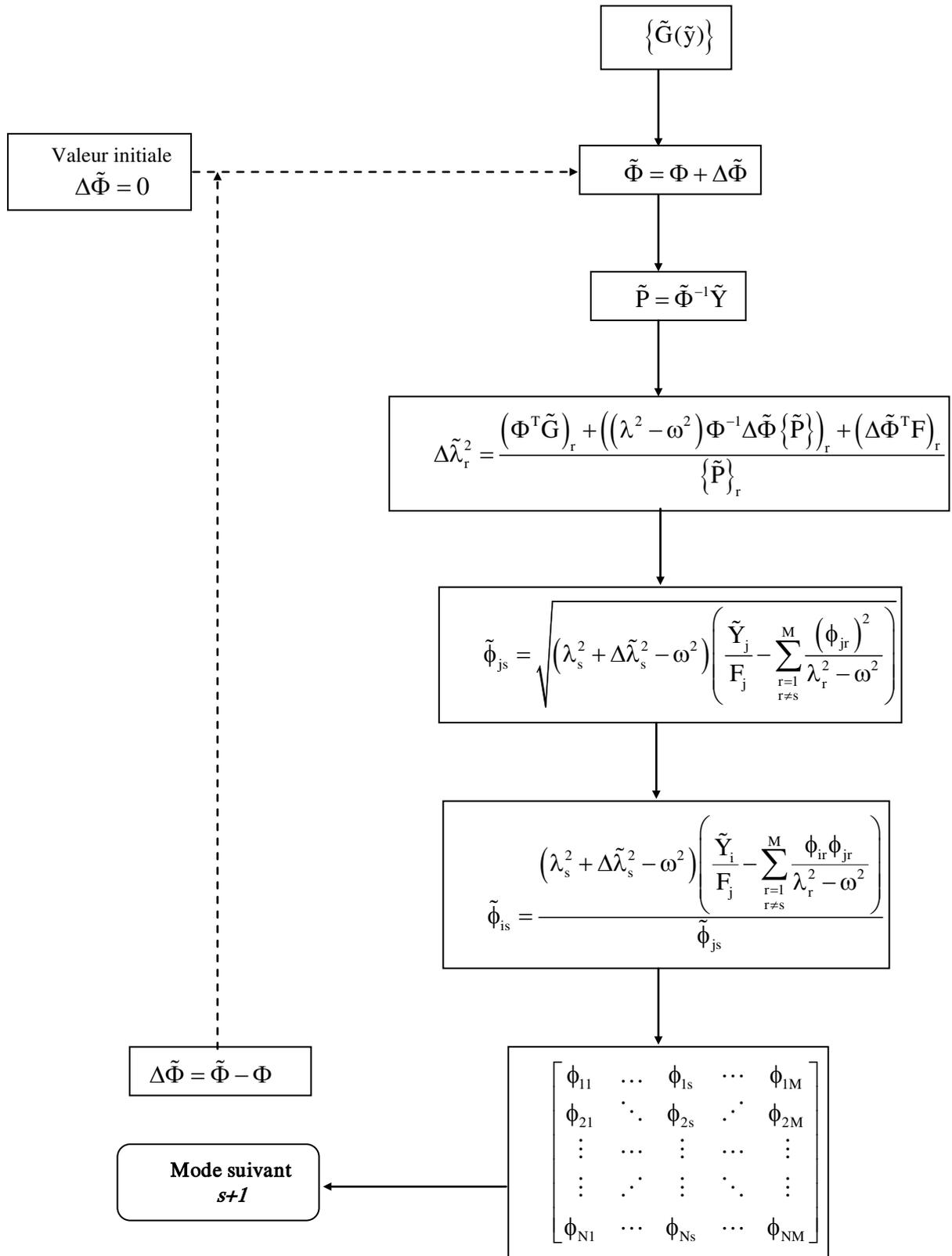


Figure 3.3. Organigramme du calcul modal non linéaire

3.5. Étude du système avec absorbeur de vibration non linéaire

Dans cette partie, le système présenté dans le chapitre précédent sera étudié dans le domaine fréquentiel. L'analyse des modes non linéaires est appliquée pour la détermination des FRFs et les modes propres non linéaires. Les équations du mouvement de ce système sont données par:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} + \{F_c\} = \{F_{ext}\} \quad (3.56)$$

Où $\{X\} = \{x_1, x_2\}^T$, $\{\dot{X}\}$ et $\{\ddot{X}\}$ représentent respectivement les déplacements, les vitesses et les accélérations généralisés.

$[M]$, $[C]$ et $[K]$ représentent respectivement la matrice de masse, d'amortissement et de rigidité du système. $\{F_{ext}\}$ est le vecteur des forces d'excitation extérieures de type harmonique et de pulsation ω . $\{F_c\}$ représente le terme non linéaire dû à la force de contact entre les deux masses M_1 et M_2 .

3.5.1. Formulation non linéaire de la force de contact

La force de contact représentée dans le modèle dynamique est donnée par : $\{F_c\} = \begin{Bmatrix} -F_c \\ F_c \end{Bmatrix}$

Où F_c est définie par l'expression non analytique suivante :

$$F_c = \begin{cases} 0 & \text{if } |\delta| < g \\ K_c(\delta - g) & \text{if } \delta > g \\ K_c(\delta + g) & \text{if } \delta < -g \end{cases} \quad (3.57)$$

$2g$ représente le jeu total et $\delta(t) = x_1(t) - x_2(t)$ le déplacement relatif entre les deux masses M_1 et M_2 . K_c est la raideur de contact supposée être constante.

La force de contact F_c peut aussi être décrite par:

$$F_c = K_c \tilde{h}(\delta(t), g) = K_c \cdot \begin{cases} 0 & \text{if } |\delta| < g \\ (\delta - g) & \text{if } \delta > g \\ (\delta + g) & \text{if } \delta < -g \end{cases} \quad (3.58)$$

La fonction non linéaire est modélisée par des fonctions de lissage $\tilde{f}(\delta(t), g)$ comme suit:

$$\tilde{h}(\delta(t), g) = \delta(t) + \frac{\tilde{f}(\delta(t) - g) - \tilde{f}(\delta(t) + g)}{2} \quad (3.59)$$

La fonction de lissage utilisée par [Kim et al., 2003] est:

$$\tilde{f}(W) = W \tanh(\sigma W) \quad (3.60)$$

$$\text{Avec: } W = \delta(t) \pm g \quad (3.61)$$

σ est un coefficient qui reflète le degré de non-linéarité. Ainsi, la combinaison des deux dernières équations donne:

$$\tilde{f}(\delta(t) \pm g) = (\delta(t) \pm g) \tanh(\sigma(\delta(t) \pm g)) \quad (3.62)$$

Le développement en série entière à l'ordre 3 de la fonction tangente hyperbolique est donné par l'équation suivante:

$$\tanh(W) = W - \frac{1}{3}(W)^3 + \theta(W^3) \quad (3.63)$$

Les équations (3.59), (3.62) et (3.63) permettent de mettre la fonction non linéaire sous la forme:

$$\tilde{h}(\delta(t), g) = \left(1 - 2\sigma g + \frac{4}{3}\sigma^3 g^3\right)\delta(t) + \left(\frac{4}{3}\sigma^3 g\right)(\delta(t))^3 \quad (3.64)$$

L'équation (3.58) devient:

$$F_c = K_c \tilde{h}(\delta(t), g) = K_c \left(1 - 2\sigma g + \frac{4}{3}\sigma^3 g^3\right)\delta(t) + K_c \left(\frac{4}{3}\sigma^3 g\right)(\delta(t))^3 \quad (3.65)$$

La figure 3.4 montre la force de contact théorique présentée par l'équation (3.57) et son approximation présentée par l'équation (3.65).

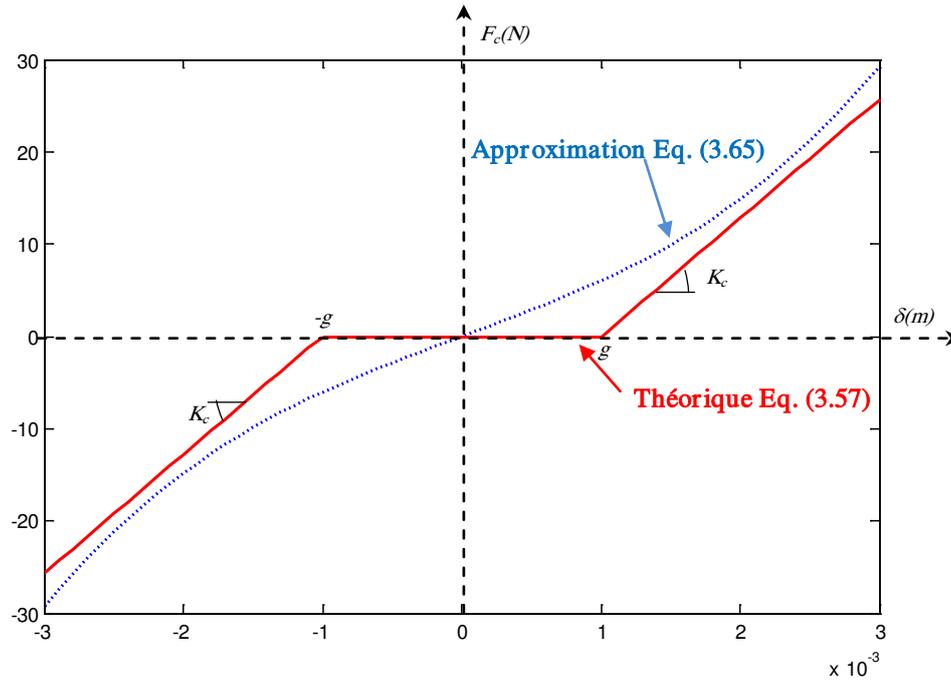


Figure 3.4. Force de contact

La valeur du jeu est assez petite de telle sorte que:

$$1 - 2\sigma g + \frac{4}{3}\sigma^3 g^3 \approx 1$$

Alors, la force de contact non linéaire peut être écrite comme:

$$F_c = K_c \delta(t) + K_c \left(\frac{4}{3} \sigma^3 g \right) (\delta(t))^3 \quad (3.66)$$

Finalement, F_c peut être exprimée par le modèle mathématique donné par la fonction $\tilde{g}(\tilde{x})$ en tant que :

$$\tilde{g}(\tilde{x}) = k\tilde{x} + \beta\tilde{x}^3 \quad (3.67)$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} k = K_c \\ \beta = K_c \left(\frac{4}{3} \sigma^3 g \right) \end{cases}$$

$\tilde{g}(\tilde{x})$ peut être considérée comme une force induite par un ressort allongé d'une distance \tilde{x} . Le coefficient k représente la composante linéaire de la rigidité et β le coefficient de la rigidité non linéaire cubique.

3.5.2. Simulation numérique

Le tableau 3.1 présente les paramètres du système étudié. Ces paramètres présentent les propriétés mécaniques du dispositif expérimental du chapitre 4 afin d'établir une comparaison entre les résultats numériques et expérimentales dans la suite. Les deux masses M_1 et M_2 sont mesurées. Les raideurs K_1 et K_2 sont déduites à partir d'une analyse fréquentielle du système. L'amortissement est choisi de manière à être proportionnel aux matrices masse et rigidité [Meirovitch, 2001]. $C = \alpha M + \beta K$ ($\alpha = 0.05$ et $\beta = 10^{-4}$)

Paramètres	Valeurs
Masse M_1 (kg)	0.36
masse M_2 (kg)	0.09
Raideur K_1 (N/m)	12800
Raideur K_2 (N/m)	3000
Amortissement C_1 (N/m.s ⁻¹)	1.3
Amortissement C_2 (N/m.s ⁻¹)	0.3

Tableau 3.1. Propriétés mécaniques

Le système étudié a un comportement linéaire dans le cas d'une force de faible amplitude car il n'y aura pas de contact entre les lames et la masse M_1 .

Les valeurs propres sont définies par:

$$\lambda^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21129 & 0 \\ 0 & 56093 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres sont définis par:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9847 & -1.3447 \\ -2.6894 & 1.9694 \end{bmatrix}$$

Le tableau 3.2 présente les fréquences propres du système :

Mode N°	Fréquences propres (Hz)
1	23.13
2	37.69

Tableau 3.2. Valeurs des fréquences propres

La figure 3.5 montre la fonction de réponse en fréquence linéaire pour chaque degré de liberté X_1 et X_2 (X_1 se réfère à l'oscillateur primaire et X_2 se réfère à l'absorbeur). Chaque réponse montre deux pics de résonance correspondant aux fréquences naturelles linéaires du système.

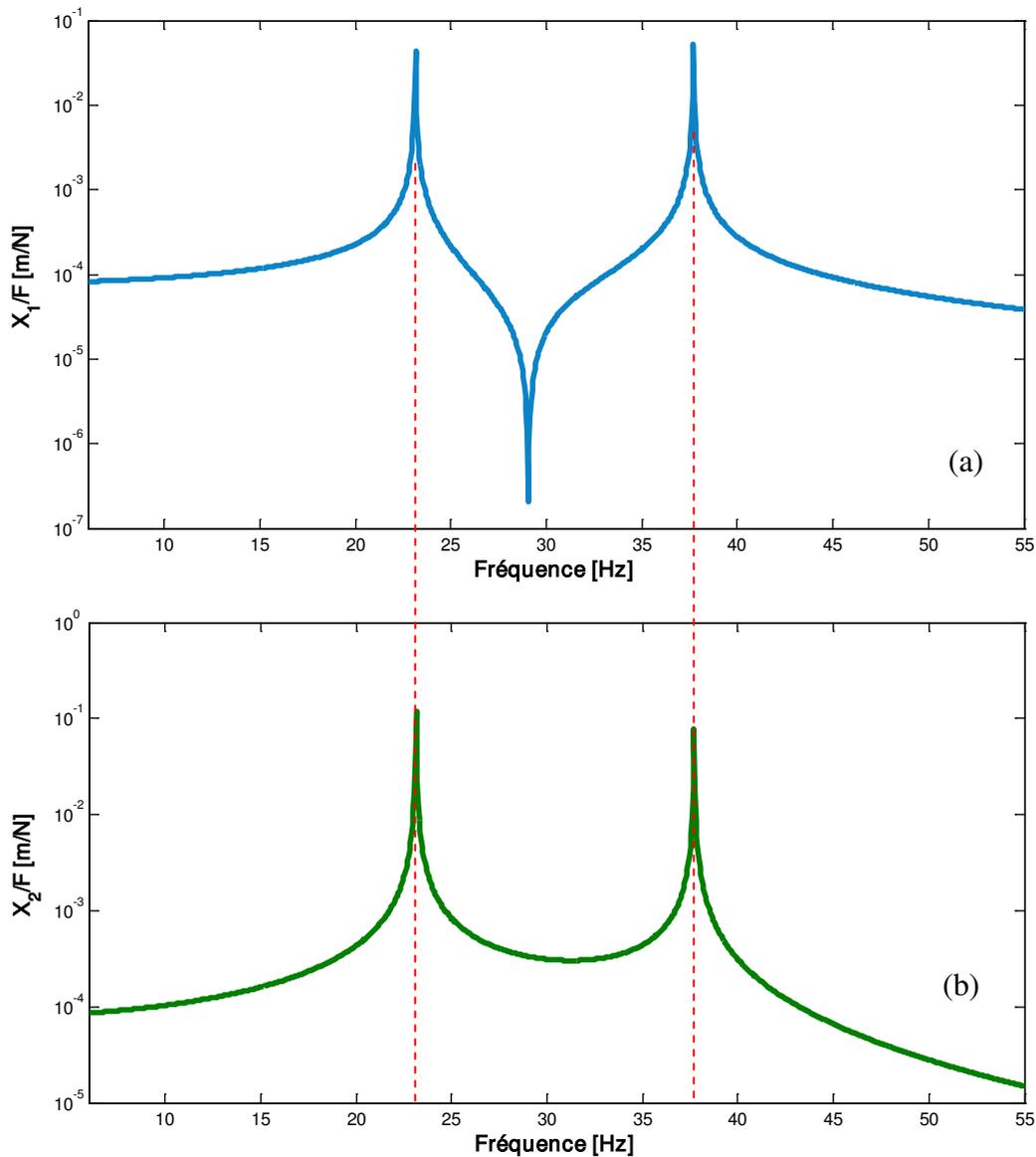


Figure 3.5. FRF du système linéaire:(a) oscillateur primaire (b) absorbeur

Dans le cas d'une force de grande amplitude et pour certaines fréquences d'excitation les deux lames minces parviennent à taper sur la masse M_1 ce qui permet d'avoir pour le système étudié un comportement non linéaire. La non-linéarité de la raideur peut être définie par la fonction suivante:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{12}(\tilde{x}_{1,2}) = \beta_{12}(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)^3 \\ \tilde{g}_{21}(\tilde{x}_{2,1}) = \beta_{21}(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)^3 \end{cases} \quad (3.68)$$

