



# Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires - Application à la commande et au diagnostic des bioréacteurs

Mamadou Lamine Fall

► **To cite this version:**

Mamadou Lamine Fall. Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires - Application à la commande et au diagnostic des bioréacteurs. Automatique / Robotique. Université de Caen, 2015. Français. <tel-01148795>

**HAL Id: tel-01148795**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01148795>**

Submitted on 5 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

**UNIVERSITE de CAEN BASSE-NORMANDIE**

**ÉCOLE DOCTORALE : SIMEM**

Unité de recherche : GREYC

**THÈSE DE DOCTORAT**

Présentée par

**Mamadou Lamine FALL**

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE de CAEN BASSE-NORMANDIE**

Domaine de recherche : AUTOMATIQUE & PRODUCTIQUE

Diplôme National - Arrêté du 6 Août 2006

---

---

**SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR LES  
SYSTÈMES NON LINEAIRES  
APPLICATION À LA COMMANDE ET AU  
DIAGNOSTIC DES BIORÉACTEURS**

---

Soutenue, le **30 Janvier 2015**

**JURY**

<b>M. J.P Barbot</b>	Professeur à l'ENSEA Cergy-Pontoise	Rapporteur
<b>M. D. Boutat</b>	Professeur à l'INSA Centre Val de Loire	Rapporteur
<b>M. T.M Guerra</b>	Professeur à l'université de Valenciennes et du Hainaut	Examineur
<b>M. H. Hammouri</b>	Professeur à l'université Claude Bernard Lyon 1	Examineur
<b>M. E. Pigeon</b>	Maître de conférence à l'université de Caen	Examineur
<b>M. O. Géhan</b>	Maître de conférence à l'ENSICAEN	Examineur
<b>M. R. Mosrati</b>	Professeur à l'université de Caen	Examineur
<b>M. M. M'Saad</b>	Professeur à l'université de Caen	Directeur de thèse







---

# Remerciement

Je remercie très chaleureusement monsieur Mohamed M'SAAD et monsieur Mondher FARZA, Professeurs à l'ENSICAEN et à l'UNICAEN, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire de "GREYC - ENSICAEN", encouragé à participer à des conférences internationales et accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également tous les membres du jury pour l'attention qu'ils ont accordée à ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à monsieur Eric PIGEON et à monsieur Olivier GÉHAN, Maîtres de Conférence l'ENSICAEN et à l'université de Caen, pour avoir accepté d'encadrer mes travaux de thèse avec professionnalisme, rigueur, patience, disponibilité et générosité. En plus de leurs qualités scientifiques, j'ai particulièrement apprécié leur ouverture d'esprit et la souplesse de leur encadrement. Je leur apporte ainsi ma plus sincère gratitude. Je tiens également à remercier Monsieur Mathieu POULIQUEN pour ses encouragements et sa disponibilité.

Cette thèse s'est déroulée en collaboration avec le laboratoire ABTE de l'université de Caen où j'ai effectué plusieurs expérimentations. Je voudrais aussi remercier Monsieur Ridha MOSRATI, Professeur à l'UNICAEN, pour les échanges scientifiques, ses encouragements, sa constance et son amitié qu'il a apporté tout au long de notre collaboration.

Que tous les membres et collègues du laboratoire trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance pour leur aide et leur soutien. Je remercie très fortement Monsieur Mi-

## Remerciements

---

loud FRIKEL, Cheikh Ahmadou Bamba HANN, Abdou DIB, Thomas MENARD et Ibtissem Bouraoui .

Pour finir, je voudrai remercier mon Père et ma Mère pour leur amour et leur conseil et pour les valeurs qu'ils m'ont inculpées telles que le respect et le sérieux. J'associerai à ces remerciements toute ma famille notamment mes grands-parents, mes frères et sœurs et à Papa Cheikh Tidiane SY pour toutes leurs prières.

---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>I Etude bibliographique</b>	<b>11</b>
1 Observation et Commande . . . . .	12
1.1 Observateurs pour les systèmes non linéaires . . . . .	12
1.2 Observateurs pour les systèmes non linéaires à sortie échantillonnée . . .	13
1.3 Observateur des systèmes non linéaires avec sortie retardée . . . . .	14
1.4 Commande . . . . .	16
2 Application au bioréacteur . . . . .	17
2.1 Pilotage . . . . .	17
2.2 Régulation de l'oxygène . . . . .	18
3 Conclusion . . . . .	20
<b>Références bibliographiques</b>	<b>21</b>
<b>II Modélisation des Bioréacteurs</b>	<b>29</b>
1 Définition . . . . .	29
2 Généralités . . . . .	30
3 Modes de fonctionnement . . . . .	31
4 Les micro-organismes ( Catalyseurs ) . . . . .	32
5 Modèle micro-biologique . . . . .	34
6 Importance de l'oxygène . . . . .	37
6.1 Modélisation du coefficient de transfert d'oxygène $K_La$ . . . . .	38

6.2	Identification expérimentale du $K_I a$ . . . . .	39
6.3	Vitesse de consommation : $r_{O_2}$ . . . . .	41
7	Conclusion . . . . .	43
<b>Références bibliographiques</b>		<b>45</b>
<b>III Observateurs pour les systèmes non linéaires</b>		<b>49</b>
1	Introduction . . . . .	49
2	Observateur grand gain continu . . . . .	50
2.1	Introduction . . . . .	50
2.2	Étude préliminaire . . . . .	50
2.3	Synthèse de l'observateur . . . . .	52
2.4	Conclusion . . . . .	54
3	Observateur grand gain continu-discret . . . . .	55
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Étude préliminaire . . . . .	56
3.2.1	État de l'art . . . . .	56
3.2.2	Lemme technique . . . . .	58
3.2.3	Cas particulier où $F(t) = I_p$ . . . . .	60
3.3	Synthèse de l'observateur . . . . .	63
3.3.1	Forme exponentielle . . . . .	63
3.3.2	Forme avec prédiction de sortie . . . . .	67
3.4	Exemple de simulation . . . . .	68
3.5	Conclusion . . . . .	72
4	Observateur pour les systèmes non linéaires incertains avec sortie échantillonnée	73
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	Synthèse pour les systèmes continus . . . . .	74
4.3	Lemme technique . . . . .	78
4.4	Synthèse pour les systèmes à sortie échantillonnée . . . . .	80
4.5	Exemple de simulation . . . . .	85
4.6	Conclusion . . . . .	88
5	Observateur pour les systèmes non linéaires à sortie retardée . . . . .	88
5.1	Introduction . . . . .	88
5.2	Étude préliminaire . . . . .	90
5.3	Synthèse de l'observateur . . . . .	92

5.3.1	Structure du prédicteur . . . . .	92
5.3.2	Détermination du gain de prédiction . . . . .	94
5.3.3	Théorème principal . . . . .	95
5.4	Exemple de simulation . . . . .	101
5.4.1	Exemple du bioréacteur . . . . .	101
5.4.2	Comparaison des résultats . . . . .	105
5.5	Conclusion . . . . .	107
6	Conclusion . . . . .	108

**Références Bibliographiques** **111**

**IV Loi de Commande Non-linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur** **115**

1	Introduction . . . . .	115
2	Formulation du problème . . . . .	116
2.1	Classe des systèmes uniformément commandable . . . . .	116
2.2	Modèle de commande associé à l'oxygène . . . . .	118
3	Commande Grand Gain . . . . .	119
3.1	Synthèse . . . . .	119
3.2	Résultats en simulation . . . . .	121
4	Commande Backstepping . . . . .	124
4.1	Synthèse de la commande backstepping avec incorporation d'une action intégrale . . . . .	125
4.2	Application au modèle de l'oxygène . . . . .	130
4.3	Simulation . . . . .	131
5	Conclusion . . . . .	133

**Références Bibliographiques** **135**

**V Étude Expérimentale** **137**

1	Introduction . . . . .	137
2	Présentation du procédé expérimental . . . . .	137
3	Caractéristiques des différents éléments . . . . .	140
4	Résultats expérimentaux . . . . .	146
4.1	Analyse des performances de l'observateur . . . . .	147
4.2	Performances en régulation . . . . .	149

4.2.1	Performances de la commande Grand gain . . . . .	149
4.2.2	Avec la commande Backstepping . . . . .	156
5	<b>Conclusion</b> . . . . .	159
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>161</b>
5.1	Conclusion . . . . .	161
5.2	Perspectives . . . . .	164

---

# Notations

## Notations relatives aux ensembles :

- $\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels
- $\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes
- $\mathbb{R}^+$  : ensemble des nombres réels positifs ou nuls
- $\mathbb{R}^n$  : espace vectoriel de dimension  $n$  dans l'ensemble des réels
- $\mathbb{R}^{n \times m}$  : ensemble des matrices réelles de dimensions  $n \times m$
- $0_{n \times m}$  : matrice nulle de dimensions  $n \times m$
- $[a, b]$  : intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$
- $]a, b[$  : intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$
- $\{1, \dots, r\}$  : ensemble des  $r$  premiers nombres entiers positifs
- $U$  : sous ensemble dans  $\mathbb{R}^n$
- $C = C(\Omega \mapsto \mathbb{R}^n)$  : ensemble des fonctions continues de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$
- $C^1 = C^1(\Omega \mapsto \mathbb{R}^n)$  : ensemble des fonctions continûment différentiables de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$
- $t \in \mathbb{R}^+$  : variable temporelle
- $x = [x^1, \dots, x^n] \in \mathbb{R}^n$  : vecteur d'état instantané
- $x^1 \in \mathbb{R}^p$  : sous vecteur de  $x \in \mathbb{R}^n$
- $x_1 \in \mathbb{R}$  : variable d'état

## Notations relatives aux vecteurs et aux matrices :

- $x^T$  : transposée du vecteur  $x$
- $\|x\|$  : norme euclidienne de  $x$
- $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  : dérivé temporelle de l'état  $x$
- $A^T$  : transposée de la matrice  $A$
- $\|A\|$  : norme euclidienne de la matrice  $A$

- $\mathbb{I}_n$  : matrice d'identité de dimension  $n \times n$
- $\lambda_{min}(A)$  : où  $A$  est une matrice symétrique, est la plus petite valeur propre ( $A$ )
- $\lambda_{max}(A)$  : où  $A$  est une matrice symétrique, est la plus grande valeur propre ( $A$ )

### **Notations relatives aux paramètres :**

- $\theta(t)$  : paramètre de synthèse de l'observateur
- $\lambda(t)$  : paramètre de synthèse de la commande de type grand gain
- $c_i$  : paramètre de réglage dynamique de la commande backstepping
- $\Delta_\theta$  : matrice diagonale de dimension  $n \times n$
- $\Delta_\lambda$  : matrice diagonale de dimension  $n \times n$

### **Abréviations :**

- *MIMO* : Multi Input, Multi Output
- *SISO* : Single Input, Single Output
- *PI* : correcteur à actions proportionnelle et intégrale
- *PID* : correcteur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée
- *GMC* : Generic model control
- *LMI* : Linear Matrix Inequality
- *dde23* : delay differential equations with a constant delay

-



---

# Introduction générale

## Contexte

Ce travail de doctorat a été préparé au sein de l'équipe automatique du groupe de recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen (*GREYC, UMR CNRS 6072*). Mon travail de recherche s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire ABTE (EA 4651) de l'Université de Caen Basse-Normandie, soutenu par le Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Ce projet est conçu pour mettre en place de manière progressive des méthodes d'identification et des stratégies de commande non linéaire afin de les appliquer sur des bioréacteurs de laboratoire.

Si l'on se réfère à la définition la plus largement admise dans le domaine de la biochimie, les bioréacteurs recouvrent toutes les mises en œuvre de systèmes vivants ou de leurs constituants dans le but d'effectuer des modifications physiques ou chimiques. Depuis plusieurs siècles, ils ont permis à l'homme de fabriquer des produits alimentaires comme le pain, le fromage, les boissons alcoolisées, etc.. Durant les dernières décennies, de nombreuses innovations ont fait qu'ils sont aujourd'hui à la croisée des nouvelles technologies et ces dernières se regroupent sous l'appellation : Biotechnologie.

Selon l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (*OCDE*), les biotechnologies sont définies comme " l'application des principes scientifiques et de l'ingénieur à la transformation de matériaux par des agents biologiques pour la production des biens et services ". Et comme son nom l'indique, elles résultent d'un mariage entre la science des êtres vivants - la biologie - et un ensemble de techniques nouvelles issues d'autres disciplines telles que la biochimie, la biophysique, la biologie moléculaire ou l'informatique... Depuis les années quatre-vingt-dix, elles offrent des perspectives nouvelles et potentiellement larges aux actions

de l'homme sur la nature. Elles sont utilisées de façon croissante dans plusieurs secteurs comme les industries agroalimentaires et pharmaceutiques, le domaine médical ou encore certaines activités de recyclage ou de dépollution de l'environnement. De ce fait, elles fascinent considérablement au vu de leurs vastes domaines d'applicabilité tout autant qu'elles constituent un véritable enjeu économique.

Dans le secteur de l'agroalimentaire, les biotechnologies sont essentiellement utilisées pour prévenir ou lutter contre les ravages agricoles qui mettent en cause notamment les insectes et les micro-organismes pathogènes. C'est par exemple les méthodes de lutte biologiques qui ont été développées pour fournir des perspectives au marché des pesticides. Pour la nutrition, les biotechnologies sont généralement utilisées pour fermenter les aliments obtenus à l'aide de transformation de micro-organismes qui métabolisent les substrats glucidiques, liquides et les protéines des matières premières animales ou végétales. Ces aliments fermentés représentent aujourd'hui jusqu'à 40% de notre alimentation et agissent sur les différentes composantes de la qualité de nos aliments. Par ailleurs, les industries biotechnologiques se positionnent de nos jours à 80% dans le secteur de la santé et les pratiques sur la transformation des micro-organismes pour des productions de biens et de services sont très nombreuses. On peut citer la production de biomasse, de substance native ou recombinée ou le transport de molécules vers leurs sites d'activités en qualité de vecteur, etc.. Elles interviennent également au service de l'environnement. En particulier, elles utilisent des micro-organismes pour traiter les déchets et prévenir à la pollution afin de maintenir un environnement sain. Elles permettent de nettoyer les sols et les eaux usées et de réduire l'utilisation des produits chimiques ou toxiques dans les procédés industriels.

## Motivations

Les applications biotechnologiques sont vastes et très variées et chacune d'elle constitue un véritable enjeu économique et un formidable défi scientifique pour plusieurs raisons. Premièrement, le comportement des bioréacteurs est toujours décrit par un modèle mathématique non linéaire obtenu à partir d'une formulation de bilan des matières. En conséquence, leur pilotage requiert la mise en œuvre d'algorithmes de commande très sophistiqués. En outre, ces lois de commande nécessitent généralement la connaissance de paramètres souvent physiquement inaccessibles et qui doivent donc être estimés en temps réel à l'aide des techniques d'observation. De plus, il est maintenant demandé aux systèmes de monitoring de fournir des informations sur le comportement du procédé afin de détecter d'éventuelles anomalies de fonctionnement. La

communauté automatique a ainsi trouvé dans le domaine des biotechnologies de formidables applications sur les théories de la commande et de l'observation non linéaires auxquelles elle s'intéresse depuis plusieurs décennies.

Dans la littérature, plusieurs stratégies de commande ont été proposées pour optimiser les performances globales des bioprocédés et en particulier garantir la stabilité des systèmes de commande sur tout le domaine de fonctionnement. Les objectifs de commande consistent toujours à maintenir la concentration de certains constituants au sein d'un bioréacteur au voisinage d'une consigne qui peut être fixe ou variable dans le temps. Ceux-ci ne sont atteignables qu'à la condition préalable de maîtriser un ensemble de paramètres externes à la réaction en particulier la température, le pH et le taux d'oxygène dissout au sein de la culture. Dans les pratiques industrielles, les structures de commande de type *PI* ou *PID* sont les plus couramment utilisées pour la réalisation de ces boucles annexes de régulation. Dans le cas de l'oxygène dissout, la dynamique de la concentration est régie par un comportement non linéaire et certains paramètres du modèle de connaissance comme la vitesse de consommation ou le coefficient de transfert sont en outre variant dans le temps et mal connus ou modélisés de manière empirique. De plus, les conditions expérimentales liées au capteur et à la chaîne d'instrumentation associée gênent des contraintes sur la disponibilité des mesures. Celles-ci arrivent de manière discrète avec une cadence d'échantillonnage minimale imposée. Les lois de commande linéaires usuellement utilisées ne permettent pas de maintenir le taux d'oxygène dissout au niveau souhaité sur toute la durée de l'expérimentation malgré le soin apporté à la robustesse du système de commande lors de l'étape de synthèse.

L'objectif principal de ce travail de thèse consiste à développer des lois de commande non linéaires par retour de sortie incluant une estimation conjointe de l'état et des paramètres clés du modèle de l'oxygène. Cette estimation sera réalisée à l'aide d'un observateur à entrée inconnue. Toutefois, elle nécessite de lever deux verrous scientifiques majeurs liés à la synthèse d'observateurs non linéaires pour les systèmes continus à sortie échantillonnée d'une part et pour les systèmes à sortie retardée d'autre part.

## Organisation du mémoire

Cette partie est consacrée à la présentation des différents chapitres de ce mémoire.

**Chapitre 1 :** Ce premier chapitre est consacré à une revue de l'état de l'art dans les domaines de l'automatique et du génie des procédés. Nous présentons dans un premier temps un résumé de l'ensemble des travaux proposés dans la littérature relatifs aux théories de

l'observation et de la commande non linéaire. Ensuite, les différentes approches actuellement disponibles pour la conduite des bioréacteurs et en particulier la régulation du taux d'oxygène dissout est détaillée et commentée.

**Chapitre 2 :** Ce chapitre traite du problème de la modélisation et de l'analyse du comportement des bioprocédés. Nous donnons une description générale des différents modes de fonctionnement d'un bioréacteur instrumenté. Un schéma réactionnel permettant la formulation des équations de bilan au sein du bioréacteur est détaillé. Il conduit dans un premier temps au modèle d'état décrivant l'évolution des concentrations des différents constituants du mélange réactionnel. Il permet en outre d'obtenir un modèle de connaissance de l'évolution de la concentration de l'oxygène dissout dans le réacteur. Ce modèle de connaissance présente des incertitudes relativement fortes notamment liées à la mauvaise connaissance de ses paramètres respectivement le coefficient de transfert  $K_L a$  et la vitesse de consommation de l'oxygène. Les modèles empiriques traditionnellement utilisés dans la littérature pour ces paramètres sont présentés. Concernant le  $K_L a$ , une procédure expérimentale de détermination des coefficients de ce modèle est exposée.

**Chapitre 3 :** Le troisième chapitre porte sur la synthèse d'observateurs dynamiques pour une classe de systèmes non linéaires. Dans un premier temps, il traite le cas des systèmes triangulaires pouvant se mettre sous la forme canonique uniformément observable de Brunovski et présentant alternativement une discrétisation des mesures et des incertitudes de modélisation. Ensuite, il aborde le cas des systèmes uniformément observables dont la sortie présente un retard non négligeable. Pour chaque observateur proposé, nous montrons qu'il existe une condition nécessaire et suffisante pour garantir une convergence exponentielle de l'erreur d'observation. Cette condition porte alternativement sur la période d'échantillonnage, la valeur maximale du retard admissible ou sur les paramètres de synthèse.

**Chapitre 4 :** Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la synthèse de lois de commande non linéaires par retour de sortie pour la régulation du taux de l'oxygène dissout au sein du réacteur. Deux stratégies de commande sont proposées respectivement une commande de type grand gain en utilisant judicieusement la dualité avec l'observateur grand gain et une commande de type backstepping. Ces deux systèmes de commande utilisent l'observateur continu-discret proposé au chapitre précédent pour la reconstruction de la vitesse de consommation de l'oxygène. Ils sont synthétisés à partir d'un modèle de commande qui inclut le modèle de connaissance incertain de l'oxygène dissout et un modèle des perturbations pour assurer la convergence de l'erreur de poursuite.

**Chapitre 5 :** Ce dernier chapitre présente les évaluations expérimentales des approches théoriques développées dans ce mémoire. Le procédé pilote et son instrumentation sont particulièrement détaillés. Les deux problématiques justifiant les développements théoriques des chapitres précédents, en l'occurrence les incertitudes de modélisation et les difficultés liées à l'échantillonnage des mesures sont particulièrement développées dans le contexte expérimental considéré. Ce chapitre est donc consacré dans un premier temps à une validation expérimentale de l'observateur continu-discret proposé dans le chapitre 3. Ensuite, nous présentons et comparons les performances des deux systèmes de commande non linéaires proposés. Enfin, nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale.



---

---

# Chapitre I

---

## Etude bibliographique

Dans le cadre de ce travail de thèse portant sur la conduite des bioprocédés, une revue de la littérature scientifique s'impose dans les domaines de l'automatique d'une part et ses applications au génie des procédés d'autre part. L'automatique est une science qui traite notamment des problèmes d'identification, d'observation et de commande des systèmes dynamiques. Elle s'intéresse en particulier aux techniques de contrôle et de supervision en proposant des méthodes d'analyse et de synthèse permettant de répondre aux spécifications d'un cahier des charges prédéfini. Le génie des procédés est quant à lui la science de la conception de systèmes de production de produits (bio)chimiques à haute valeur ajoutée. Dans le cas des bioprocédés, cette fabrication est généralement réalisée par fermentation dans un bioréacteur et nécessite le contrôle d'un certain nombre de grandeurs physiques. Nous pouvons donc concevoir aisément un mariage naturel entre ces deux sciences. Il est intéressant de présenter un état de l'art le plus exhaustif possible de ces deux grands domaines.

Ce chapitre est organisé comme suit. La première section est consacrée aux méthodes de synthèse de lois de commande et d'observateurs pour les systèmes dynamiques. Nous nous efforcerons systématiquement de préciser les hypothèses requises par l'approche proposée et de discuter de leurs difficultés de synthèse et de mise en œuvre. Nous étudions tout d'abord en profondeur les techniques d'observation non linéaires disponibles dans la littérature afin d'étendre ces résultats à la problématique de la synthèse d'observateurs à entrée inconnue pour les systèmes incertains à sortie échantillonnée et pour les systèmes à sortie retardée. Dans un second temps, nous proposons un résumé des différentes techniques de synthèse de loi de commande linéaire et non linéaire. L'étude bibliographique concernant le génie des procédés comporte ensuite deux parties. La première est consacrée aux méthodes de pilotage des réactions (bio)chimiques et la seconde porte sur les différentes approches proposées pour réaliser l'asservissement du taux d'oxygène dissout. Les validations expérimentales disponibles dans la littérature seront particulièrement mentionnées et les résultats commentés. Enfin, nous finissons

par une conclusion.

# 1 Observation et Commande

## 1.1 Observateurs pour les systèmes non linéaires

La connaissance des variables d'état d'un système dynamique est primordiale d'une part pour la mise en œuvre de lois commande par retour d'état ou par retour de sortie et d'autre part pour délivrer des informations pertinentes sur l'état de fonctionnement du procédé. Hors, d'un point de vue pratique, il est souvent très difficile, voire impossible d'avoir accès à l'ensemble des variables et cela pour des raisons économiques, technologiques ou même de faisabilité. C'est particulièrement le cas des bioprocédés pour lesquels deux problématiques se posent : certaines variables ne sont pas physiquement mesurables (par exemple les vitesses de réaction) et la mesure de certaines concentrations ne peut être réalisée qu'au moyen d'appareillage extrêmement onéreux. C'est ainsi que la conception d'observateurs d'état a fortement mobilisé la communauté scientifique durant les dernières décennies. Les premiers articles traitants de la synthèse d'observateurs ont été publiés au début des années 60 par Kalman ([Kalman 60]) et par la suite par Luenberger ([Luenberger 71]). Ils portent sur la synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps dans un contexte déterministe ou stochastique. L'extension directe de ces résultats au cas non linéaire est obtenue à l'aide d'une linéarisation locale à l'ordre un de la dynamique du système : c'est la philosophie du filtre de Kalman étendu [Kalman et Bucy 61]. Toutefois, la stabilité globale de cet observateur en présence de fortes non-linéarités n'a pas été prouvée et ses performances ont été régulièrement mises en défaut en pratique.

La conception des observateurs non linéaires a débuté dans les années 70 ([Slotine et al. 86], [Gauthier et Bornard 80], [Gauthier et al. 92], [Bornard et Hammouri 91], [Busawon et al. 98], [Krener et Isidori 83], [Krener et Respondek 85], [Gauthier et Kupka 94]). Les premiers observateurs à apparaître consistaient en une synthèse pour une classe de systèmes dont les non-linéarités sont linéarisables par injection de sortie ou à l'aide de transformations d'état qui les rendent dépendantes uniquement des entrées et des sorties disponibles ([Krener et Isidori 83], [Krener et Respondek 85]). Le défaut majeur de cette approche réside dans le fait que ces transformations ne sont pas toujours réalisables et que structurellement la non-linéarité peut dépendre de l'état du système indépendamment de la base choisie. Leur application est donc réservée à une classe réduite de systèmes non linéaires.

Plusieurs approches ont par la suite été explorées pour étendre la classe de systèmes consi-

dérée. Parmi celles-ci, citons tout d'abord les observateurs à mode glissants qui ont largement été étudiés et appliqués. Leurs difficultés de mise en oeuvre ont justifié d'une part l'apparition de différentes variantes concernant le choix de la fonction mathématique utilisée et d'autre part une extension aux ordres supérieurs. L'observateur grand gain continu a été initié par [Gauthier et al. 92] pour la classe de systèmes pouvant se mettre sous la forme canonique de Brunovski. Contrairement à l'approche proposée dans [Krener et Isidori 83], la non-linéarité peut maintenant dépendre de l'état du système, mais doit présenter une structure triangulaire inférieure. L'observateur assure une estimation précise des états avec une synthèse accessible à des non-automaticiens ([Dabroom et Khalil 01], [Farza et al. 04], [Farza et al. 05], [Nadri 01]). L'implémentation est similaire à celle d'un observateur linéaire et le réglage du terme correctif est assuré par un seul paramètre de synthèse.

## 1.2 Observateurs pour les systèmes non linéaires à sortie échantillonnée

La mise en oeuvre des observateurs non linéaires est souvent réalisée à partir de leur forme continue issue de l'étape de synthèse et fait appel aux routines d'intégration numérique. Les performances obtenues sont donc fortement dépendantes de la période d'échantillonnage utilisée. Dans le cas où les contraintes instrumentales ne permettent pas de rendre cette dernière négligeable par rapport à la dynamique du système, l'observateur perd ses propriétés de convergence.

Pour faire face à ce problème de l'échantillonnage, plusieurs solutions ont été proposées. Une première approche consiste à effectuer la synthèse à partir d'une description discrétisée des dynamiques du système ([Farza et al. 98], [Arcak et Nesic 04], [Krener et Kravaris 01]). L'inconvénient majeur de cette approche réside dans le fait qu'elle ne prend pas en considération les dynamiques inter-échantillonnées [Karafyllis et Kravaris 09]. D'autre part, la discrétisation du système peut souffrir d'éventuelles erreurs qui peuvent se répercuter lors de l'utilisation de l'observateur dans le cadre d'une structure de commande. Une autre approche consiste à conserver une méthode de synthèse continue tout en considérant que les sorties ne sont disponibles qu'aux instants d'échantillonnage. Une première contribution a été proposée dans ce contexte [Deza et al. 92] utilisant un observateur grand gain pour une classe de systèmes non linéaires observable pour toute entrée. La conception a été effectuée dans un premier temps en supposant que les sorties sont continues et ensuite modifiée de manière appropriée pour résoudre le cas où les sorties sont discrètes. Dans le même esprit, de nombreux autres observateurs ont été proposés ([Nadri et al. 04], [Hammouri et al. 06], [Andrieu et Nadri 10]).

Une autre approche plus récente pour faire face à la non-disponibilité des mesures entre les instants d'échantillonnage a été proposée dans [Karafyllis et Kravaris 09]. Elle consiste à synthétiser un observateur continu associé à un prédicteur qui reconstruit la trajectoire de la sortie entre deux instants d'échantillonnage en utilisant les estimations des états à priori. Ce prédicteur est obtenu en résolvant numériquement une équation différentielle scalaire ordinaire (ODE) entre deux instants de mesure successifs. La prédiction est recalée sur les mesures aux instants d'échantillonnage. L'observateur sous-jacent a donc une structure hybride qui hérite des propriétés du continu pour des périodes d'échantillonnage relativement petites.

Une nouvelle approche pour la conception d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires particulière avec des mesures discrètes a été également proposée dans [Raff et al. 08]. La synthèse consiste à utiliser une structure impulsive pour le terme de correction exprimée par le produit d'une constante de gain avec la différence entre les valeurs estimées et les valeurs mesurées aux instants d'échantillonnage. L'analyse de convergence de l'observateur ainsi que la détermination de son gain sont obtenues en utilisant des outils de *LMI* similaires à ceux décrits dans [Naghshtabrizi et al. 08].

Dans le cadre des travaux de cette thèse, nous nous sommes intéressés dans un premier temps à la problématique de la synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes uniformément observables à entrée inconnue et dont la sortie n'est disponible qu'aux instants d'échantillonnage [Farza et al. 14]. Par comparaison aux approches précédemment évoquées, l'objectif consiste à proposer un observateur de structure plus simple et identique à celle de l'observateur grand gain traditionnel. L'ultime motivation est la recherche d'unification de structure des observateurs non linéaires pour les cas des systèmes continus et ceux à sortie discrétisée. Ceci permet en outre de bénéficier de la simplicité de réglage héritée de l'observateur grand gain continu. Toutefois, nous montrons que cet observateur peut s'écrire sous la forme proposée dans [Karafyllis et Kravaris 09] faisant apparaître explicitement le prédicteur de sortie. Cette problématique est particulièrement motivée par l'application concernée, en l'occurrence la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur sous la contrainte de l'indisponibilité des mesures entre deux instants d'échantillonnage. Les erreurs de modélisation particulièrement critiques dans le cas du génie des procédés nous ont conduits à proposer une extension de ces travaux pour le cas des systèmes incertains.