Le comportement dynamique du système non linéaire est décrit sous la forme :

$$[M] \ddot{\tilde{X}} + [K] \tilde{X} + \tilde{G}(\tilde{x}^3) = F e^{i\omega t} \quad (3.69)$$

Le vecteur $\tilde{G}(\tilde{x}^3)$ est défini par:

$$\tilde{G}(\tilde{x}^3) = \begin{Bmatrix} \tilde{g}_{12}(\tilde{x}_{1,2}) \\ \tilde{g}_{21}(\tilde{x}_{2,1}) \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

Avec:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{12}(\tilde{x}_{1,2}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \beta_{12} |\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2|^2 & -\frac{3}{4} \beta_{12} |\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2|^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{Bmatrix} \\ \tilde{g}_{21}(\tilde{x}_{2,1}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \beta_{21} |\tilde{X}_2 - \tilde{X}_1|^2 & -\frac{3}{4} \beta_{21} |\tilde{X}_2 - \tilde{X}_1|^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (3.71)$$

Equation (3.69) devient:

$$[M] \ddot{\tilde{X}} + [K] \tilde{X} + [\tilde{v}(\tilde{x}^2)] \tilde{X} = F e^{i\omega t} \quad (3.72)$$

Où $[\tilde{v}(\tilde{x}^2)]$ est défini par:

$$[\tilde{v}(\tilde{x}^2)] = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \beta_{12} |\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2|^2 & -\beta_{12} |\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2|^2 \\ -\beta_{21} |\tilde{X}_2 - \tilde{X}_1|^2 & \beta_{21} |\tilde{X}_2 - \tilde{X}_1|^2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

La non-linéarité est introduite dans le modèle par la constante $\beta_{12} = \beta_{21} = 1.28 \cdot 10^6$.

La figure 3.6 présente une comparaison entre la réponse linéaire caractérisée par la présence de pics correspondant aux deux fréquences de résonance et la réponse non linéaire caractérisée par le phénomène de saut (discontinuité de réponses). Ce saut est à proximité des deux fréquences naturelles du système linéaire pour l'oscillateur primaire et l'absorbeur.

On constate que les amplitudes de la réponse en fréquence à proximité des deux fréquences naturelles sont considérablement atténuées.

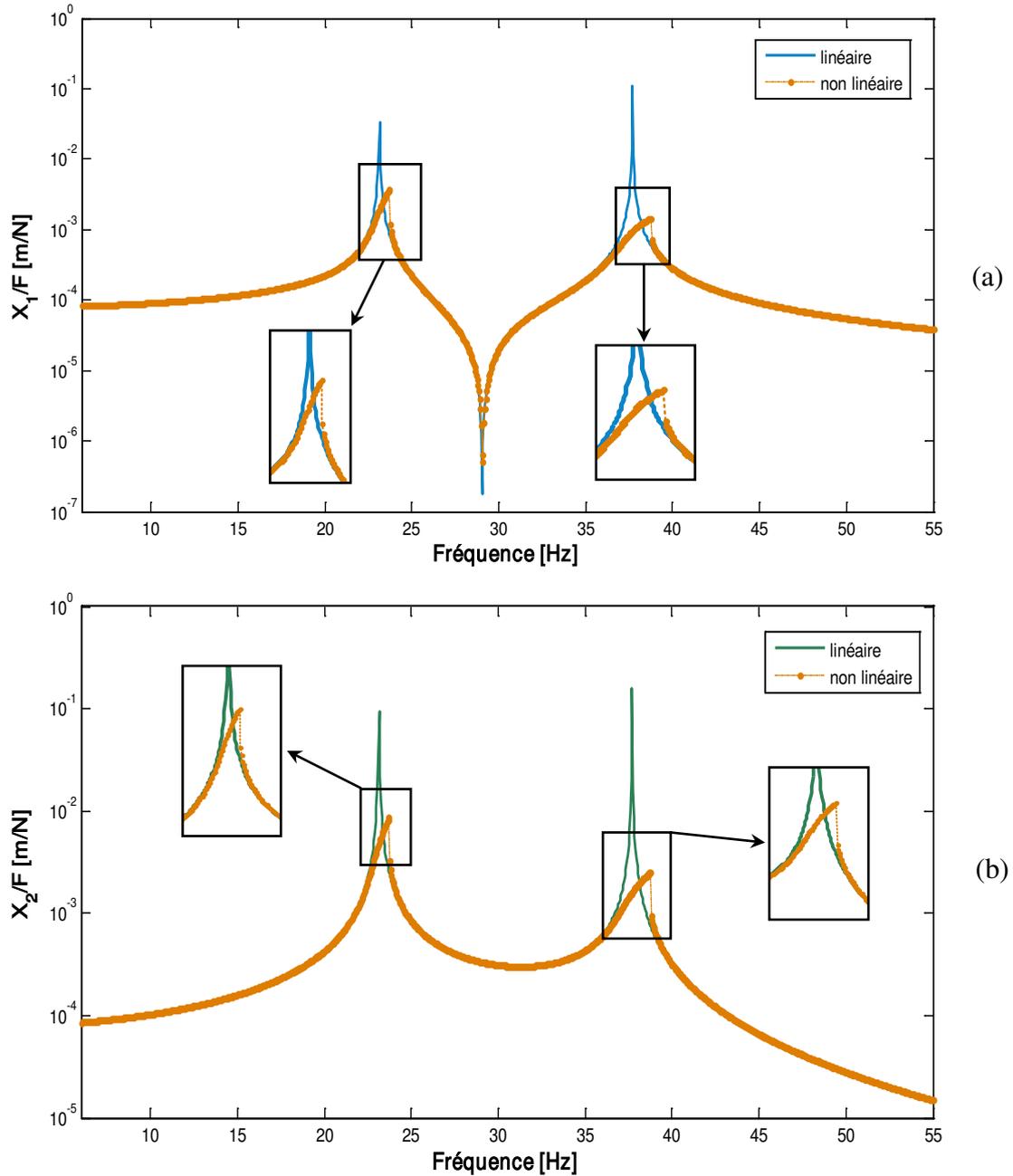


Figure 3.6. FRF du système non linéaire: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur

La figure 3.7 montre les discontinuités des valeurs propres à proximité des deux fréquences naturelles du système. Ces discontinuités sont dues à la non-linéarité introduite par la raideur cubique.

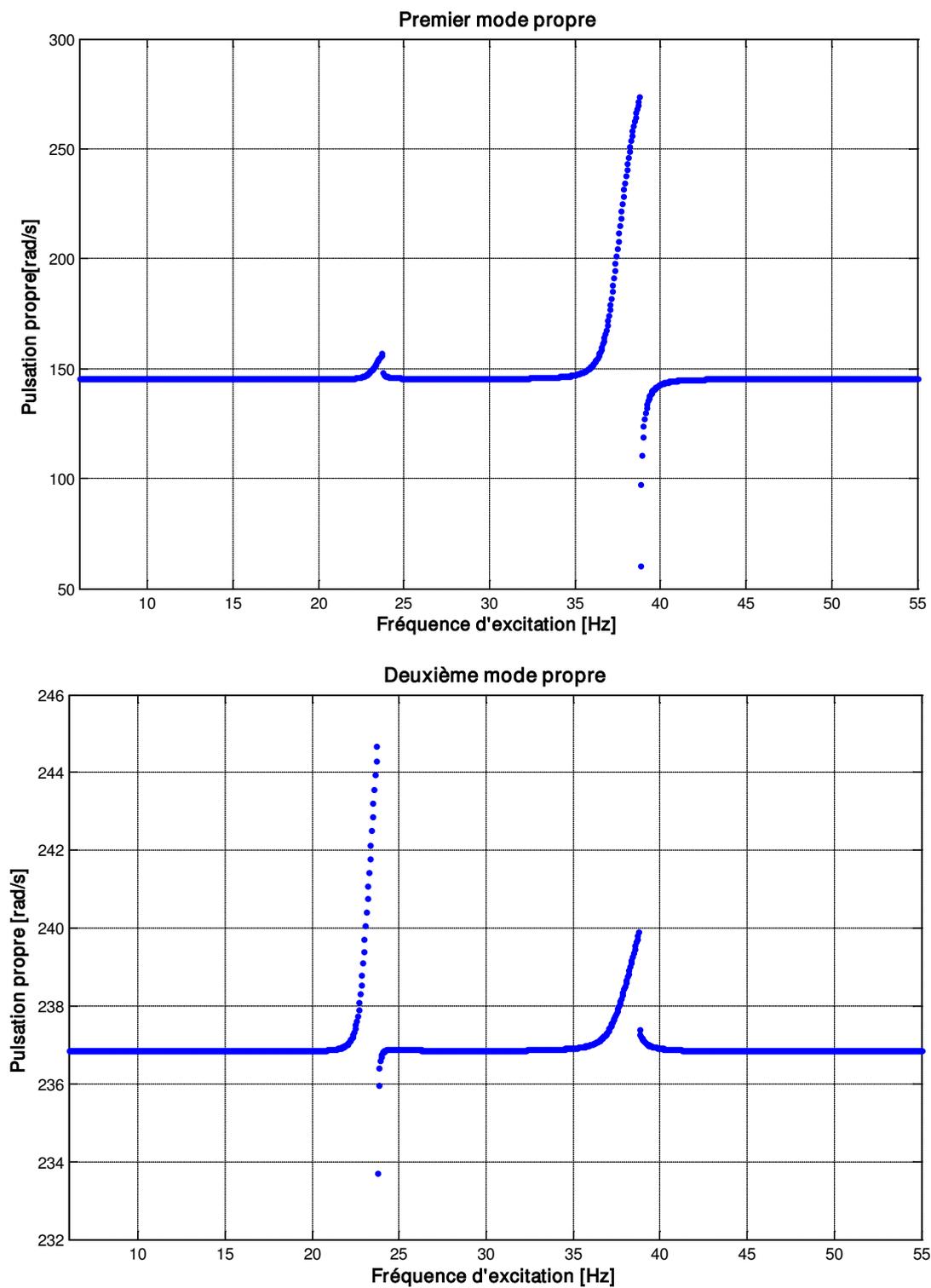


Figure 3.7. Discontinuité des modes normaux non linéaires

La figure 3.8 montre la discontinuité des composants de la matrice modale non linéaire en fonction de la fréquence de la force d'excitation ω . Cette discontinuité est toujours au voisinage des fréquences propres du modèle.

Pour les deux modes, il est clair que les déflexions modales sont en phase pour le premier mode et en opposition de phase pour le second.

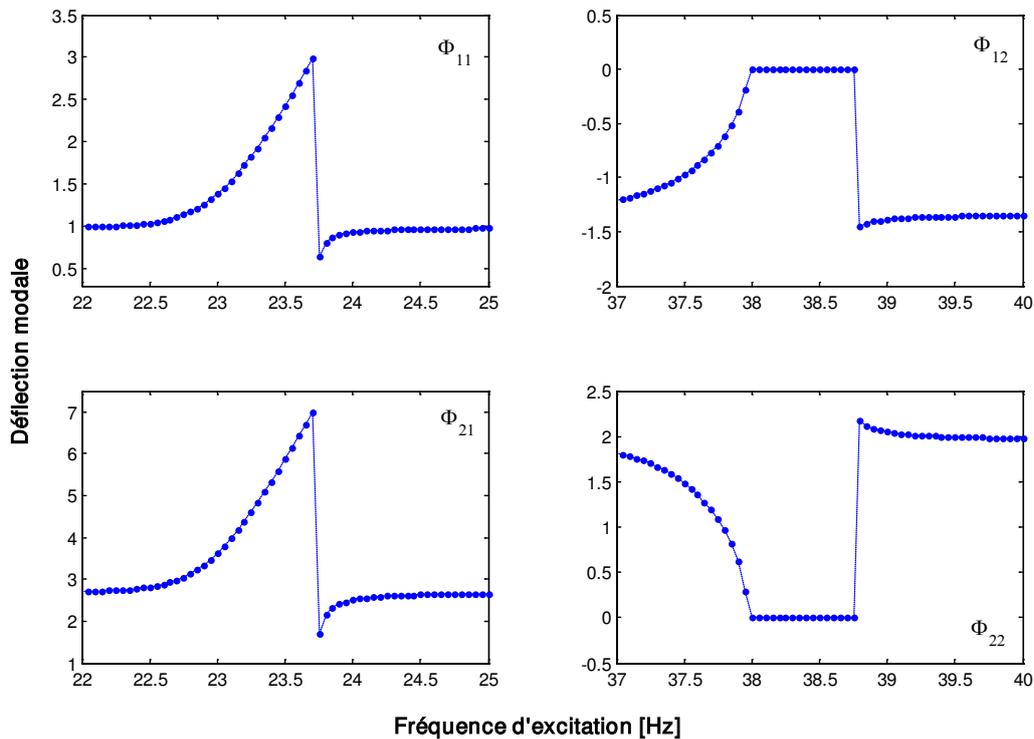


Figure 3.8. Discontinuité des composants du vecteur de la matrice modale non linéaire

Le coefficient de la rigidité non linéaire cubique β est pris égal à $1.28 \cdot 10^6$. Pour étudier l'influence de ce coefficient sur les FRFs du système, différentes valeurs de β sont considérées : $0.1 \cdot \beta$, $0.5 \cdot \beta$, $2 \cdot \beta$ et $10 \cdot \beta$. La figure 3.9 représente les FRFs de l'oscillateur et de l'absorbeur pour différentes valeurs de β .

Plus la non-linéarité est forte plus l'atténuation du niveau vibratoire est intéressante. En plus, cette augmentation de β est accompagnée par un décalage à droite de la fréquence de jump-down.

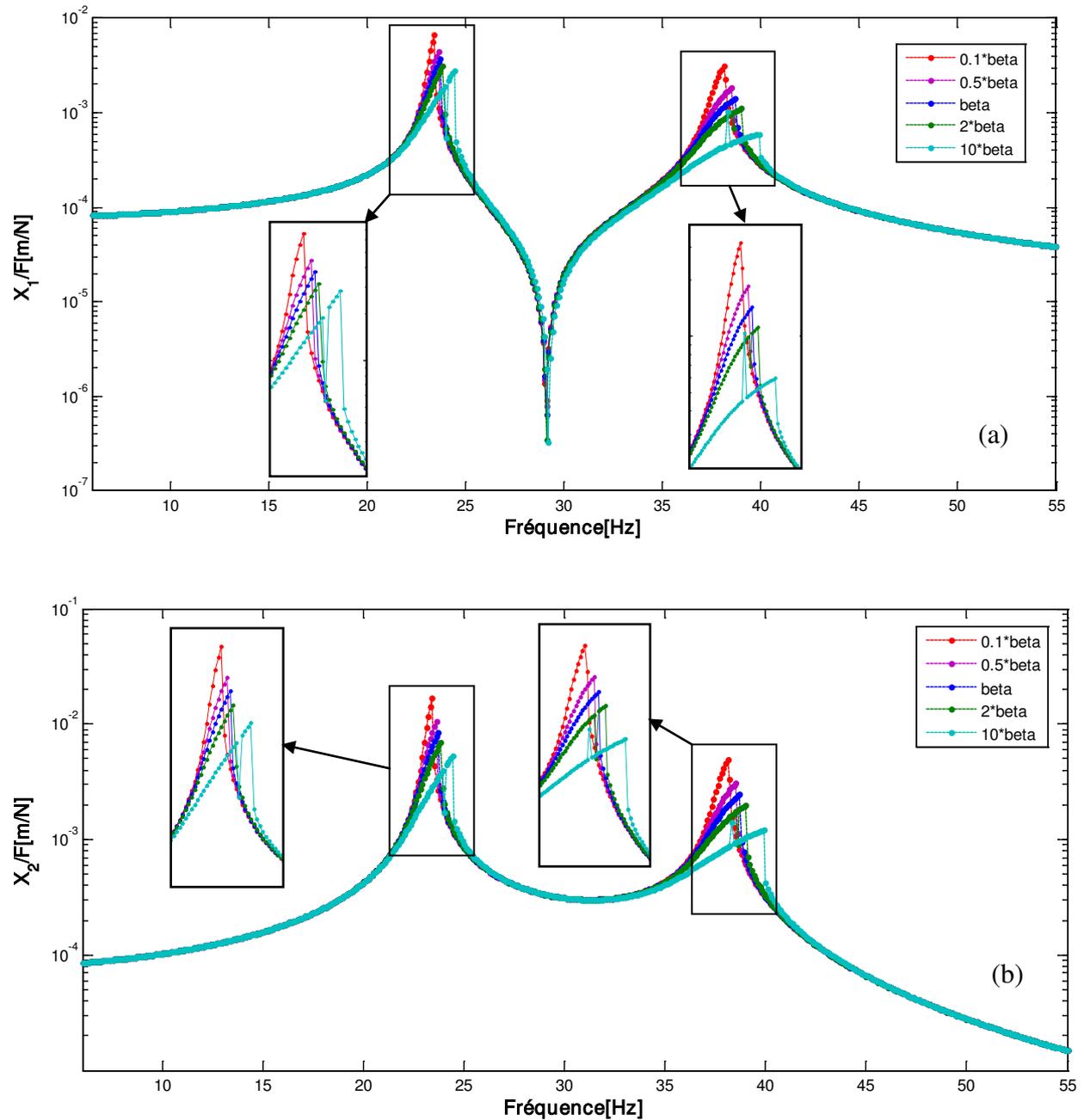


Figure 3.9. Influence de la non-linéarité sur la FRF: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur

La figure 3.10 représente les FRFs de l'oscillateur et de l'absorbeur pour différentes forces d'excitation ; $1N$, $5N$, $10N$ et $20N$. L'influence de la force d'excitation sur les FRFs est analogue à celle du coefficient β . En effet, l'augmentation de la force d'excitation engendre une augmentation de la non-linéarité du système et une atténuation plus significative de l'amplitude vibratoire.

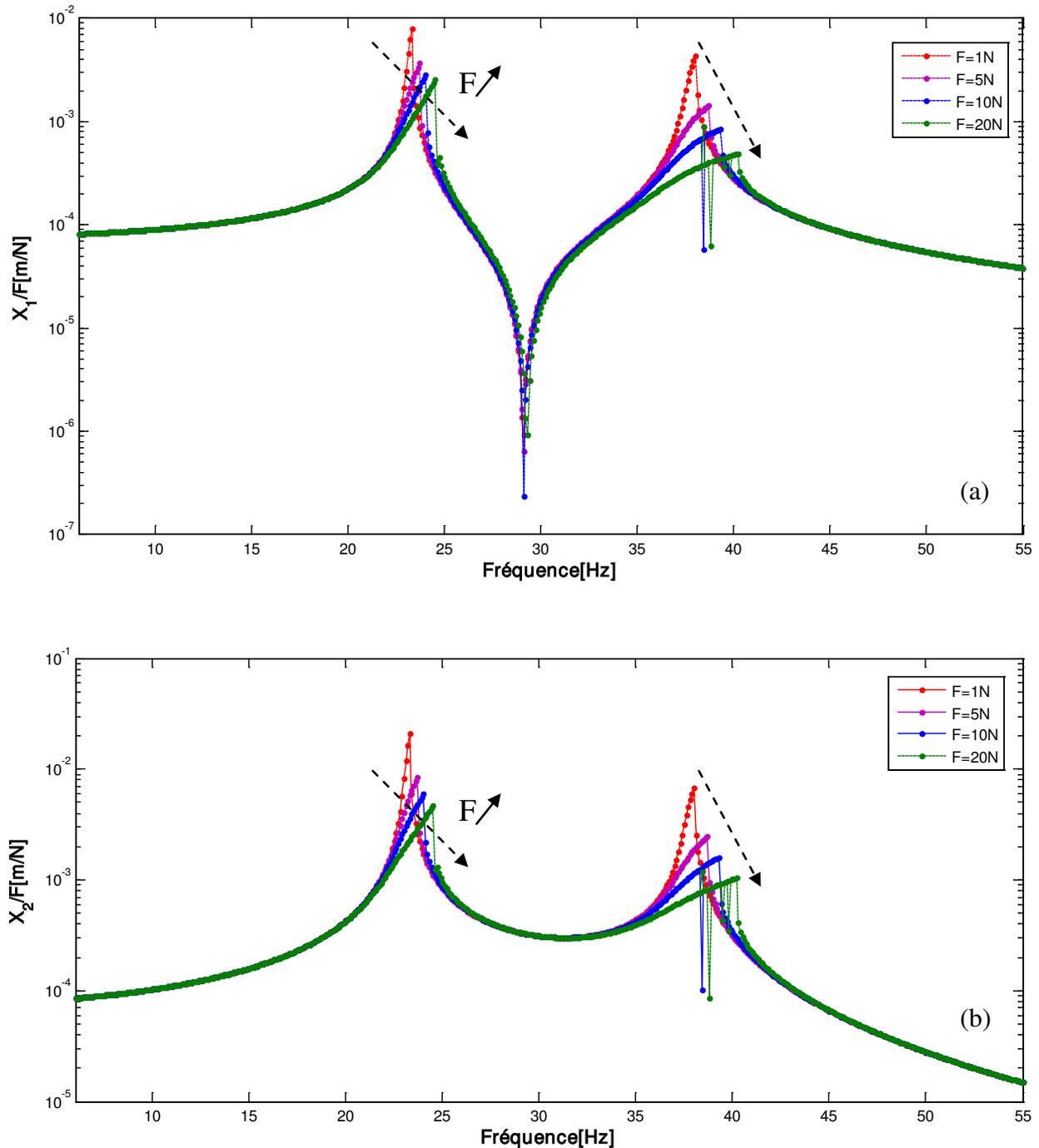


Figure 3.10. Influence de la force d'excitation sur la FRF: (a) oscillateur primaire, (b) absorbeur

3.6. Conclusion

Dans cette partie, l'analyse des modes non linéaires d'un système à deux degrés de liberté avec une raideur cubique non linéaire a été effectuée. Elle consiste à la détermination des FRFs non linéaires en plus des valeurs propres et vecteurs propres non linéaires. La simulation numérique a montré que les fréquences naturelles du système varient en fonction

de la fréquence d'excitation. Le phénomène de saut qui caractérise le comportement non linéaire du système a été également observé. L'influence du degré de la non-linéarité et de la force d'excitation sur les FRFs a été étudiée. Les résultats numériques de la méthode abordée seront validés expérimentalement dans le chapitre suivant en étudiant le comportement dynamique d'un absorbeur de vibration non linéaire.

Chapitre 4

ETUDE EXPERIMENTALE

4.1. Introduction

L'une des méthodes la plus courante pour l'étouffement des vibrations est l'utilisation d'absorbeurs dynamiques. Deux types d'absorbants peuvent être trouvés: linéaire et non linéaire. L'utilisation d'absorbeurs linéaires permet de réduire les vibrations, mais seulement à une fréquence donnée, alors que les absorbeurs non linéaires atténuent les vibrations sur une bande de fréquence plus large. Le but de cette partie est de réaliser un démonstrateur dont le comportement dynamique est celui d'un absorbeur des vibrations non linéaires. Le démonstrateur doit être robuste, facile à réaliser, transporter et permettant d'observer les phénomènes non linéaires qui peuvent avoir lieu. Pour cela, l'idée était de concevoir un système à deux degrés de liberté présentant une non-linéarité localisée et dont les deux premiers modes propres se trouvent en basses fréquences (inférieures à 50Hz)

Premièrement, la conception du démonstrateur est détaillée. Deuxièmement, l'instrumentation utilisée en plus du mode opératoire des expériences élaborées sont décrites. Finalement, les résultats expérimentaux trouvés sont analysés afin de caractériser les vibrations non linéaires du système et de valider les résultats numériques obtenues dans le chapitre précédent.

4.2. Conception du démonstrateur

Le démonstrateur conçu est un système à deux degrés de liberté. Il est constitué d'un oscillateur linéaire (OL) représentant la structure initiale à amortir attaché à un autre oscillateur présentant une non linéarité de contact et jouant le rôle d'un absorbeur de vibration dynamique non linéaire (AVDN).

L'oscillateur linéaire est un modèle simple composé d'une masse et un ressort. Le ressort de raideur K_1 est représenté par deux poutres parallèles en acier fixés d'un côté et liées à la masse M_1 de l'autre côté. La longueur des deux poutres peut être modifiée à fin d'ajuster la raideur du ressort K_1 . L'utilisation de deux poutres permet de négliger la rotation de la masse M_1 et se limiter à un degré de liberté qui est le déplacement linéaire.

L'absorbeur de vibration est composé de deux lames minces et une petite masse M_2 . La position de la masse M_2 sur les lames peut être modifiée de sorte qu'il est possible de faire varier la raideur de l'absorbeur K_2 . En plus, des masses peuvent être ajoutées à l'absorbeur pour modifier sa masse.

La non-linéarité est due à un jeu de 1mm de part et d'autre de la masse M_1 et des lames de l'absorbeur. Le profil de la surface de la masse M_1 présente une légère inclinaison permettant aux lames de venir taper sur la masse M_1 d'une façon progressive et évitant les chocs agressifs. La figure 4.1 présente le modèle géométrique du système à deux degrés de liberté conçu.

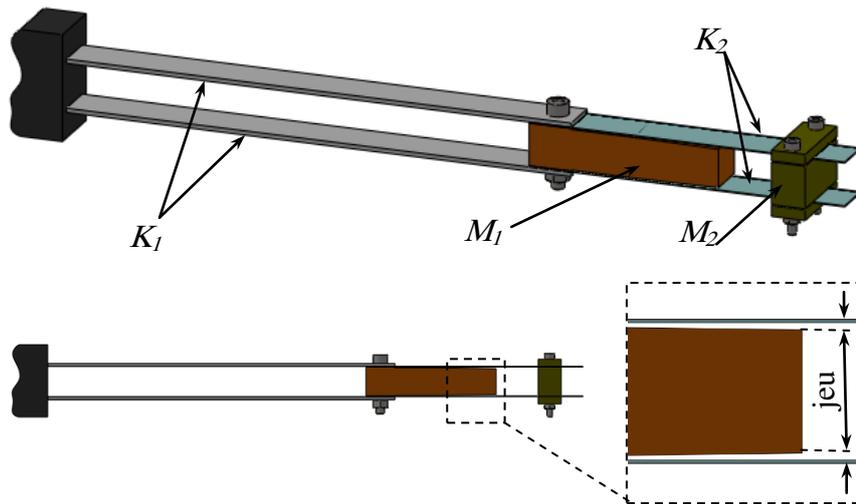


Figure 4.1. Modèle géométrique

Les caractéristiques géométriques du système conçu sont récapitulées dans le tableau 4.1.

		Matériau	Dimensions (mm)
Oscillateur linéaire	Masse M_1	Acier	$20 \times 20 \times 90$
	2 poutres	Acier	$20 \times 2 \times 240$
absorbeur	Masse M_2	Acier	$16 \times 30 \times 40$
	2 lames	aluminium	$20 \times 0.5 \times 150$

Tableau 4.1. Caractéristiques géométriques

Le modèle dynamique du système ainsi conçu est constitué de deux masses M_1 et M_2 , deux ressorts K_1 et K_2 et deux amortisseurs C_1 et C_2 . La non-linéarité est représentée par la raideur de contact K_c . Le système est soumis à une force sinusoïdale F au niveau de la masse M_1 .

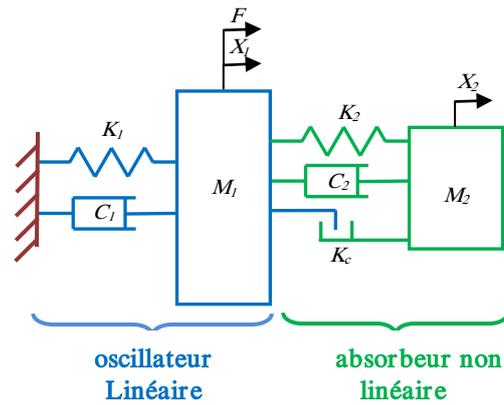


Figure 4.2. Modèle dynamique du démonstrateur

Le dimensionnement du démonstrateur est précédé d'une analyse fréquentielle effectuée par le logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS afin d'identifier les deux premiers modes propres dans la bande de fréquences [10-50Hz].

La figure 4.3 montre le modèle éléments finis du démonstrateur. Le problème est ramené à un problème plan. Les poutres et lames sont modélisées par des éléments de type poutre "Beam" quadratique et la masse est modélisée par des éléments de type plaque "plate" quadratique.

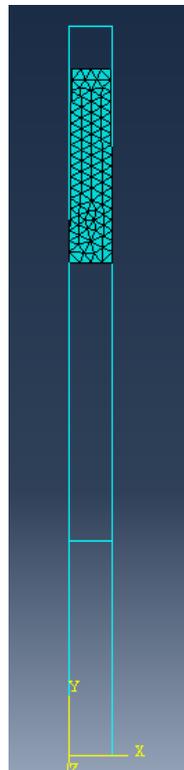


Figure 4.3. Modèle éléments finis du démonstrateur

Le tableau 4.2 montre les cinq premières fréquences propres du système avec les caractéristiques géométriques du tableau 4.1. Les deux premières fréquences propres sont $f_1 = 23 \text{ Hz}$ et $f_2 = 39 \text{ Hz}$ qui sont bien situées dans la bande de fréquences désirée.