### 1.3 Observateur des systèmes non linéaires avec sortie retardée

Au cours des deux dernières décennies, des efforts considérables ont été consacrés à l'étude du problème d'observation pour les systèmes présentant un retard. Une attention particulière a été

portée au cas des systèmes linéaires ([Gu et al. 03], [Hou et al. 02], [Kharitonov et Hinrichsen 04], [Mondie et Kharitonov 05]), alors que très peu de résultats ont été établis pour les systèmes non linéaires ([Raff et Allgower 07], [Mazenc et Niculescu 01], [Trinh et al. ], [Seuret 06]...). Dans la majorité des ouvrages traitant ce problème, le retard est appliqué sur les états des systèmes. Hors d'un point de vue pratique, les procédés fonctionnent de manière autonome et les mesures ne sont pas disponibles instantanément. Elles sont entachées de retard provoqué généralement par les capteurs. En particulier, dans le cas des bioréacteurs, les mesures des concentrations de certains constituants sont accessibles après un long traitement de laboratoire. Les contributions traitant le problème d'observation pour les systèmes dont le retard intervient sur la sortie sont très rares. Une des approches les plus prometteuses est apportée dans [Germani et al. 02] où les auteurs ont proposé un observateur pour une classe de systèmes non linéaires particulière dont la sortie est disponible avec un retard constant  $\tau$ .

La caractéristique principale de l'observateur est qu'il est constitué d'une cascade  $m + 1$  sous-systèmes dont le premier sous-système est un observateur permettant d'estimer l'état du système retardé de  $\tau$  et les  $m$  autres sous-systèmes sont des prédicteurs. Le prédicteur de rang  $j$  estime l'état du système retardé de  $\tau - \frac{j}{m}\tau$  afin que l'état du prédicteur de rang  $m$  estime l'état réel. Le nombre de prédicteur dans la cascade ( $m$ ) dépend de l'amplitude des non-linéarités lipschitziennes du système et de la valeur retard. Cette dépendance est exprimée précisément sous forme d'une contrainte qu'il faut satisfaire lors du choix de  $m$ . L'idée de synthétiser un observateur avec une cascade de prédicteurs est aussi considérée dans [Kazantzis et Wright 05] où la conception est basée sur la résolution d'équations du 1<sup>er</sup> ordre aux dérivées partielles singulières. L'observateur résultant est semblable à celui proposé par [Germani et al. 02], mais il contient davantage de paramètres de synthèse ce qui permet d'assouplir la condition sur le nombre de prédicteur  $m$ . Pour les deux observateurs mentionnés ci-dessus, les équations des prédicteurs contiennent un terme de gain dont l'expression devient de plus en plus complexe lorsque le rang du prédicteur impliqué augmente. Et ceci peut provoquer des problèmes d'implémentation lors des mises en pratique.

En ce qui concerne notre contribution, nous proposons un observateur composé d'une cascade de prédicteurs pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observable à sortie retardée de  $\tau$  secondes. La forme des équations des prédicteurs est identique quelque soit leur rang. La propriété principale de l'observateur réside sur la simplicité de la structure du terme de correction et sur la facilité d'implémentation. La preuve de la convergence exponentielle de l'erreur d'observation vers zéro est détaillée et elle est obtenue avec une contrainte sur le nombre de prédicteurs dans la cascade, le valeur du retard, la matrice de synthèse et les paramètres du système.

### 1.4 Commande

La conception de lois de commande permettant de stabiliser ou de contrôler les systèmes dynamiques a attiré l'attention de nombreuses équipes de recherche pendant plusieurs décennies. Les premières commandes développées concernent les systèmes linéaires invariants dans le temps. Elles sont réalisées en utilisant les approches basées sur le comportement entrée/sortie des systèmes ou leurs représentations d'état. Les méthodes de synthèse sont applicables aussi bien aux systèmes continus qu'aux systèmes discrets. En particulier, la commande des systèmes discrets est développée pour des raisons d'implémentation numérique. Parmi les approches linéaires existantes dans la littérature, nous pouvons citer entre autres la commande par placement de pôles, la commande par modèle interne, la commande prédictive généralisée ([Seraji 84], [Vogel et Edgar 82], [Polak 75], [Chestnut et al. 61], [Isidori 95]) ou encore les techniques basées sur une optimisation H2 ou H-infini.

Pendant longtemps, la commande des systèmes non linéaires a été abordée au sens de la linéarisation des modèles pour pouvoir utiliser les outils linéaires précités tout en apportant un soin particulier à la robustesse des systèmes de commande généralement au détriment des performances. Durant les dernières décennies, d'énormes progrès ont été réalisés dans le domaine de la commande non linéaire ([Fliess et al. 95], [Fliess et al. 99], [Krstic et al. 95], [Sepulchre et al. 97]) et les scientifiques disposent ainsi d'un grand nombre d'outils très efficaces. Parmi les approches non linéaires proposées, nous pouvons citer notamment les techniques de linéarisation par feedback, de platitude, de grand gain, de structure variable, de modes glissants ou de backstepping ([Krstic et al. 94], [Isidori 95], [Utkin 92], [Bartoloni et al. 92]...). Toutes ces contributions se distinguent particulièrement par leur méthode de conception, la classe des systèmes non linéaires considérée et les résultats obtenus en terme de stabilité et de performances.

Compte tenu des fortes non-linéarités présentes dans le cas du bioréacteur et le manque de connaissance sur l'évolution de plusieurs paramètres, nous avons choisi de synthétiser les lois de commande de type grand gain et de type backstepping pour une classe de systèmes non linéaires ayant une structure particulière. En conséquence, pour des raisons de simplicité, nous proposons de limiter l'étude bibliographique sur ces deux lois de commande non linéaires.

La conception de la loi de commande grand gain par retour d'état est particulièrement obtenue en exploitant la dualité avec l'observateur grand gain [Farza et al. 05]. La loi de commande fait intervenir une fonction de synthèse satisfaisante une condition bien établie [Farza et al. 11], [Sekher et al. 07], [Bedoui et al. 08], [Hajji 09]. Cette fonction permet d'uniformiser une struc-

ture générale pour toutes les lois de commande de type grand gain. Plusieurs expressions ont été proposées pour cette fonction synthèse et il est démontré que certaines de ces expressions conduisent à de nombreuses variantes de commande par modes glissants ou des versions qui y ont été déduites pour s'affranchir du phénomène de réticence lié à la fonction signe [Oueder 12].

Concernant la commande de type backstepping, elle a été développée dans les années 90 par [Kanellakopoulos et al. 91] pour traiter le problème de stabilisation pour une classe particulière de systèmes non linéaires. Cette technique est inspirée des travaux de [Kokotovic et Sussmann 89], [Feuer et Morse 78] et elle a été poursuivie par [Kokotovic 92], [Lozano et Brogliato 92]. La synthèse de cette loi de commande est réalisée de manière itérative. Cette méthode a été utilisée avec succès dans plusieurs applications ([Oueder 12], [Rasmussen et al. 01], [Wai et al. 02]).

## 2 Application au bioréacteur

### 2.1 Pilotage

Les procédés de fermentation constituent un ensemble complexe d'unités qu'il faut amener ou maintenir à un niveau stationnaire. Leur mise en oeuvre doit répondre à un ensemble de contraintes de natures différentes et parfois antagonistes : une sécurité de fonctionnement assurée, une fabrication de produit de haute qualité et en quantité suffisante, un coût raisonnable. La réalisation de ces objectifs constitue un véritable enjeu économique et un défi scientifique. Elle requiert la synthèse et la mise en oeuvre de systèmes de commande évolués permettant de répondre au critère de stabilité, de minimiser l'influence des perturbations et d'optimiser le compromis coût / performances.

Les lois de commande non linéaires sont systématiquement synthétisées en utilisant l'approche d'état, leur mise en oeuvre requiert donc la connaissance approximative de l'ensemble des variables d'état. Dans le cas des procédés de fermentation, celles-ci ont généralement un sens physique puisque le modèle est basé sur des équations de bilan de matière ou d'énergie. Elles peuvent cependant être difficilement accessibles à la mesure ou même dans certains cas non mesurables. Seules quelques grandeurs le sont. Citons par exemple la température, le ph, le débit, la pression ou la concentration de certains constituants.

De ce fait, pour contrôler de manière optimale ces procédés en l'absence de capteurs physiques adéquats, il est nécessaire de reconstruire l'état du système à l'aide d'un observateur en utilisant les mesures disponibles et le modèle de connaissance du système. Plusieurs structures de commande associant un observateur et une loi de commande par retour d'état ont ainsi été implémentées sur les bioréacteurs. Une commande adaptative linéarisante constituant une

référence dans le domaine est proposée dans [Bastin et Dochain 90]. Pour pallier le manque de connaissance sur la modélisation des vitesses de réaction, des techniques d'adaptation paramétriques utilisées dans un contexte de commande adaptative ont été développées [Dochain 94] et [Guo et al. ]. Dans le but de maximiser la production de culture, [Rocha 03] utilise la stratégie développée dans [Bastin et Dochain 90] pour agir sur le débit d'alimentation lors d'une opération de type fed-batch afin de réduire la synthèse de produits secondaires. Le même principe est conservé dans [Valentinotti et al. 03] et un débit d'alimentation critique  $F_{crit}$  est déterminé pour réduire à un niveau minimal la quantité d'éthanol produite.

D'autres approches entrées /sorties ont également été utilisées dans la littérature. Une commande prédictive adaptative [M'Saad 87] a ainsi été mise en oeuvre avec succès sur un procédé de production d'alcool opérant en mode fed-batch [Queinnec et al. 92]. Une commande prédictive linéaire robustifiée est proposée dans [Renard 05] lors d'une culture de levure. Enfin, dans le cas de la fermentation de bactéries de type *Escherichia coli*, une commande prédictive non linéaire a été développée pour réguler la concentration en acétate tout en forçant le débit d'alimentation à suivre un profil de référence [Hafidi 08].

## 2.2 Régulation de l'oxygène

Il est largement reconnu que l'oxygène est l'un des paramètres physiologiques les plus importants lors du pilotage des fermentations aérobiques. En effet, il affecte de manière significative le métabolisme des micro-organismes et il est un facteur limitant au rendement de production des composants attendus ([Rollins et al. 88], [Riege et al. 89]), pour plusieurs raisons. Premièrement, l'oxygène a un effet toxique et il devient inhibiteur à la réaction lorsque sa concentration est supérieure à un seuil déterminant [Kaiser et al. 94]. En outre, en dessous d'une certaine valeur critique, il ralentit fortement la croissance des micro-organismes ([Chen et al. 85], [Slininger et al. 93]) et entraîne la synthèse de composants indésirables comme l'éthanol ou l'acétate [Valentinotti et al. 03], [Rocha 03]. La concentration en oxygène dissout doit donc être maintenue dans une plage critique et dépendante évidemment du milieu de culture utilisé [Huang et al. 89].

Par conséquent, la commande du taux d'oxygène dissout a été intensivement étudiée durant les dernières décennies, en particulier pour les procédés de traitement de boues. Ces systèmes présentent des dynamiques très complexes et fortement non linéaires surtout pendant les cultures fed-batch où il y a une importante accumulation de biomasses et de produits durant toute l'expérimentation. Un tel comportement, variable dans le temps, explique donc les mauvaises performances de commande obtenues avec les approches linéaires [Hilgendorf et al. 87],

[Holmberg et al. 89]. Par ailleurs, les modèles mathématiques couramment utilisés pour la conception de lois de commande comportent de fortes incertitudes. En particulier, l'identification des deux paramètres principaux qui interviennent dans le modèle dynamique de l'oxygène (coefficient de transfert  $K_l a$  et la vitesse de consommation) reste encore un problème ouvert. Enfin, les bioprocédés ont une particularité différente par rapport aux autres systèmes à contrôler, car très peu de mesures discrètes sont accessibles et ceci est dû aux contraintes expérimentales imposées par les capteurs et les chaînes d'instrumentation associées.

Toutes ces remarques ont donc motivé la conception de plusieurs techniques de commande qui peuvent être classées en deux catégories :

- Les algorithmes de commande continus sont généralement synthétisés en utilisant des approches basées sur des techniques non linéaires et sont souvent couplés avec un observateur pour estimer en ligne les paramètres clés qui interviennent dans la loi de commande. Afin de répondre aux besoins croissants en oxygène au cours des expériences, [Oliveira et Azevedo 04] a proposé une commande adaptative pour conduire les bioprocédés à proximité de la capacité maximale de transfert d'oxygène. Son algorithme de commande inclut un observateur basé sur les travaux de [Bastin et Dochain 90] pour estimer la vitesse de consommation de l'oxygène. Néanmoins, cet observateur impose une dynamique du second ordre à l'erreur d'observation et le système de commande engendre un comportement oscillatoire en simulation lors de la commutation de la boucle ouverte à la boucle fermée. De plus, la *OTR* et les mesures de l'oxygène dissout sont supposées être disponibles en ligne. Enfin, la variable de commande choisie dans la manipulation est le taux de dilution alors que nous souhaitons utiliser cette variable pour le contrôle de la concentration du substrat. Cette stratégie est également explorée dans [Ranjan et Gomes 10] pour un découplage de la commande du substrat et de l'oxygène dissout. Une loi de commande adaptative non linéaire qui annule les non-linéarités du procédé est proposée. Toutefois, une compensation exacte ne peut être assurée que sous l'hypothèse que toutes les variables sont mesurées, hypothèse qui ne peut être vérifiée par la vitesse de consommation. L'utilisation d'un observateur a été évoquée sans analyse de la stabilité du système de commande associé.
- Des algorithmes de commande discrète ont également été proposés dans la littérature. Une approche avec modèle de commande prédictive est proposée dans [Piotrowski et al. 08], [Brdys et al. 02] incluant un système de commande en cascade. L'algorithme assure une prédiction discrète de la vitesse de consommation de l'oxygène et ses variations entre les instants d'échantillonnage sont donc supposées être négligeables. De plus, le coefficient de transfert,  $K_l a$ , est supposé être connu ou mesuré. Une loi de commande prédictive

basée sur un modèle non linéaire est donc obtenue en minimisant, à chaque étape de la synthèse, une fonction coût quadratique. Les performances d'une telle approche, très coûteuse en temps de calcul, ont uniquement été illustrées en simulation. En outre, le grand nombre de paramètres de synthèse de cet algorithme est un inconvénient majeur. Une approche adaptative linéaire est présentée dans [Diaz et al. 95], elle est basée sur l'algorithme de commande prédictive généralisée. La loi de commande est synthétisée à partir d'un modèle paramétrique linéaire en temps discret et les paramètres de ce modèle sont reconstruits en ligne à l'aide d'une procédure habituelle basée sur une optimisation au sens des moindres carrés.

### 3 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons proposé une revue bibliographique de différents domaines de l'automatique et de leurs applications dans le génie des bioprocédés. Dans un premier temps, nous avons présenté un état de l'art décrivant les différentes approches actuellement disponibles dans la littérature dans les domaines de l'observation et de la commande des systèmes dynamiques. Concernant l'observation, nous avons parcouru chronologiquement les approches linéaires puis non linéaires en citant les différentes techniques novatrices proposées depuis les premiers travaux de Kalman jusqu'aux approches plus récentes comme l'observateur de type grand gain et ses variantes. Ensuite, nous avons étudié les extensions de ces approches portant sur la prise en compte des incertitudes de modélisation, la discrétisation des mesures et la présence d'un retard sur la sortie du procédé. En ce qui concerne la commande, nous avons exposé plusieurs techniques avant de préciser les deux approches que nous avons choisi d'implémenter sur le bioréacteur (une commande de type grand gain et une commande de type backstepping). Ensuite, nous avons étudié les applications de la théorie de l'automatique au génie des bioprocédés. Nous avons fait, dans un premier temps, un résumé des différentes méthodes proposées pour le pilotage des réactions bio(chimiques). Enfin, nous avons détaillé les différentes stratégies disponibles pour l'asservissement du taux d'oxygène dissout dans un milieu de culture.

---

## Références bibliographiques

- [Andrieu et Nadri 10] V. ANDRIEU, M. NADRI : Observer design for lipschitz systems with discrete-time measurements. In In Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, Georgia USA, 2010. [13](#)
- [Arcak et Nesic 04] M. ARCAK, D. NESIC : A framework for nonlinear sampled-data observer design via approximate discrete-time models and emulation. Automatica, 40:1931–1938, 2004. [13](#)
- [Bartoloni et al. 92] G. BARTOLONI, L. FRIDMAN, A. PISABNO, E. USAI : Sliding modes in control and optimization, volume 116. Springer-Verlag Berlin, 1992. [16](#)
- [Bastin et Dochain 90] G. BASTIN, D. DOCHAIN : On-line estimation and adaptative control of bioreactors. Elsevier Sc. Publishers, 1990. [18](#), [19](#)
- [Bedoui et al. 08] A. BEDOUI, a. M. M. FARZA, Mondher, M. KSOURI : Robust nonlinear controllers for bioprocesses. In IFAC World Congress, volume 17, July, 11 2008. [16](#)
- [Bornard et Hammouri 91] G. BORNARD, H. HAMMOURI : A high gain observer for a class of uniformly observable systems. pages 1494–1496, 1991. [12](#)
- [Brdys et al. 02] M. A. BRDYS, W. CHOTKOWSKI, K. DUZINKIEWICZ, K. KONARCZAK, R. PIOTROWSKI : Two - level dissolved oxygen control for activated sludge processes. Proceedings of the 15th IFAC World Congress, 15:1385–1385, 2002. [19](#)
- [Busawon et al. 98] K. BUSAWON, M. FARZA, H. HAMMOURI : A simple observer for a class of nonlinear systems. Applied Mathematics Letters, 11(3):27–31, 1998. [12](#)

## Références bibliographiques

---

- [Chen et al. 85] J. CHEN, A. L. TANNAHILL, M. L. SHULER : Design of a system for the control of low dissolved oxygen concentrations : Critical oxygen concentrations for azotobacter vinelandii and escherichia coli. Biotechnology and Bioengineering, 27(2):151–155, 1985. [18](#)
- [Chestnut et al. 61] H. CHESTNUT, W. E. SOLLECITO, P. H. TROUTMAN : Predictive-control system application. American Institute of Electrical Engineers, Part II : Applications and Industry, Transactions of the, 80(3):128–139, July 1961. [16](#)
- [Dabroom et Khalil 01] A. DABROOM, H. KHALIL : Output feedback sampled-data control of nonlinear systems using high-gain observers. Automatic Control, IEEE Transactions on, 46(11):1712–1725, Nov 2001. [13](#)
- [Deza et al. 92] F. DEZA, E. BUSVELLE, J. GAUTHIER, D. RAKOTOPARA : High gain estimation for nonlinear systems. Systems & Control Letters, 18:295–299, 1992. [13](#)
- [Diaz et al. 95] C. DIAZ, P. DIEU, C. FEULLERAT, P. LELONG, M. SALOME : Adaptive predictive control of dissolved oxygen concentration in a laboratory-scale bioreactor. Journal of Biotechnology, 43(1):21 – 32, 1995. [20](#)
- [Dochain 94] D. DOCHAIN : Design of adaptive linearizing controllers for non-isothermal reactors. International Journal of Control, 59(3):689–710, 1994. [18](#)
- [Farza et al. 98] M. FARZA, K. BUSAWON, H. HAMMOURI : Simple Nonlinear Observers for On-line Estimation of Kinetic Rates in Bioreactors. Automatica, 34(3):301–318, 1998. [13](#)
- [Farza et al. 04] M. FARZA, M. M'SAAD, L. ROSSIGNOL : Observer design for a class of mimo nonlinear systems. Automatica, 40(1):135–143, jan 2004. [13](#)
- [Farza et al. 05] M. FARZA, M. M'SAAD, M. SEKHER : A set of observers for a class of nonlinear systems. In Proc. of the IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 2005. [13](#), [16](#)
- [Farza et al. 11] M. FARZA, M. M'SAAD, O. GEHAN, E. PIGEON, S. HAJJI : State feedback controller for a class of MIMO non triangular systems. In The 18th IFAC World Congress on Automatic Control, pages – , Milan, Italy, août 2011. [16](#)

- [Farza et al. 14] M. FARZA, M. M'SAAD, M. FALL, E. PIGEON, O. GEHAN, K. BUSAWON : Continuous-discrete time observers for a class of mimo nonlinear systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 59(4):1060–1065, April 2014. [14](#)
- [Feuer et Morse 78] A. FEUER, A. MORSE : Adaptive control of single-input, single-output linear systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 23(4):557–569, Aug 1978. [17](#)
- [Fliess et al. 95] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, P. ROUCHON : Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples. International journal of control, 61(6):1327–1361, 1995. [16](#)
- [Fliess et al. 99] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, P. ROUCHON : A lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 44(5):922–937, 1999. [16](#)
- [Gauthier et al. 92] J. GAUTHIER, H. HAMMOURI, S. OTHMAN : A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. Automatic Control, IEEE Transactions on, 37(6):875–880, Jun 1992. [12](#), [13](#)
- [Gauthier et Bornard 80] J. GAUTHIER, G. BORNARD : Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. pages 910–915, Dec 1980. [12](#)
- [Gauthier et Kupka 94] J. P. GAUTHIER, I. A. K. KUPKA : Observability and observers for nonlinear systems. SIAM J. Control Optim., 32(4):975–994, juillet 1994. [12](#)
- [Germani et al. 02] A. GERMANI, C. MANES, P. PEPE : A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. 47(1):96–101, 2002. [15](#)
- [Gu et al. 03] K. GU, V. KHARITONOV, J. CHEN : Stability of time-delay systems. Birkhäuser, 2003. [15](#)
- [Guo et al. ] B. GUO, A. JIANG, X. HUA, A. JUTAN : Nonlinear adaptive control for multivariable chemical processes. Chemical Engineering Science, 56(23):6781 – 679. [18](#)
- [Hafidi 08] G. HAFIDI : Application de la commande prédictive non-linéaire à la commande de culture de bactéries *Escherichia coli*. Thèse de Doctorat, Université Paris Sud XI, Supélec, 2008. [18](#)
- [Hajji 09] S. HAJJI : Modélisation, observation et commande de la machine asynchrone. Thèse de doctorat, 2009. Thèse de doctorat dirigée

## Références bibliographiques

---

- par M'Saad, Mohammed et Kamoun, Mohamed Automatique et robotique Caen 2009. [16](#)
- [Hammouri et al. 06] H. HAMMOURI, M. NADRI, R. MOTA : Constant gain observer for continuous-discrete time uniformly observable systems. In Proc. of the the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 2006. [13](#)
- [Hilgendorf et al. 87] P. HILGENDORF, V. HEISER, H. DIEKMANN, M. THOMA : Constant dissolved oxygen concentrations in cephalosporin c fermentation : Applicability of different controllers and effect on fermentation parameters. Applied Microbiology and Biotechnology, 27(3):247–251, 1987. [18](#)
- [Holmberg et al. 89] U. HOLMBERG, G. OLSSON, B. ANDERSSON : Simultaneous do control and respiration estimation. Water Science and Technology, 21:1185, 1989. [19](#)
- [Hou et al. 02] M. HOU, P. ZITEK, R. PATTON : An observer design for linear time-delay systems. 47(1):121–125, 2002. [15](#)
- [Huang et al. 89] J. HUANG, P. DHULSTER, J.-N. BARBOTIN, D. THOMAS : Effects of oxygen diffusion on recombinant e. coli b (ptg201) plasmid stability, growth rate, biomass production, and enzyme activity in immobilized and free bacteria during continuous culture. Journal of Chemical Technology and Biotechnology, 45(4):259–269, 1989. [18](#)
- [Isidori 95] A. ISIDORI : Nonlinear Control Systems. Springer, 3eme Edition, 1995. [16](#)
- [Kaiser et al. 94] D. KAISER, U. ONKEN, I. SATTLER, A. ZEECK : Influence of increased dissolved oxygen concentration on the formation of secondary metabolites by manumycin-producing streptomyces parvulus. Applied Microbiology and Biotechnology, 41(3):309–312, 1994. [18](#)
- [Kalman 60] R. E. KALMAN : A new approach to linear filtering and prediction problems. Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, vol.82(Series D):pp.35–45, 1960. [12](#)
- [Kalman et Bucy 61] R. E. KALMAN, R. S. BUCY : New results in linear filtering and prediction theory. Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, vol.83:pp.95–108, 1961. [12](#)

- [Kanellakopoulos et al. 91] I. KANELLAKOPOULOS, P. KOKOTOVIC, A. MORSE : Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. pages 649–654, June 1991. [17](#)
- [Karafyllis et Kravaris 09] I. KARAFYLLIS, C. KRAVARIS : From continuous-time design to sampled-data design of observers. IEEE Transactions on Automatic Control, 54(9):2169–2174, 2009. [13](#), [14](#)
- [Kazantzis et Wright 05] N. KAZANTZIS, R. A. WRIGHT : Nonlinear observer design in the presence of delayed output measurements. 54(9):877–886, 2005. [15](#)
- [Kharitonov et Hinrichsen 04] V. KHARITONOV, D. HINRICHSEN : Exponential estimates for time delay systems. 53(5):395–405, 2004. [15](#)
- [Kokotovic 92] P. KOKOTOVIC : The joy of feedback : nonlinear and adaptive. Control Systems, IEEE, 12(3):7–17, June 1992. [17](#)
- [Kokotovic et Sussmann 89] V. KOKOTOVIC, P., J. SUSSMANN, H. : A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. System Control Letter, 13(2):125–133, August 1989. [17](#)
- [Krener et Isidori 83] J. KRENER, Arthur, A. ISIDORI : Linearization by output injection and nonlinear observers. Systems and Control letters, 3(1):47–52, 1983. [12](#), [13](#)
- [Krener et Kravaris 01] N. KRENER, C. KRAVARIS : Discrete-time nonlinear observer design using functional equations. Systems & Control Letters, 42:81–94, 2001. [13](#)
- [Krener et Respondek 85] J. KRENER, Arthur, W. RESPONDEK : Nonlinear observers with linearization error dynamics. SIAM on Control and Optimization, 23(2):197–216, 1985. [12](#)
- [Krstic et al. 94] M. KRSTIC, I. KANELLAKOPOULOS, P. KOKOTOVIC : Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 39(4):738–752, Apr 1994. [16](#)
- [Krstic et al. 95] M. KRSTIC, I. KANELLAKOPOULOS, P. V. KOKOTOVIC : Nonlinear and adaptive control design. 1995. [16](#)
- [Lozano et Brogliato 92] R. LOZANO, B. BROGLIATO : Adaptive control of robot manipulators with flexible joints. Automatic Control, IEEE Transactions on, 37(2):174–181, Feb 1992. [17](#)
- [Luenberger 71] G. LUENBERGER, David : An introduction to observers. IEEE Transactions on Automatic and Control, AC-16:pp.596–602, 1971. [12](#)

## Références bibliographiques

---

- [Mazenc et Niculescu 01] F. MAZENC, S. NICULESCU : Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems. *42:245–251*, 2001. [15](#)
- [Mondie et Kharitonov 05] S. MONDIE, V. KHARITONOV : Exponential estimates for retarded time-delay systems : an lmi approach. *50(2):268–273*, 2005. [15](#)
- [M’Saad 87] M. M’SAAD : Sur l’Applicabilité De La Commande Adaptative. Phd thesis, l’Institut Polytechnique de Grenoble, Mars 1987. [18](#)
- [Nadri 01] M. NADRI : Observation et commande des systèmes non linéaires et application aux bioprocédés. ANRT, Grenoble, 2001. Reproduction de Thèse de doctorat autom. indus LYON 1 2001. [13](#)
- [Nadri et al. 04] M. NADRI, H. HAMMOURI, C. A. ZARAGOZA : Observer design for continuous-discrete time state affine systems up to output injection. *European Journal of Control*, *10(3):252–263*, 2004. [13](#)
- [Naghshtabrizi et al. 08] P. NAGHSHTABRIZI, J. HESPANHA, A. TEEL : Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. *Systems & Control Letters*, *57:378–385*, 2008. [14](#)
- [Oliveira et Azevedo 04] S. R. OLIVEIRA, R. and, S. Feyer de AZEVEDO : Design of a stable adaptive controller for driving aerobic fermentation processes near maximum oxygen transfer capacity. *Journal of Process Control*, *14(6):617 – 626*, 2004. [19](#)
- [Oueder 12] M. OUEDER : Synthèse d’observateurs pour les systèmes non linéaires. Thèse de doctorat, 2012. Thèse de doctorat dirigée par Farza, Mondher Automatique, productique Caen 2012. [17](#)
- [Piotrowski et al. 08] R. PIOTROWSKI, M. BRDYS, K. KONARCZAK, K. DUZINKIEWICZ, W. CHOTKOWSKI : Hierarchical dissolved oxygen control for activated sludge processes. *Control Engineering Practice*, *16(1):114 – 131*, 2008. [19](#)
- [Polak 75] E. POLAK : Possible new directions in control. pages 270–270, Dec 1975. [16](#)
- [Queinnec et al. 92] I. QUEINNEC, B. DAHOU, M. M’SAAD : On adaptive control of fedbatch fermentation processes. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, *6(6):521–536*, 1992. [18](#)
- [Raff et al. 08] T. RAFF, M. KÖGEL, F. ALLGÖWER : Observer with sample-and-hold updating for Lipschitz nonlinear systems with nonuniformly sampled measurements. In *Proc. of the American Control Conference*, Washington, USA, 2008. [14](#)

- [Raff et Allgower 07] T. RAFF, F. ALLGOWER : An impulsive observer that estimates the exact state of a linear continuous-time system in pre-determined finite time. In Control Automation, 2007. MED '07. Mediterranean Conference on, pages 1–3, June 2007. [15](#)
- [Ranjan et Gomes 10] A. RANJAN, J. GOMES : Decoupled adaptive control of glucose and dissolved oxygen for fed-batch methionine production using linear reference model. pages 5862–5867, June 2010. [19](#)
- [Rasmussen et al. 01] H. RASMUSSEN, P. VADSTRUP, H. BORSTING : Full adaptive backstepping design of a speed sensorless field oriented controller for an induction motor. In Industry Applications Conference, 2001. Thirty-Sixth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2001 IEEE, volume 4, pages 2601–2606 vol.4, Sept 2001. [17](#)
- [Renard 05] F. RENARD : Commande robuste de bioprocédés opérés en mode fed-batch  $\bar{U}$  Application industrielle à des cultures de Saccharomyces Cerevisiae. Thèse de Doctorat, Polytechnique de Mons, Belgique, 2005. [18](#)
- [Riege et al. 89] P. RIEGE, R. BLASIG, H. G. MULLER, G. HEIDENREICH, J. BAUCH : Influence of oxygen and substrate supply on the metabolism of candida maltosa during cultivation on n-alkanes. Applied Microbiology and Biotechnology, 32(1):101–107, 1989. [18](#)
- [Rocha 03] I. ROCHA : Model-based strategies for computer-aided operation of a recombinant E. coli Fermentation. Thèse de Doctorat, Universidade do Minho, Portugal, 2003. [18](#)
- [Rollins et al. 88] M. ROLLINS, S. JENSEN, D. WESTLAKE : Effect of aeration on antibiotic production by streptomyces clavuligerus. Journal of Industrial Microbiology, 3(6):357–364, 1988. [18](#)
- [Sekher et al. 07] M. SEKHER, M. FARZA, M. M'SAAD : Commande avec retour d'état d'un réacteur chimique. In JDMACS (Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS), 2007. [16](#)
- [Sepulchre et al. 97] R. SEPULCHRE, M. JANKOVIC, P. KOKOTOVIC : Constructive Nonlinear Control. Springer-Verlag, 1997. [16](#)
- [Seraji 84] H. SERAJI : Design of discrete pid controllers for pole placement. In Decision and Control, 1984. The 23rd IEEE Conference on, pages 1721–1722, Dec 1984. [16](#)

## Références bibliographiques

---

- [Seuret 06] A. SEURET : Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications. Thèse de doctorat, 2006. Thèse de doctorat dirigée par Richard, Jean-Pierre et Dambrine, Michel Informatique industrielle et automatique Ecole Centrale de Lille 2006. [15](#)
- [Slininger et al. 93] P. SLININGER, R. SILMAN, M. JACKSON : Oxygen delivery requirements of *colletotrichum truncatum* during germination, vegetative growth, and sporulation. Applied Microbiology and Biotechnology, 39(6):744–749, 1993. [18](#)
- [Slotine et al. 86] J.-J. SLOTINE, J. HEDRICK, E. MISAWA : Nonlinear state estimation using sliding observers. pages 332–339, Dec 1986. [12](#)
- [Trinh et al. ] H. TRINH, M. ALDEEN, S. NAHAVANDI : An observer design procedure for a class of nonlinear time-delay systems, year = 2004, journal = Computers and electrical engineering, pages = 61-71, volume = 30,. [15](#)
- [Utkin 92] V. I. UTKIN : Sliding modes in control and optimization, volume 116. Springer-Verlag Berlin, 1992. [16](#)
- [Valentinotti et al. 03] S. VALENTINOTTI, B. SRINIVASAN, U. HOLMBERG, D. BONVIN, C. CANNIZZARO, M. RHIEL, U. von STOCKAR : Optimal operation of fed-batch fermentations via adaptive control of overflow metabolite. Control Engineering Practice, 11(6):665 – 674, 2003. [18](#)
- [Vogel et Edgar 82] E. VOGEL, T. EDGAR : Application of an adaptive pole-zero placement controller to chemical processes with variable dead time. pages 536–544, June 1982. [16](#)
- [Wai et al. 02] R.-J. WAI, F.-J. LIN, R.-Y. DUAN, K.-Y. HSIEH, J.-D. LEE : Robust fuzzy neural network control for linear ceramic motor drive via backstepping design technique. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 10(1):102–112, Feb 2002. [17](#)

---

---

# Chapitre II

---

## Modélisation des Bioréacteurs

### 1 Définition

Un bioréacteur est un système clos dans lequel un organisme vivant appelé biomasse réalise plusieurs réactions biologiques simultanément et croit en consommant un substrat en phase liquide. La biomasse exprime le produit d'intérêt sous des conditions de fabrications contrôlées.

Durant cette thèse, nous nous sommes intéressés aux bioréacteurs infiniment mélangés dont la figure II.1 montre un schéma représentatif. Ce dernier est composé :

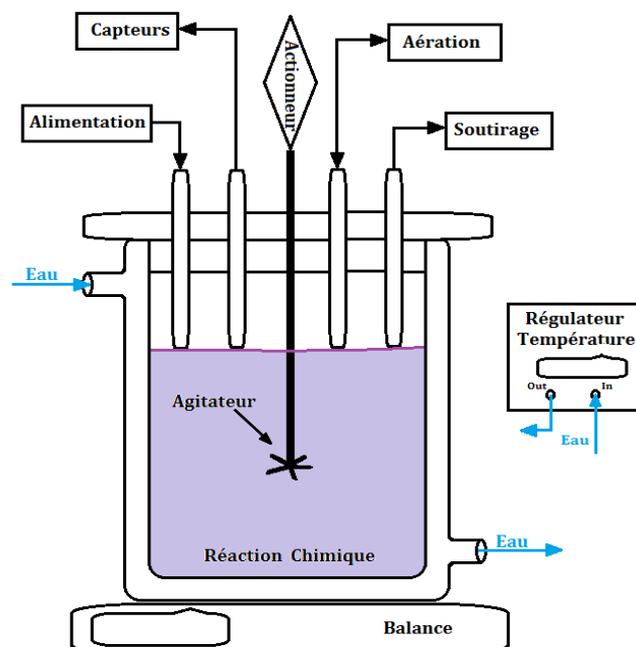


Figure II.1 – Schéma représentatif d'un bioréacteur

- d’une cuve à double enveloppe dans laquelle circule de l’eau pour réguler la température du milieu réactionnel.
- d’un actionneur composé d’un amplificateur de puissance relié à un moteur à courant continu qui agite le mélange liquide afin d’assurer une homogénéité de la solution.
- d’un ensemble de capteurs réalisant les mesures en ligne du pH, de la température, du taux d’oxygène dissout, des débits d’air entrant et sortant et du poids.
- d’un ensemble de connecteurs permettant l’ajout des éléments nutritifs, le prélèvement dans le milieu de culture et l’injection d’air.

Pour permettre aux cellules de se multiplier dans des conditions favorables, nous agissons sur ces composants pour asservir le pH, la température, la concentration en substrat et le taux d’oxygène dissout dans la réaction. Le pH est régulé en ajoutant une solution acide ou basique dans le milieu réactionnel. La température est régulée à l’aide de l’eau circulant dans la cuve à double enveloppe. La concentration en substrat est régulée à travers le débit d’alimentation. Enfin, nous agissons sur l’actionneur pour imposer une vitesse d’agitation optimale permettant de contrôler le niveau d’oxygène dissout dans la réaction.

## 2 Généralités

Le bioréacteur est une structure qui consiste à faire croître des micro-organismes vivants en présence d’éléments nutritifs dans le but de multiplier leur biomasse et éventuellement utiliser leur métabolisme. Ce processus est utilisé pour cultiver tout type de cellules dès lors que celles-ci sont cultivables en milieu liquide. Ainsi peuvent être cultivées les bactéries, les levures, les cellules végétales et animales etc.. Et contrairement aux autres systèmes plus simples utilisés pour faire pousser des micro-organismes, comme par exemple les fioles, le bioréacteur se présente comme une unité technologique permettant de contrôler les paramètres de culture ( Température, pH, agitation, aération...) et de récolter des informations de grande fiabilité.

De nos jours, plusieurs applications industrielles se sont développées à l’aide de bioréacteurs pour fabriquer des produits à haute valeur ajoutée ou pour améliorer la synthèse de molécules complexes. Parmi les applications, les plus courantes peuvent concerner : la culture des lignés cellulaires animales, de cellules végétales, de micro-organismes ou le traitement biologique des eaux usées... Ces applications ont une importance capitale dans la vie quotidienne, mais leur réalisation suit un processus complexe. D’où la nécessité de proposer des réponses assez sophistiquées afin de répondre aux attentes.

### 3 Modes de fonctionnement

Il existe différentes stratégies pour la conduite d'un bioréacteur. Leurs différences concernent essentiellement les modes d'alimentation et de soutirage du milieu de culture. On distingue les modes suivants :

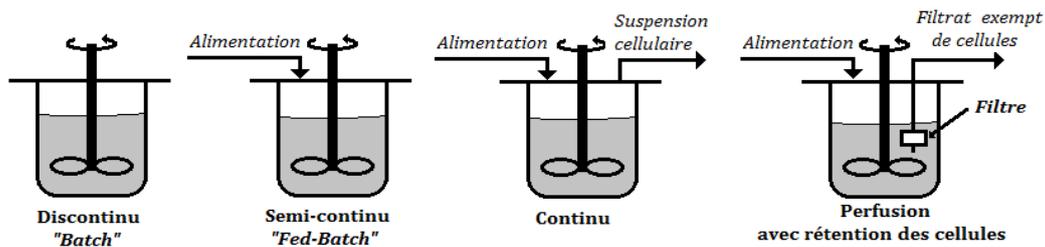


Figure II.2 – Les différents modes de conduite d'un bioréacteur

**Le mode discontinu (ou batch) :** La cuve est remplie au démarrage de la culture par des éléments nutritifs et de la biomasse. La fermentation se déroule sans addition supplémentaire dans le milieu de culture. Le volume reste approximativement constant et la productivité est relativement faible. La biomasse et les produits sont récupérés à la fin de la culture.

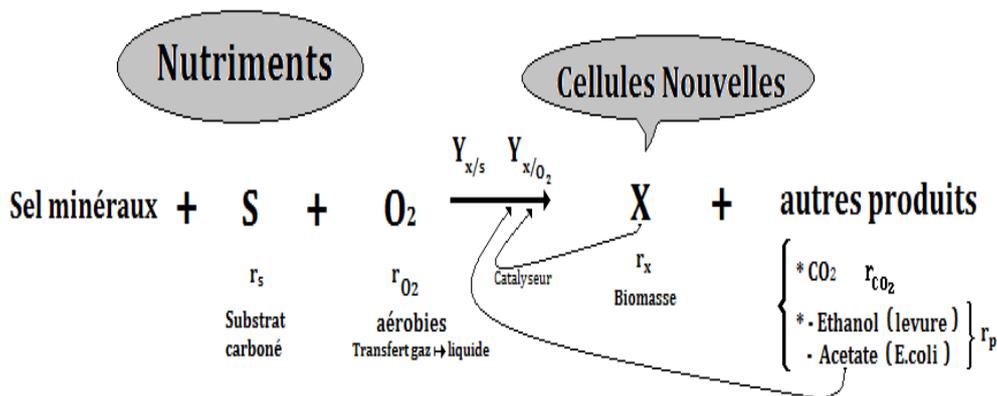
**Le mode semi-continu (ou fed-batch) :** Les éléments nutritifs sont ajoutés au fur et à mesure des besoins des micro-organismes. Le débit d'alimentation est réglé de sorte que la concentration en substrat soit constante dans la cuve et que l'effet de dilution ne ralentisse pas la production de la biomasse. L'alimentation est coupée lorsque la cuve est remplie et la conduite se termine en mode batch. En pratique, le fed-batch permet un gain de temps remarquable et une possibilité de modification du milieu réactionnel en cours de culture. La concentration en biomasse obtenue à la fin est donc plus élevée que celle obtenue en mode discontinu.

**Le mode continu :** L'ajout de milieu stérile et le soutirage commencent quand les cellules entrent en phase stationnaire de croissance. Ils se font de manière continue et au même débit.

**Le mode perfusion :** Le principe reste identique au mode de culture continue. La différence principale provient de la présence d'un filtre permettant d'évacuer le milieu de culture usé et de garder la biomasse à l'intérieur du réacteur.

## 4 Les micro-organismes ( Catalyseurs )

Les micro-organismes sont des organismes vivants, généralement invisibles à l'oeil nu. Ils sont représentés par diverses formes de vie dont les bactéries, les algues vertes, les levures ou certains champignons... . Pendant leur culture, pour se multiplier, ils ont besoin de nutriments minéraux, de substrats carbonés et d'oxygène. Seules les cellules aérobie sont considérées dans ces travaux. L'oxygène étant peu soluble dans l'eau, il est apporté en permanence par injection d'air et son coefficient de transfert dépend des paramètres physiques de la culture tels que le volume, la vitesse d'agitation, la densité, la viscosité et le débit d'air. Le processus de fermentation peut être décrit comme dans le schéma suivant :



**Figure II.3** – Schéma représentatif de la réaction chimique

- $S$  (g/l) est la concentration en substrat carboné.
- $O_2$  (g/l) est le taux d'oxygène dissout dans le réacteur.
- $X$  (g/l) est la concentration de biomasse contenue dans la solution.
- $CO_2$  (g/l) est la concentration de gaz carbonique expiré par les cellules.
- $Y_{x/s}$  ( $\frac{g \text{ de biomasse}}{g \text{ de substrat}}$ ) est le rendement biomasse / substrat. Il désigne la quantité de biomasse produite pour un gramme de substrat.

## II.4 Les micro-organismes ( Catalyseurs )

---

- $Y_{x/O_2}$   $\left( \frac{g \text{ de biomasse}}{g \text{ d'oxygène}} \right)$  est le rendement biomasse / Oxygène. Il désigne la quantité de biomasse produite pour un gramme d'oxygène.
- $r_s$ ,  $r_{O_2}$ ,  $r_x$ ,  $r_{CO_2}$  et  $r_p$  ( $g.l^{-1}.s^{-1}$ ) sont respectivement les vitesses de consommation de substrat et d'oxygène et les vitesses de production de biomasse, du gaz carbonique et du produit spécifique.

Le processus se déroule généralement ainsi : une concentration  $X_0$  de biomasse est introduite au démarrage de la culture avec une concentration  $S_0$  de substrat. La biomasse consomme le substrat à la vitesse  $r_s$  et elle consomme également l'oxygène à la vitesse  $r_{O_2}$ . La vitesse de formation de biomasse est notée  $r_x$ . Selon la disponibilité du substrat, les micro-organismes peuvent intervenir dans leur propre synthèse en se dupliquant et donc accélérer la réaction, d'où leur effet catalyseur.

D'autres produits sont également formés au cours du processus notamment le  $CO_2$  provenant de la respiration des cellules et d'autres produits spécifiques identifiés selon le type de souche étudié : l'éthanol chez les levures (c.f. [Valentinotti et al. 03]) et l'acétate chez l'Escherichia coli (c.f. [Rocha 03]). Notons que ces produits sont synthétisés alternativement en condition anaérobie (ce qui n'est pas considéré dans ces travaux) ou en condition aérobie en présence d'un excès de substrat carboné d'où la théorie du goulot d'étranglement. Ces produits ont un effet inhibiteur sur la culture, ils doivent être maîtrisés à un niveau minimal.

**Principe du goulot d'étranglement :** Un des modèles le plus répandu pour la description de l'évolution des micro-organismes est celui proposé dans [Somleitner et Käppeli 86]. Ce modèle est connu sous le principe du goulot d'étranglement. Il suppose une capacité respiratoire limitée des cellules et il est basé sur la réaction présentée sur la figure II.3. La figure II.4 montre une description simple du principe. Les flèches représentent le taux d'absorption du substrat. Une augmentation de la concentration de substrat dans le réacteur conduit à une croissance de la vitesse de synthèse des cellules. Ceci est illustré par un agrandissement des flèches. On suppose que le substrat est métabolisé dès que celui-ci pénètre dans les cellules. En présence d'un excès de substrat, une partie se transforme en produit en déclenchant d'autres voies d'oxydation en présence d'oxygène.

- **Cas 1 :** L'absorption de glucose est suffisamment petite et ne provoque pas le débordement de la capacité respiratoire.
- **Cas 2 :** La capacité d'absorption du substrat correspond à la capacité respiratoire.
- **Cas 3 :** L'absorption de glucose est supérieure à la capacité d'oxydation. Ceci provoque la production d'un acide, inhibiteur à la culture, qui peut être ensuite métabolisé à son tour par voie oxydative.

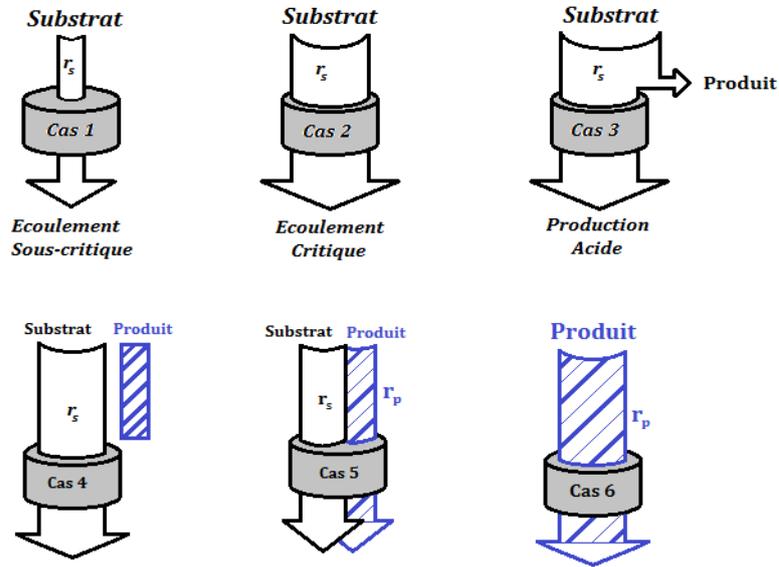


Figure II.4 – Les différents scénarios métaboliques pour les cellules

- **Cas 4** : Le substrat utilise toute la capacité respiratoire malgré la présence du produit dans le milieu de culture.
- **Cas 5** : L'oxydation du substrat est à un flux sous-critique et le produit disponible est métabolisé.
- **Cas 6** : Le milieu de culture ne contient plus de substrat et le produit utilise donc toute la capacité respiratoire.

## 5 Modèle micro-biologique

Dans un objectif de pilotage des cultures microbiennes, il est nécessaire de déterminer un modèle dynamique de connaissance basé sur une théorie bien établie et qui représente le plus fidèlement possible le comportement fonctionnel du processus. L'une des étapes primordiales du développement de ce modèle est la formulation de bilan des matières qui est une combinaison des équations cinétiques de la réaction avec les équations de bilan. Deux types de modèle sont souvent distingués dans la littérature :

**Les modèles structurés** conçus pour décrire l'évolution de la composition et du métabolisme interne des micro-organismes. Leurs schémas réactionnels font intervenir plusieurs réactions, plusieurs constantes et des temps de réponse très importants. Ils résultent des modèles complexes.

**Les modèles non-structurés** basés sur l'observation des cinétiques macroscopiques au sein du réacteur. Ils sont dits non-structurés car ils ne tiennent pas compte de la composition intracellulaire des cellules. Par exemple la biomasse, le substrat, l'aération etc. sont représentés chacun par une seule variable en particulier leur concentration dans le milieu réactionnel.

Enfin, la modélisation doit permettre d'appréhender le processus dans son intégralité dans un objectif de contrôle et de supervision. De ce fait, il est intéressant de combiner les paramètres les plus importants, d'analyser et de modéliser leurs trajectoires. Pour cette raison, nous nous sommes uniquement intéressés aux modèles non-structurés car contrairement aux modèles structurés, ils sont bien mieux adaptés à la synthèse de loi de commande et d'observation.

Les relations dynamiques entre les concentrations des différents constituants de la réaction sont décrites par l'ensemble d'équations différentielles [II.1](#). Ces dernières sont inspirées du modèle proposé par [[Bastin et Dochain 90](#)] et sont obtenues à l'aide d'un bilan matière.

$$\begin{aligned}
 \frac{dX(t)}{dt} &= \mu(t) X(t) - \frac{D(t)}{V(t)} X(t) \\
 \frac{dS(t)}{dt} &= -\frac{\mu(t)}{Y_{x/s}} X(t) - \frac{D(t)}{V(t)} (S(t) - S_{in}(t)) \\
 \frac{dV(t)}{dt} &= D(t)
 \end{aligned} \tag{II.1}$$

où

- $V(t)$  est le volume réactionnel,
- $D(t)$  le débit d'alimentation en substrat,
- $S_{in}(t)$  est la concentration du substrat dans la solution d'alimentation,
- $\mu(t)$  est le taux spécifique de production de biomasse.

Les vitesses de consommation ou de production interviennent intrinsèquement dans le modèle [II.1](#) car elles sont liées à la croissance de la biomasse.

\* La vitesse de croissance de la biomasse  $r_x(t)$  est liée à  $X$  par la relation de proportionnalité suivante :

$$r_x(t) = \mu(t)X(t) \tag{II.2}$$

Le paramètre  $\mu(t)$  dépend théoriquement de la concentration en substrat disponible et du taux d'oxygène dissout dans le réacteur. Dans la littérature, ce paramètre peut prendre plusieurs expressions. Mais celle proposée dans [[Monod 42](#)], introduite pour décrire une réaction enzy-

## Chapitre II. Modélisation des Bioréacteurs

---

matique est fréquemment utilisée pour traduire le phénomène de limitation de croissance par manque de substrat. Elle néglige l'effet de l'oxygène et des autres produits et elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\mu(t) = \mu_{max} \frac{S(t)}{K_s + S(t)} \quad (\text{II.3})$$

- $\mu_{max}$  (en  $h^{-1}$ ) est la vitesse maximale de croissance spécifique
- $K_s$  (en  $g$  de  $S/l$ ) est la constante de saturation du substrat

\* La vitesse de consommation du substrat  $r_s(t)$  est liée à  $X(t)$  par la relation de proportionnalité suivante :

$$r_s(t) = q_s(t)X(t) \quad (\text{II.4})$$

où :

- $q_s(t)$  (en  $h^{-1}$ ) est le taux spécifique de consommation de substrat.

Son expression mathématique est définie comme suit :

$$q_s(t) = \frac{\mu(t)}{Y_{x/s}} \quad (\text{II.5})$$

Ce paramètre a également reçu plusieurs expressions dans la littérature ([Galvanauskas et al. 98], [Monod 42], [Alba et Calvo 00] où [Cockshott 92]). Une étude comparative des différentes expressions est proposée dans [Rocha 03] et l'auteur a montré que celle proposée par Monod est bien satisfaisante :

$$r_s(t) = q_{s,max} \frac{S(t)}{K_s + S(t)} \quad (\text{II.6})$$

- $q_{s,max}$  est le taux maximal spécifique de consommation de substrat.

En combinant les équations II.2 et II.6, nous déduisons aisément l'expression du rendement biomasse / substrat :

$$Y_{x/s} = \frac{r_x(t)}{r_s(t)} = \frac{\mu_{max}}{q_{s,max}} \quad (\text{II.7})$$

## 6 Importance de l'oxygène

Pour réguler l'activité des micro-organismes et optimiser leur productivité, le milieu de culture exige une forte précision sur le contrôle de plusieurs paramètres internes et externes, notamment la concentration en substrat extracellulaire et les conditions environnementales (pH, température et aération). Les régulations du pH et de la température sont généralement bien maîtrisées à l'aide de boucles annexes de régulation. Malheureusement, celle de l'oxygène dissout connaît moins de réussite. Sachant que le taux d'oxygène dissout régit le métabolisme du substrat et affecte la stabilité des cellules [Namdev et al. 93], il est obligatoire de le maintenir à un niveau favorable pour le bon déroulement du processus. La concentration du substrat doit également être régulée de manière à ce que son absorption coïncide avec la capacité oxydative pour éviter tout débordement ou synthèse de produits indésirables (cf. principe du goulot d'étranglement : figure II.4).

Il est clairement reconnu que la quantité d'oxygène est un facteur primordial pour la croissance des micro-organismes en milieu aérobie. Une quantité inadaptée d'oxygène dans la solution peut avoir un effet toxique ou inhibiteur pour la réaction. Sa concentration dissoute doit ainsi être confinée dans une plage critique et déterminante [Kaiser et al. 94]. Cette plage est très étroite et dépend du milieu de culture utilisé [Huang et al. 89]. En dessous d'une certaine valeur limite, il ralentit fortement la croissance ([Chen et al. 85] , [Slininger et al. 93]).

La dynamique de l'oxygène dissout dans un bioréacteur parfaitement mélangé et opéré en mode fed-batch est obtenu à l'aide d'une équation bilan et s'écrit comme suit :

$$\frac{dO_2(t)}{dt} = K_L a (O_2^* - O_2(t)) - r_{O_2} - \frac{D(t)}{V(t)} O_2(t) \quad (\text{II.8})$$

où  $O_2(t)$  est le taux d'oxygène dissout dans le réacteur. Il est exprimé en pourcentage par rapport à la valeur de saturation (  $O_{2,sat} = 7.8 \cdot 10^{-3} \text{ g/l}$  à la température 30 degrés Celsius dans l'eau) correspondant à  $O_2^* = 100$ . Deux paramètres essentiels interviennent dans cette équation. En premier lieu, le  $K_L a$  ( $s^{-1}$ ) est le coefficient de transfert de l'oxygène de la phase gazeuse à la phase liquide. Il est fonction du volume, de la vitesse d'agitation, du débit d'air injecté, de la viscosité et de la densité de la solution. Ensuite,  $r_{O_2}$  ( $g.l^{-1}.s^{-1}$ ) est la vitesse de consommation de l'oxygène. Elle dépend des concentrations de la biomasse et du substrat disponible dans le réacteur. Ces deux paramètres dépendent donc de variables qui évoluent durant la fermentation ce qui rend délicate leur modélisation. Toutefois, des modèles empiriques ont été proposés dans la littérature. Dans ce mémoire, nous proposons quelques méthodes d'identification du  $K_L a$  et une reconstruction de la vitesse de consommation à l'aide d'un observateur.

## 6.1 Modélisation du coefficient de transfert d'oxygène $K_L a$

Le coefficient de transfert de l'oxygène de la phase gazeuse à la phase liquide (  $K_L a$  ) joue un rôle très important dans le déroulement d'un processus de fermentation aérée. Car dans les cultures aérobie, l'approvisionnement en oxygène est primordial pour la survie des micro-organismes. La valeur du  $K_L a$  doit cependant être suffisante pour que les besoins en oxygène des micro-organismes soient satisfaits. Des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation de ce paramètre. Ces exercices ont apporté une avancée significative pour la compréhension du fonctionnement des bioréacteurs aérés et infiniment agités. Une étude de corrélation entre le  $K_L a$  et le débit d'air volumique  $Q/V$  a été étudiée dans [Wong et al. 03] et [Wang et al. 79]. [Hensirisak 97] a étudié plus précisément les effets de la dispersion des micro-bulles d'air dans le réacteur afin d'améliorer le transfert d'oxygène dans l'ensemble du milieu réactionnel. Une étude de l'influence de l'apport de puissance par unité de volume sur l'hydro-dynamique de la culture est proposée dans [Wernersson et Trägårdh 99] . Tous ces travaux ont ainsi donc à l'élaboration de plusieurs modèles empiriques du  $K_L a$ .

Parmi les modèles les plus répandus, nous pouvons citer notamment :

- celui proposé par [Cooper et al. 44] où le  $K_L a$  est décrit en fonction de la consommation d'énergie par unité de volume  $\frac{P_g}{V_L}$  et de la vitesse superficielle du gaz.

$$K_L a = 2.6 \cdot 10^{-2} \left( \frac{P_g}{V_L} \right)^{0.4} U_g^{0.5} \quad (\text{II.9})$$

- $P_g$  (*Watt*) est la puissance mécanique consommée
- $V_L$  ( $m^3$ ) est le volume du liquide
- $U_g = \frac{Q}{A}$  ( $m/s$ ) est la vitesse superficielle du gaz
- $Q$  ( $m^3/s$ ) est le débit volumique d'air
- $A$  ( $m^2$ ) est l'aire de section droite de la cuve

La puissance dissipée  $P_g$  est intrinsèquement liée à la vitesse d'agitation  $N$ . La relation empirique suivante a été proposée par [Michel et Miller 62]

$$P_g = 0.34 \sqrt{n_p} \left( \frac{P^2 N d_a^3}{Q^{0.56}} \right)^{0.45} \quad (\text{II.10})$$

où

- $P$  est la puissance consommée dans une cuve non aérée, agitée à la même vitesse et contenant le même liquide. Elle est nécessairement supérieure à  $P_g$  car la présence des cavités de gaz diminue la traînée des pâles dans le liquide.

- $d_a$  est le diamètre de l'agitateur
- $n_p$  est le nombre de pâles de la turbine
  
- celui proposé par [García-Ochoa et Gómez 98] qui omet la puissance dissipée. Il fait intervenir directement la vitesse d'agitation  $N$ , la vitesse superficielle du gaz  $V_g$  et la viscosité effective du liquide  $\mu_{eff}$ .

$$K_{la} = c_1 V_g^\alpha N^\beta \mu_{eff}^\lambda \quad (\text{II.11})$$

où

- $c_1$  est une constante qui dépend de la géométrie du réacteur
- $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  sont des réels.