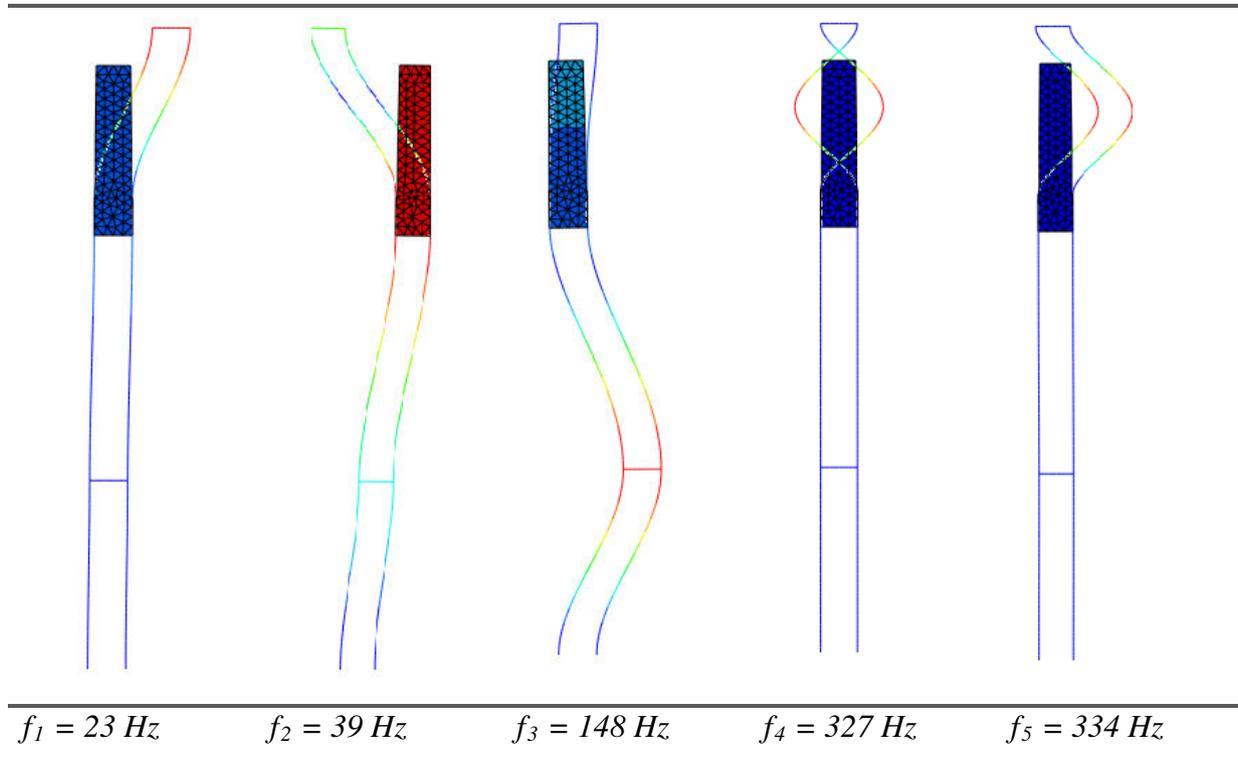


Tableau 4.2. Cinq premières fréquences propres et modes correspondants

Les valeurs des masses et de rigidité du modèle dynamique, présenté en figure 4.2, sont déterminées comme suit : les masses M_1 et M_2 sont calculés directement alors que les valeurs de raideur K_1 et K_2 sont estimées en résolvant la formule d'analyse des fréquences propres pour un système à 2 degrés de liberté donnée par:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{K_1 + K_2}{M_1} \right)^2 + \left(\frac{K_2}{M_2} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left[\left(\left(\frac{K_1 + K_2}{M_1} \right)^2 - \left(\frac{K_2}{M_2} \right)^2 \right)^2 + 4 \frac{K_2^2}{M_1 M_2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{K_1 + K_2}{M_1} \right)^2 + \left(\frac{K_2}{M_2} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\left(\frac{K_1 + K_2}{M_1} \right)^2 - \left(\frac{K_2}{M_2} \right)^2 \right)^2 + 4 \frac{K_2^2}{M_1 M_2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.1)$$

4.3. Description du dispositif expérimental

Une étude expérimentale est effectuée afin de mesurer les réponses dynamiques du système et déterminer les fonctions de réponse en fréquences (FRFs). Le système est soumis à une force sinusoïdale avec balayage de fréquences et les accélérations sont mesurées à chaque instant au niveau de la masse M_1 de l'oscillateur linéaire et au niveau de la masse M_2 de l'absorbeur. Dans la suite, l'instrumentation et le déroulement des essais expérimentaux sont décrits.

4.3.1. Instrumentation

Le système principal est soumis à une force harmonique. Cette force est délivrée par un pot vibrant électrodynamique LDS de type V406. Le pot vibrant est excité par un générateur de fréquence produisant un signal sinusoïdal relié au pot vibrant à travers un amplificateur de puissance. La force d'excitation est mesurée par un capteur de force de type B&K et de sensibilité 0.1 V/N . Les accélérations des deux masses sont mesurées en utilisant des capteurs piézoélectriques de type Kistler et de sensibilité 200 mV/g .

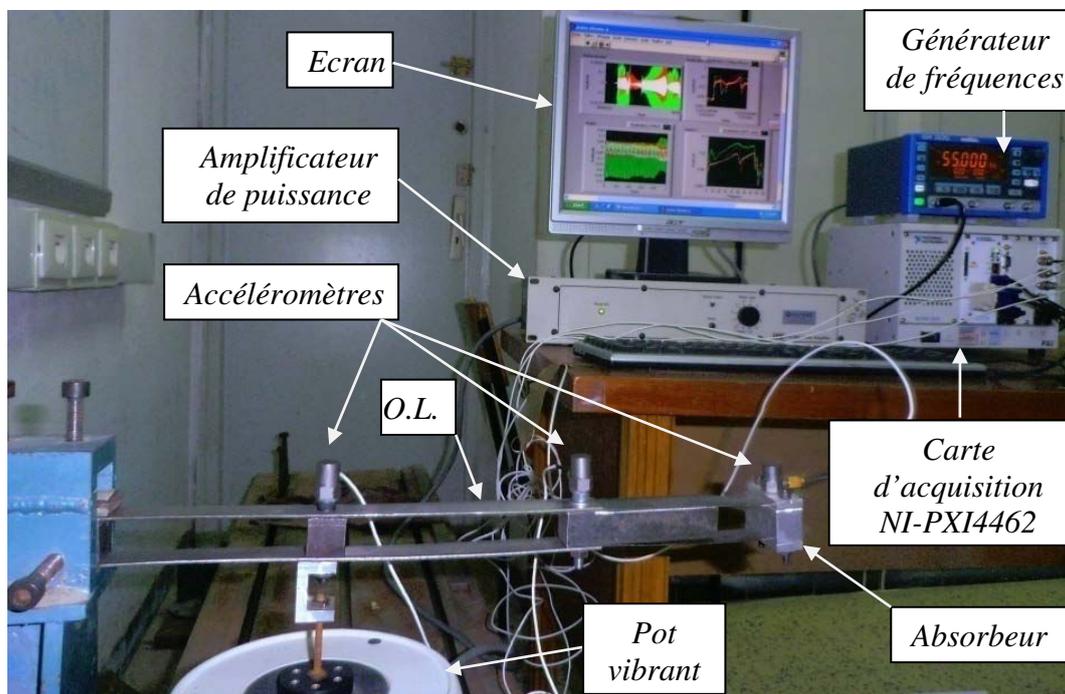


Figure 4.4. Montage expérimental

Les mesures sont acquises par une carte d'acquisition à 4 voies (National Instruments NI PXI-4462). Elles sont stockées dans un fichier ".txt", traitées par le logiciel Labview et visualisées sur un écran de PC. Le générateur de fréquence de type METRIX GX305 DDS (Synthèse Numérique Directe), fournit une précision et une stabilité en fréquence bien supérieure à celles d'un générateur classique. Il permet de générer plusieurs types de signaux: formes d'ondes, sinus, triangle, carré etc. Il couvre une plage de fréquences allant de $0,001\text{ Hz}$ jusqu'à 5 MHz .

Le schéma de principe du montage expérimental est montré dans la Figure 4.5.

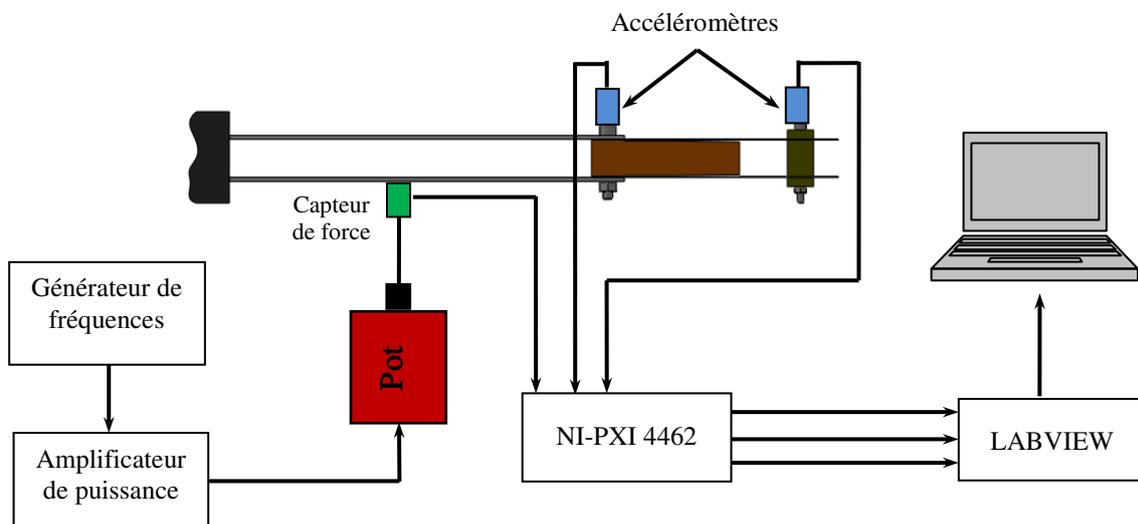


Figure 4.5. Installation d'instrumentation du montage expérimental

4.3.2. Mode opératoire

Afin de s'assurer de l'isolation vibratoire, le démonstrateur est monté sur un marbre. Le capteur de force est placé directement entre le pot vibrant du système primaire à exciter. Les deux accéléromètres sont bien collés sur la masse primaire et la masse de l'absorbeur. Un essai préliminaire consiste en un balayage de fréquence pour déterminer les fréquences de résonance et la bande de fréquences à étudier. Deux fréquences de résonance sont détectées aux alentours des 25 et 40 Hz, pour cela le balayage est limité sur la bande de fréquences [6-55 Hz]. Les essais sont faits pour différents niveaux d'excitation. Pour chaque amplitude de force appliquée par le pot vibrant, un balayage de fréquence lent est appliqué à partir de 6 Hz à 55 Hz et la réponse du système est enregistrée par l'intermédiaire de la carte d'acquisition

de données. Le balayage est effectué en fréquences croissantes et décroissantes. La variation de la fréquence est effectuée à une vitesse très lente de telle sorte que les résultats enregistrés peuvent représenter le comportement du système à son état stationnaire.

L'évolution de la réponse dynamique du système est visualisée sur un écran de PC à travers le logiciel de traitement de signal Labview.

Les figures 4.6 et 4.7 montrent respectivement la variation temporelle des accélérations enregistrées de la masse M_1 et de la masse de l'absorbeur M_2 pour un balayage en fréquences croissant et décroissant.

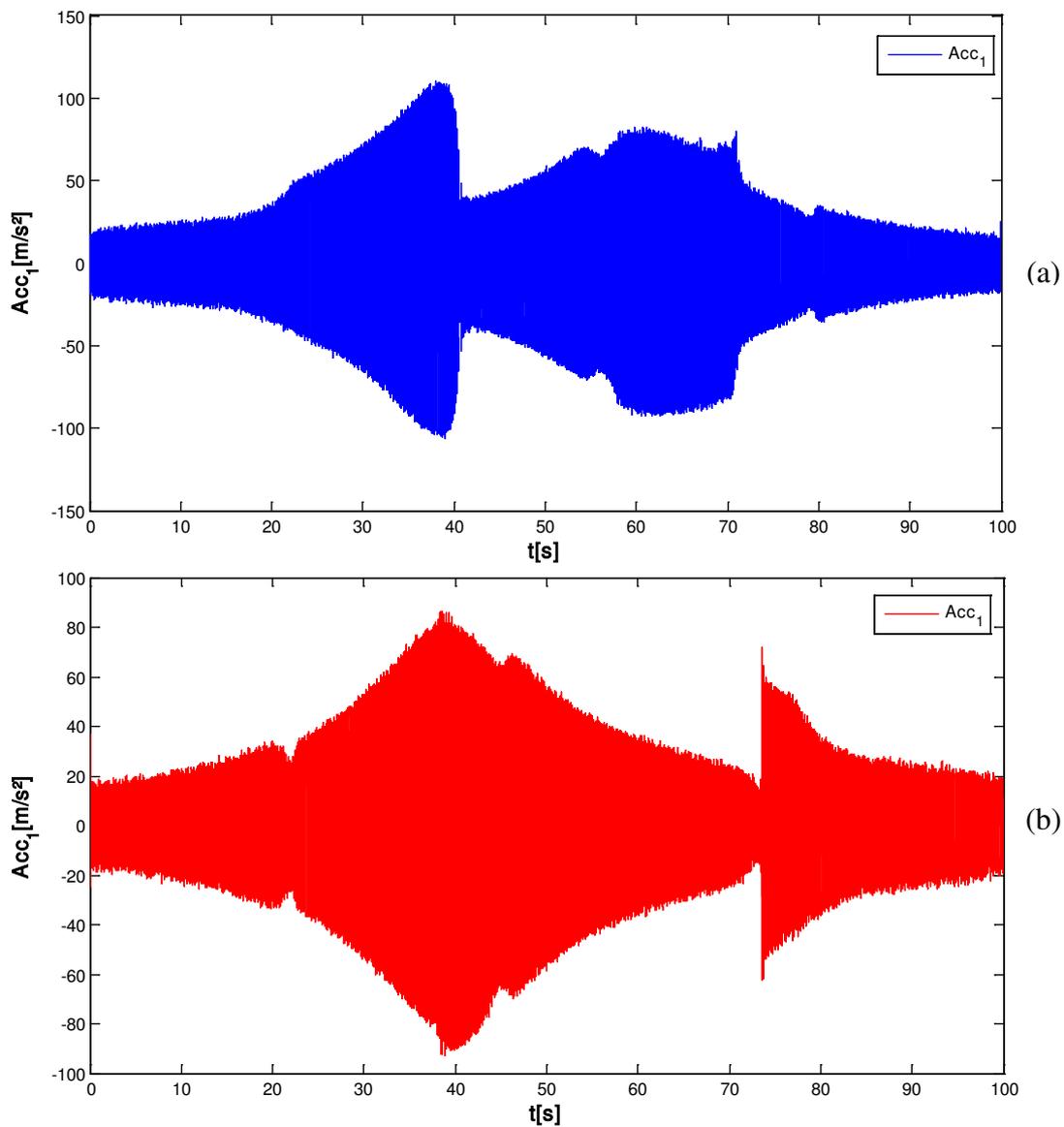


Figure.4.6. Accélérations enregistrées pour la masse M_1
(a) Fréquences croissantes, (b) Fréquences décroissantes

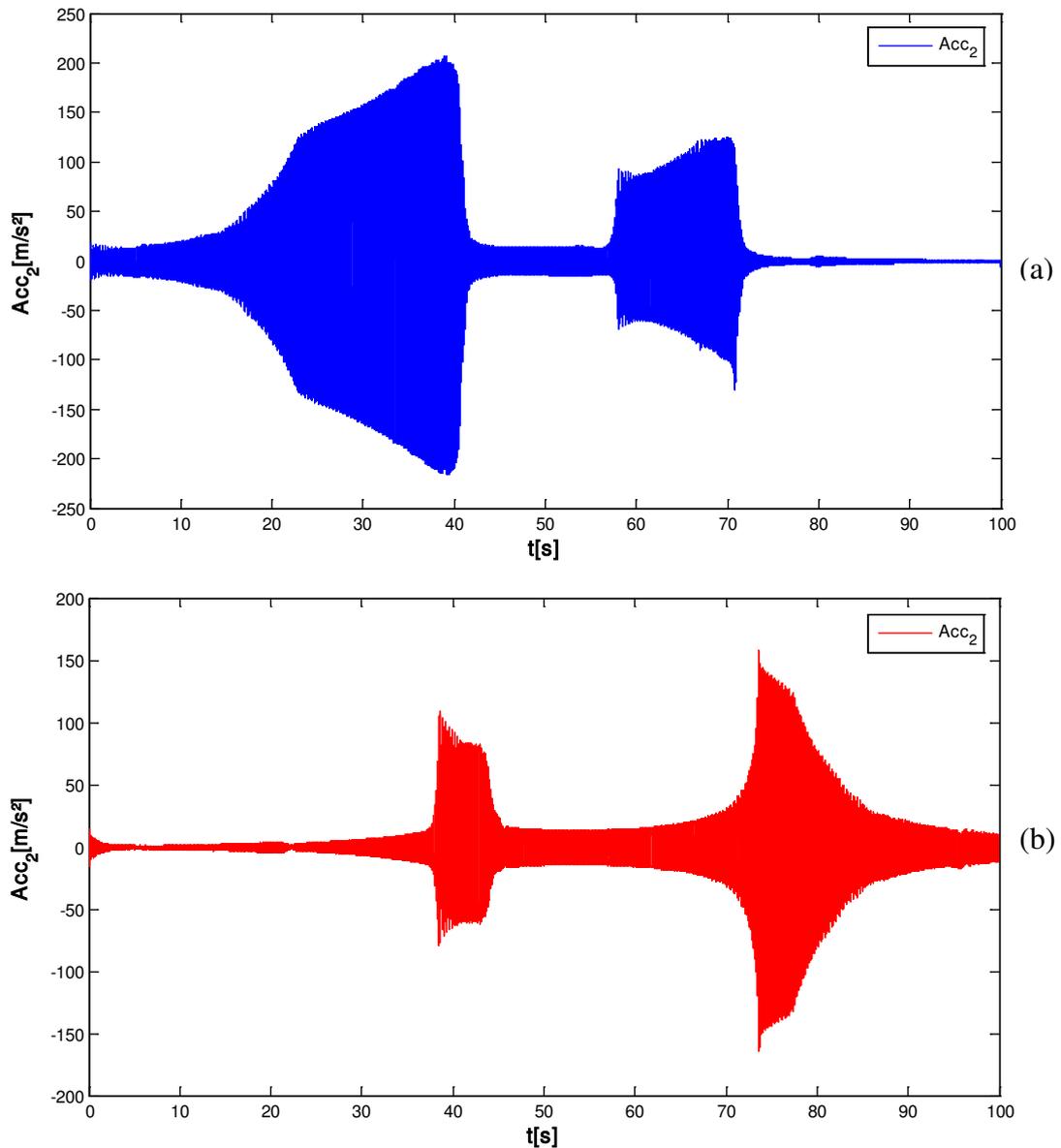


Figure.4.7. Accélérations enregistrées pour la masse M_2
 (a) Fréquences croissantes, (b) Fréquences décroissantes

4.3.3. Interprétation des résultats expérimentaux

Nous commençons avec une force d'excitation de faible amplitude. Il n'y a pas de contact entre l'absorbeur et la masse primaire de telle sorte que le système présente un comportement linéaire. Deux fréquences de résonance sont observées pour les quelles les deux masses vibrent avec des grandes amplitudes.

Dans le cas d'une force d'excitation de grande amplitude, les deux lames de l'absorbeur arrivent à taper sur la masse M_1 . En augmentant la fréquence, le niveau de vibration des deux masses augmente jusqu'à atteindre 25 Hz . A cette fréquence, une diminution brusque de l'amplitude de vibration des deux masses est survenue: un saut vers le bas dans la réponse (jump-down). Lorsque la fréquence est augmentée au-delà de cette valeur, l'amplitude de la vibration reste négligeable. En augmentant encore la fréquence, une deuxième résonance s'est produite à environ 41 Hz . Le phénomène de saut vers le bas est à nouveau observé en particulier pour l'absorbeur.

Un balayage décroissant est ensuite effectué en allant des hautes fréquences vers les basses fréquences (de 55 Hz à 6 Hz). Pour la masse M_1 , l'augmentation d'amplitude de vibration est pratiquement similaire à celle dans le cas du balayage croissant. Pour la masse M_2 , une augmentation brusque de l'amplitude est survenue à 36 Hz (saut vers le haut). En diminuant encore la fréquence, le phénomène de saut vers le haut (jump-up) est survenu pour les deux masses au voisinage de 20 Hz .

La figure 4.8 présente respectivement la réponse en fréquence expérimentale des accélérations de la masse M_1 et la masse M_2 pour un balayage en fréquences croissant et décroissant et pour une force d'excitation de 5N . Le phénomène de saut vers le bas se produit autour de 25 Hz et 41 Hz . Le phénomène de saut vers le haut se produit autour de 20 Hz et 36 Hz . Les amplitudes de vibration sont sensiblement atténuées à proximité des fréquences propres du système.

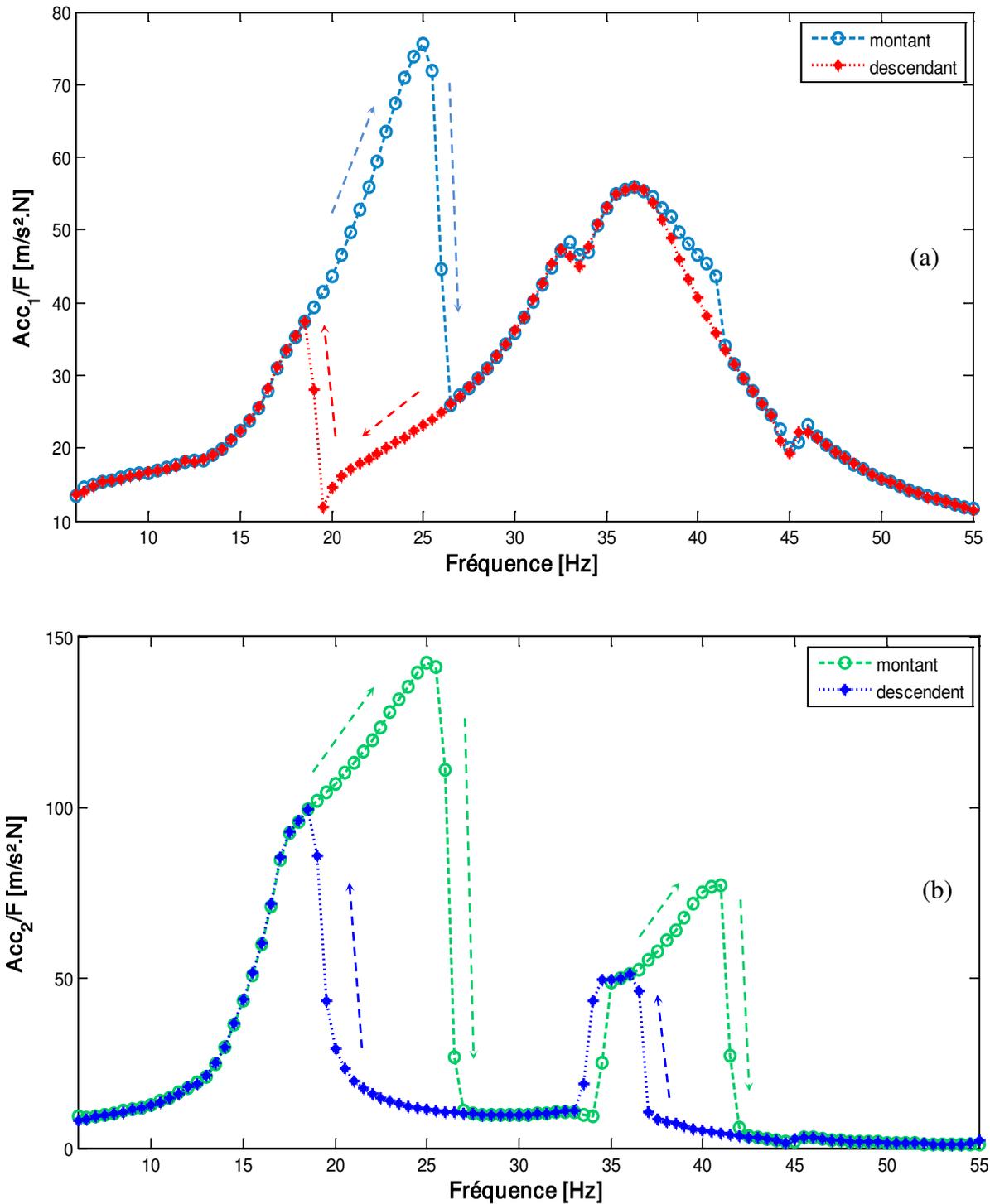


Figure 4.8. FRF expérimentale des accélérations: (a) OL, (b) absorbeur
(o) Fréquences croissantes, (*) Fréquences décroissantes

Lors des essais, le balayage est effectué pour différentes forces d'excitation : $F = 1N$, $F = 5N$ et $F = 10N$. La figure 4.9 représente l'effet de la force d'excitation sur les FRFs de la masse M_1 pour un balayage en fréquences croissantes et décroissantes. Plus que la force d'excitation augmente plus que la non linéarité est accentuée. Les fréquences du "jump-down" et du

"jump_up" augmentent (migrent vers la droite) au fur et à mesure que la valeur d'excitation augmente. Ceci est très clair dans les figures suivantes surtout pour la première fréquence propre.

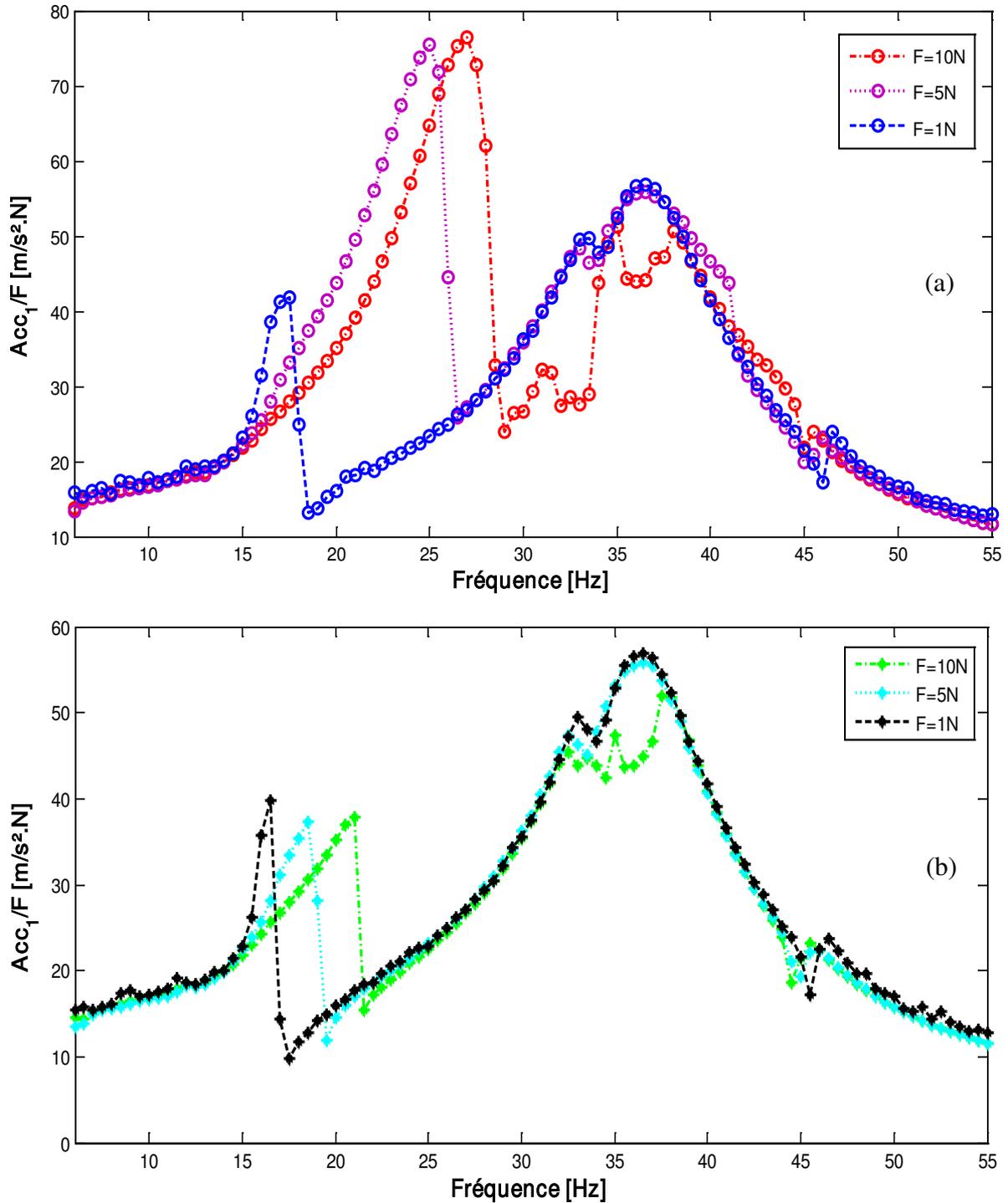


Figure 4.9. Effet de la force d'excitation sur la FRF expérimentale de M_1
 (a) Fréquences croissantes, (b) Fréquences décroissantes

De même pour la masse M_2 , l'effet de la force d'excitation sur les FRFs est représenté dans la figure 4.10 pour un balayage en fréquences croissantes et décroissantes. Quand l'excitation est faible ($F=1\text{N}$), l'effet de la non linéarité est négligeable et le système présente un comportement presque linéaire. En augmentant l'excitation, le phénomène du saut se produit fortement avec une atténuation considérable du niveau vibratoire.