### 6.2 Identification expérimentale du $K_{la}$

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le modèle dynamique du taux d'oxygène dissout fait intervenir deux paramètres majeurs, respectivement  $K_{la}$  et  $r_{O_2}$  pour lesquelles seules des modélisations empiriques sont proposées dans la littérature. La difficulté majeure d'une identification expérimentale en régime statique réside dans le fait que toute erreur de modélisation de l'un des paramètres engendre une erreur de modélisation sur le second par un simple effet de compensation. Pour s'affranchir de cette difficulté, nous proposons dans cette partie une identification du  $K_{la}$  en régime statique dans une solution d'eau pure sans biomasse et sans substrat. La vitesse de consommation de l'oxygène et le débit d'alimentation sont donc nuls ( $r_{O_2} = 0, D(t) = 0$ ). Le protocole expérimental est le suivant : la vitesse d'agitation  $N$  est maintenue constante et de l'azote est injectée pour éliminer l'oxygène présente dans la solution. Lorsque cette dernière est appauvrie en oxygène, de l'air est injecté à débit constant. L'évolution du taux d'oxygène dissout est représentée sur la figure II.5 pour une vitesse d'agitation de 800 *tr/min* et un débit d'air  $Q = 1.5$  *l/min*. La concentration en oxygène dissout suit une trajectoire exponentielle qui peut être assimilée à la réponse indicielle d'un système du premier ordre en faisant une hypothèse de linéarité du système dynamique ce qui revient à considérer que le  $K_{la}$  est constant sur la durée de l'expérience.

Pour cette vitesse d'agitation, une estimation du  $K_{la}$  peut ainsi être obtenue à l'aide de la mesure de la constante de temps de ce système. L'expérience est répétée pour différentes vitesses d'agitation et les valeurs identifiées du  $K_{la}$  sont reportées dans le tableau II.1.

En exploitant les résultats du tableau II.1, une relation affine entre le  $K_{la}$  et la vitesse

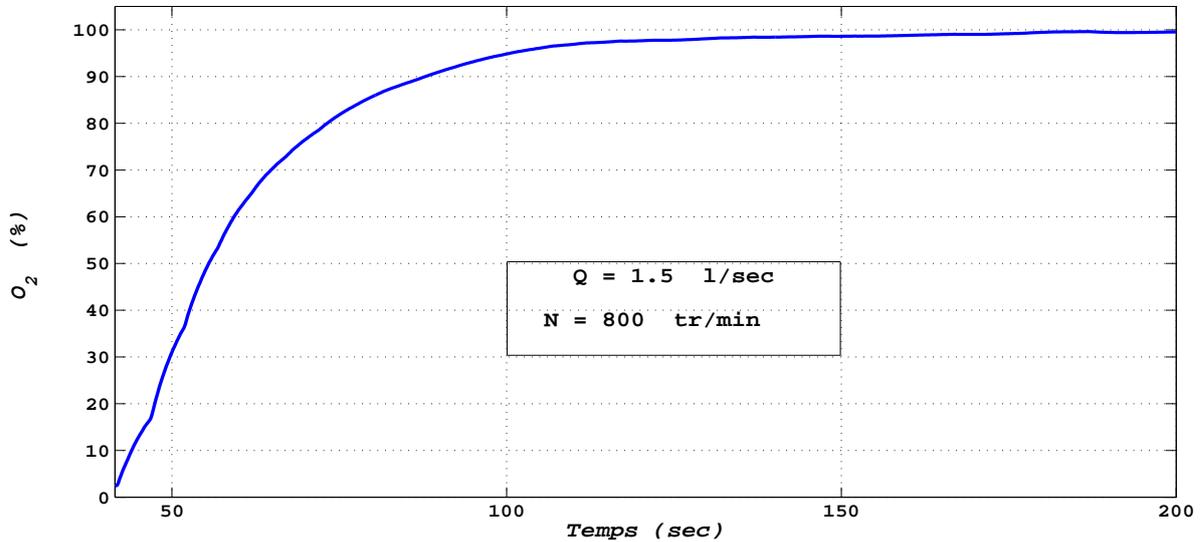


Figure II.5 – Trajectoire d’oxygène dans un milieu aéré

$N$ (tr/min)	450	500	550	600	650	700	750	800	850
$K_L a$ ( $h^{-1}$ )	0.0214	0.023	0.028	0.031	0.031	0.032	0.037	0.04	0.04

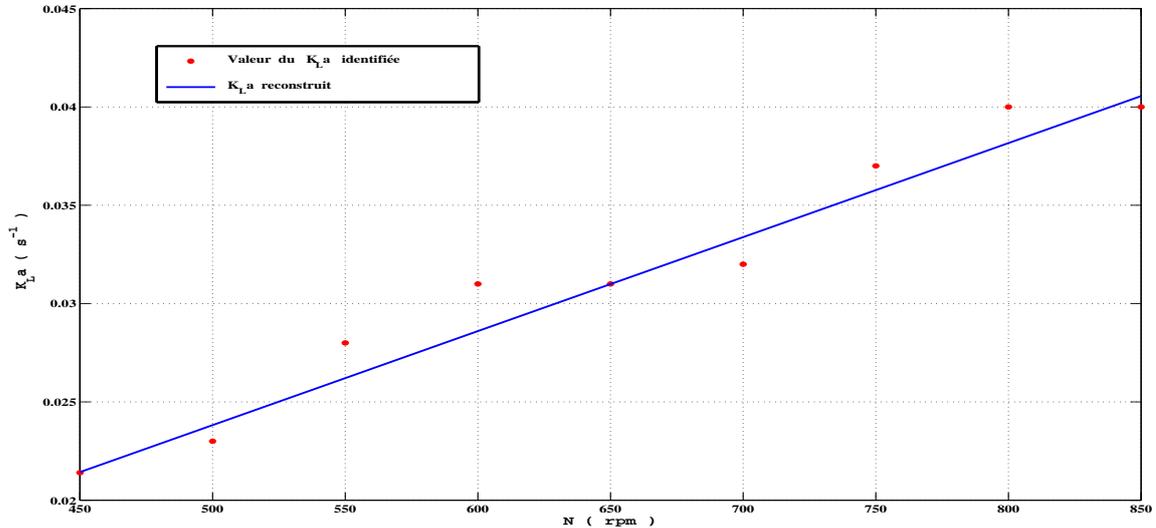
Tableau II.1 – Valeur du coefficient de transfert identifié en fonction de la vitesse d’agitation

d’agitation  $N$  peut être déterminée à l’aide d’une optimisation au sens des moindres carrés. La considération d’une telle modélisation est motivée pour des raisons de faisabilité, car la commande physique appliquée au bioprocédé est la vitesse d’agitation  $N$ . Et nous aurons besoin d’inverser ce modèle pour obtenir une expression pour la vitesse  $N$ . Le modèle obtenu s’écrit :

$$K_L a = 4.78 \cdot 10^{-5} N - 7.96 \cdot 10^{-5} \quad (\text{II.12})$$

avec  $K_L a$  (en  $s^{-1}$ ) et  $N$  (en  $rpm$ ).

Ce modèle (i.e II.12) est utilisé lors des premiers essais et il a donné satisfaction pour des vitesses d’agitations inférieures à 650  $rpm$ . Au delà de cette vitesse, la relation II.12 devient de plus en plus inexacte, car en principe le  $K_L a$  évolue de façon légèrement parabolique par rapport à  $N$ . Sur la figure II.7, nous avons reporté les résultats obtenus à l’aide d’un autre protocole expérimental dans un milieu contenant du sulfite ( $SO_3^{-2}$ ) avec un apport continu d’oxygène par injection d’air. Les vitesses d’agitation sont appliquées par échelon avec des amplitudes variantes jusqu’à 100  $rpm$ . Le résultat obtenu pour le  $K_L a$  est quasi semblable au précédent



**Figure II.6** – Tracé du coefficient de transfert d'oxygène en fonction de la vitesse d'agitation

II.12. Les deux allures sont présentées sur la figure II.7.

Enfin, à l'aide des premiers résultats expérimentaux que nous détaillons dans le chapitre expérimentation, nous avons recalculé le  $K_L a$  (figure II.8) en utilisant les mesures réelles de l'oxygène et la reconstruction de la vitesse de consommation obtenue en faisant le bilan entre le taux entrant et le taux sortant. Le modèle obtenu avec la commande *polyfite* de *matlab* est :

$$K_L a = 3.42 \cdot 10^{-7} N^{1.75} \quad (\text{II.13})$$

Le  $K_L a$  est exprimé en  $s^{-1}$  et l'agitation  $N$  en *rpm*. Ce modèle semble plus concrète physiquement car il décrit une évolution parabolique du  $K_L a$  en fonction de la vitesse d'agitation. Aussi, sa plage d'applicabilité est plus large.

### 6.3 Vitesse de consommation : $r_{O_2}$

La vitesse de consommation de l'oxygène est le second paramètre clé décrivant la dynamique de l'oxygène dissout dans le bioréacteur. Son évolution dépend de la croissance de la biomasse qui suit une loi exponentielle durant la fermentation. Plusieurs auteurs ont proposé des modèles

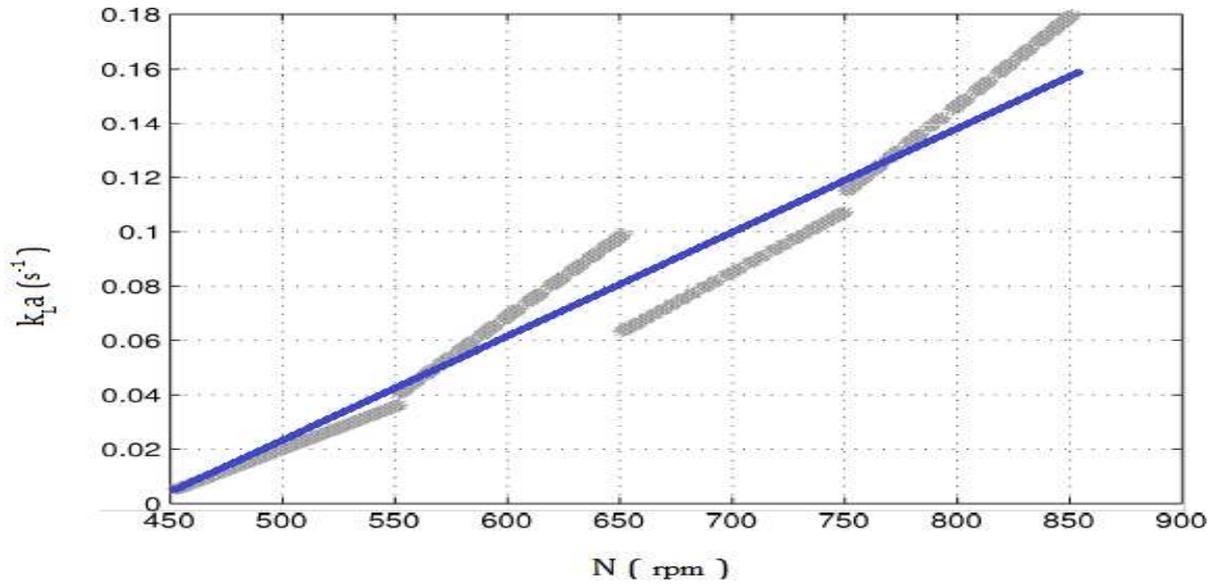


Figure II.7 – Tracé du coefficient de transfert d’oxygène en fonction de la vitesse d’agitation utilisant la méthode des moindres carrés

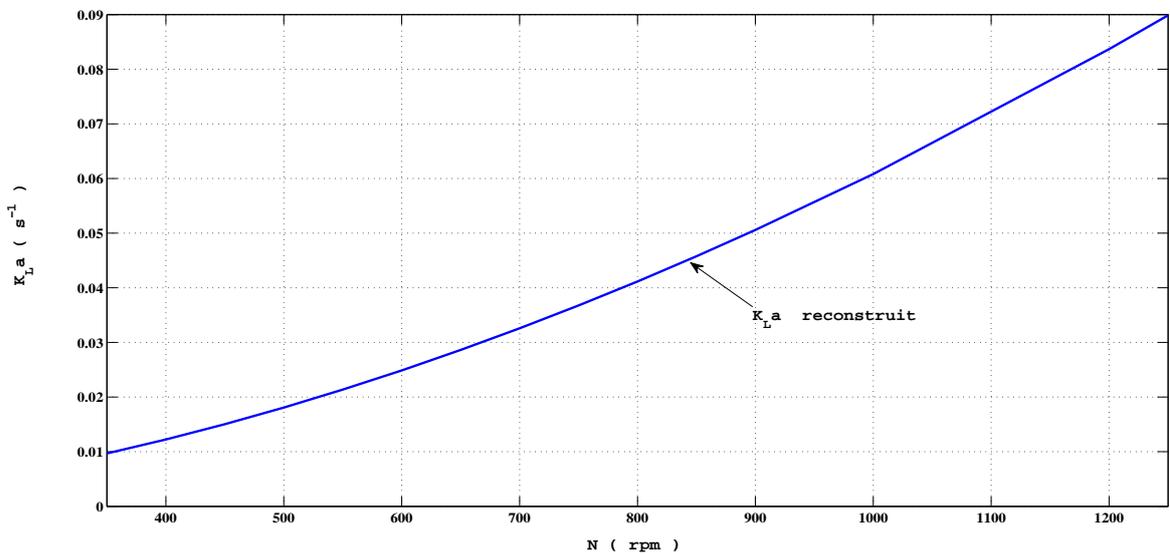


Figure II.8 – Tracé du coefficient de transfert d’oxygène en fonction de la vitesse d’agitation

empiriques, le plus connu étant décrit par la loi de Monod :

$$r_{O_2} = 1250.5 k_0 X(t) \frac{O_2}{12850.5 K_0 + O_2(t)} \quad (\text{II.14})$$

où  $k_0$  et  $K_0$  sont des paramètres cinétiques liés à l'oxygène et  $X(t)$  est la concentration en biomasse.

Cette vitesse peut être aussi modélisée utilisant le rendement de production la biomasse :

$$r_{O_2} = \frac{r_x}{Y_{x/O_2}} = \frac{\mu}{Y_{x/O_2}} \quad (\text{II.15})$$

Cette modélisation empirique étant soumise à de fortes incertitudes, l'un des objectifs de ces travaux consiste à proposer une stratégie de régulation du taux d'oxygène dissout en s'affranchissant d'une quelconque modélisation de ce paramètre. Nous proposons cependant d'en obtenir une estimation via la synthèse d'un observateur non-linéaire qui sera décrit dans le chapitre suivant. Cette estimation pourra permettre de confronter les résultats obtenus aux modèles empiriques encore fortement utilisés dans la communauté du génie des procédés. En l'absence de mesure en temps réel de la concentration de la biomasse, cette validation n'a pas encore été effectuée. En revanche, l'estimation de la vitesse de consommation de l'oxygène sera utilisée dans l'une des stratégies de commande proposées au chapitre 4.

## 7 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons abordé le thème de la modélisation et de l'analyse du comportement d'un bioréacteur lors d'une culture de bactéries *Pseudomonas putida*. Nous avons présenté un schéma réactionnel faisant intervenir tous les réactifs et les éventuels produits afin de pouvoir formuler les équations de bilan au cours de la réaction. Cette formulation conduit en premier lieu à un modèle d'état décrivant l'évolution des concentrations des différents constituants. Ce modèle fait intervenir les vitesses de consommation et de production, le débit d'alimentation et les variations de volume. En second lieu, il a permis d'établir un modèle de connaissance de l'évolution de la concentration en oxygène dissout. Cependant, le modèle d'oxygène comporte des incertitudes relativement fortes liées notamment à la mauvaise connaissance de ses paramètres en particulier le coefficient de transfert  $K_L a$  et la vitesse de consommation. Des modèles empiriques (du  $K_L a$  et de la  $r_{O_2}$ ) traditionnellement utilisés dans la littérature ont été présentés. Ensuite, plusieurs méthodes expérimentales pour l'identification de la relation liant le  $K_L a$  à la vitesse d'agitation sont proposées. La première est une méthode statique, elle est réalisée avec de l'eau et de l'azote. La deuxième utilise les moindres carrés, elle est réalisée en simulant une culture avec de la sulfite. Des vitesses d'agitations de type rampe sont appliquées à la commande. La troisième méthode consiste à une reconstruction du  $K_L a$  à partir de mesures réelles d'une expérimentation. La dernière méthode est plus réaliste,

## Chapitre II. Modélisation des Bioréacteurs

---

elle est obtenue avec des mesures réelles. L'expression obtenue est utilisée pour la synthèse du correcteur.

---

## Références bibliographiques

- [Alba et Calvo 00] M. J. G. ALBA, E. G. CALVO : Characterization of bioreaction processes : Aerobic escherichia coli cultures. Journal of Biotechnology, 84(2):107 – 118, 2000. 36
- [Bastin et Dochain 90] G. BASTIN, D. DOCHAIN : On-line estimation and adaptative control of bioreactors. Elsevier Sc. Publishers, 1990. 35
- [Chen et al. 85] J. CHEN, A. L. TANNAHILL, M. L. SHULER : Design of a system for the control of low dissolved oxygen concentrations : Critical oxygen concentrations for azotobacter vinelandii and escherichia coli. Biotechnology and Bioengineering, 27(2):151–155, 1985. 37
- [Cockshott 92] B. I. COCKSHOTT, A.R. : Modelling a recombinant e. coli fermentation producing bovin somatotropin. Modelling and control of Biotechnical Processes, pages p. 219–222. 1992, 1992. 36
- [Cooper et al. 44] C. M. COOPER, G. A. FERNSTROM, S. A. MILLER : Performance of agitated gas-liquid contactors. Industrial & Engineering Chemistry, 36(6):504–509, 1944. 38
- [Galvanauskas et al. 98] V. GALVANAUSKAS, R. SIMUTIS, N. VOLK, A. LÜBBERT : Model based design of a biochemical cultivation process. Bioprocess Engineering, 18(3):227–234, 1998. 36
- [García-Ochoa et Gómez 98] F. GARCÍA-OCHOA, E. GÓMEZ : Mass transfer coefficient in stirred tank reactors for xanthan gum solutions. Biochemical Engineering Journal, 1(1):1 – 10, 1998. 39
- [Hensirisak 97] P. HENSIRISAK : Scale-up the Use of a Microbubble Dispersion to Increase Oxygen Transfer in Aerobic Fermentation of Baker Yeast. Msc. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997. 38

## Références bibliographiques

---

- [Huang et al. 89] J. HUANG, P. DHULSTER, J.-N. BARBOTIN, D. THOMAS : Effects of oxygen diffusion on recombinant e. coli b (ptg201) plasmid stability, growth rate, biomass production, and enzyme activity in immobilized and free bacteria during continuous culture. Journal of Chemical Technology and Biotechnology, 45(4):259–269, 1989. [37](#)
- [Kaiser et al. 94] D. KAISER, U. ONKEN, I. SATTLER, A. ZEECK : Influence of increased dissolved oxygen concentration on the formation of secondary metabolites by manumycin-producing streptomyces parvulus. Applied Microbiology and Biotechnology, 41(3):309–312, 1994. [37](#)
- [Michel et Miller 62] B. J. MICHEL, S. A. MILLER : Power requirements of gas-liquid agitated systems. AIChE Journal, 8(2):262–266, 1962. [38](#)
- [Monod 42] J. MONOD : Recherches sur la croissance des cultures bactériennes. Hermes, 1942. [35](#), [36](#)
- [Namdev et al. 93] P. K. NAMDEV, N. IRWIN, B. G. THOMPSON, M. R. GRAY : Effect of oxygen fluctuations on recombinant escherichia coli fermentation. Biotechnology and Bioengineering, 41(6):666–670, 1993. [37](#)
- [Rocha 03] I. ROCHA : Model-based strategies for computer-aided operation of a recombinant E. coli Fermentation. Thèse de Doctorat, Universidade do Minho, Portugal, 2003. [33](#), [36](#)
- [Slininger et al. 93] P. SLININGER, R. SILMAN, M. JACKSON : Oxygen delivery requirements of colletotrichum truncatum during germination, vegetative growth, and sporulation. Applied Microbiology and Biotechnology, 39(6):744–749, 1993. [37](#)
- [Sonnleitner et Käppeli 86] B. SONNLEITNER, O. KÄPPELI : Growth of saccharomyces cerevisiae is controlled by its limited respiratory capacity : Formulation and verification of a hypothesis. Biotechnology and Bioengineering, 28(6):927–937, 1986. [33](#)
- [Valentinotti et al. 03] S. VALENTINOTTI, B. SRINIVASAN, U. HOLMBERG, D. BONVIN, C. CANNIZZARO, M. RHIEL, U. von STOCKAR : Optimal operation of fed-batch fermentations via adaptive control of overflow metabolite. Control Engineering Practice, 11(6):665 – 674, 2003. [33](#)
- [Wang et al. 79] D. I. C. WANG, C. L. COONEY, A. L. DEMAINE, P. DUNNILL, A. E. HUMPHREY, M. D. LILLY : Fermentation and Enzyme Technology, 1979. [38](#)

- [Wernersson et Trägårdh 99] E. S. WERNERSSON, C. TRÄGÅRDH : Scale-up of rushton turbine-agitated tanks. Chemical Engineering Science, 54(19):4245 – 4256, 1999. [38](#)
- [Wong et al. 03] I. WONG, M. GARCÍA, I. RODRÍGUEZ, L. RAMOS, V. OLIVERA : Fermentation scale up for production of antigen {K88} expressed in escherichia coli. Process Biochemistry, 38(9):1295 – 1299, 2003. [38](#)

## Références bibliographiques

---

---

---

# Chapitre III

---

## Observateurs pour les systèmes non linéaires

### 1 Introduction

Un observateur ou reconstituteur d'état est un système dynamique en temps continu ou discret qui permet de calculer les estimations des valeurs courantes des états d'un système à partir des informations antérieures sur les entrées et les sorties. L'observateur est donc considéré comme un capteur logiciel et son implémentation permet l'utilisation d'un minimum de capteur physique, ou de faire de la redondance d'information, ou du diagnostique. De plus, il permet d'estimer les grandeurs difficilement accessibles où même non mesurables, d'où son intérêt économique dans le milieu industriel et pratique dans les milieux hostiles. Durant les dernières décennies, la synthèse d'observateur a subi un accroissement très rapide aussi bien pour les systèmes linéaires ([Kalman 60], [Luenberger 71],...) que pour les systèmes non linéaires ([Fridman et al. 08], [Krener et Isidori 83], [Busawon et al. 98], [Bastin et Gevers 88], [Marino et al. 93], [Bornard et Hammouri 91], [Gauthier et Bornard 80], [Barbot et al. 96] ...), avec plusieurs approches différentes.

Ce chapitre est consacré à la synthèse d'observateurs pour une classe particulière de systèmes non linéaires continus comportant des verrous scientifiques majeurs en particulier la discrétisation des mesures en plus des incertains de modèle ou le retard. Il est organisé comme suit. Dans la deuxième section, nous présentons la synthèse de l'observateur grand gain continu. Dans la troisième section, nous proposons de synthétiser un observateur pour la même classe de système dont la sortie est échantillonnée. L'approche adoptée est basée sur la théorie du grand gain classique. Et l'objectif principal de l'observateur consiste à fournir une estimation continue de tous les états du système à partir des mesures discrètes disponible. Dans la quatrième section, nous proposons un observateur pour les systèmes uniformément observables à sortie

échantillonnée et comportant des incertitudes de modélisation. La cinquième section traite le problème du retard intervenant sur les mesures des systèmes. Nous y proposons un observateur composé d'une cascade de sous-systèmes dont le premier estime l'état du système retardé tandis que les autres sous-systèmes restants sont des prédicteurs. Chaque prédicteur estime l'état du sous-système précédent avec un horizon fini afin que le dernier de la cascade reconstruit l'état réel du système. Enfin, nous finissons avec une conclusion.

## 2 Observateur grand gain continu

### 2.1 Introduction

L'observateur grand gain, initié vers les années 90 par [Gauthier et al. 92], a été proposé pour les systèmes non linéaires pouvant se mettre sous la forme canonique de uniformément observable. Son avantage par rapport à d'autres observateurs développés antérieurement est qu'il prend en compte toutes les non-linéarités et les non-stationnarités des systèmes. En plus, les non-linéarités peuvent dépendre des états, mais doivent présenter une structure triangulaire inférieure. L'observateur garantit une bonne estimation des états et le réglage du terme de correction est assuré avec un seul paramètre de synthèse. Dans cette section, nous allons fournir brièvement tous les outils nécessaires pour la synthèse de l'observateur grand gain.

### 2.2 Étude préliminaire

**Definition 2.1 :** *Difféomorphisme*

*Un système est dit difféomorphe à un autre système s'il existe une application bijective différentiable d'un ensemble à un autre dont la bijection réciproque est aussi différentiable. Cette application permet ainsi de réécrire le système sous une forme particulière.*

Considérons les systèmes *MIMO* et difféomorphiques au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t) = Cx(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} ; \quad \varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & & 0_p \\ \vdots & \ddots & I_p & & \\ 0_p & & \ddots & \ddots & 0_p \\ 0_p & & & \ddots & I_p \\ 0_p & \dots & & 0_p & 0_p \end{bmatrix} ; \quad C = [I_p, 0_p, \dots, 0_p] \quad (\text{III.2})$$

L'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  ; les  $x^j \in \mathbb{R}^p$ ,  $j = \{1, \dots, q\}$  sont des blocs d'états ; le vecteur d'entrée  $u(t) \in U$  un sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^s$  et la sortie  $y \in \mathbb{R}^p$  est disponible à chaque instant  $t$ .

Le système III.1 est très particulier car les états  $x^j$  sont tous de même dimension  $p$ . La dimension totale est  $n = p \times q$ . En se référant aux travaux de [Naghshabrizi et al. 08] , le système III.1 est mis sous la forme canonique de Brunovski.

**Definition 2.2 : Observabilité**

*Un système est dit observable lorsque tous les états peuvent être reconstruits à partir de la connaissance de ses entrées et ses sorties.*

Le concept d'observabilité a été introduit par Kalman pour les systèmes linéaires (cf. [Kalman 59]).

**Definition 2.3 : Uniforme observabilité**

*Un système est uniformément observable s'il est observable pour toute entrée.*

On remarque que la classe des systèmes uniformément observables est le prolongement naturel de la classe des systèmes linéaires.

La réalisation de l'observateur grand gain nécessite quelques propriétés : la fonction non-linéaire  $\varphi(u, x)$  doit adopter une structure triangulaire inférieure par rapport à la décomposition de l'état et elle doit vérifier l'hypothèse suivante :

### Hypothèse 2.1 : Fonctions lipschitziennes

Les fonctions  $\varphi^j(u, x)$ ,  $j = 1, \dots, q$ , sont globalement Lipschitziennes par rapport à  $x$  et uniformément en  $u$  si et seulement si :

$$\forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\varphi^i(u, x) - \varphi^i(u, \bar{x})\| \leq L_i \|x - \bar{x}\| \quad (\text{III.3})$$

où  $L = \max(L_i) > 0$  est la constante de Lipschitz associée à  $\varphi$

Le problème de l'observation pour les systèmes dynamiques peut être interprété comme un problème de poursuite de trajectoire dont la condition à remplir pour assurer la convergence est décrite par la propriété suivante :

### Propriété 1 : Condition de convergence d'un observateur

Pour un système (cf. III.1) dont le vecteur d'état est  $x(t)$ , la propriété essentielle que doit remplir l'observateur (cf. III.5) est :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0 \quad (\text{III.4})$$

Cette propriété assure une convergence asymptotique vers zéro de l'erreur d'observation. Nous montrons pour le cas de l'observateur grand gain que la convergence est exponentielle.

## 2.3 Synthèse de l'observateur

L'objectif est ici de synthétiser un observateur d'état de type grand gain qui converge de façon exponentielle et qui garantit la robustesse des estimations malgré la présence des perturbations et des bruits de mesure. Nous allons utiliser les travaux développés dans [Farza et al. 04] où l'auteur a proposé un observateur pour une classe de systèmes non linéaires ayant une structure triangulaire.

Si on considère le système uniformément observable III.1, la dynamique de l'observateur associée est définie comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (\text{III.5})$$

où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  ;  $K = \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ \vdots \\ K^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est la matrice gain choisie de sorte que

$$\bar{A} \triangleq A - KC$$

soit Hurwitz.  $\Delta_\theta$  est une matrice diagonale définie comme suit :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right)$$

$\theta \geq 1$  est le paramètre de synthèse qui permet de déterminer la vitesse de convergence des estimations.

La preuve complète de la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est détaillée dans [Farza et al. 04]. Compte tenu du lien entre cet observateur continu et l'observateur continu-discret, nous allons faire un bref rappel de cette preuve.

**Preuve 1 :**

En exploitant les états de l'observateur et ceux du système, nous pouvons définir l'erreur d'estimation comme suit :  $\tilde{x} = \hat{x} - x$  et sa dynamique s'écrit alors :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - \theta \Delta_\theta^{-1} KC) \tilde{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x) \quad (\text{III.6})$$

Si nous définissons le changement de variable suivant  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$  et nous considérons les égalités suivantes :

$$\Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} = \theta A \text{ and } C \Delta_\theta^{-1} = C \quad (\text{III.7})$$

l'équation III.6 se transforme comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \Delta_\theta (A - \theta \Delta_\theta^{-1} KC) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) \\ \dot{\bar{x}} &= \theta \bar{A} \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

avec  $\bar{A} = A - KC$  Hurwitz, il existe une matrice symétrique  $P$  définie positive et un réel positif  $\mu$  telle que :

$$P \bar{A} + \bar{A}^T P \leq -2\mu P \quad (\text{III.9})$$

Montrons maintenant que la fonction quadratique  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$  est une fonction de Lyapunov associée au système d'erreur III.8. Avec quelques manipulations, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= 2\bar{x}^T P \dot{\bar{x}} \\ &= 2\theta \bar{x}^T P \bar{A} \bar{x} + 2\bar{x}^T P \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) \\ &\leq -2\mu\theta \|\bar{x}\|^2 + 2\bar{x}^T P \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

En considérant l'hypothèse lipschitzienne de la fonction  $\varphi(u, x)$  et sa structure triangulaire, les inégalités suivantes s'obtiennent facilement (cf. [Farza et al. 04], [Hammouri et Farza 03])

$$2\bar{x}^T P \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) \leq 2\sqrt{n}\lambda_M L \|\bar{x}\|^2 \quad (\text{III.11})$$

où  $L$  est la constante de Lipschitz associée à  $\varphi$  et  $\lambda_M$  (resp.  $\lambda_m$ ) est la valeur propre maximale (resp. minimale) de la matrice  $P$ .