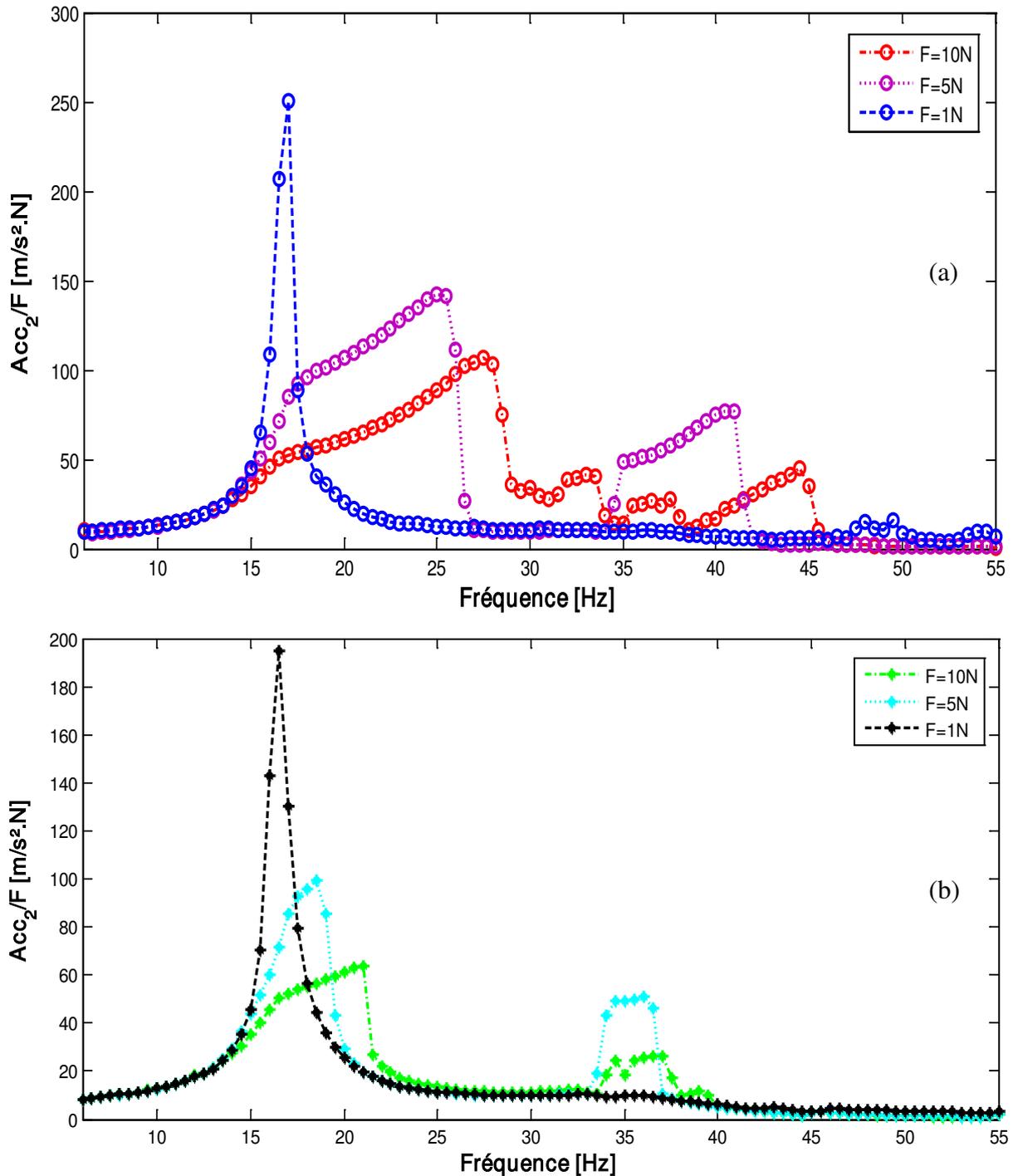


Figure 4.10. Effet de la force d'excitation sur la FRF expérimentale de M_2
(a) Fréquences croissantes, (b) Fréquences décroissantes

La représentation des modes normaux dans l'espace de configuration est effectuée pour un balayage en fréquences croissant et décroissant et pour différentes valeurs de fréquences d'excitation, la force d'excitation étant de $5N$.

Pour un balayage croissant (figure 4.11), la ligne modale est linéaire à la fréquence 10 Hz et les deux masses vibrent en phase. En augmentant la fréquence d'excitation, les lignes modales deviennent des courbes ce qui explique le comportement non linéaire du système. Au voisinage des fréquences de "jump-down" (27 Hz et 36 Hz), les lignes modales changent d'allure brusquement et d'une manière inattendue. Quand on s'éloigne de ces deux fréquences (à 50 Hz), le comportement est de nouveau linéaire et les deux masses sont en opposition de phase.

Pour un balayage décroissant (figure 4.11), les lignes modales sont linéaires pour les fréquences 10 Hz et 50 Hz . Le comportement non linéaire est de même bien observé mais pour des fréquences différentes, évidemment pour les fréquences de "jump_up" (19 Hz et 34 Hz).

Aux fréquences 19.5 Hz et 22.5 Hz , les deux masses vibrent en phase en cas de balayage en fréquences croissant mais elles deviennent en opposition de phase dans le cas de balayage en fréquences décroissant, figure (4.12).

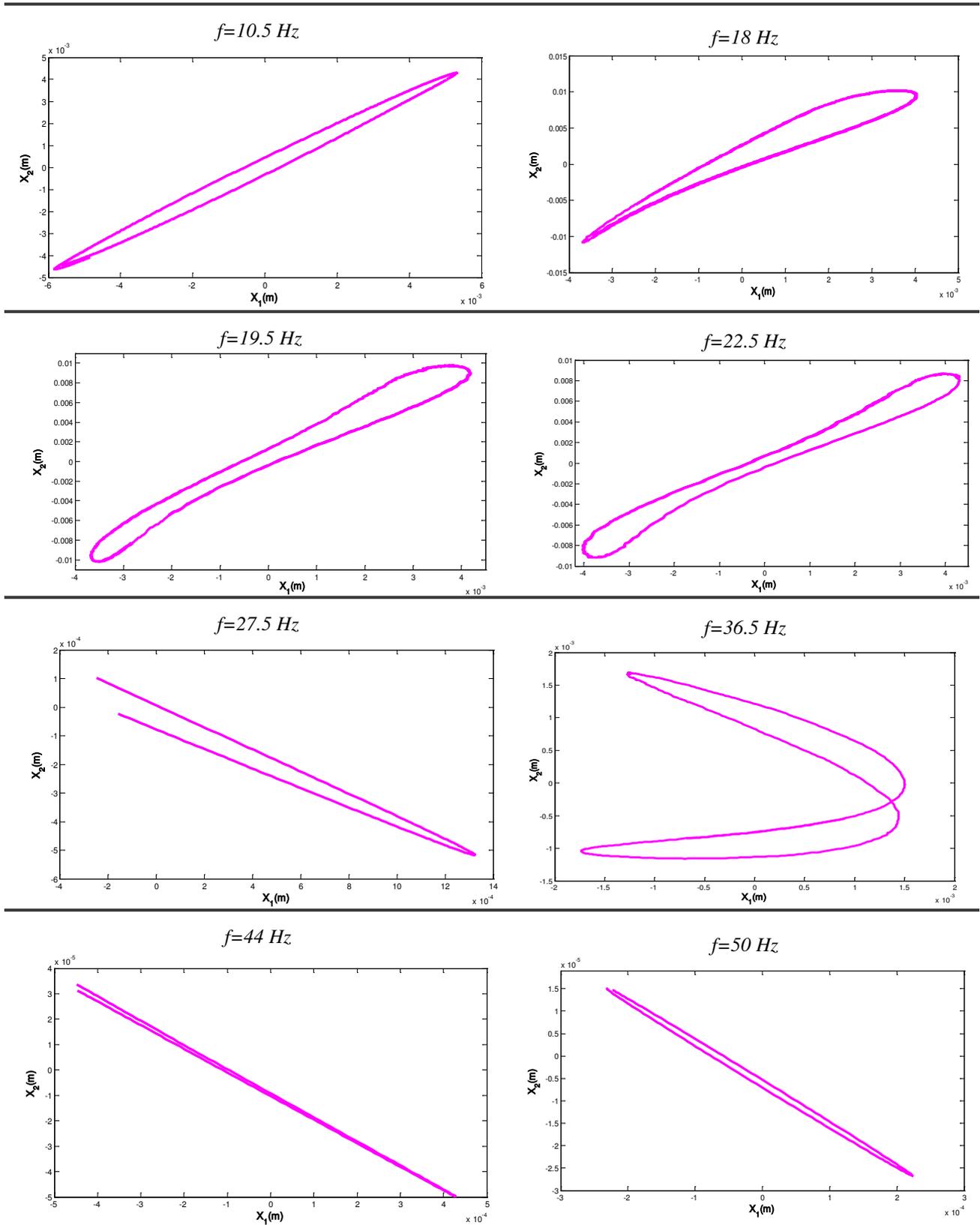


Figure 4.11. Evolution de lignes modales expérimentales pour un balayage en fréquences croissantes

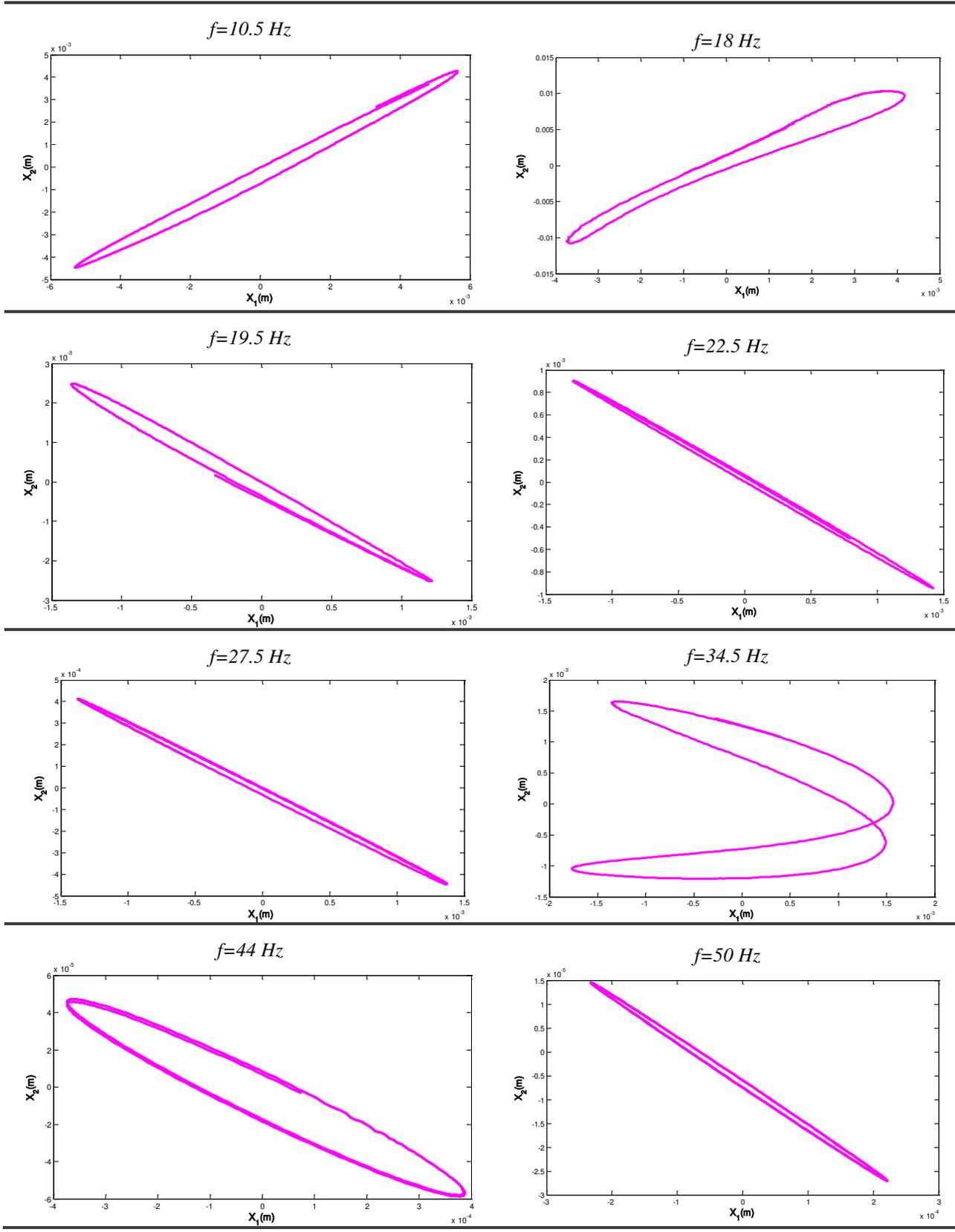


Figure 4.12. Evolution de lignes modales expérimentales pour un balayage en fréquences décroissantes

Les Figures 4.13 (a) et (b) montrent les harmoniques des réponses dynamiques pour les deux masses M_1 et M_2 qui prouvent la présence de non linéarité du dispositif expérimental. Cette non-linéarité rend ce système robuste et elle est d'une grande importance dans l'atténuation des vibrations

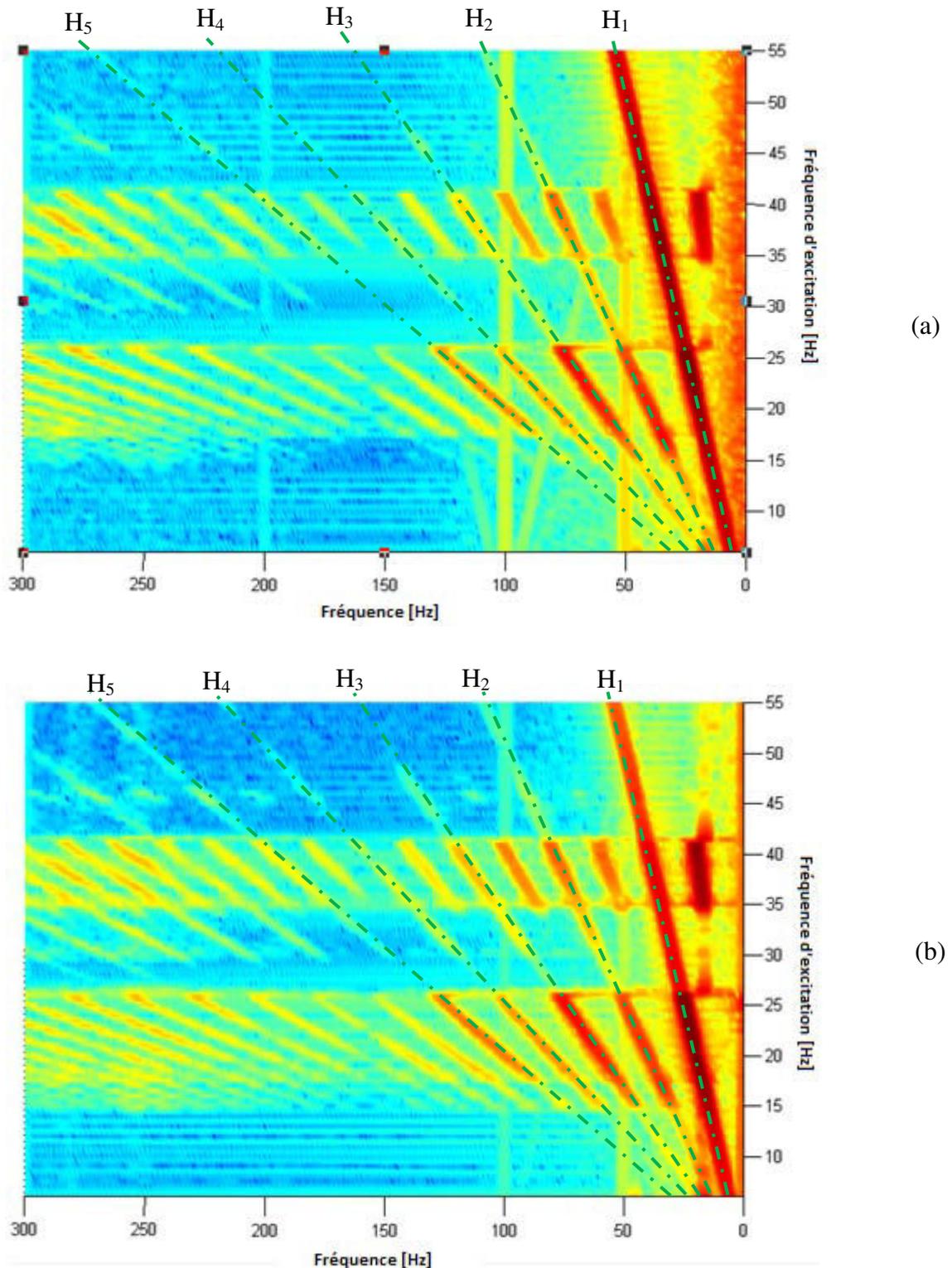


Figure 4.13 Harmoniques de la réponse dynamique : (a) M_1 , (b) M_2

4.3.4. Validation des résultats numériques

Afin de valider les résultats numériques trouvés par la méthode abordée au chapitre 3, une comparaison entre les FRFs expérimentales et numériques pour les deux masses est représentée dans la figure 4.7. Il est bien noté un accord qualitatif dans les résultats, même s'il y a une différence de l'amplitude aux alentours des fréquences du saut vers le bas et du saut vers le haut. Cela est dû à la difficulté de la caractérisation précise de l'amortissement et de la non-linéarité de raideur cubique.