En combinant les inégalités (III.10) et (III.11), nous obtenons :

$$\dot{V}(\bar{x}) \leq -(2\mu\theta - 2L\sqrt{n}\lambda_M) \|\bar{x}\|^2 \quad (\text{III.12})$$

Pour satisfaire donc la convergence exponentielle de l'erreur d'observation, il suffit de choisir  $\theta$  tel que

$$-(2\mu\theta - 2L\sqrt{n}\lambda_M) < -\mu\theta \quad \text{i.e.} \quad \theta > \theta_0 \triangleq \frac{2L\sqrt{n}}{\mu} \lambda_M \quad (\text{III.13})$$

Ceci met fin à la démonstration.

## 2.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons rappelé la synthèse d'un observateur grand gain continu pour une classe de systèmes non linéaires particulière. La convergence exponentielle vers zéro de l'observateur a été prouvée dans le cas nominal. Avec un seul paramètre de synthèse dont on connaît très précisément l'action (i.e. position des pôles du système bouclé), l'obtention des performances désirées est particulièrement simple. Malheureusement, les propriétés de cet observateur continu disparaissent lors d'une implémentation sur un système numérique discret. Les sections suivantes vont étendre les propriétés de cet observateur afin de proposer des réponses adéquates pour la même classe de système dont les sorties sont échantillonnées ou retardées.

## 3 Observateur grand gain continu-discret

### 3.1 Introduction

Considérons les systèmes *MIMO* et difféomorphiques au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y_k = Cx(t_k) = x^1(t_k) \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

où l'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , le vecteur d'entrée  $u(t)$ , la matrice  $A$  et la fonction lipschitzienne  $\varphi(u(t), x(t))$  sont définies en III.1 , III.2 et  $y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie mesurée à l'instant  $t_k$ , satisfaisant l'inégalité suivante :

$$0 \leq t_0 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots \text{ avec } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty \quad (\text{III.15})$$

Définissons l'intervalle entre deux instants de mesure borné par  $\tau_m$  et  $\tau_M$  :

$$0 \leq \tau_m \leq \tau_k = t_{k+1} - t_k \leq \tau_M \quad (\text{III.16})$$

Sous cette description, III.14 s'introduit dans la classe des systèmes non-linéaires et uniformément observables.

L'objectif de cette section consiste donc à déterminer un observateur d'état qui garantisse la robustesse des estimations malgré la discrétisation des mesures et la présence des perturbations. Nous cherchons donc, à reconstruire tous les états du système en continu à partir des mesures disponibles aux instants d'échantillonnage  $t_k$ . Pour la synthèse, nous nous basons sur les éléments de la théorie des l'observateur grand-gain continu et nous utilisons l'approche de Lyapunov pour prouver la convergence exponentielle de l'observateur proposé.

La section est organisée comme suit. La première partie présente l'étude préliminaire. Elle permet d'établir un état de l'art. La seconde partie est consacrée à la conception de l'observateur continu-discret. Dans celle-ci, nous présentons deux d'observateurs basés sur le grand gain continu. Le premier, inspiré des travaux de [Raff et al. 08], a une structure impulsive qui consiste à exploiter les erreurs d'estimation aux instants d'échantillonnage et à introduire une fonction particulière dans le terme correctif pour compenser l'erreur entre les instants de mesure. Le deuxième observateur, inspiré de [Karafyllis et Kravaris 09], utilise l'approche avec prédiction de sortie pour calculer l'erreur d'estimation en continu. Une étude comparative entre les deux méthodes est effectuée. Dans la troisième partie, nous présentons un exemple de simulation appliqué sur un modèle de bioréacteur afin de justifier les résultats théoriques et étudier les

performances. Enfin, nous finissons par une conclusion.

## 3.2 Étude préliminaire

**Definition 3.1 :**

- $\tau_M$  désigne la valeur maximale admissible de la période d'échantillonnage III.16 pour laquelle la convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'observation est garantie.
- $\tau_m$  désigne la valeur minimale de la période d'échantillonnage

$$0 \leq \tau_m \leq \tau_k = t_{k+1} - t_k \leq \tau_M$$

### 3.2.1 État de l'art

La motivation est de proposer une structure générale pour un observateur d'état continu-discret qui garantit la robustesse des estimations malgré la discrétisation des mesures et la présence des perturbations. La méthode adoptée s'appuie sur les techniques de synthèse grand gain. Les matrices et les fonctions définissant le modèle du système sont déclarées dans la section précédente.

Pour la classe des systèmes III.14, le candidat pour l'observateur impulsif continu-discret utilisant l'approche grand gain prend la forme générale suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K F(t) (C\hat{x}(t_k) - y(t_k)), \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.17})$$

où l'erreur  $\hat{x}(t_k) - y(t_k)$  est calculée aux instants d'échantillonnage et la matrice  $F(t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  satisfait la condition suivante  $F(t_k) = I_p$ . Avec cette description, nous retrouvons systématiquement l'observateur grand gain continu aux instants  $t_k$ .

L'équation III.17 donne donc lieu à un ensemble d'observateurs continus-discrets qui diffèrent selon le choix de  $F(t)$ . La justification de cette structure provient du fait que nous souhaitons concevoir un observateur impulsif similaire à celui proposé par [Naghshabrizi et al. 08]. Dans notre cas, le terme correctif est le produit entre un vecteur gain et l'erreur d'estimation de la sortie aux instants  $t_k$  pondéré d'une fonction spécifique notée  $F(t)$ .

Pour exprimer  $F(t)$ , écrivons d'abord la dynamique de l'erreur comme dans les équations III.6 et III.7, alors :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \theta A \bar{x}(t) + \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \theta K F(t) C \bar{x}(t_k) \quad (\text{III.18})$$

### III.3 Observateur grand gain continu-discret

où les paramètres  $\hat{x}(t)$ ,  $K$ ,  $\Delta_\theta$  et  $\theta$  sont définis en III.5.

Si on ajoute et soustrait en même temps le terme suivant  $\theta KC\bar{x}(t)$  sur la partie droite de l'équation ci-dessus, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \theta A\bar{x}(t) + \Delta_\theta(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \theta KF(t)C\bar{x}(t_k) \pm \theta KC\bar{x}(t) \\ &= \theta \bar{A}\bar{x}(t) + \Delta_\theta(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) + \theta Kz(t)\end{aligned}\quad (\text{III.19})$$

où  $\bar{A} = A - KC$  est Hurwitz.

$$z(t) = C\bar{x}(t) - F(t)C\bar{x}(t_k) = \bar{x}^1(t) - F(t)\bar{x}^1(t_k) \quad (\text{III.20})$$

Dans l'équation III.19, nous retrouvons les expressions de l'équation de l'erreur dans le cas continu (cf. III.8) plus un terme supplémentaire avec  $z(t)$  provoqué par le processus de l'échantillonnage. Ce dernier terme engendrera alors des contraintes supplémentaires sur notre observateur notamment sur la période d'échantillonnage maximale admissible.

Notre objectif est maintenant de borner au maximum les variations de la norme de l'erreur  $\|\bar{x}(t)\|$  (cf. III.19) et ceci revient à borner au maximum la norme de  $z(t)$ . Pour cela, calculons la dérivée de  $z(t)$  :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \dot{\bar{x}}^1(t) - \dot{F}(t)\bar{x}^1(t_k) \\ &= \theta\bar{x}^2(t) + \varphi^1(u, \hat{x}^1) - \varphi^1(u, x^1) - (\theta K^1 F(t) + \dot{F}(t))\bar{x}^1(t_k) \\ \|z(t)\| &\leq (\theta + L) \int_{t_k}^t \|\bar{x}(s)\| ds + (\|\bar{x}^1(t_k)\|) \int_{t_k}^t \|\theta K^1 F(s) + \dot{F}(s)\| ds\end{aligned}\quad (\text{III.21})$$

Les variations de la norme de  $z(t)$  dépendent du modèle et de l'intégrale de  $(\theta K^1 F(t) + \dot{F}(t))$  à un facteur  $\bar{x}^1(t_k)$  près. Pour réduire au maximum ces variations, il faut choisir  $F(t)$  solution de l'équation suivante :

$$\theta K^1 F(t) + \dot{F}(t) = 0 \quad , \text{ avec } \quad F(t_k) = I_p \quad (\text{III.22})$$

avec cette hypothèse, l'équation III.21 devient :

$$\dot{z}(t) = \theta\bar{x}^2(t) + \varphi^1(u, \hat{x}^1) - \varphi^1(u, x^1)$$

et l'unique solution de l'équation III.22 est :

$$F(t) = e^{-\theta K^1(t-t_k)} \quad (\text{III.23})$$

Nous utilisons donc cette expression de  $F(t)$  (III.23) pour synthétiser notre observateur impulsif continu-discret. Nous proposons une preuve de la convergence exponentielle de cet observateur dans le cas nominal et nous comparons par la suite la valeur maximale admissible de la période d'échantillonnage  $\tau_M$  avec celle pour  $F(t) = I_p$ .

### 3.2.2 Lemme technique

Dans ce qui suit, un lemme technique est proposé avec sa justification. Ce dernier est utilisé dans la preuve de convergence pour déterminer la condition à satisfaire par la période d'échantillonnage maximale  $\tau_M$ .

**Lemme 3.1 :** *Considérons la fonction  $v : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto v(t) \in \mathbb{R}^+$  dérivable et satisfaisant l'inégalité suivante :*

$$\dot{v}(t) \leq -av(t) + b \int_{t_k}^t v(s)ds \quad , \text{ pour } \forall t \in [t_k, t_{k+1}[ \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.24})$$

où  $0 < t_{k+1} - t_k \leq \tau_M < +\infty$ . Si  $a$  et  $b$  sont des réels positifs tels que

$$\frac{b\tau_M}{a} < 1 \quad (\text{III.25})$$

alors, la fonction  $v$  converge exponentiellement vers zero et vérifie la propriété suivante, i.e.

$$v(t) \leq e^{-\eta(t-t_0)}v(t_0) \quad \text{avec } 0 < \eta = (a - b\tau_M) e^{-a\tau_M} \quad (\text{III.26})$$

#### Preuve 2 :

Pour justifier ce lemme, montrons d'abord que  $v(t) \leq v(t_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[$ . Cette propriété est un passage nécessaire pour aboutir au résultat final III.26.

### III.3 Observateur grand gain continu-discret

---

Si on intègre [III.24](#) entre  $t_k$  et  $t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(t_k) - a \int_{t_k}^t v(s) ds + b \int_{t_k}^t \left( \int_{t_k}^s v(\nu) d\nu \right) ds \\ &\leq v(t_k) - a \int_{t_k}^t v(s) ds + b\tau_M \int_{t_k}^t v(\nu) d\nu \\ v(t) &\leq v(t_k) + (b\tau_M - a) \int_{t_k}^t v(s) ds \end{aligned}$$

sachant que  $b\tau_M - a < 0$  ( i.e. [III.25](#)), alors :

$$v(t) \leq v(t_k) \tag{III.27}$$

car  $v(t) \in \mathbb{R}^+$  ce qui implique que  $\int_{t_k}^t v(s) ds > 0$  et  $(b\tau_M - a) < 0$ .

Pour prouver le résultat [III.26](#), il suffit de combiner les inégalités [III.27](#) et [III.24](#), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &\leq -av(t) + b \int_{t_k}^t v(t_k) ds \\ &\leq -av(t) + b\tau_M v(t_k) \end{aligned} \tag{III.28}$$

En intégrant [III.28](#) entre  $t_k$  et  $t$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} v(t) &\leq e^{-a(t-t_k)} v(t_k) + b\tau_M \int_{t_k}^t e^{-a(t-s)} ds v(t_k) \\ &\leq e^{-a(t-t_k)} v(t_k) + \frac{b\tau_M}{a} \left( 1 - e^{-a(t-t_k)} \right) v(t_k) \\ &\leq g(t) v(t_k) \end{aligned} \tag{III.29}$$

avec  $g(t) \triangleq e^{-a(t-t_k)} \left( 1 - \frac{b\tau_M}{a} \right) + \frac{b\tau_M}{a}$

Montrons maintenant en utilisant l'inéquation [III.29](#) que :

$$g(t) v(t_k) \leq e^{-\eta(t-t_k)} v(t_k) \tag{III.30}$$

où l'expression de  $\eta$  est définie en [III.26](#). Pour cela, il suffit de montrer que la fonction  $\delta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  avec

$$\delta(t) = \left( g(t) - e^{-\eta(t-t_k)} \right) \leq 0 \quad ; \quad \forall t \geq t_k. \tag{III.31}$$

ou de manière équivalente :

$$g(t) \leq e^{-\eta(t-t_k)} \quad ; \quad \forall t \geq t_k$$

Pour prouver la propriété III.31, il suffit de montrer que  $\delta(t)$  est une fonction décroissante sachant que  $\delta(t_k) = 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \dot{g}(t) + \eta e^{-\eta(t-t_k)} \\ &= -a e^{-a(t-t_k)} \left( 1 - \frac{b\tau_M}{a} \right) + \eta e^{-\eta(t-t_k)} \\ &\leq -e^{-a\tau_M} (a - b\tau_M) + \eta = 0 \end{aligned} \tag{III.32}$$

car  $-\eta(t - t_k) < 0$ , ce qui implique que  $e^{-\eta(t-t_k)} < 1$ .

La nullité III.32 est obtenue en exploitant l'expression de  $\eta$  définie en III.26. Ce qui nous permet de déduire que  $g(t) \leq e^{-\eta(t-t_k)}$  ; d'où la justification de l'inégalité III.30.

Enfin, sachant que la fonction  $v(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , alors si on applique la somme d'itérations sur III.30, nous obtenons :

$$v(t) \leq e^{-\eta(t-t_0)} v(t_0) \tag{III.33}$$

Ceci met fin à la preuve de ce lemme.

### 3.2.3 Cas particulier où $F(t) = I_p$

Comme il a été suggéré, une étude du cas particulier où  $F(t) = I_p$  est effectuée dans cette partie. Nous utilisons la description présentée dans l'état de l'art et les résultats du lemme 3.1 pour établir une condition sur la valeur maximale de la période d'échantillonnage. Nous comparons ensuite cette valeur avec celle obtenue dans le cas où  $F(t)$  est une fonction exponentielle (i.e. III.23).

Pour  $F(t) = I_p$ , l'expression de  $z(t)$  dans III.20 devient :

$$z(t) = \bar{x}^1(t) - \bar{x}^1(t_k) \tag{III.34}$$

et sa dérivée s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{\bar{x}}^1(t) \\ &= \theta \bar{x}^2(t) + \varphi^1(u, \hat{x}^1) - \varphi^1(u, x^1) - \theta K^1 \bar{x}^1(t_k) \end{aligned} \tag{III.35}$$

### III.3 Observateur grand gain continu-discret

Si nous remplaçons la variable  $\bar{x}^1(t_k)$  par son expression donnée en III.34 :  $\{\bar{x}^1(t_k) = \bar{x}^1(t) - z^1(t)\}$  alors l'équation III.35 devient :

$$\dot{z}(t) = \theta K^1 z(t) + \theta \bar{x}^2(t) + \varphi^1(u, \hat{x}^1) - \varphi^1(u, x^1) - \theta K^1 \bar{x}^1(t) \quad (\text{III.36})$$

en intégrant cette équation entre  $t$  et  $t_k$  et en utilisant le fait que  $z(t_k) = 0$ , nous pouvons écrire :

$$z(t) = \int_{t_k}^t e^{\theta K^1(t-s)} \left( \theta \bar{x}^2(s) + \varphi^1(u, \hat{x}^1) - \varphi^1(u, x^1) - \theta K^1 \bar{x}^1(s) \right) ds$$

en utilisant l'inégalité des normes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq e^{\theta \|K^1\|(t-t_k)} \int_{t_k}^t \left( \theta \|\bar{x}^2(s)\| + \|\varphi^1(u, \hat{x}^1) - \varphi^1(u, x^1)\| - \theta \|K^1\| \|\bar{x}^1(s)\| \right) ds \\ &\leq e^{\theta \|K^1\|(t-t_k)} \int_{t_k}^t \left( \theta \|\bar{x}(s)\| + L \|\bar{x}(s)\| - \theta \|K^1\| \|\bar{x}(s)\| \right) ds \\ &\leq e^{\theta \|K^1\| \tau_M} \left[ \theta(1 + \|K^1\|) + L \right] \int_{t_k}^t \|\bar{x}(s)\| ds \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Considérons maintenant la fonction quadratique suivante :  $\{ V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x} \}$  où la matrice  $P$  est définie en III.9, alors

$$\|z(t)\| \leq e^{\theta \|K^1\| \tau_M} \frac{\theta(1 + \|K^1\|) + L}{\sqrt{\lambda_m}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds \quad (\text{III.38})$$

$\lambda_m$  est la valeur propre minimale de la matrice  $P$ .

Enfin, pour établir une condition sur  $\tau_M$ , montrons que la dérivée de la fonction quadratique  $V(\bar{x})$  peut s'écrire comme dans l'inéquation III.24 du lemme technique.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= 2\bar{x}^T P \dot{\bar{x}} \\ &= 2\bar{x}^T P (\theta A \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t))) - \theta K C \bar{x}(t_k)) \end{aligned}$$

En utilisant la propriété lipschitzienne de la fonction  $\varphi(u(t), x(t))$  (i.e. III.11) et le fait que

$\bar{A} = A - KC$ , nous pouvons majorer  $\dot{V}(\bar{x})$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\bar{x}) &\leq 2\bar{x}^T(t)P \left( \theta(\bar{A} + KC)\bar{x}(t) - \theta KC\bar{x}(t_k) \right) + 2L\sqrt{n}\lambda_M\|\bar{x}\|^2 \\
 &\leq -2\mu\theta\bar{x}(t) + 2\theta\bar{x}^T(t)PK (C\bar{x}(t) - F(t)C\bar{x}(t_k)) + 2L\sqrt{n}\lambda_M\|\bar{x}\|^2 \\
 &\leq -2\mu\theta\bar{x}(t) + 2\theta\bar{x}^T(t)P (Kz(t)) + 2L\sqrt{n}\lambda_M\|\bar{x}\|^2 \\
 &\leq -\left(2\mu\theta - 2L\sqrt{n}\lambda_M\right) \|\bar{x}\|^2 + 2\theta\bar{x}^T PK \|z(t)\| \\
 &\leq -\left(2\mu\theta - 2L\sqrt{n}\lambda_M\right) \|\bar{x}\|^2 + 2\theta\sqrt{\lambda_M}\sqrt{V(\bar{x}(t))}\|K\|\|z(t)\|
 \end{aligned} \tag{III.39}$$

Si on remplace  $\|z(t)\|$  par son expression donnée en III.38 et le fait que  $-(2\mu\theta - 2L\sqrt{n}\lambda_M) < -\mu\theta$  (cf. III.13), l'inéquation III.39 devient :

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) \leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M}V(\bar{x}(t)) + 2\theta e^{\theta\|K^1\|\tau_M} \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_{min}}} \|K\| \left( \theta(1 + \|K^1\|) + L \right) \sqrt{V(\bar{x}(t))} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds$$

où de manière équivalente :

$$\frac{\dot{V}(\bar{x}(t))}{2\sqrt{V(\bar{x}(t))}} \leq -\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}\sqrt{V(\bar{x}(t))} + \theta e^{\theta\|K^1\|\tau_M} \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_{min}}} \|K\| \left( \theta(1 + \|K^1\|) + L \right) \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds$$

Avec cette formulation, nous retrouvons l'écriture III.24 du lemme technique avec :

$$v(t) = \sqrt{V(\bar{x}(t))} \quad ; \quad a = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M} \geq 0 \quad \text{et} \quad b = \theta e^{\theta\|K^1\|\tau_M} \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_{min}}} \|K\| \left( \theta(1 + \|K^1\|) + L \right) \geq 0$$

Nous pouvons conclure que  $\sqrt{V(\bar{x}(t))}$  converge exponentiellement vers zéro si et seulement si la condition  $\frac{b\tau_M}{a} < 1$  est vérifiée (cf. lemme 3.1). Ceci permet donc de déterminer la valeur maximale admissible de la période d'échantillonnage permettant d'assurer la convergence de l'observateur :

$$\theta e^{\theta\|K^1\|\tau_M} \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_{min}}} \|K\| \left( \theta(1 + \|K^1\|) + L \right) \tau_M < \frac{\mu\theta}{2\lambda_M}$$

où de manière équivalente :

$$\tau_M e^{\theta\|K^1\|\tau_M} < \frac{\mu\sqrt{\lambda_{min}}}{2\lambda_M\sqrt{\lambda_M}\|K\| \left( \theta(1 + \|K^1\|) + L \right)} \tag{III.40}$$

La condition obtenue pour  $\tau_M$  n'est pas très explicite. Dans la section suivante, nous allons mon-

trer qu'en choisissant  $F(t) = e^{-\theta K^1(t-t_k)}$ , nous aurons une condition beaucoup plus accessible et une valeur maximale sur la période d'échantillonnage plus grande.

### 3.3 Synthèse de l'observateur

#### 3.3.1 Forme exponentielle

Dans cette partie, nous proposons une nouvelle technique de synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires dont la sortie est échantillonnée. La conception est basée sur une approche grand gain et utilise la description du système proposée dans l'état de l'art. Ces travaux ont donné suite à une publication (cf. [Farza et al. 13]).

Pour  $F(t) = e^{-\theta K^1(t-t_k)}$ , la dynamique de l'observateur continu-discret proposé pour la classe des systèmes III.14 s'écrit comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{-\theta K^1(t-t_k)} (C\hat{x}(t_k) - y(t_k)), \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.41})$$

Où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ;  $K = \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ \vdots \\ K^q \end{pmatrix}$  est le vecteur gain choisi de sorte que la matrice

$\bar{A} = A - KC$  soit Hurwitz. Les  $K^i$ ,  $i = \{1, \dots, q\}$ , sont des matrices de dimensions  $(p \times p)$ ,  $\Delta_\theta$  est une matrice diagonale définie en III.6 et  $\theta \geq 1$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) est le paramètre de synthèse.

Nous pouvons remarquer que l'observateur III.41 est une recopie du système III.14 plus un terme correctif incluant une fonction exponentielle variable dans le temps indépendamment de l'erreur qui n'est remise à jour qu'aux instants d'échantillonnage  $t_k$ . Pour la preuve de la convergence, nous montrons que si la valeur maximale admissible de la période d'échantillonnage satisfait une certaine condition alors l'observateur converge exponentiellement vers 0.

Mais avant d'énoncer le résultat sous forme de théorème, procédons d'abord à quelques manipulations techniques permettant d'accéder à la condition sur  $\tau_M$ . A partir de cette condition, la preuve de convergence de l'observateur s'établit aisément.

#### Preuve 3 :

Définissons l'erreur d'estimation  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , sa dynamique est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x) - \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C\tilde{x}(t_k) \quad (\text{III.42})$$

en appliquant le changement de variable suivant  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$  et en utilisant les inégalités définies

en III.7, l'équation III.42 devient :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \theta K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \Delta_\theta^{-1} \bar{x}(t_k) \\ &= \theta A \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \theta K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \bar{x}(t_k)\end{aligned}\quad (\text{III.43})$$

Considérons maintenant la fonction quadratique :  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$  où la matrice  $P$  est donnée en III.9. Montrons que  $V(x)$  est une fonction de Lyapunov associée au système d'erreur III.43 :

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}) &= 2\bar{x}^T P \dot{\bar{x}} \\ &= 2\bar{x}^T P \left( \theta A \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \theta K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \bar{x}(t_k) \right)\end{aligned}$$

En considérant l'hypothèse lipschitzienne de la fonction  $\varphi(u(t), x(t))$  (cf. hypothèse 2.1) et sa structure triangulaire, nous pouvons montrer que (cf. [Farza et al. 04], [Hammouri et Farza 03]) :

$$2\bar{x}^T P \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) \leq 2L\sqrt{n}\lambda_M \|\bar{x}\|^2$$

où  $L$  est la constante de Lipschitz associée à  $\varphi$  et  $\lambda_M$  (resp.  $\lambda_m$ ) est la plus grande valeur propre (resp. la plus petite valeur propre) de la matrice  $P$ . Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}) &\leq 2\bar{x}^T P \left( \theta A \bar{x} - \theta K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \bar{x}(t_k) \right) + 2L\sqrt{n}\lambda_M \|\bar{x}\|^2 \\ &\leq 2\bar{x}^T P \left( \theta (\bar{A} + KC) \bar{x} - \theta K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \bar{x}(t_k) \right) + 2L\sqrt{n}\lambda_M \|\bar{x}\|^2 \\ &\leq -2\mu\theta \bar{x} + 2\theta \bar{x}^T P \left( KC \bar{x} - K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \bar{x}(t_k) \right) + 2L\sqrt{n}\lambda_M \|\bar{x}\|^2 \\ &\leq -2\mu\theta \bar{x} + 2\theta \bar{x}^T P (Kz(t)) + 2L\sqrt{n}\lambda_M \|\bar{x}\|^2 \\ &\leq -2\mu\theta \|\bar{x}\|^2 + 2\theta \bar{x}^T P Kz(t) + 2L\sqrt{n}\lambda_M \|\bar{x}\|^2 \\ &\leq -\left(2\mu\theta - 2L\sqrt{n}\lambda_M\right) \|\bar{x}\|^2 + 2\theta \bar{x}^T P Kz(t)\end{aligned}\quad (\text{III.44})$$

En choisissant  $\theta$  comme dans le cas continu (i.e. III.13), alors

$$-\left(2\mu\theta - 2L\sqrt{n}\lambda_M\right) < -\mu\theta$$

où  $\mu$  est un réel positif défini en III.9. L'inégalité III.44 devient :

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) \leq -\mu\theta \|\bar{x}(t)\|^2 + 2\theta \bar{x}^T P Kz(t)$$

avec

$$z(t) = C\bar{x}(t) - e^{-\theta K^1(t-t_k)} C\bar{x}(t_k) = \bar{x}^1(t) - e^{-\theta K^1(t-t_k)} \bar{x}^1(t_k)$$

L'objectif revient maintenant à borner  $z(t)$

$$\dot{z}(t) = \dot{\bar{x}}^1(t) + \theta K^1 e^{-\theta K^1(t-t_k)} \bar{x}^1(t_k) = \theta \bar{x}^2(t) + \varphi^1(u, \hat{x}^1(t)) - \varphi^1(u, x^1(t)) \quad (\text{III.45})$$

Si nous intégrons cette équation entre  $t_k$  et  $t$  sachant qu'aux instants d'échantillonnage,  $z(t_k) = 0$ , nous pouvons déduire l'équation dynamique de  $z(t)$  :

$$z(t) = \int_{t_k}^t (\theta \bar{x}^2(s) + \varphi^1(u(s), \hat{x}^1(s)) - \varphi^1(u(s), x^1(s))) ds \quad (\text{III.46})$$

Utilisons maintenant les inégalités des normes :

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \int_{t_k}^t (\theta \|\bar{x}^2(s)\| + \|\varphi^1(u, \hat{x}^1(s)) - \varphi^1(u, x^1(s))\|) ds \\ &\leq \int_{t_k}^t (\theta \|\bar{x}^2(s)\| + L \|\bar{x}(s)\|^2) ds \\ &\leq (\theta + L) \int_{t_k}^t \|\bar{x}(s)\| ds \end{aligned}$$

Avec l'expression ci-dessus, nous pouvons poursuivre avec la dérivée de  $V(t)$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}(t)) &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M} V(\bar{x}(t)) + 2\theta\sqrt{\lambda_M}\sqrt{V(\bar{x}(t))}\|K\|\|z(t)\| \\ &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M} V(\bar{x}(t)) + 2\theta\sqrt{\lambda_M}\sqrt{V(\bar{x}(t))}\|K\|(\theta + L) \int_{t_k}^t \|\bar{x}(s)\| ds \\ &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M} V(\bar{x}(t)) + 2\theta\sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_{min}}}\|K\|(\theta + L)\sqrt{V(\bar{x}(t))} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds \end{aligned}$$

Ou de manière équivalente :

$$\frac{\dot{V}(\bar{x}(t))}{2\sqrt{V(\bar{x}(t))}} \leq -\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}\sqrt{V(\bar{x}(t))} + \theta\sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_{min}}}\|K\|(\theta + L) \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds \quad (\text{III.47})$$

Avec cette formulation, l'inégalité III.47 est mise sous la forme III.24 du lemme technique avec :

$$v(t) = \sqrt{V(\bar{x}(t))} \quad ; \quad a = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M} \geq 0 \quad \text{et} \quad b = \theta\sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_{min}}}\|K\|(\theta + L) \geq 0$$

La convergence exponentielle vers zéro de  $\sqrt{V(\bar{x}(t))}$  est assurée si et seulement si la condition  $\frac{b\tau_M}{a} < 1$  est vérifiée (cf. lemme 3.1). Et cette relation permet d'obtenir aisément la valeur maximale admissible de la période d'échantillonnage :

$$\theta \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_{min}}} \|K\| (\theta + L) \tau_M < \frac{\mu\theta}{2\lambda_M}$$

Ce qui revient à

$$\tau_M < \frac{\mu\sqrt{\lambda_{min}}}{2\lambda_M\sqrt{\lambda_M}\|K\|(\theta + L)} \quad (\text{III.48})$$

Ceci met donc fin à la démonstration.

**Remarque 3.1** La relation III.48 définit la condition à satisfaire par la période d'échantillonnage pour que l'observateur continu-discret converge exponentiellement vers zéro. Cependant, nous pouvons constater que  $\tau_M$  est inversement proportionnel à  $\theta$ . Ce qui implique que le choix de la dynamique de l'observateur sera toujours limité. En outre, la condition sur  $\tau_M$  peut apparaître très restrictive à cause des majorations apportées dans la preuve et des valeurs un peu plus élevées que  $\tau_M$  peuvent fonctionner lors des mises en œuvre .

**Remarque 3.2** En comparant la condition III.48 avec celle obtenue dans le cas où  $F(t) = I_n$ , elle apparaît clairement plus explicite. En plus avec III.40, la borne est appliquée sur  $(\tau_M e^{\theta\|K^1\|\tau_M})$  sachant que  $(e^{\theta\|K^1\|\tau_M} > 1)$  car  $(\theta\|K^1\|\tau_M > 0)$ . L'observateur continu-discret où  $F(t) = e^{-\theta K^1(t-t_k)}$  présente alors une valeur maximale de la période d'échantillonnage plus élevée que celui avec  $F(t) = I_p$ .

**Theorème 3.1 :**

Pour toutes entrées bornées, il existe un  $\theta_0 \geq 0$ , tel que pour  $\forall \theta > \theta_0$  il existe  $\tau_M > 0$  et  $\chi(\theta) > 0$  avec  $\tau_M < \frac{1}{\chi(\theta)}$  tel que pour  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $t_{k+1} - t_k \leq \tau_M$ , alors l'erreur d'observation,  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  où  $\hat{x}(t)$  et  $x(t)$  sont respectivement les états des systèmes III.41 et III.14, converge exponentiellement vers zéro.

Une large démonstration de ce théorème utilisant le lemme de Grönwall est proposé dans [Farza et al. 13]. Mais il est important de souligner que la valeur maximale de la période d'échantillonnage proposé dans ce mémoire avec l'utilisation du lemme 3.1 est beaucoup plus explicite.

### 3.3.2 Forme avec prédiction de sortie

Dans cette partie, nous proposons de réécrire notre observateur impulsif continu discret sous forme prédictive afin de se conformer à la littérature. La synthèse s'appuie sur la théorie de l'observateur grand gain et elle consiste à introduire une variable de prédiction qui reconstruit la sortie discrète du système en continu. La classe des systèmes considérés reste toujours la même que celle définie dans la section précédente à savoir que les systèmes peuvent s'écrire sous la forme canonique uniformément observable de Brunovski et ils remplissent toutes les conditions structurelles imposées sur les matrices et les fonctions en particulier III.2, III.15 et l'hypothèse lipschitzienne sur  $\varphi$ . La dynamique de l'observateur proposée s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K (C\hat{x}(t) - \omega(t)) \quad (\text{III.49})$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \hat{x}^2(t) + \varphi^1(u(t), \hat{x}^1(t)) & ; \text{ pour } \forall t \in [t_k, t_{k+1}[ \\ \text{avec } \omega(t_k) = Cx(t_k) = y(t_k) \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

où  $\hat{x}(t)$  et  $K$  sont définis précédemment et  $\theta \geq 1$  est le paramètre de synthèse. Il apparaît clairement que la structure de l'observateur III.49 est similaire à celle de l'observateur grand gain continu traditionnel (cf. III.5). Seule la sortie  $y(t)$  est remplacée par la variable de prédiction  $w(t)$  qui reconstruit la trajectoire de la sortie entre deux instants de mesure (cf. III.50). Cette variable est remise à jour à chaque instant d'échantillonnage  $t_k$ . De plus, la dynamique de  $w(t)$  est semblable, à défaut du terme correctif, à celle de l'estimation de la sortie correspondant à  $\hat{x}^1(t)$  qui s'écrit comme suit

$$\dot{\hat{x}}^1(t) = \hat{x}^2(t) + \varphi^1(u(t), \hat{x}^1(t)) - \theta K^1 (C\hat{x}(t) - \omega(t)) \quad (\text{III.51})$$

**Remarque 3.3 :**

*Pour prouver la convergence de l'observateur III.49, nous allons montrer que ce dernier est équivalent à l'observateur impulsif continu-discret proposé en III.41.*

*Considérons les dynamiques de l'état observé  $\hat{x}^1(t)$  et de la prédiction  $w(t)$  et définissons  $\xi(t)$  comme étant l'erreur entre  $\hat{x}^1(t)$  et  $w(t)$ , alors :*

$$\xi(t) = \hat{x}^1(t) - w(t) = C\hat{x}(t) - w(t) \quad (\text{III.52})$$

En utilisant les équations III.50 et III.51, la dérivée de  $\xi(t)$  s'écrit aisément :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \dot{\hat{x}}^1(t) - \dot{w}(t) = -\theta K^1 (C\hat{x}(t) - \omega(t)) \\ &= -\theta K^1 \xi(t)\end{aligned}\tag{III.53}$$

$\dot{\xi}(t)$  est donc égale à une constante multipliée par le signal lui-même. Si nous l'intégrons entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$ , nous obtenons :

$$\xi(t) = e^{-\theta K^1(t-t_k)} \xi(t_k)$$

sachant que  $w(t_k) = x_1(t_k) = y(t_k)$  alors :

$$\xi(t_k) = \hat{x}_1(t_k) - w(t_k) = \hat{x}_1(t_k) - x_1(t_k)$$

Alors, nous retrouvons l'expression  $\xi(t)$  en fonction de l'erreur d'observation aux instants  $t_k$

$$\xi(t) = e^{-\theta K^1(t-t_k)} (\hat{x}_1(t_k) - x_1(t_k))$$

Enfin, si nous remplaçons  $C\hat{x}(t) - w(t)$  par l'expression de  $\xi(t)$  dans la dynamique de l'observateur III.49, nous retrouvons celle de l'observateur impulsif continu-discret proposée en III.41.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{-\theta K^1(t-t_k)} (C\hat{x}(t_k) - y(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}$$

Cette équation correspond bien à l'observateur non-linéaire continu-discret utilisant la fonction matricielle  $F(t) = e^{-\theta K^1(t-t_k)}$ . Ces deux observateurs s'écrivent de manière différente mais nous venons de montrer qu'ils sont équivalents. Donc, l'observateur III.49 converge identiquement de manière exponentielle lorsque la valeur maximale de la période d'échantillonnage satisfait la condition établie en III.48.

La seule différence que nous pouvons noter entre les deux observateurs proposés est au niveau de leur mise en œuvre. Il apparaît clairement que l'observateur III.41 est plus facile à implémenter sur un procédé car il utilise une seule intégration.

### 3.4 Exemple de simulation

La synthèse et les performances de l'observateur continu-discret proposé sont illustrées sur un modèle de Fermentation dans un bioréacteur. Le processus est réalisé avec des micro-

organismes qui se reproduisent en consommant du substrat carboné dans un milieu liquide. Les deux composants de la réaction, les micro-organismes et le substrat, sont supposés être présents en faibles concentrations dans le réacteur afin que l'hypothèse de maintenir le volume constant soit réalisée. Cependant, la culture considérée contient uniquement une seule croissance en biomasse  $x_1$  et un seul nutriment en substrat  $x_2$ . La culture est censée être continue avec un taux de dilution  $u(t)$  et une alimentation en substrat  $S_{in}(t)$ . Le taux de croissance spécifique est supposé suivre le modèle de Contois [Bailey et Ollis 86]. Le modèle mathématique de la dynamique du procédé est décrit par les équations d'équilibre des deux masses associées respectivement à  $x_1(t)$  et à  $x_2(t)$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \frac{\mu^* x_1(t) x_2(t)}{K_c x_1(t) + x_2(t)} - u(t) x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{-k \mu^* x_1(t) x_2(t)}{K_c x_1(t) + x_2(t)} + u(t) (s_{in}(t) - x_2(t)) \\ y(t_k) &= x_1(t_k) \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

$x_1(t)$  et  $x_2(t)$  désignent respectivement les concentrations en biomasse et en substrat,  $\mu^*$  et  $K_c$  sont des paramètres suivants la loi de Contois tandis que  $k$  est un coefficient de rendement. Les mesures de la concentration des cellules sont censées être disponibles aux instants  $t_k$ . L'objectif est donc de synthétiser un observateur continu-discret capable de fournir les estimations en continu de la concentration de la biomasse ainsi que celle du substrat à partir des mesures discrètes disponibles.

Le système III.54 a été étudié dans [Gauthier et al. 92] et les auteurs ont proposé un ensemble compact  $X \in \mathbb{R}^2$  qui est positivement invariant par la dynamique de III.54. Avec le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \Phi(X) \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \Phi(X) = \begin{pmatrix} \Phi_1(X) = x_1 \\ \Phi_2(X) = \frac{\mu^* x_1 x_2}{K_c x_1 + x_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

le système III.54 peut s'écrire sous la forme canonique de Brunovski.

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - u(t) z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{\partial \Phi_2(X)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial \Phi_2(X)}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) \\ y(t_k) &= z_1(t_k) \end{cases}$$

où de manière équivalente :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Az(t) + \varphi(u(t), z(t)) \\ y(t_k) &= Cz(t_k) \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u(t), z(t)) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, z) \\ \varphi^2(u, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t)z_1(t) \\ \frac{\partial \Phi_2(X)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial \Phi_2(X)}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

et 
$$\varphi_2 = \frac{\mu^* x_1}{(K_c x_1 + x_2)^2} \left( u(t) (K_c x_1 (s_{in} - x_2) - x_2^2) + \frac{\mu^* x_2 (x_2^2 - k K_c x_1^2)}{K_c x_1 + x_2} \right)$$

Par conséquent, nous pouvons proposer un observateur continu-discret pour le système III.55 :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z}(t) + \varphi(u(t), \hat{z}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{-\theta K^1(t-t_k)} (C\hat{z}(t_k) - y(t_k)) \\ \hat{y}(t_k) &= C\hat{z}(t_k) \end{cases} \quad (\text{III.56})$$

où  $\hat{z}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \frac{\mu^* \hat{x}_1 x_2}{K_C \hat{x}_1 + \hat{x}_2} \end{pmatrix}$  ; la matrice  $K$  est choisie de sorte que les valeurs propres de

$A - KC$  soient situés en  $-1$  ; ce qui implique que  $K = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}$$

$\theta$  est le paramètre de synthèse.

**Remarque 3.4 :**

Le système III.55 est une transformation du système III.54 par le biais de la fonction difféomorphe  $z = \Phi(x)$ . Donc pour écrire l'observateur sous la forme du système initial III.54, on applique la transformation inverse suivante :  $x = \Phi^{-1}(z)$  :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) &= f(\hat{X}(t)) + G(\hat{X}(t)) u(t) - \theta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X}(\hat{X}(t)) \right)^{-1} \Delta_\theta^{-1} K e^{-\theta K^1(t-t_k)} (C\hat{X}(t_k) - y(t_k)) \\ \hat{y}(t_k) &= C\hat{X}(t_k) \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

### III.3 Observateur grand gain continu-discret

$$\text{où } \hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}, \quad f(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\mu^* \hat{x}_1(t) \hat{x}_2(t)}{K_c \hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)} & \frac{-\mu^* k \hat{x}_1(t) \hat{x}_2(t)}{K_c \hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)} \end{pmatrix}^T$$

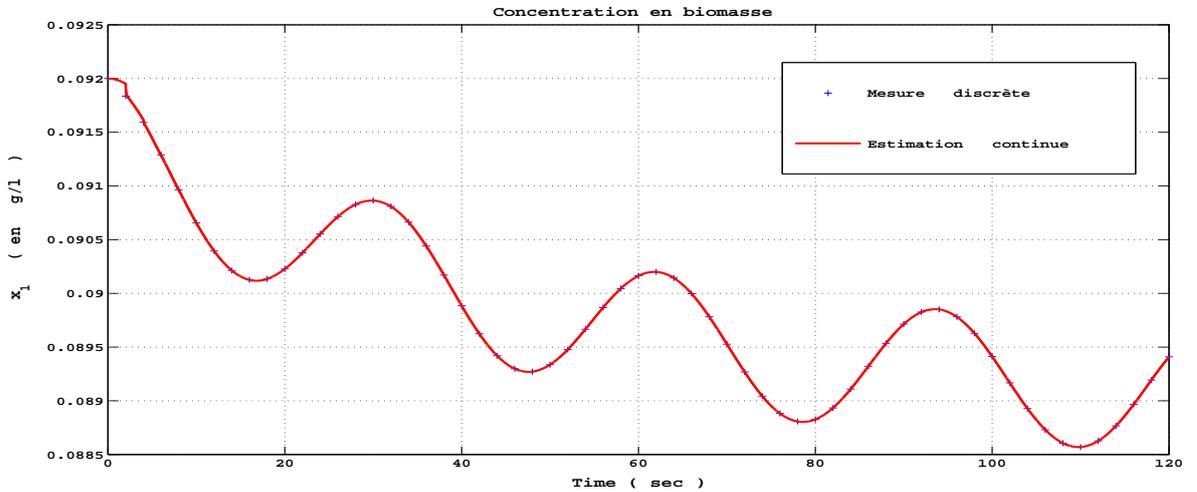
$$\text{et } g(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} -u(t) \hat{x}_1(t) \\ u(t) (S_{in} t - \hat{x}_2(t)) \end{pmatrix}$$

Des simulations ont été réalisées sous l'environnement *Matlab – Simulink* en supposant une valeur constante de la période d'échantillonnage. Les paramètres du modèle sont les suivants :

$$\mu^* = 1(\text{min}^{-1}) ; K_c = 1 ; k = 1 ; S_{in} = 0.1(\text{kg.m}^{-3}) \text{ et}$$

$$u(t) = 0.08(1 + \sin(0.2t))(\text{min}^{-1})$$

Le point d'équilibre du système III.54 est obtenu en  $(x_{1,0}, x_{2,0}) = (0.092, 0.008)$ . Les tests de l'observateur ont été effectués à l'aide des pseudo-mesures émises par la simulation du système III.54 avec le point d'équilibre comme condition initiale. L'état initial de l'observateur correspond à la concentration en substrat à l'état stationnaire perturbée de 50%. Le paramètre de synthèse est choisi  $\theta = 1$ . L'erreur d'estimation converge vers 0 tant que  $\tau \leq 5.5$ . Les résultats de simulations sont présentés sur les figures III.1 et III.2.



**Figure III.1** – Estimation continue des mesures de la biomasse pour  $\tau = 2$  secondes

Les mesures de la concentration en biomasse  $x_1$  disponibles aux instants  $t_k$  sont représentées sur la figure III.1. Elles sont comparées aux estimations continues délivrées par l'observateur continu-discret III.56. La figure III.2 présente les résultats associés au substrat. Nous pouvons remarquer aisément que les erreurs d'estimation aux instants de mesures  $\tilde{x}_1(t_k)$  et  $\tilde{x}_2(t_k)$  convergent très rapidement vers zéro. Ceci confirme donc les résultats théoriques

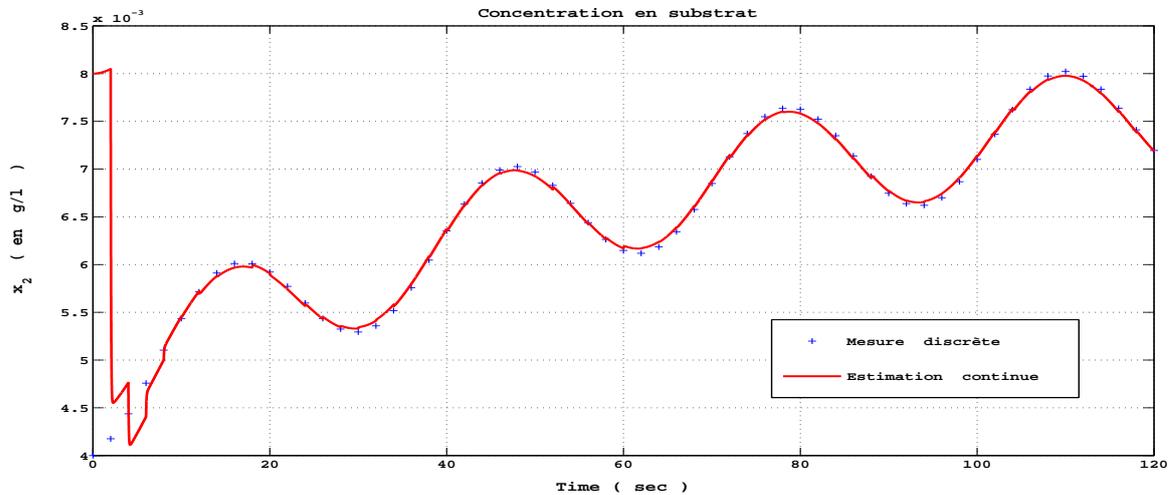


Figure III.2 – Estimation continue des mesures du substrat pour  $\tau = 2$  secondes

### 3.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons résolu le problème de synthèse d’observateur pour les systèmes non linéaires à sortie échantillonnée qui peuvent se mettre sous la forme canonique uniformément observable de Brunovski. Nous avons proposé deux techniques de conception différentes utilisant toutes les deux l’approche grand gain continu. Nous avons montré par la suite que les deux observateurs obtenus sont équivalents. Le premier observateur est proposé avec une seule équation dynamique. Le terme correctif dépend de l’erreur exprimée aux instants d’échantillonnage, d’un vecteur gain et d’une fonction matricielle variable avec le temps et permettant de compenser l’erreur entre les mesures. Le deuxième observateur est proposé sous une forme d’association observateur prédicteur. Il fait apparaître une variable de prédiction qui reconstruit la trajectoire de la sortie entre les instants d’échantillonnage et permet donc de calculer l’erreur d’estimation en continu. La preuve de la convergence exponentielle des observateurs est détaillée et elle est obtenue avec une contrainte sur la période d’échantillonnage  $\tau_M$  et le paramètre de synthèse  $\theta$ . Leurs performances ont été testées en simulation et les résultats obtenus sont satisfaisants.

## 4 Observateur pour les systèmes non linéaires incertains avec sortie échantillonnée

### 4.1 Introduction

La réalité physique d'un système est toujours complexe et ces complexités se traduisent souvent par des comportements non linéaires. Dans le cas où il est possible de modéliser les systèmes, les équations dynamiques dépendent dans la plupart du temps de paramètres dont les valeurs sont souvent mal connues. De plus, dans le domaine du génie des procédés, les principes physiques des capteurs entraînent parfois une discrétisation des mesures. Pour contourner cette difficulté, nous proposons de synthétiser un observateur continu-discret capable de fournir une estimation en temps réel de tous les paramètres clés pour la classe des systèmes non linéaires incertains et uniformément observables. Nous nous limiterons à l'hypothèse des incertitudes inconnues et bornées ( $\varepsilon(t)$ ). La preuve de la convergence s'appuie sur les travaux de [Bouraoui et al. 14] où l'auteur propose un observateur continu-discret pour la classe des systèmes non-linéaires incertains uniformément observables dont la sortie est discrète et bruitée.

Considérons les systèmes *MIMO* et difféomorphiques au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y_k = Cx(t_k) = x^1(t_k) \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

où l'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , le vecteur d'entrée  $u(t)$ , la matrice  $A$  et la fonction lipschitzienne  $\varphi(u(t), x(t))$  sont définies en III.2;

$$B = \begin{pmatrix} 0_p \\ \vdots \\ 0_p \\ I_p \end{pmatrix}$$

$y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie disponible à l'instant  $t_k$ , satisfaisant les inégalités suivantes :

$$0 \leq t_0 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots \text{ avec } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$$

L'intervalle entre deux instants de mesure est défini par :  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ .

La fonction  $\varepsilon(t)$  représente l'ensemble des incertitudes et elle apparaît uniquement sur la dernière ligne des équations d'état. Elle satisfait l'hypothèse suivante

**Hypothèse 4.1** : La fonction  $\varepsilon(t)$  est inconnue et bornée, i.e.

$$\exists \delta > 0 \ ; \ \forall t \geq 0 \ : \ \|\varepsilon(t)\| \leq \delta$$

On supposera naturellement que la valeur de la période d'échantillonnage est bornée par  $\tau_m$  pour la valeur minimale et  $\tau_M$  pour la valeur maximale, i.e.

$$0 < \tau_m \leq \tau_k = t_{k+1} - t_k \leq \tau_M \ , \ \forall k \geq 0 \quad (\text{III.59})$$

La classe des systèmes III.58 peut sembler très restrictive, car tous les sous blocs  $x^k$  de  $x(t)$  sont supposés avoir la même dimension  $q$ . Il a cependant été démontré que le système III.58 est de la forme normale qui caractérise la classe des systèmes uniformément observables ou des systèmes qui peuvent se mettre sous la forme III.58 par l'intermédiaire d'une application injective ([Hammouri et Farza 03] ou dans [Farza et al. 08]). La seconde remarque est liée à l'hypothèse lipschitzienne de la fonction  $\varphi(x, u)$  qui n'est généralement satisfaite que localement. Dans le cas où la trajectoire de l'état  $x(t)$  se situe dans un ensemble borné  $\Omega$ , nous pouvons étendre les non linéarités  $\varphi(x, u)$  de telle sorte que l'extension devienne globalement lipschitzienne sur l'ensemble  $\mathbb{R}^n$ . On peut se référer à [Shim et al. 01] ou [Andrieu et Praly 06] pour plus de détails sur la façon de démontrer le prolongement lipschitzien de manière globale dans le cadre d'un observateur d'état.

La section est organisée comme suit. La première partie traite de l'observateur des systèmes non linéaires continus incertains. La deuxième partie présente un lemme technique. La troisième partie détaille la synthèse de l'observateur continu-discret pour les systèmes non linéaires incertains à sortie échantillonnée. Elle expose également la preuve de la convergence exponentielle de l'observateur. Dans la quatrième partie, nous illustrons la théorie à travers le modèle du bioréacteur donné dans le chapitre précédent. Enfin, nous finissons par une conclusion.

## 4.2 Synthèse pour les systèmes continus

Dans cette section, nous proposons de détailler l'étape primordiale de la synthèse d'observateur pour la classe des systèmes III.58 dans le cas où la sortie est continue, i.e.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y(t) = Cx(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

### III.4 Observateur pour les systèmes non linéaires incertains avec sortie échantillonnée

---

Pour la classe des systèmes III.60, l'observateur continu suivant a été proposé dans [Farza et al. 04]

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta\Delta_\theta^{-1}K(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (\text{III.61})$$

où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  ;  $K = \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ \vdots \\ K^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est la matrice de gain. Elle est choisie de sorte que la matrice  $\{\bar{A} \triangleq A - KC\}$  soit Hurwitz.  $\Delta_\theta$  est une matrice diagonale, elle est définie comme suit :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( I_p, \frac{1}{\theta}I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}}I_p \right)$$

$\theta \geq 1$  est le paramètre de synthèse.

Nous pouvons constater que la dynamique de cet observateur est identique à celle proposée pour les systèmes continus sans incertitude (III.5). Dans le cas sans incertitude, [Farza et al. 04] ont montré que l'erreur d'estimation de l'observateur III.5 converge exponentiellement vers zéro. En revanche, la présence d'incertitude entraîne la convergence vers une boule dont le rayon dépend des paramètres de synthèse et des incertitudes.

#### Theorème 4.1 :

Supposons que le système III.60 satisfait les hypothèses (hypothèse 2.1 et hypothèse 4.1), alors

$$\exists \theta_0 > 0, \exists \lambda > 0; \exists \mu_\theta > 0 \quad \text{tels que } \forall \theta \geq \theta_0; \forall u \in U; \forall \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$$

nous avons :

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \lambda\theta^{q-1}e^{-\mu_\theta t}\|\hat{x}(0) - x(0)\| + M_\theta\delta \quad (\text{III.62})$$

où  $x(t)$  est la trajectoire d'état du système III.60 associée à l'entrée  $u(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  est une trajectoire de l'observateur III.61 associée à  $u(t)$  et à  $y(t)$ ,  $\delta$  est la borne supérieure de  $\|\varepsilon(t)\|$  et

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu_\theta = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} M_\theta = 0 \quad (\text{III.63})$$

Les détails de la preuve de convergence exponentielle de l'erreur d'observation vers une boule sont proposés dans [Farza et al. 04]. Mais pour plus de clarté et compte tenu du lien par rapport à l'observateur continu discret, nous proposons un bref rappel sur les grandes lignes de la démonstration.

### Preuve 4 :

Si on définit l'erreur d'observation par  $\tilde{x} = \hat{x} - x$ , sa dynamique s'écrit comme suit

$$\dot{\tilde{x}} = (A - \theta \Delta_\theta^{-1} KC) \tilde{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x) - B\varepsilon(t) \quad (\text{III.64})$$

En appliquant le changement de variable  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$  dans l'équation III.64 et en utilisant les inégalités III.7, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \Delta_\theta (A - \theta \Delta_\theta^{-1} KC) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \Delta_\theta B\varepsilon(t) \\ \dot{\bar{x}} &= \theta \bar{A} \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \Delta_\theta B\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

Considérons maintenant la fonction quadratique :  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$  où  $P$  est une matrice symétrique définie positive (i.e. III.9). Montrons que  $V(x)$  est une fonction de Lyapunov candidate pour le système d'erreur III.65 :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= 2\theta \bar{x}^T P \bar{A} \bar{x} + 2\bar{x}^T P \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - 2\bar{x}^T P \Delta_\theta B\varepsilon(t) \\ &\leq -2\mu\theta \|\bar{x}\|^2 + 2\bar{x}^T P \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - 2\bar{x}^T P \Delta_\theta B\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

Avec l'hypothèse lipschitzienne de la fonction  $\varphi(u(t), x(t))$  et sa structure triangulaire, nous pouvons montrer que pour  $\theta > 1$  (cf. [Farza et al. 04], [Hammouri et Farza 03]) :

$$2\bar{x}^T P \Delta_\theta (\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) \leq 2\sqrt{n} \lambda_M L \|\bar{x}\|^2 \quad (\text{III.67})$$

où  $L$  est la constante de Lipschitz associée à  $\varphi$  et  $\lambda_M$  (resp.  $\lambda_m$ ) est la plus grande valeur propre (resp. la plus petite valeur propre) de la matrice  $P$ .

De façon similaire, en supposant l'hypothèse 4.1 concernant les bornes des incertitudes et la structure de  $B$  et de  $\Delta_\theta$ , nous avons :

$$2\bar{x}^T P \Delta_\theta B\varepsilon(t) \leq 2 \frac{\delta \sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}} \sqrt{V(\bar{x})} \quad (\text{III.68})$$

### III.4 Observateur pour les systèmes non linéaires incertains avec sortie échantillonnée

---

Alors, en combinant les inéquations III.66, III.67 et III.68, nous obtenons :

$$\dot{V}(\bar{x}) \leq -2(\mu\theta - \sqrt{n}\lambda_M L)\|\bar{x}\|^2 + 2\frac{\delta\sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}}\sqrt{V(\bar{x})} \quad (\text{III.69})$$

Si nous choisissons  $\theta$  satisfaisant la condition III.13 (obtenu pour l'observateur continu sans incertitude) :

$$\theta > \theta'_0 \triangleq \frac{2L\sqrt{n}\lambda_M}{\mu}$$

l'inéquation III.69 devient :

$$\dot{V}(\bar{x}) \leq -\mu\theta\|\bar{x}\|^2 + 2\frac{\delta\sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}}\sqrt{V(\bar{x})} \leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M}V(\bar{x}) + 2\frac{\delta\sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}}\sqrt{V(\bar{x})}$$

où de manière équivalente

$$\frac{d}{dt} \left( \sqrt{V(\bar{x}(t))} \right) \leq -\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}\sqrt{V(\bar{x})} + \frac{\delta\sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}}\sqrt{V(\bar{x})} \quad (\text{III.70})$$

Si on intègre III.70 entre 0 et  $t$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\bar{x}(t))} &\leq \exp\left[-\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}t\right]\sqrt{V(\bar{x}(0))} + 2\frac{\delta\lambda_M^{\frac{3}{2}}}{\mu\theta^q}\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}\right)\right] \\ &\leq \exp\left[-\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}t\right]\sqrt{V(\bar{x}(0))} + 2\frac{\delta\lambda_M^{\frac{3}{2}}}{\mu\theta^q} \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \sigma \exp\left[-\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}t\right]\|\bar{x}(0)\| + 2\sigma\frac{\delta\lambda_M}{\mu\theta^q} \quad (\text{III.71})$$

avec  $\sigma = \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}}$ . Et sachant que  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$ , nous avons :

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \|\tilde{x}(t)\| \leq \theta^{q-1}\|\bar{x}(t)\| \quad (\text{III.72})$$

En combinant donc les inégalités III.71 et III.72, nous obtenons

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \theta^{q-1}\sigma \exp\left[-\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}t\right]\|\tilde{x}(0)\| + 2\sigma\frac{\delta\lambda_M}{\mu\theta} \quad (\text{III.73})$$

Maintenant, il devient clair qu'en choisissant les paramètres du théorème 4.1 comme suit :

$$\theta_0 = \max\{1, \theta'_0\} \quad ; \quad \lambda = \sigma \quad ; \quad \mu_\theta = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M} \quad ; \quad M_\theta = 2\sigma \frac{\lambda_M}{\mu\theta} = \frac{\sigma}{\mu_\theta} \quad (\text{III.74})$$

où  $\theta'_0$  est défini en III.13, nous obtenons la preuve du théorème 4.1 avec

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu_\theta = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} M_\theta = 0$$

Ceci prouve la convergence exponentielle de l'erreur d'observateur dans une boule centrée à l'origine. Le diamètre de cette boule est inversement proportionnel au paramètre de synthèse  $\theta$ .