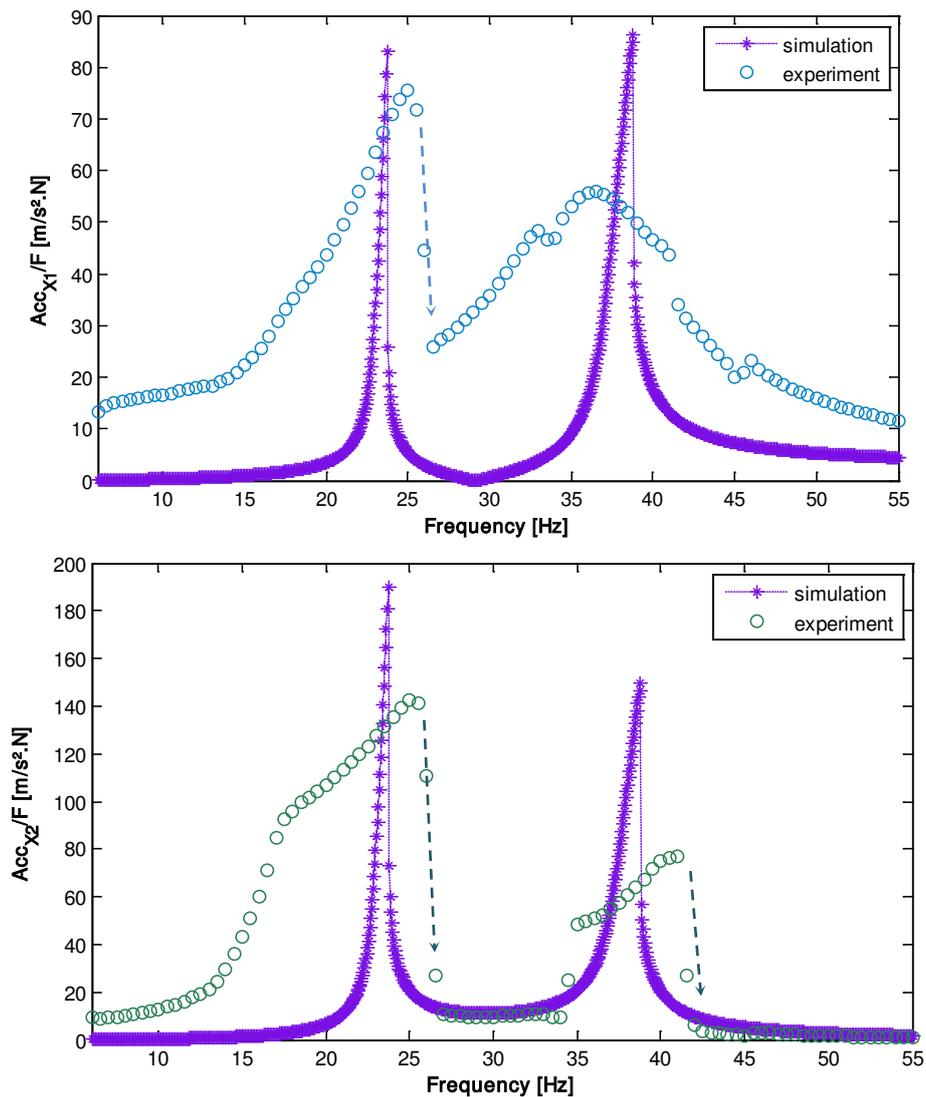


Figure 4.14. FRF numérique et expérimentale: (a) LO, (b) absorbeur
(*) Simulation, (o) Expérimental

4.4. Conclusion

L'étude expérimentale est une partie très importante de notre travail. En effet, il nous a fallu beaucoup de temps pour arriver à avoir des résultats acceptables. Lors de cette étude nous avons abordé la conception de plusieurs bancs sur la base d'un système à deux degrés de liberté et simulant le comportement dynamique d'un absorbeur de vibration non linéaire. Dans un travail de perspective, ces bancs seront repris et améliorés afin d'entamer une étude expérimentale paramétrique et exploitant d'autres sources de non linéarité.

Les résultats expérimentaux sont en accord avec les résultats numériques et illustrent l'importance de l'absorbeur de vibration non linéaire dans la réduction des niveaux d'amplitude en particulier à proximité des fréquences propres..

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION

Parmi les techniques de contrôle de vibrations, l'utilisation des absorbeurs de vibration non linéaires est une technique efficace et un sujet d'actualité pour la communauté des chercheurs. L'étude bibliographique nous a permis de bien explorer les différentes méthodes numériques de résolution des systèmes non linéaires et notamment les systèmes avec un absorbeur de vibration non linéaire. On a ainsi pu constater que contrairement à la diversité des méthodes numériques de résolution, l'approche expérimentale est de moindre intérêt pour les chercheurs.

Pour l'étude d'un absorbeur de vibration non linéaire, un modèle dynamique à deux degrés de liberté présentant une non-linéarité de contact due à la présence d'un jeu est développé. L'étude du comportement dynamique et la détermination des réponses temporelles du modèle étudié est effectuée par une méthode robuste et très efficace de point de vue simplicité, précision et gain du temps de calcul qui est la méthode asymptotique numérique.

Des phénomènes non linéaires tels que les résonances internes et la distorsion harmonique engendrée par la génération des harmoniques sont mis en évidence à travers une étude de l'influence du jeu et de l'amplitude d'excitation sur la réponse dynamique du système et sur ses modes normaux. Les phénomènes non linéaires ont une grande importance dans la mitigation vibratoire.

L'investigation du comportement vibratoire du système dans le domaine fréquentiel est effectuée par une analyse des modes non linéaires. L'analyse des FRFs non linéaires déterminés par cette approche a bien montré le phénomène de saut et la dépendance des fréquences propres du système de la fréquence d'excitation. La méthode abordée a été bien validée par la comparaison des résultats numériques avec ceux issues de l'étude expérimentale.

PERSPECTIVES

Le travail effectué dans cette thèse peut être poursuivi avec des perspectives d'améliorations portantes sur plusieurs aspects :

- La méthode utilisée pour l'analyse des modes non linéaires peut être exploitée comme une méthode inverse pour l'identification des non-linéarités du système. De plus, la détermination des FRFs non linéaires pour un balayage en fréquences décroissantes peut être envisagée par cette méthode.
- L'étude expérimentale peut être améliorée par la réalisation d'autres concepts de banc d'essai afin de mener une étude paramétrique et étudier l'influence de quelques paramètres sur le comportement vibratoires des systèmes attachés à un absorbeur de vibration dynamique non linéaire.
- Une autre piste de recherche consiste à trouver une application industrielle concrète exploitant le principe du banc conçu.

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

Références bibliographiques

Asami T., Nishihara O. "H₂ optimization of the three-element type dynamic vibration absorbers," *Journal of Vibration and Acoustics*, 124, 583-592, 2002.

Asami T., Nishihara O. "Analytical solutions to H_∞ and H₂ optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems," *Journal of Vibration and Acoustics*, 124, 284-295, 2002.

Assidi M., Damil N., Potier-Ferry M., Zahrouni H., "Regularization and perturbation techniques to solve plasticity problems," *International Journal of Material Forming*, 2, p. 1-14, 2009.

Aydar G., Evrensel C.A., Gordaninejad F., Fuchs A., "A low force magneto-rheological (mr) fluid damper: Design, fabrication and characterization," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 18(12):1155-1160, 2007.

Azrar L., Benamar R., Potier-Ferry M., "An asymptotic-numerical method for large amplitude free vibrations of thin elastic plates," *Journal of Sound and Vibration*, 1998.

Baguet S., Cochelin B., "On the behavior of the ANM continuation in the presence of bifurcations," *Communications in numerical methods in engineering*, (19): 459-471, 2003.

Bellizzi S., Bouc R., "A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes," *Journal of Sound and Vibration*, 287(7): 545-569, 2005.

Bellet R., Cochelin B., Herzog P., Mattei P. O., "Contrôle passif du bruit par pompage énergétique Etude expérimentale," *19ème Congrès Français de Mécanique Marseille*, 24-28 août 2009.

Bert C. W., Egle D. M., Wilkins D. J., "Optimal design of a nonlinear dynamic absorber," *Journal of Sound and Vibration*, 137: 347-352, 1990.

Besancon-Voda A., Blaha P., "Describing function approximation of a two-relay system configuration with application to Coulomb friction identification," *Control Engineering Practice*, 10: 655-668, 2002.

Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A., "Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations," Gordon and Breach, New York, 1961.

Bouc R., Bellizzi S., "Une nouvelle approche pour l'existence et le calcul des modes non linéaires," *Publications du LMA*, (156): 39-58, 2003.

Braikat B., Damil N., Potier-Ferry M., "Méthodes asymptotiques numériques pour la plasticité," *Revue européenne des éléments finis*, 6, p. 337-357, 1997.

Braikat B., Jamal M., Damil N., Potier-Ferry M., "Algorithmes d'intégration temporelle implicites couplés avec des résolveurs d'ordre élevé," *Revue Européenne des éléments finis*, Vol. 11, N° 6, pp. 749-772, 2002.

Braikat B., Jamal M., Damil N., "Utilisation des techniques de la Méthode asymptotique numérique pour les problèmes non-linéaires et instationnaires," *Revue Européenne des éléments finis*, Vol. 13, pp. 119-139, 2004.

Budak E., Ozguven H. N., "Iterative receptance method for determining harmonic response of structures with symmetrical non-linearities," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7: 75-87, 1993.

Cameron T. M., Griffin J. H., "An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems," *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 56(1): 149-154, 1989.

Cheung Y. K., Lau S. L., "Incremental time-space finite strip method for nonlinear structural Vibrations," *Earthquake engineering and structural dynamics*, 10: 239-253, 1982.

Cheung Y. K., Lau S. L., "Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems," *Journal of Applied Mechanics*, 50: 871-876, 1983.

Cochelin B., "A path following technique via an asymptotic-numerical method," *Computers and Structures*, vol. 53, num. 5, p. 1181-1192, 1994.

Cochelin B., Compain C., "An asymptotic numerical method for non linear transient dynamics," *Revue Européenne des éléments finis*, Vol. 3, pp. 113-128, 2000.

Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., "Méthode asymptotique numérique," *Collections méthodes numériques*, Hermes Sciences, 2007.

Cochelin B., Vergez C., "A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions," *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2): 243-262, 2009.

Coudeyras N., Nacivet S., Sinou J.J., "Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal," *Journal of Sound and Vibration*, 328(4-5), 520-540, 2009.

Craig R. R., Kurdilla A. J., "Fundamentals of structural dynamics," 2nd edition, New York, 2006.

Crandall S.H., Mark W.D., "Random Vibration in Mechanical Systems," *Academic Press*, New York, 1963.

Cunefare K. A., Rosa S. D., Sadegh N., Larson G., "State-switched absorber for semi-active structural control," *J Intel Mater Syst Struct*, 11:300-10, 2000.

- Damil N., Potier-Ferry M., "A new method to compute perturbed bifurcations: application to the buckling of imperfect elastic structures," *International Journal of Engineering Science*, 28(9): 943-957, 1990.
- Davis C. L., Lesieutre G. A., "An actively tuned solid-state vibration absorber using capacitive shunting of piezoelectric stiffness," *Journal of Sound and Vibration*, 232(3): 601-17, 2000.
- Den Hartog J.P., "Mechanical Vibrations," *Dover Publications, Inc.*, New York, 1985.
- Djemaï F., Chaari F., Dion J.-L., Renaud F., Tawfiq I., Haddar M., "Asymptotic numerical method for the dynamic study of nonlinear vibration absorbers," *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, No. 5 (18 pages), 2014.
- Djemaï F., Chaari F., Dion J.-L., Renaud F., Tawfiq I., Haddar M., "Performance of a nonlinear dynamic vibration absorbers," *Journal of Mechanics*, 2014.
- Dong X., Yu M., Liao C., Chen W., "A new variable stiffness absorber based on magneto-rheological elastomer," *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, s611-615, 2009.
- El Ouehabi Z., Chaari F., Lahmam H., Braikat B., Mottaoui H., Fakhfakh T., Haddar M., Damil N., "Un algorithme implicite d'ordre élevé pour la dynamique des systèmes d'engrenages utilisés dans les machines tournantes," *Revue de Mécanique Appliquée et Théorique*, Vol. 2, 5. 455-464, 2011.
- Ewins D. J., "Modal Testing: theory, practice and application," *Research Studies Press LTD*, London, 2000.
- Filipovic D., Schroder D., "Band pass vibration absorber," *Journal of Sound and Vibration*, 214(3): 553-66, 1998.
- Flannelly W. G., "Dynamic Antiresonant Vibration Isolator," *Kaman Aircraft Corporation*, Bloomfield, Conn., Report RN63-1, Nov, 1963.
- Flannelly W. G., Jones R., "Application of Dynamic Antiresonant Vibration Isolator to Helicopter Vibration Control", US Naval Research Lab., *Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 37, Jan, 63-81, 1978.
- Frahm H., "Device for damping vibrations of bodies," US Patent No. 989,958, 191.
- Gendelman O. V., Manevitch L. I., Vakakis A. F., M'Closkey R., "Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part I - Dynamics of the underlying Hamiltonian systems," *Journal of Applied Mechanics*, 68: 34-41, 2001.
- Gendelman O. V., Gourdon E., Lamarque C. H., "Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing," *Journal of Sound and Vibration*, 294(4-5): 651-662, 2006.
- Gendelman O., Starosvetsky Y., Feldman M., "Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink I: Description of response regimes," *Nonlinear Dynamics*, 51(1): 31-46, 2008.

Gendelman O. V., "Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity," *Journal of Sound and Vibration*, 315: 732-745, 2008.

Georgiades F., Vakakis A. F., "Dynamics of a linear beam with an attached local nonlinear energy sink," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12: 643-651, 2007.

Georgiades F., Vakakis A. F., Kerschen G., "Broadband passive targeted energy pumping from a linear dispersive rod to a lightweight essentially non-linear end attachment," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42: 773-788, 2007.

Georgiades F., Vakakis A.F., "Passive targeted energy transfers and strong modal interactions in the dynamics of a thin plate with strongly nonlinear attachments," *International Journal of Solids and Structures*, 46: 2330-2353, 2009.

Gourc E., Michon G., Seguy S., Berlioz A., "Experimental investigation and theoretical analysis of a nonlinear energy sink under harmonic forcing," *Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2011*, Washington, DC, USA, August 28-31, 2011.

Gourdon E., Alexander N. A., Taylor C. A., Lamarque C. H., Pernot S., "Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: Theoretical and experimental results," *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5): 522-551, 2007.

Guckenheimer J., Holmes P., "Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector field," *Springer*, 1986.

Guskov M., Sinou J.J., Thouverez F., "Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics," *Mechanics Research Communications*, 35(8), 537-545, 2008.

Hazim H., "Vibrations of a beam with a unilateral spring. Periodic solutions-Nonlinear normal modes," PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2010.

Holdhusen M. H., "The state-switched absorber used for vibration control of continuous systems" PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 2005.

Hunt, J.B., "Dynamic Vibration Absorbers," *Mechanical Engineering Publications*, London, 1979.

Hunt, J. B., Nissen, J. C., "The broad band dynamic vibration absorber," *Journal of Sound and Vibration*, 83(4): 573-578, 1982.

Hwang J. L., Shiau T. N., "An application of the generalized polynomial expansion method to nonlinear rotor bearing systems," *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of The ASME*, 113(3): 299-308, 1991.

Igusa T., Xu K., "Vibration control using multiple tuned mass dampers," *J Sound Vib*; 175(4): 491-503, 1994.

Jamal M., Braikat B., Boutmir S., Damil N., Potier-Ferry M., "A high order implicit algorithm for solving in stationary non-linear problems, computational Mechanics," *Computational Mechanics*, vol.28, n5, p.375-380, 2002.