### 4.3 Lemme technique

Dans ce qui suit, un lemme technique utilisé pour prouver la convergence de l'observateur continu-discret est présenté avec les grandes lignes de sa démonstration.

**Lemme 4.1 :**

Considérons la fonction différentielle  $v : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto v(t) \in \mathbb{R}^+$  satisfaisant l'inégalité suivante :

$$\dot{v}(t) \leq -av(t) + b \int_{t_k}^t v(s)ds + c \quad , \quad \text{pour} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[ \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.75})$$

où  $0 < \tau_m \leq t_{k+1} - t_k \leq \tau_M < +\infty$  et  $a, b$  et  $c$  sont des réels positifs satisfaisants

$$\frac{b\tau_M}{a} < 1 \quad (\text{III.76})$$

alors, la fonction  $v$  satisfait

$$v(t) \leq e^{-\eta(t-t_0)}v(t_0) + c\tau_M \frac{2 - e^{-\eta\tau_m}}{1 - e^{-\eta\tau_m}} \quad (\text{III.77})$$

avec  $0 < \eta = ae^{-a\tau_M} - \frac{b}{a}(1 - e^{-a\tau_M})$

**Preuve 5 :**

La preuve de ce lemme est présentée dans [Bouraoui et al. 14]. Pour plus de clarté et compte tenu du lien avec l'observateur continu-discret, nous proposons de redétailler rapidement la démonstration.

Comme on peut le constater, le Lemme 4.1 est semblable à celui exposé dans la Section 3.2.

### III.4 Observateur pour les systèmes non linéaires incertains avec sortie échantillonnée

---

Nous utilisons donc quelques résultats dans la preuve du Lemme 3.1 pour alléger la démonstration. La méthode reste toujours la même à savoir qu'il faut tout d'abord montrer que

$$v(t) \leq v(t_k) + (b\tau_M - a) \int_{t_k}^t v(s) ds + c(t - t_k) \leq v(t_k) + c(t - t_k) \quad (\text{III.78})$$

ensuite en combinant les inégalités III.75 et III.78, la dérivée de  $v(t)$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &\leq -av(t) + b \int_{t_k}^t (v(t_k) + c(s - t_k)) ds + c \leq -av(t) + b(v(t_k) + c(t - t_k)) \int_{t_k}^t ds + c \\ &\leq -av(t) + b(v(t_k) + c\tau_M)(t - t_k) + c \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

Si on intègre III.79 entre  $t_k$  et  $t$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} v(t) &\leq e^{-a(t-t_k)}v(t_k) + c \int_{t_k}^t e^{-a(t-s)} ds + b(v(t_k) + c\tau_M) \int_{t_k}^t (s - t_k)e^{-a(t-s)} ds \\ &\leq e^{-a(t-t_k)}v(t_k) + \frac{c}{a} (1 - e^{-a(t-t_k)}) + \left(\frac{b}{a}v(t_k) + c\right) a \int_{t_k}^t (s - t_k)e^{-a(t-s)} ds \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

III.80 utilise donc la condition III.76 où  $b\tau_M < a$ . En effectuant une intégration par partie, nous pouvons montrer que :

$$a \int_{t_k}^t (s - t_k)e^{-a(t-s)} ds = (t - t_k) - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(t-t_k)})$$

Si nous introduisons maintenant l'expression ci-dessus dans III.80, alors

$$\begin{aligned} v(t) &\leq e^{-a(t-t_k)}v(t_k) + \frac{b}{a} \left( (t - t_k) - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(t-t_k)}) \right) v(t_k) + c(t - t_k) \\ &= g(t)v(t_k) + c(t - t_k) \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

où  $g(t) \triangleq e^{-a(t-t_k)} + \frac{b}{a} \left( (t - t_k) - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(t-t_k)}) \right)$

De la même façon que dans le Lemme 3.1, il faut montrer que  $g(t) \leq e^{-\eta(t-t_k)}$  où  $\eta$  est donné en III.77. En définissant alors  $\delta(t) = g(t) - e^{-\eta(t-t_k)}$  quelque soit  $t \geq t_k$ , il suffit de montrer que  $\dot{\delta}(t)$  est une fonction décroissante sachant que  $\delta(t_k) = 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= -ae^{-a(t-t_k)} + \frac{b}{a} (1 - e^{-a(t-t_k)}) + \eta e^{-\eta(t-t_k)} \\ &\leq -ae^{-a\tau_M} + \frac{b}{a} (1 - e^{-a\tau_M}) + \eta = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

La négativité de  $\dot{\delta}(t)$  provient de la borne de  $\eta$  définie en III.77. Il est ainsi possible de borner

$g(t)$  par  $g(t) \leq e^{-\eta(t-t_k)}$  et en déduire que

$$v(t) \leq e^{-\eta(t-t_k)}v(t_k) + c(t-t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.83})$$

Finalement, en itérant [III.83](#), on obtient

$$\begin{aligned} v(t_k) &\leq e^{-\eta(\tau_{k-1}+\dots+\tau_0)}v(t_0) + c\left(\tau_{k-1} + \tau_{k-2}e^{-\eta\tau_{k-1}} + \tau_{k-3}e^{-\eta(\tau_{k-1}+\tau_{k-2})} + \dots + \tau_0e^{-\eta(\tau_{k-1}+\dots+\tau_1)}\right) \\ &= e^{-\eta(t_k-t_0)}v(t_0) + c\left(\tau_{k-1} + \tau_{k-2}e^{-\eta\tau_{k-1}} + \tau_{k-3}e^{-\eta(\tau_{k-1}+\tau_{k-2})} + \dots + \tau_0e^{-\eta(\tau_{k-1}+\dots+\tau_1)}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.84})$$

En introduisant [III.84](#) dans [III.83](#), nous obtenons donc

$$\begin{aligned} v(t) &\leq e^{-\eta(t-t_0)}v(t_0) + c(t-t_k) \\ &\quad + ce^{-\eta(t-t_k)}\left(\tau_{k-1} + \tau_{k-2}e^{-\eta\tau_{k-1}} + \tau_{k-3}e^{-\eta(\tau_{k-1}+\tau_{k-2})} + \dots + \tau_0e^{-\eta(\tau_{k-1}+\dots+\tau_1)}\right) \\ &\leq e^{-\eta(t-t_0)}v(t_0) + c\tau_k + c\left(\tau_{k-1} + \tau_{k-2}e^{-\eta\tau_{k-1}} + \tau_{k-3}e^{-\eta(\tau_{k-1}+\tau_{k-2})} + \dots + \tau_0e^{-\eta(\tau_{k-1}+\dots+\tau_1)}\right) \\ &\leq e^{-\eta(t-t_0)}v(t_0) + c\tau_M \left(1 + \sum_{j=0}^{k-1} e^{-j\eta\tau_m}\right) \\ &\leq e^{-\eta(t-t_0)}v(t_0) + c\tau_M \left(1 + \frac{1}{1 - e^{-\eta\tau_m}}\right) = e^{-\eta(t-t_0)}v(t_0) + c\tau_M \frac{2 - e^{-\eta\tau_m}}{1 - e^{-\eta\tau_m}} \end{aligned}$$

où  $\tau_m$  est la valeur minimale de la période d'échantillonnage et  $\tau_M$  est la valeur maximale admissible de la période d'échantillonnage.

Ceci met fin à la preuve du lemme

## 4.4 Synthèse pour les systèmes à sortie échantillonnée

Dans cette partie, nous proposons un observateur continu discret pour la classe des systèmes non linéaires incertains dont la sortie n'est disponible qu'aux instants d'échantillonnage  $t_k$ . La structure de l'observateur est similaire à celle proposée pour les systèmes non linéaires sans incertitude et décrite dans la section précédente. La preuve de convergence de cet observateur s'appuie sur les résultats établis dans le lemme [4.1](#).

Pour la classe des systèmes incertains à sortie échantillonnée [III.58](#), l'observateur grand gain proposé s'écrit comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta\Delta_\theta^{-1}Ke^{-\theta K^1(t-t_k)}(C\hat{x}(t_k) - y(t_k)) \quad (\text{III.85})$$

où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ;  $K$  est la matrice de gain. Elle est choisie de sorte que la matrice  $\{\bar{A} \triangleq A - KC\}$  soit Hurwitz.  $\Delta_\theta$  est une matrice diagonale définie en III.6 et  $\theta \geq 1$  est le paramètre de synthèse.

**Theorème 4.2 :**

Supposons que le système III.58 satisfait les hypothèses (hypothèse 2.1 et hypothèse 4.1), alors  $\forall \theta > \theta_0$ , il existe  $\chi(\theta) > 0$ ,  $\eta_\theta(\tau_M) > 0$ ,  $N_\theta(\tau_m, \tau_M) > 0$ . En outre, si la valeur maximale de la période d'échantillonnage est choisie de sorte que  $\tau_M < \chi(\theta)$  alors pour toute entrée bornée et pour  $\|\hat{x}(0)\| \in \mathbb{R}^n$ , nous avons :

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \lambda \theta^{q-1} e^{-\eta_\theta(\tau_M)t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + N_\theta(\tau_m, \tau_M) \delta \quad (\text{III.86})$$

où  $x(t)$  est la trajectoire d'état du système III.60 associée à l'entrée  $u(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  est la trajectoire d'état de l'observateur III.85 associée à  $u(t)$  et à  $y(t)$ .  $\eta_\theta(\tau_M)$  est une fonction décroissante en  $\tau_M$  avec  $\lim_{\tau_M \rightarrow 0} \eta_\theta(\tau_M) = \mu_\theta$  et  $N_\theta(\tau_m, \tau_M)$  est une fonction croissante en  $\tau_M$  avec  $\lim_{\tau_M \rightarrow 0} N_\theta(\tau_m, \tau_M) = M_\theta$ .

Les paramètres  $\lambda, \theta_0, \mu_\theta$  et  $M_\theta$  sont définis dans le théorème 4.1 et donnés en III.74, tandis que  $\tau_m$  et  $\tau_M$  sont définis en III.59.

La preuve complète de la convergence de l'erreur d'estimation est parfaitement détaillée dans [Bouraoui et al. 14] où les auteurs considèrent le cas général avec la sortie bruitée. Il montre que l'erreur d'observation se situe dans une boule centrée à l'origine avec un diamètre relié à la borne des incertitudes, du bruit de mesure et de la période d'échantillonnage. Dans le cas des sorties non bruitées, il est montré que, comme dans le cas des sorties continues, la taille de la boule est dépendante du paramètre de synthèse. Cette boule est aussi dépendante de  $\tau_M$ . Nous allons donc utiliser les résultats du lemme 4.1 pour prouver la convergence exponentielle de l'observateur III.85.

**Preuve 6 :**

Si nous définissons l'erreur d'observation par  $\tilde{x} = \hat{x} - x$ , sa dynamique est définie par

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x} + \Phi(u, \hat{x}, x) - \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \tilde{x}(t_k) - B\varepsilon(t)$$

où  $\Phi(u, \hat{x}, x) = \varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)$ . En appliquant le changement de variable  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$  et en utilisant les inégalités III.7, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \Delta_\theta \Phi(u, \hat{x}, x) - \theta K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \Delta_\theta^{-1} \bar{x}(t_k) - \Delta_\theta B \varepsilon(t) \\ &= \theta A \bar{x} + \Delta_\theta \Phi(u, \hat{x}, x) - \theta K e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \bar{x}(t_k) - \frac{1}{\theta^{q-1}} B \varepsilon(t)\end{aligned}\quad (\text{III.87})$$

Si nous ajoutons le terme  $\pm \theta K C \bar{x}$  dans l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \theta (A - KC) \bar{x} + \Delta_\theta \Phi(u, \hat{x}, x) + \theta K (C \bar{x} - e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \bar{x}(t_k)) - \frac{1}{\theta^{q-1}} B \varepsilon(t) \\ &= \theta \bar{A} \bar{x} + \Delta_\theta \Phi(u, \hat{x}, x) + \theta K z(t) - \frac{1}{\theta^{q-1}} B \varepsilon(t)\end{aligned}$$

où  $z(t) = C \bar{x}(t) - e^{-\theta K^1(t-t_k)} C \bar{x}(t_k) = \bar{x}^1(t) - e^{-\theta K^1(t-t_k)} \bar{x}^1(t_k)$  avec  $z(t_k) = 0$ .

En utilisant l'équation III.87, la dérivée de  $z(t)$  peut s'écrire :

$$\dot{z}(t) = \dot{\bar{x}}^1(t) + K^1 \theta e^{-\theta K^1(t-t_k)} \bar{x}^1(t_k) = \theta \bar{x}^2 + \Phi^1(u, \hat{x}^1, x^1)$$

où  $\Phi^1(u, \hat{x}^1, x^1) = \varphi^1(u, \hat{x}^1) - \varphi^1(u, x^1)$ .

Si nous intégrons  $\dot{z}(t)$  entre  $t_k$  et  $t$  avec  $z(t_k) = 0$ , nous obtenons :

$$z(t) = \int_{t_k}^t (\theta \bar{x}^2(s) + \Phi^1(u(s), \hat{x}^1(s), x^1(s))) ds$$

En utilisant l'inégalité des normes, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\|z(t)\| &\leq \int_{t_k}^t (\theta \|\bar{x}^2(s)\| + L \|\bar{x}^1(s)\|) ds \\ &\leq (\theta + L) \int_{t_k}^t \|\bar{x}(s)\| ds \leq \frac{\theta + L}{\sqrt{\lambda_m}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds\end{aligned}\quad (\text{III.88})$$

Maintenant, considérons la fonction quadratique de Lyapunov :  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$  où  $P$  est une matrice définie positive (i.e. III.9). En procédant comme dans le cas continu, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}) &= 2\bar{x}^T(t)P (\theta \bar{A} \bar{x} + \Delta_\theta \Phi(u, \hat{x}, x) + \theta K z) - \frac{2}{\theta^{q-1}} \bar{x}^T(t) P B \varepsilon(t) \\ &\leq -(2\mu\theta - 2L\sqrt{n}\lambda_M) \|\bar{x}\|^2 + 2\theta \bar{x}^T P K z - \frac{2}{\theta^{q-1}} \bar{x}^T(t) P B \varepsilon(t)\end{aligned}$$

Si nous choisissons  $\theta$  satisfaisant la condition III.13 (condition de convergence de l'observateur

### III.4 Observateur pour les systèmes non linéaires incertains avec sortie échantillonnée

---

grand gain continu traditionnel),  $\dot{V}(\bar{x})$  devient :

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}) &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M}V(\bar{x}) + 2\theta\|P\bar{x}\|\|K\|\|z(t)\| + \frac{2}{\theta^{q-1}}\|P\bar{x}\|\|\varepsilon(t)\| \\ &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M}V(\bar{x}) + 2\theta\sqrt{\lambda_M}\sqrt{V(\bar{x})}\|K\|\|z(t)\| + \frac{2\sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}}\delta\sqrt{V(\bar{x})}\end{aligned}\quad (\text{III.89})$$

Donc, en combinant III.88 et III.89, nous obtenons :

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) \leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M}V(\bar{x}(t)) + 2\theta\sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}}\|K\|(\theta + L)\sqrt{V(\bar{x}(t))} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))}ds + \frac{2\sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}}\delta\sqrt{V(\bar{x}(t))}$$

Ou de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}\sqrt{V(\bar{x}(t))} \leq -\frac{\mu\theta}{2\lambda_M}\sqrt{V(\bar{x}(t))} + \theta\sigma\|K\|(L + \theta) \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))}ds + \frac{\sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}}\delta$$

Posons donc

$$a_\theta = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M} \quad ; \quad b_\theta = \sigma\theta\|K\|(L + \theta) \quad \text{et} \quad c_\theta = \frac{\sqrt{\lambda_M}}{\theta^{q-1}}\delta \quad (\text{III.90})$$

où  $\sigma$  est défini en III.73.

Si la valeur maximale de la période d'échantillonnage  $\tau_M$  satisfait la condition du théorème  $\frac{b_\theta\tau_M}{a_\theta} < 1$  ou plus explicitement

$$\tau_M < \frac{a_\theta}{b_\theta} = \frac{\mu}{2(L + \theta)\sigma\|K\|\lambda_M} \triangleq \chi(\theta) \quad (\text{III.91})$$

nous pouvons appliquer le résultat du Lemme 4.1 qui nous permet d'écrire :

$$\sqrt{V(\bar{x}(t))} \leq e^{-\eta_\theta t}\sqrt{V(\bar{x}(0))} + \frac{c_\theta\tau_M}{1 - e^{-\eta_\theta\tau_m}} \quad (\text{III.92})$$

avec  $0 < \eta_\theta = a_\theta e^{-a_\theta\tau_M} - \frac{b_\theta}{a_\theta}(1 - e^{-a_\theta\tau_M}) = a_\theta e^{-a_\theta\tau_M} - \frac{(1 - e^{-a_\theta\tau_M})}{\chi(\theta)}$

En passant à l'erreur d'observation  $\tilde{x}(t)$  comme dans le cas continu, nous obtenons :

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sigma\theta^{q-1}e^{-\eta_\theta t}\|\bar{x}(0)\| + \frac{\theta^{q-1}c_\theta\tau_M}{\sqrt{\lambda_m}(1 - e^{-\eta_\theta(\tau_M)\tau_m})}$$

### Chapitre III. Observateurs pour les systèmes non linéaires

---

En remplaçant  $c_\theta$  par son expression (cf. III.90), l'inégalité ci-dessus s'écrit comme suit :

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sigma \theta^{q-1} e^{-\eta_\theta(\tau_M)t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{\sigma \tau_M}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau_M)\tau_m}} \delta \quad (\text{III.93})$$

Ceci met fin à la preuve.

**Remarque 4.1** Les fonctions  $\eta_\theta(\tau_M)$  et  $N_\theta(\tau_m, \tau_M)$  utilisées dans le théorème 4.2 sont donc égales :

$$\eta_\theta(\tau_M) = a_\theta e^{-a_\theta \tau_M} - \frac{b_\theta}{a_\theta} (1 - e^{-a_\theta \tau_M}) \quad \text{et} \quad N_\theta(\tau_m, \tau_M) = \frac{\sigma \tau_M}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau_M)\tau_m}}$$

où  $a_\theta$  et  $b_\theta$  sont définis en III.90. Maintenant, nous pouvons vérifier aisément que  $\eta_\theta(\tau_M)$  est une fonction décroissante en  $\tau_M$  et que

$$\lim_{\tau_M \rightarrow 0} \eta_\theta(\tau_M) = a_\theta = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M} = \mu_\theta$$

De façon similaire, nous pouvons vérifier aussi que, pour un  $\tau_m$  fixé, la fonction  $N_\theta(\tau_m, \tau_M)$  est une fonction croissante en  $\tau_M$ . Sachant que  $\lim_{\tau_M \rightarrow 0} \tau_m = \tau_M = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_M \rightarrow 0} N_\theta(\tau_m, \tau_M) &= \lim_{\tau_M \rightarrow 0} \frac{\tau_M \sigma}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau_M)\tau_m}} \\ &= \lim_{\tau_M \rightarrow 0} \frac{\tau_M}{\tau_m} \frac{\sigma}{\eta_\theta(\tau_M)} = \frac{\sigma}{\mu_\theta} = M_\theta \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.2, l'erreur d'estimation converge exponentiellement vers zéro dans le cas où les incertitudes sont nulles (i.e.  $\varepsilon(t) = 0$ ). Dans le cas où  $\varepsilon(t) \neq 0$ , l'erreur d'estimation est bornée par une fonction croissante en  $\tau_M$ . En outre, lorsque la période d'échantillonnage tend vers zéro, nous retrouvons les mêmes propriétés que dans le cas continu, i.e. le choix de  $\theta$  détermine la borne de l'erreur d'estimation.

Il est important de noter que, comme dans le cas continu, une fois le vecteur de gain  $K$  est fixé, les performances de l'observateur continu-discret III.85 sont déterminées par l'intermédiaire d'un seul paramètre de synthèse  $\theta$ . Le choix de la valeur de  $\theta$  se fait en considérant la contrainte sur la période d'échantillonnage maximale admissible (cf. III.91) et le compromis entre la vitesse de convergence et la sensibilité de l'observateur aux bruits de mesure comme indiqué dans [Gauthier et al. 92] et [Farza et al. 98]. Les conditions théoriques que doivent satisfaire  $\theta$  et  $\tau_M$  (cf. III.13 III.91) sont souvent trop restrictives. Comme ces conditions résultent de plusieurs majorations, il est possible en pratique de prendre des valeurs pour les paramètres de synthèse

plus élevées que la limite théorique. Ces remarques sont illustrées en simulation à travers le système du bioréacteur.

## 4.5 Exemple de simulation

Dans cette partie, nous proposons de tester les performances de l'observateur continu discret III.85 sur un système comportant des incertitudes. Pour cela, nous considérons le modèle de bioréacteur à double paroi au sein duquel se déroule une culture de bactérie *Pseudomonas putida*, alimentée en glycérol et opérée en mode batch. Le modèle mathématique d'un tel système est défini dans le chapitre 2 (cf. II.1)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \mu X - \frac{D}{V} X \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{\mu}{Y_{x/s}} X - \frac{D}{V} (S - S_{in}) \\ \frac{dV}{dt} = D \end{cases}$$

Les paramètres ont été définis :

$$\begin{aligned} \mu = \mu_{max} \frac{S}{K_s + S} \quad \text{avec} \quad \mu_{max} = 0.45 \text{ (h}^{-1}\text{)} \quad ; \quad K_s = 0.65 \text{ (g de S/l)} \\ Y_{x/s} = 0.35 \text{ (g de X/g de S)} \quad \text{et} \quad D = 0 \end{aligned}$$

La fermentation est réalisée en introduisant initialement une concentration  $X_0 = 1\text{g/l}$  de biomasse, une concentration  $S_0 = 75\text{g/l}$  de glycérol et de l'eau pour remplir la cuve à  $1.5\text{ l}$ . Au cours du processus, les bactéries consomment le substrat et de l'oxygène qui sont apportés en permanence. Le modèle dynamique de l'oxygène s'écrit comme suit (cf. II.8) :

$$\frac{dO_2}{dt} = K_l a (O_2^* - O_2) - r_{O_2} - \frac{D}{V} O_2$$

Le  $K_l a(t)$  est le coefficient de transfert de l'oxygène de la phase gazeuse à la phase liquide et la  $r_{O_2}(t)$  est la vitesse de consommation de l'oxygène. Ces deux variables sont mal connues et évoluent en fonction de l'avance de la culture. Elles sont représentées par des modèles empiriques d'où la présence d'incertitudes de modèle. Le principe de mesure de la concentration en oxygène dissout dans le bioréacteur suit un traitement relativement long et elles ne sont connues que de manière discrète. Afin de se conformer au cas expérimental développé plus tard dans ce mémoire, nous avons choisit une période d'échantillonnage de 5 *Secondes*.

Compte tenu de l'objectif de commande qui consiste à réguler la concentration en oxygène dissout dans une culture de bactérie, nous proposons de synthétiser un observateur continu-discret capable de reconstruire en continu les mesures discrètes de l'oxygène. En sachant que

### Chapitre III. Observateurs pour les systèmes non linéaires

---

la  $r_{O_2}(t)$  n'est pas physiquement mesurable, nous allons la reconstruire avec l'observateur. Le modèle va donc être augmenté en premier lieu en considérant la  $r_{O_2}$  comme une nouvelle variable d'état. Ensuite, le modèle augmenté va être réécrit sous la forme canonique uniformément observable.

Définissons le vecteur d'état suivant :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_2 \\ -r_{O_2} \end{pmatrix}$$

Le modèle complet s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = u(t)(O_2^* - x_1) + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \nu(t) \end{cases}$$

avec  $u(t) = K_I a(t)$  et  $\nu \leq \nu_M$  où  $\nu_M$  est la borne supérieure de la dérivée de  $r_{O_2}(t)$ . Ce qui revient à écrire

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \varphi(x(t), u(t)) + B\varepsilon(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C = [ 1 \quad 0 ]$$

$$\varphi(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} u(t)(O_2^* - x_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \nu(t)$$

Le système ci-dessus est alors sous la forme uniformément observable de Brunovski pour lequel l'observateur continu-discret III.85 a été proposé.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{-\theta K^1(t-t_k)} (C\hat{x}(t_k) - y(t_k)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{III.94})$$

où l'état est noté  $\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{O}_2 \\ -\hat{r}_{O_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ;  $K$  est choisi de tel sorte que les pôles de  $A - KC$  soient situés à  $-0.2$  et  $-0.1$ .

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}$$

### III.4 Observateur pour les systèmes non linéaires incertains avec sortie échantillonnée

Le paramètre de réglage de l'observateur est fixé à  $\theta = 2$ . Les résultats de simulation sont présentés dans les figures suivantes.

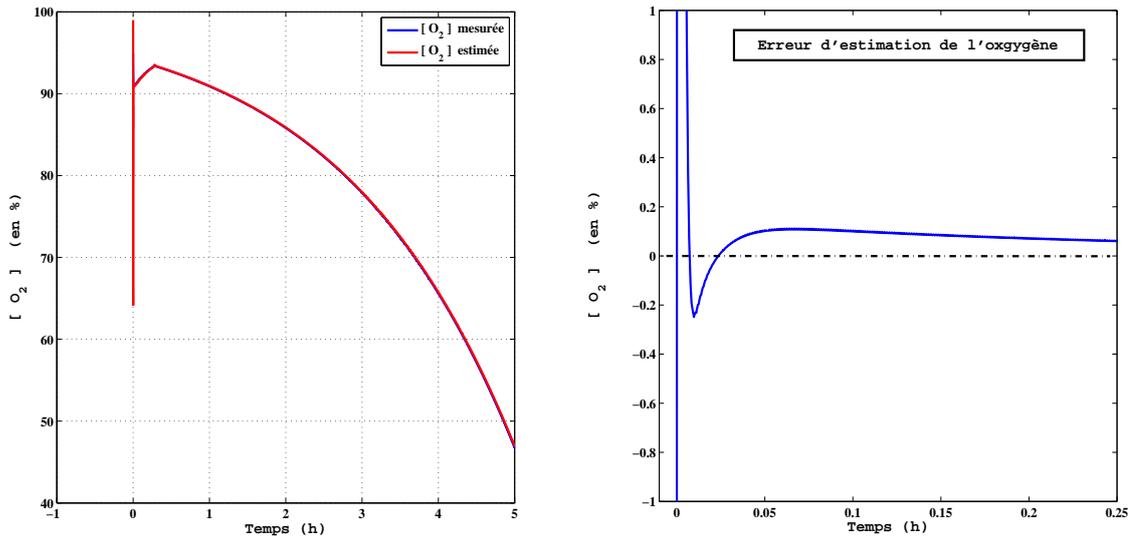


Figure III.3 – Concentration d'oxygène et son estimation continue

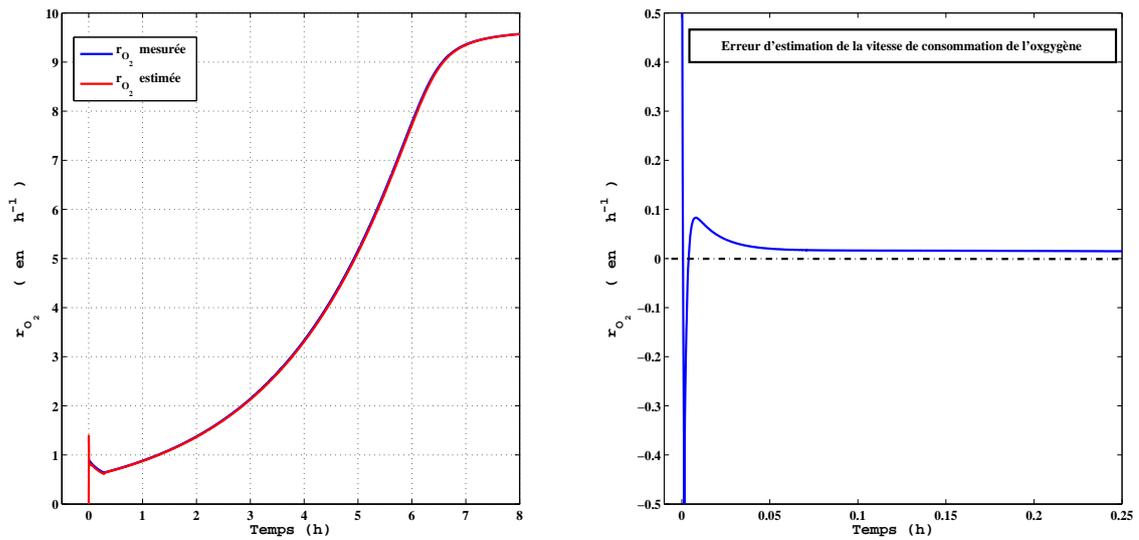


Figure III.4 – Vitesse de consommation d'oxygène et son estimation continue

Les mesures de la concentration en oxygène échantillonnée et bloquée entre les périodes d'échantillonnage sont présentées sur la figure III.3. Elles sont comparées avec leurs estimations délivrées par l'observateur III.94. De même que la trajectoire inconnue de la vitesse de consommation de l'oxygène fournie par le modèle est présentée sur la figure III.4. Sur les figures à droite, nous exposons les trajectoires des erreurs d'estimation et nous pouvons voir clairement qu'elle convergent exponentiellement vers une constante, confirmant donc le résultat théorique.