Jaumouillé V., "Dynamique des structures à interfaces non linéaires : Extension des techniques de balance harmonique," Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2011.

Jezequel L., Lamarque C. H., "Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory," *Journal of Sound and Vibration*, 149(1): 429-459, 1991.

Jiang D., Pierre C., Shaw S. W., "Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear models," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272(3), pages 869-891, 2004.

Jiang D., Pierre C., Shaw S. W., "The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance," *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 40: 729-746, 2005.

Jiang D., Pierre C., Shaw S.W., "Non-linear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation," *Journal of Sound and Vibration*, 288(4-5): 791-812, 2005.

Jones R., "A Full-Scale Experimental Study of Helicopter Rotor Isolation Using the Dynamic Antiresonant Vibration Isolator", *Kaman Aerospace Corporation*, Bloomfield, Conn., 1971.

Jordanov I. N., Cheshankov B. I., "Optimal design of linear and nonlinear dynamic vibration absorbers," *Journal of Sound and Vibration*, 123(1): 157-170, 1988.

Kerschen G., Vakakis A. F., Lee Y. S., McFarland D. M., Kowtko J. J., Bergman L. A., "Energy Transfers in a System of Two Coupled Oscillators with Essential Nonlinearity: 1:1 Resonance Manifold and Transient Bridging Orbits," *Nonlinear Dynamics* 42, pp. 283-303, 2005.

Kerschen G., Lee Y. S., Vakakis A. F., McFarland D. M., Bergman L. A., "Irreversible Passive Energy Transfer in Coupled Oscillators with Essential Nonlinearity," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(2), pp. 648-679, 2006.

Kerschen G., Worden K., Vakakis A. F., Golinval J. C., "Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20(3), pages 505-592, 2006.

Kerschen G., Kowtko J. J., McFarland D. M., Bergman L. A., Vakakis A. F., "Theoretical and experimental study of multimodal targeted energy transfer in a system of coupled oscillators," *Nonlinear Dynamics*, 47: 285-309, 2007.

Kerschen G., McFarland D.M., Kowtko J. J., Lee Y. S., Bergman L. A., Vakakis A. F., "Experimental demonstration of transient resonance capture in a system of two coupled oscillators with essential stiffness nonlinearity," *Journal of Sound and Vibration*, 299: 822-838, 2007.

Kim T. C., Rook T. E., Singh R., "Effect of smoothening functions on the frequency response of an oscillator with clearance non-linearity," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 263, p. 665-678, 2003.

- Koo J. H., Shukla A., Ahmadian M., “Dynamic performance analysis of non-linear tuned vibration absorbers,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13: 1929–1937, 2008.
- Kuran B. and Ozguven H. N., “A modal superposition method for non-linear structures,” *Journal of Sound and Vibration*, 189-3: 315-339, 1996.
- Lau S. L., Cheung Y. K., Wu S.Y., “A variable parameter incrementation method of dynamic instability of linear and nonlinear systems,” *Journal of Applied Mechanics*, 49:849-853, 1982.
- Lau S. L., Zhang W. S., “Nonlinear vibrations of Piecewise-Linear systems by incremental Harmonic-Balance method,” *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 59(1): 153-160, 1992.
- Lee Y. S., Vakakis A. F., Bergman L. A., McFarland D. M., Kerschen G., “Enhancing robustness of aeroelastic instability suppression using MDOF energy sinks,” *AIAA Journal*, 46(6): 1371-1394, 2008.
- Lee Y. S., Nucera F., Vakakis A. F., McFarland D. M., Bergman L. A., “Periodic orbits, damped transitions and targeted energy transfers in oscillators with vibro-impact attachments,” *Physica D*, 238: 1868-1896, 2009.
- Lewandowski R., “Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures, part 1: theoretical background,” *International Journal of Solids and Structures*, 34(15): 1925-1947, 1997.
- Lewandowski R., “Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures, part 2: numerical strategy and examples,” *International Journal of Solids and Structures*, 34(15): 1949-1964, 1997.
- Liu K. F., Liu J., “The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result,” *Journal of Sound and Vibration*, 284: 1181-1189, 2005.
- Ma X., Vakakis A. F., Bergman L. A., “Karhunen-loeve analysis and order reduction of the transient dynamics of linear coupled oscillators with strongly nonlinear end attachments,” *Journal of Sound and Vibration*, 309: 569-587, 2008.
- Maia N., Silva J., “Theoretical and experimental modal analysis,” *Research Studies Press LTD*, England, 1997.
- Manevitch L. I., Gendelman O. V., Musienko A. I., Vakakis A. F., Bergman L. A., “Dynamic interaction of a semi-infinite linear chain of coupled oscillators with a strongly nonlinear end attachment,” *Physica D*, 178: 1-18, 2003.
- McFarland D. M., Bergman L. A., Vakakis A. F., “Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40: 891-899, 2005.

- Morgan R. A., Wang K. W., "An integrated active-parametric control approach for active-passive hybrid piezoelectric network with variable resistance," *J Intel Mater Syst Struct*; 9(7): 564-73, 1998.
- Morgan R. A., Wang K. W., "Active-passive piezoelectric absorbers for systems under multiple non-stationary harmonic excitations," *J Sound Vib*; 255(4): 685-700, 2002.
- Nagaya K., Kurusu A., "Vibration control of a structure by using a tunable absorber and an optimal vibration absorber under autotuning control," *J Sound Vib*; 228(4): 773-92, 1999.
- Natsiavas S., "Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers," *Journal of Sound and Vibration*, 156: 227-245, 1992.
- Nayfeh A. H., Mook D. T., "Nonlinear Oscillations," Wiley, 1979.
- Nayfeh A. H., "On direct methods for constructing nonlinear normal modes of continuous systems," *Journal of Vibration and Control*, (1): 389-430, 1995.
- Newmark N. N., "A method of computation for structural dynamics," *Journal of the Engineering Mechanics Division 85, Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, 67-94, 1959.
- Nissen, J. C., Popp, K., Schmalhorst B., "Optimization of a non-linear dynamic vibration absorber," *Journal of Sound and Vibration*, 99(1): 149-154 (1985).
- Nucera F., Vakakis A. F., McFarland D. M., Bergman L. A., Kerschen G., "Targeted energy transfers in vibro-impact oscillators for seismic mitigation," *Nonlinear Dynamics*, 50: 651-677, 2007.
- Ormondroyd J., DenHartog J.P., "The theory of the dynamic vibration absorber," *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50-7, 9-22, 1928.
- Panagopoulos P., Vakakis A. F., Tsakirtzis S., "Multi-scaled analysis of the damped dynamics of an elastic rod with an essentially nonlinear end attachment," *International Journal of Solids and Structures*, 41: 6505-6528, 2004.
- Panagopoulos P., Georgiades F., Tsakirtzis S., Vakakis A. F., Bergman L. A., "Multiscaled analysis of the damped dynamics of an elastic rod with an essentially nonlinear end attachment," *International Journal of Solids and Structures*, 44: 6256-6278, 2007.
- Pesheck E., Pierre C., Shaw S. W., "Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes," *Mathematical and Computer Modelling*, 33: 1085-1097, 2001.
- Pesheck E., Pierre C., "A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds," *Journal of Sound and Vibration*, 249(5): 971-993, 2002.
- Pierre C., Ferri A. A., Dowell E. H., "Multi-Harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental Harmonic-Balance method," *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 52(4): 958-964, 1985.

- Potier-Ferry M., Damil N., Braikat B., Dascamps J., Cadou J.M., Cao H. L., Elhage-Hussein A., "Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique," *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t. 324, Série II b, p. 171-177, 1997.
- Raghothama A., Narayanan S., "Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method," *Journal of Sound and Vibration*, 226(3): 493-517, 1999.
- Ribeiro P., "Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods," *Computers and Structures*, 82: 1413-1423, 2004.
- Rice H. J., McCraith, J. R., "On practical implementations of the nonlinear vibration absorber," *Journal of Sound and Vibration*, 110: 161-163, 1986.
- Rice H. J., "Combinational instability of the non-linear vibration absorber," *Journal of Sound and Vibration*, 108: 526-532, 1986.
- Rockwell, T. H., "Investigation of Structure-Borne Active Vibration Dampers", *Journal of Acoustical Society America*, Vol. 38, 623-8, 1965.
- Rosenberg R. M., "On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, pages 155-242, 1966.
- Ryan M. W., Franchek M. A., Bernhard R., "Adaptive-Passive Vibration control of Single Frequency Excitations Applied to Noise Control", *Noise-Con 94*, 461-466, 1994.
- Sassi S., Cherif K., Mezghani L., Thomas M., Kotrane A., "An innovative magnetorheological damper for automotive suspension: from design to experimental characterization," *Smart Materials and Structures*, 14:811-822, 2005.
- Shaw S. W., Pierre C., "Normal modes de vibration for non-linear vibratory systems," *Journal of Sound and Vibration*, 164(1): 85-124, 1993.
- Shaw S. W., Pierre C., "Normal modes de vibration for non-linear continuous systems," *Journal of Sound and Vibration*, 169(3): 319-347, 1994.
- Siller H. R., "Non-linear modal analysis methods for engineering structures," Ph D Thesis, University of London, 2004.
- Soom A., Lee M., "Optimal design of linear and non-linear vibration absorbers for damped systems," *Trans ASME: Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 105: 112-119, 1983.
- Starosvetsky Y., Gendelman, O., "Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink. II: Optimization of a nonlinear vibration absorber," *Nonlinear Dynamics*, 51(1): 47-57, 2008.
- Starosvetsky Y., Gendelman O. V., "Vibration absorption in systems with a nonlinear energy sink: Nonlinear damping," *Journal of Sound and Vibration*, 324: 916-939, 2009.

Sundararajan P., Noah S. T., “An algorithm for response and stability of large order nonlinear systems - Application to rotor systems,” *Journal of Sound and Vibration*, 214(4): 695-723, 1998.

Thomas O., Trouverez F., “Panorama des non-linéarités rencontrées en vibration,” *Journée nationale des modes non-linéaires: définitions et applications*, 18 Novembre, 2005.

Touzé C., “A normal form approach for non-linear normal modes,” *Publication du LMA*, (156):15-39, 2003.

Touzé C, Thomas O., Huberdeau A., “Asymptotique non-linear normal modes for large amplitude vibrations of continuous structures,” *Computers and Structures*, 82: 2671- 2682, 2004.

Tsakirtzis S., Kerschen G., Panagopoulos P. N., Vakakis A. F., “Multi-frequency nonlinear energy transfer from linear oscillators to mdof essentially nonlinear attachments,” *Journal of Sound and Vibration*, 285: 483-490, 2005.

Tsakirtzis S., Panagopoulos P., Kerschen G., Gendelman O. V., Vakakis A. F., Bergman L.A., “Complex dynamics and targeted energy transfer in linear oscillators coupled to multi-degree-of-freedom essentially nonlinear attachments,” *Nonlinear Dynamics*, 48: 285-318, 2007.

Tsakirtzis S., Vakakis A. F., Panagopoulos P., “Broadband energy exchanges between a dissipative elastic rod and a multi-degree-of-freedom dissipative essentially non-linear attachment,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42: 36-57, 2007.

Vakakis A. F., “Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory: an overview,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 11(1), pages 3-22, 1997.

Vakakis A. F., “Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems,” *Journal of Vibration and Acoustics*, 123: 332, 2001.

Vakakis A. F., Gendelman O. V., “Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part II - Resonance capture,” *Journal of Applied Mechanics*, 68: 42-48, 2001.

Vakakis A.F., Manevitch L.I., Gendelman O.V., Bergman L.A., “Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments,” *Journal of Sound and Vibration*, 264: 559-577, 2003.

Vakakis A. F., Rand R. H., “Non-linear dynamics of a system of coupled oscillators with essential stiffness non-linearities,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39: 1079-1091, 2004.

Vakakis A. F., Manevitch L. I., Musienko A. I., Kerschen G., Bergman L. A., “Transient dynamics of a dispersive elastic wave guide weakly coupled to an essentially nonlinear end attachment,” *Wave Motion*, 41: 109-132, 2005.

Vannucci P., Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., “An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches,” *International journal for numerical methods in engineering*, 41: 1365-1389, 1998.

Viguié R., Kerschen G., “Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: A tuning methodology,” *Journal of Sound and Vibration*, 326:780-793, 2009.

Viguié R., Kerschen G., “On the functional form of a nonlinear vibration absorber,” *Journal of Sound and Vibration*, 329: 5225-5232, 2010.

Walha L., “Contribution à la dynamique non linéaire des réducteurs à engrenages,” Thèse de doctorat, Ecole Nationale d’Ingénieurs de Sfax, 2008.

Walsh P.L., Lamancusa J.S., “A variable stiffness vibration absorber for minimization of transient vibrations,” *J Sound Vib*; 158(2): 195-211, 1992.

Warburton G. V., “Optimum absorber parameters for minimizing vibration response,” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 9, pp. 251-262, 1981.

Williams K., Chiu G., Bernhard R., “Adaptive-passive absorbers using shape-memory alloys,” *J Sound Vib*; 249(5): 835-48, 2002.

Williams K., Chiu G., Bernhard R., “Dynamic modelling of a shape memory alloy adaptive tuned vibration absorber,” *J Sound Vib*; 280: 211-34, 2005.

Yong C., Zimcik D. G., Wickramasinghe V. K., Nitzsche F., “Development of the smart spring for active vibration control of helicopter blades,” *J Intel Mater Syst Struct*; 15(1): 37-47, 2004.

Zahrouni H., Cochelin B., Potier-Ferry M., “Computing finite rotations of shells by an asymptotic numerical method,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 175: 71–85, 1999.

Zhu S. J., Zheng Y. F., Fu Y. M., “Analysis of nonlinear dynamics of a two-degree-of-freedom vibration system with non-linear damping and nonlinear spring,” *Journal of Sound and Vibration*, 271 (1-2): 15-24, 2004.

Zuo L., Nayfeh S. A., “The two-degree-of-freedom tuned mass damper for suppression of single-mode vibration under random and harmonic excitation,” *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 128, 2006.

1. Articles

[A1] **Fathi DJEMAL**, Fakher CHAARI, Jean-Luc DION, Franck RENAUD, Imad TAWFIQ and Mohamed HADDAR, “Asymptotic numerical method for the dynamic study of nonlinear vibration absorbers”, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, No. 5, 1450053 (18 pages), [2014].

[A2] **Fathi DJEMAL**, Fakher CHAARI, Jean-Luc DION, Franck RENAUD, Imad TAWFIQ and Mohamed HADDAR, , “PERFORMANCE OF A NON LINEAR DYNAMIC VIBRATION ABSORBER”, *Journal of Mechanics*, pp 1-9, DOI: 10.1017/jmech.2014.76, [2014].

2. Communications

[C1] **Fathi DJEMAL**, Jean-Luc DION, Fakher CHAARI, Imad TAWFIQ and Mohamed HADDAR, “Nonlinear modal analysis of dynamic absorbers” *1st Euro-Mediterranean Conference on Structural Dynamics and Vibroacoustics MEDYNA 2013*, 23-25 April 2013 Marrakech (Morocco).

[C2] **Fathi DJEMAL**, Jean-Luc DION, Fakher CHAARI, Imad TAWFIQ and Mohamed HADDAR, “ Asymptotic numerical method for the dynamic study of nonlinear vibration absorbers” *5ème congrès International Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques CMSM’2013*, 25-27 Mars 2013, Djerba (Tunisia).

[C3] **Fathi DJEMAL**, Fakher CHAARI, Jean-Luc DION, Imad TAWFIQ and Mohamed HADDAR, “ Experimental Study of a Nonlinear Vibration Absorber” *International Conference Multiphysics Modelling and Simulation for Systems Design MMSSD’2014*, 17-19 December 2014, Sousse (Tunisia).