### 4.6 Conclusion

Dans cette section, nous avons étudié l'observation pour les systèmes non linéaires incertains qui peuvent s'écrire sous la forme canonique uniformément observable. Dans la première partie, nous avons traité le cas particulier où la sortie est continue. Un observateur de type grand a été proposé ainsi que les détails de la preuve de convergence exponentielle de l'erreur d'estimation vers une boule dont le diamètre est inversement proportion au paramètre de réglage. Ensuite, un lemme technique a été offert avec une justification. Dans la troisième partie, nous avons étudié l'observation pour les systèmes non linéaires incertains dont la sortie est échantillonnée. Nous avons démontré que l'observateur continu-discret proposé dans la section précédente peut fournir de bonnes estimations malgré la présence des incertitudes. Pour la démonstration, nous nous sommes appuyés sur les résultats du lemme technique. Nous avons montré que l'erreur d'observation reste confinée dans une boule centrée à l'origine dont le diamètre est proportionnel à l'amplitude maximale des incertitudes et à la période d'échantillonnage maximale admissible ( $\tau_M$ ). L'efficacité de cet observateur a été illustrée en simulation à travers un modèle du bioréacteur. Les résultats obtenus sont très prometteurs.

## 5 Observateur pour les systèmes non linéaires à sortie retardée

### 5.1 Introduction

Cette section concerne plus spécifiquement l'étude de l'observateur des systèmes non linéaires retardés. Ce thème a attiré l'attention de plusieurs scientifiques durant les dernières décennies. De nombreuses contributions ont été apportées notamment [Mazenc et Niculescu 01], [Trinh et al. ], [Seuret 06]... . Mais le plus souvent, les chercheurs supposent que le retard intervient sur la dynamiques des états des systèmes. Alors qu'en pratique, les procédés fonctionnent de manière autonome et que tous les états ne sont pas disponibles instantanément. Seules

quelques mesures sont accessibles avec un retard non négligeable lié à la rapidité des capteurs et aux chaînes d'instrumentation associées.

Les contributions qui traitent le problème du retard en l'appliquant sur la sortie des systèmes sont très rares. Une approche prometteuse a été apportée par [Germani et al. 02], où l'auteur propose un observateur à gain constant pour une classe de systèmes non linéaires avec une seule sortie globalement dérivée-observable, avec les non linéarités globalement lipschitzienne et la sortie disponible avec un retard constant  $\tau$ . La caractéristique principale de l'observateur réside dans sa structure qui est constituée d'une cascade de  $m + 1$  sous-systèmes dont le premier sous-système est un observateur de l'état retardé de  $\tau$  et les  $m$  autres restants sont des prédicteurs. Le prédicteur de rang  $j$  fournit les estimations de l'état du système retardé de  $\tau - \frac{j}{m}\tau$  afin que le dernier prédicteur de rang  $m$  reconstruit l'état du système réel. Cependant, le nombre de prédicteur  $m$  dans la cascade dépend du temps de retard et de la constante de Lipschitz qui majore les non linéarités. Cette dépendance est exprimée de manière plus précise sous forme d'une contrainte à remplir lors du choix de  $m$ . L'idée de synthétiser un observateur non linéaire constitué d'une cascade de prédicteur est reconsidérée dans [Kazantzis et Wright 05] avec une conception basée sur la résolution d'une équation aux différences partielles singulière du premier ordre. Le résultat obtenu est similaire à celui proposé par [Germani et al. 02] mais la contrainte sur le choix du nombre de prédicteur  $m$  dépend sur plus de paramètres. Pour les deux observateurs, l'expression du terme correctif de chaque prédicteur fait intervenir la somme des erreurs de tous les prédicteurs précédents dans la cascade et elle devient complexe quand le rang du prédicteur est élevé. Ceci engendre alors des problèmes d'implémentation lorsqu'un grand nombre de prédicteur est nécessaire. De plus, en présence de bruit, les performances de l'observateur diminuent considérablement.

Dans cette section, nous proposons la synthèse d'une cascade de prédicteurs pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observables avec une seule sortie retardée. L'objectif est d'unifier la structure des prédicteurs sous une forme générale. La propriété principale de l'observateur proposée réside sur la simplicité du terme correctif de chaque prédicteur et de leur facilité d'implémentation (cf. [Fall et al. 13]). Cependant, tous les prédicteurs de la cascade ont la même structure de gain établie grâce à la disponibilité d'un paramètre de synthèse matriciel permettant d'obtenir la dynamique de chaque prédicteur. La section est organisée comme suit. La première partie est consacrée à l'étude préliminaire permettant de décrire la classe des systèmes considérés et d'exposer l'état de l'art. La deuxième partie présente la synthèse de l'observateur composé d'une cascade de prédicteur. Elle détaille de manière succincte la méthode adoptée pour unifier la structure des prédicteur et pour obtenir les termes de gain. La quatrième partie illustre les performances de l'observateur à travers un modèle du bioréacteur. Elle présente

aussi une étude comparative des résultats obtenue en utilisant l'approche de [Germani et al. 02]. En fin, nous finissons avec la conclusion.

## 5.2 Étude préliminaire

Considérons la classe des systèmes uniformément observables qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y_\tau(t) = Cx(t - \tau) = x^1(t - \tau) \end{cases} \quad (\text{III.95})$$

où  $\tau > 0$  est le retard ( constant ) pur du système; l'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ , l'entrée

$u(t) \in D$  un ensemble compact de  $\mathbb{R}$ , les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = ( 1 \ \dots \ 0 )$  et la

fonction  $\varphi(u(t), x(t)) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^{n-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \varphi^n(u, x) \end{pmatrix}$  vérifie l'hypothèse lipschitzienne définie en

3.1.

$y_\tau(t)$  est la sortie disponible avec un retard de  $\tau : \{y_\tau = y(t - \tau)\}$  et  $y(t)$  la sortie non retardée. Dans le cas particulier où le retard est nul  $\{y_0 = y(t)\}$ , le système III.95 est sous la forme canonique uniformément observable pour lequel l'observateur grand gain continu est proposé. Pour des raisons de simplicité et de concordance, nous adoptons les même écritures que dans les publications de [Germani et al. 02] où l'état du prédicteur  $j$  et l'entrée associée sont définis comme suit :

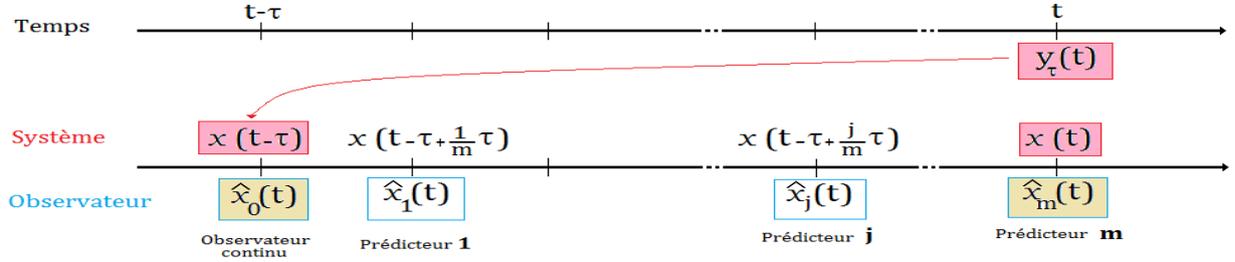
$$x_j(t) = x \left( t - \tau + \frac{j}{m} \tau \right) \quad \text{et} \quad u_j(t) = u \left( t - \tau + \frac{j}{m} \tau \right) \quad (\text{III.96})$$

où  $j = \{0, \dots, m\}$  et  $t \geq -\frac{j}{m} \tau$ ;  $m$  est une constante positive que nous définissons dans la suite.

L'observateur que nous proposons est une cascade de  $(m + 1)$  sous-systèmes dont le premier sous-système est un observateur grand gain continu qui estime l'état du système retardé de  $\tau$  tandis que les  $m$  autres restants sont des prédicteurs. Et de façon similaire avec [Germani et al. 02], le prédicteur de rang  $j$  estime l'état du système retardé de  $\tau - \frac{j}{m} \tau$  afin que

### III.5 Observateur pour les systèmes non linéaires à sortie retardée

le prédicteur de rang  $m$  estime l'état réel du système sans retard (cf. figure III.5).



**Figure III.5** – Représentation chronologique des états des sous-systèmes

En utilisant la notation III.96, le système retardé (de  $\tau$ ) est régi par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = Ax_0(t) + \varphi(u_0(t), x_0(t)) \\ y_{x_0}(t) = y_\tau(t) = Cx(t - \tau) \end{cases} \quad (\text{III.97})$$

Le système III.97 est écrit sous la forme canonique uniformément observable pour laquelle l'observateur grand gain continu a été proposé. La dynamique de cet observateur s'écrit comme suit :

$$\dot{\hat{x}}_0(t) = A\hat{x}_0(t) + \varphi(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K (C\hat{x}_0(t) - y_\tau(t)) \quad (\text{III.98})$$

où  $\hat{x}_0(t) = \begin{pmatrix} x_0^1(t) \\ x_0^2(t) \\ \vdots \\ x_0^n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  ;  $K$  est le vecteur gain choisi de sorte que la matrice  $A - KC$  soit Hurwitz.  $\Delta_\theta$  est une matrice diagonale suivante

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( 1 \quad \frac{1}{\theta} \quad \dots \quad \frac{1}{\theta^{n-1}} \right) \quad (\text{III.99})$$

$\theta \geq 1$  est le paramètre de synthèse.

Nous venons donc de proposer la dynamique du premier sous-système de la cascade. Concentrons nous maintenant sur la structure des  $m$  prédicteurs restants. Comme il a été mentionné dans l'introduction, la caractéristique principale des prédicteurs dans la cascade est qu'ils présentent la même structure de gain et cela est vrai quelque soit le rang du prédicteur. Leur conception est détaillée dans la partie qui suit.

### 5.3 Synthèse de l'observateur

#### 5.3.1 Structure du prédicteur

Rappelons que la variable  $x_j$  indique l'état du système retardé de  $\left\{\tau - \frac{j}{m}\tau\right\}$ . L'objectif est donc de concevoir pour chaque prédicteur un modèle dynamique capable de reconstruire l'état  $x_j$  régi par l'équation dynamique suivante :

$$\dot{x}_j(t) = Ax_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) \quad (\text{III.100})$$

Ceci revient à écrire :

$$\dot{x}_j(t) = \bar{A}x_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) + (A - \bar{A})x_j(t) \quad (\text{III.101})$$

où  $\bar{A}$  est une matrice Hurwitz. Nous montrerons plus loin que la considération d'une telle matrice permet dans un premier lieu de régler la dynamique des prédicteurs, ensuite facilite l'accession à l'expression du gain très simple et indépendant des gains des prédicteurs précédents. De ce fait, en intégrant l'équation III.101 entre  $t$  et  $t - \frac{\tau}{m}$  et sachant que :

$$x_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = x\left(t - \frac{\tau}{m} - \tau + \frac{j}{m}\tau\right) = x\left(t - \tau + \frac{j-1}{m}\tau\right) = x_{j-1}(t)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} x_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}x_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) + e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} \left(\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A - \bar{A})x_j(s)\right) ds \\ x_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}x_{j-1}(t) + e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} \left(\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A - \bar{A})x_j(s)\right) ds \end{aligned}$$

Nous notons  $\hat{x}_j(t)$  l'état du prédicteur qui fournit les estimations de l'état du système  $x_j(t)$ . Sa dynamique peut s'écrire comme suit

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - G_j(t) \quad (\text{III.102})$$

où  $G_j(t)$  avec  $j = \{1, \dots, m\}$  est le terme de correction qui doit être choisi de telle sorte que la convergence exponentielle de l'erreur de prédiction soit garantie ; avec  $\tilde{x}_j(t) = \hat{x}_j(t) - x_j(t)$  .

La structure de l'observateur de l'état retardé III.98 est donc similaire à celle proposée pour les

### III.5 Observateur pour les systèmes non linéaires à sortie retardée

---

prédicteurs [III.102](#) avec

$$G_0(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K (C \hat{x}_0(t) - y_\tau(t)) = \theta \Delta_\theta^{-1} K (C \hat{x}_0(t) - C x_0(t)) \triangleq \theta \Delta_\theta^{-1} K C \tilde{x}_0(t)$$

où  $\tilde{x}_0(t)$  est l'erreur d'observation correspondant à l'état retardé. Sa convergence exponentielle est démontrée dans la *section* 3.1 .

Maintenant, en introduisant une matrice Hurwitz  $\bar{A}$ , nous pouvons procéder comme en [III.101](#) et l'équation du prédicteur [III.102](#) s'écrit comme suit :

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = \bar{A} \hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) + (A - \bar{A}) \hat{x}_j(t) - G_j(t) \quad (\text{III.103})$$

De la même façon, si nous intégrons l'équation [III.103](#) entre  $t$  et  $t - \frac{\tau}{m}$ , nous obtenons :

$$\hat{x}_j(t) = e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) + e^{\bar{A} t} \int_{t - \frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A} s} \left( \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) + (A - \bar{A}) \hat{x}_j(s) - G_j(s) \right) ds \quad (\text{III.104})$$

Enfin, pour des raisons stratégiques, nous allons définir la relation entre deux états de prédicteur successifs  $\hat{x}_j(t)$  et  $\hat{x}_{j-1}(t)$  comme suit :

$$\hat{x}_j(t) = e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} (\hat{x}_{j-1}(t) - r_j(t)) + e^{\bar{A} t} \int_{t - \frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A} s} \left( \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) + (A - \bar{A}) \hat{x}_j(s) \right) ds \quad (\text{III.105})$$

où les  $r_j(t)$  avec  $j = \{1, \dots, m\}$  sont des fonctions dérivables avec le temps et elles sont déterminées en même temps que les termes de gain  $G_j(t)$  dans la partie suivante. Toutefois, il est important de préciser que les fonctions  $r_j(t)$  n'apparaissent pas dans les expressions des prédicteurs et que leur incorporation est motivée uniquement dans le but de dériver une expression simple permettant d'obtenir le gain de chaque prédicteur indépendamment des gain précédents. Les fonctions  $r_j(t)$  interviennent cependant dans l'analyse de convergence de l'observateur. Nous montrerons que contrairement à l'observateur proposé par [[Germani et al. 02](#)] où la complexité de l'expression du gain augmente avec le rang du prédicteur dans la cascade, la structure de nos prédicteurs est simple et elle reste identique quelque soit leur rang.

Si nous combinons les équations [III.102](#) et [III.105](#), nous pouvons alors exprimer la dynamique

de l'erreur de prédiction  $\tilde{x}_j(t) = \hat{x}_j(t) - x_j(t)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} (\tilde{x}_{j-1}(t) - r_j(t)) \\ &\quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} \left( \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A - \bar{A})\tilde{x}_j(s) \right) ds \end{aligned} \quad (\text{III.106})$$

### 5.3.2 Détermination du gain de prédiction

En effectuant la différence entre les équations III.104 et III.105, nous obtenons

$$e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) + r_j(t) \right) = e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} G_j(s) ds$$

Si on dérive chaque coté de l'équation ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \dot{\hat{x}}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \dot{\hat{x}}_{j-1}(t) + \dot{r}_j(t) \right) &= \bar{A}e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} G_j(s) ds + G_j(t) - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \\ &= \bar{A}e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) + r_j(t) \right) + G_j(t) \\ &\quad - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \end{aligned}$$

En remplaçons donc  $\hat{x}_{j-1}(t)$  et  $\hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right)$  par leur propre expression donnée en III.102, nous obtenons :

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left[ A \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + \varphi \left( u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi \left( u_{j-1}(t), x_{j-1}(t) \right) + G_{j-1}(t) - \right. \\ \left. G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) + \dot{r}_j(t) \right] &= \bar{A}e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) + r_j(t) \right) + G_j(t) - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \end{aligned}$$

Et sachant que  $u_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) = u_{j-1}(t)$  et que les matrices  $\bar{A}$  et  $e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}$  sont commutables. Alors l'équations ci-dessus peut s'écrire :

$$\begin{aligned} G_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left[ (A - \bar{A}) \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi \left( u_{j-1}, x_{j-1}(t) \right) \right] \\ &\quad + e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \dot{r}_j(t) - \bar{A}r_j(t) + G_{j-1}(t) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.107})$$

De ce fait, si nous choisissons la fonction  $r_j(t)$  de telle sorte que :

$$\dot{r}_j(t) = \bar{A}r_j(t) - G_{j-1}(t) \quad \text{avec} \quad r_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{III.108})$$

L'égalité III.107 devient :

$$G_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left[ (A - \bar{A}) \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}, x_{j-1}(t)) \right] \quad (\text{III.109})$$

Avec cette écriture, le terme de correction  $G_j$  du prédicteur  $j$  est exprimé avec une combinaison de l'état actif retardé de  $\frac{\tau}{m}$ , de l'état du prédicteur précédent et de son entrée. Les équations de la cascade de prédicteur qui constituent l'observateur pour le système III.95 sont donc :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_j(t) = A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - G_j(t), & j = \{0, \dots, m\} \\ G_0(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} KC(\hat{x}_0(t) - y_\tau(t)) & \text{et pour } j = \{1, \dots, m\}; \\ G_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( (A - \bar{A}) \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right)) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \right) \end{cases} \quad (\text{III.110})$$

Nous pouvons vérifier (cf. [Kazantzis et Wright 05], [Khalil 03]) qu'il existe deux constantes positives  $\beta$  et  $\bar{\alpha}$  telles que :

$$\forall t \geq 0 : \quad \|e^{\bar{A}t}\| \leq \beta e^{-\bar{\alpha}t} \quad (\text{III.111})$$

En utilisant cette propriété et celle de la fonction lipschitzienne  $\varphi$ , nous pouvons alors borner l'erreur de prédiction donnée en III.106 :

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| (\|\tilde{x}_{j-1}(t)\| + \|r_j(t)\|) + \beta(L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_j(s)\| ds \quad (\text{III.112})$$

### 5.3.3 Théorème principal

Avant de regrouper tous les résultats et de les annoncer sous forme d'un théorème principale, introduisons d'abord ce lemme technique apporté par [Germani et al. 02]. Les résultats de ce lemme sont utilisés dans la preuve de convergence de notre observateur.

**Lemme 5.1 :**

Considérons la fonction positive  $f(t) \geq 0$ ,  $t \in [-\delta, +\infty[$ , avec  $\delta > 0$  telle que

$$\int_{-\delta}^0 f(s) ds < +\infty \quad , \quad f(t) \leq \mu e^{-\bar{\alpha}t} + \gamma \int_{t-\delta}^t f(s) ds$$

où  $\bar{\alpha}$ ,  $\gamma$  et  $\mu$  sont des réel positifs.

Si  $\gamma\delta < 1$  alors il existe une constante positive  $\alpha \leq \bar{\alpha}$  telle que

$$f(t) \leq \mu e^{-\alpha t} \quad , \quad t \geq 0$$

$$\text{où} \quad \bar{\mu} = \frac{e^{\alpha\delta}}{1-c} \left( \mu + \gamma \int_{-\delta}^0 f(s) ds \right), \quad c = \frac{\gamma}{\alpha} (e^{\alpha\delta} - 1) < 1$$

Le théorème suivant regroupe toutes les propriétés nécessaires pour assurer une convergence exponentielle vers zéro de l'erreur de prédiction de chaque prédicteur de la cascade.

**Theorème 5.1 :**

Considérons la classe des systèmes III.95 pour laquelle l'hypothèse 2.1 (concernant la fonction non linéaire  $\varphi(x(t), u(t))$ ) est vérifiée. Si le nombre  $m$  est choisi afin de satisfaire la condition suivante :

$$\beta \left( L_\varphi + \|\bar{A} - A\| \right) \frac{\tau}{m} < 1 \quad (\text{III.113})$$

où  $\beta$  est une constante positive délimitant  $\|e^{\bar{A}t}\|$  définie en III.111 et  $L_\varphi$  est la constante de Lipschitz associée à  $\varphi(u(t), x(t))$ . Alors, il existe deux constantes positives  $\mu$  et  $\alpha$  telles que  $\forall t \geq -\tau$ , nous avons

$$\|\hat{x}_m(t) - x(t)\| \leq \mu e^{-\alpha t} \quad (\text{III.114})$$

d'où la convergence exponentielle de l'état du dernier prédicteur de la cascade vers celui du système non retardé, avec la constante  $\mu$  qui dépend de l'initialisation de l'observateur.

Dans ce qui suit, nous détaillons la preuve de la convergence exponentielle de l'erreur de prédiction  $\tilde{x}_j(t)$  pour  $j = \{1, \dots, m\}$  comme il a été détaillé dans [Fall et al. 13]. La stratégie adoptée est une méthode récursive qui consiste à montrer d'abord que pour  $j = 1$ ,  $G_1(t)$  assure une convergence exponentielle vers zéro de l'erreur de prédiction du premier prédicteur. Ensuite, nous supposons que  $\forall j \in [2, m-1]$ ,  $G_j(t)$  assure également une convergence exponentielle du prédicteur  $j$  vers l'état du système retardé de  $\tau - \frac{j}{m}\tau$ . En fin, nous prouvons que  $j = m$ , le dernier prédicteur est exponentiellement convergent vers l'état réel.

**Preuve 7 :**

Notons pas  $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$  : l'erreur de prédiction du prédicteur  $j$  pour  $j = \{1, \dots, m\}$ .

Nous avons déjà prouvé dans la section 5.3.1 que le gain  $G_0(t)$  du premier sous-système de la cascade assure une convergence exponentielle vers zéro de l'état  $x_0(t)$  vers l'état du système retardé de  $\tau$  et que l'erreur d'estimation associée satisfait l'inégalité suivante (voire théorème 4.1) :

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \eta(\theta) e^{-\lambda(\theta)t} \tilde{x}_0(0)$$

### III.5 Observateur pour les systèmes non linéaires à sortie retardée

ce qui implique que  $G_0(t)$  satisfait alors :

$$\|G_0(t)\| \leq \theta \|\Delta_\theta^{-1} KC\| \eta(\theta) e^{-\lambda(\theta)t} \tilde{x}_0(0) \leq \theta^n \|KC\| \eta(\theta) e^{-\lambda(\theta)t} \tilde{x}_0(0)$$

Posons alors  $\mu_0 = \theta^n \|KC\| \eta(\theta) \tilde{x}_0(0)$  et  $\alpha_0 = \lambda(\theta)$

Sachant que  $\theta$  peut être choisi élevé, il peut donc être fixé de telle sorte que  $\alpha_0 > \bar{a}$  avec  $\bar{a}$  défini en III.111 et  $\theta \|\Delta_\theta^{-1} KC\| \geq 1$ . En utilisant les nouvelles notations, nous pouvons écrire :

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \mu_0 e^{-\alpha_0 t} \leq \mu_0 e^{-\bar{a}t} \quad \text{et} \quad \|G_0(t)\| \leq \mu_0 e^{-\alpha_0 t} \quad (\text{III.115})$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la démonstration de la convergence de chaque prédicteur en commençant par le premier ( $j = 1$ ). En utilisant l'équation III.108, nous pouvons écrire :

$$\dot{r}_1(t) = \bar{A}r_1(t) - G_0(t) \quad , \quad \text{avec} \quad r_1(0) = 0$$

En intégrant cette équation de 0 à  $t$ , nous obtenons :

$$r_1(t) = -e^{\bar{A}t} \int_0^t e^{-\bar{A}s} G_0(s) ds$$

avec  $\bar{A}$  Hurwitz et  $G_0(t)$  exponentiellement convergent, aussi nous pouvons en déduire que  $r_1(t)$  converge de manière exponentielle vers 0, nous pouvons écrire plus précisément en utilisant les propriétés III.111 et III.115 :

$$\begin{aligned} \|r_1(t)\| &\leq \|e^{\bar{A}t}\| \int_0^t \|e^{-\bar{A}s}\| \|G_0(s)\| ds \\ &\leq \beta \int_0^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|G_0(s)\| ds \leq \beta \mu_0 e^{-\bar{a}t} \int_0^t e^{(\bar{a}-\alpha_0)s} ds \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha_0 - \bar{a}} \mu_0 e^{-\bar{a}t} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 > \bar{a} \end{aligned} \quad (\text{III.116})$$

En utilisant l'équation III.112, nous pouvons déduire la norme de l'erreur de prédiction  $\tilde{x}_1(t)$  :

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| (\|\tilde{x}_0(t)\| + \|r_1(t)\|) + \beta(L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_1(s)\| ds \quad (\text{III.117})$$

En combinant les équations III.115 et III.116, l'inégalité III.118 devient :

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| \mu_0 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha_0 - \bar{a}}\right) e^{-\bar{a}t} + \beta(L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_1(s)\| ds \quad (\text{III.118})$$

### Chapitre III. Observateurs pour les systèmes non linéaires

---

Maintenant en utilisant le lemme 5.1 et les suppositions du théorème 5.1, nous pouvons déduire qu'il existe un couple de constantes positives  $(\mu_1, \bar{\alpha}_1)$  avec  $0 < \bar{\alpha}_1 \leq \bar{a}$  telle que :

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq \mu_1 e^{-\bar{\alpha}_1 t} \quad (\text{III.119})$$

où  $\mu_1 = \frac{e^{\bar{\alpha}_1 \frac{\tau}{m}}}{1-c_1} \left( \|e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}}\| \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha_0 - \bar{a}} \right) \mu_0 + \gamma \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(\nu)\| d\nu \right)$  ,  $c_1 = \frac{\gamma}{\bar{\alpha}_1} (e^{\bar{\alpha}_1 \frac{\tau}{m}} - 1) < 1$   
 et  $\gamma = \beta(L_\varphi + \|A - \bar{A}\|)$

De ce fait, en choisissant une constante  $\alpha_1$  telle que  $0 < \alpha_1 < \bar{\alpha}_1 (\leq \bar{a})$ , l'inégalité III.119 devient :

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq \mu_1 e^{-\alpha_1 t} \quad \text{avec} \quad \mu_1 \quad \text{défini précédemment}$$

Ceci prouve donc la convergence exponentielle de l'erreur de prédiction pour  $j = 1$ .

Supposons maintenant que pour  $\forall i \in [2, j-1]$  avec  $j = (1, \dots, m)$ , il existe à chaque fois un couple de réels positifs  $(\mu_i, \alpha_i)$  avec  $0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{j-1}$  et  $0 < \alpha_{j-1} \leq \dots \leq \alpha_1 < \bar{a}$  tels que :

$$\|\tilde{x}_i(t)\| \leq \mu_i e^{-\alpha_i t}$$

Pour vérifier cette hypothèse qu'il existe un couple de réels positifs  $(\mu_j, \alpha_j)$  avec  $\mu_{j-1} \leq \mu_j$  et  $0 < \alpha_j < \alpha_{j-1}$  telle que  $\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \mu_j e^{-\alpha_j t}$ , considérons l'équation III.110, nous avons

$$\begin{aligned} G_{j-1}(t) &= e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \left( (A - \bar{A}) \left( \hat{x}_{j-1}(t - \frac{\tau}{m}) - \hat{x}_{j-2}(t) \right) + \varphi(u_{j-2}, \hat{x}_{j-1}(t - \frac{\tau}{m})) - \varphi(u_{j-2}, \hat{x}_{j-2}(t)) \right) \\ &= e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \left( (A - \bar{A}) \left( \tilde{x}_{j-1}(t - \frac{\tau}{m}) - \tilde{x}_{j-2}(t) \right) \right) + e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \left[ \varphi(u_{j-2}, \hat{x}_{j-1}(t - \frac{\tau}{m})) \right. \\ &\quad \left. - \varphi(u_{j-2}, \hat{x}_{j-2}(t)) \right] \end{aligned}$$

car  $x_{j-1}(t - \frac{\tau}{m}) = x_{j-2}(t)$  et si nous utilisons l'hypothèse lipschitzienne de  $\varphi$ , nous pouvons écrire :

$$\|G_{j-1}(t)\| \leq \|e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}}\| (\|A - \bar{A}\| + L_\varphi) \left( \|\tilde{x}_{j-1}(t - \frac{\tau}{m})\| + \|\tilde{x}_{j-2}(t)\| \right)$$

### III.5 Observateur pour les systèmes non linéaires à sortie retardée

en utilisant les suppositions précédentes et celle du théorème principale, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|G_{j-1}(t)\| &\leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\|(\|A - \bar{A}\| + L_\varphi) (\mu_{j-1}e^{-\alpha_{j-1}(t-\frac{\tau}{m})} + \mu_{j-2}e^{-\alpha_{j-2}t}) \\
 &\leq \beta(\|A - \bar{A}\| + L_\varphi) (\mu_{j-1} + \mu_{j-2}) e^{-\alpha_{j-1}t} \\
 &\leq \frac{m}{\tau} (\mu_{j-1} + \mu_{j-2}) e^{-\alpha_{j-1}t} \\
 &\leq 2\frac{m}{\tau}\mu_{j-1}e^{-\alpha_{j-1}t}
 \end{aligned} \tag{III.120}$$

en combinant les équations III.108 et III.120, nous obtenons :  $r_j(t) = -\int_0^t e^{\bar{A}(t-s)}G_{j-1}(s)ds$

$$\begin{aligned}
 \|r_j(t)\| &\leq \beta \int_0^t e^{-a(t-s)}\|G_{j-1}(s)\|ds \leq 2\frac{m}{\tau}\mu_{j-1}e^{-\bar{a}t} \int_0^t e^{(\bar{a}-\alpha_{j-1})s}ds \\
 &= 2\frac{m}{\tau}\mu_{j-1}e^{-\bar{a}t} \frac{e^{(\bar{a}-\alpha_{j-1})t} - 1}{\bar{a} - \alpha_{j-1}} \leq 2\frac{m}{\tau}\mu_{j-1} \frac{e^{-\alpha_{j-1}t}}{(\bar{a} - \alpha_1)}
 \end{aligned}$$

si nous utilisons maintenant l'équation III.112, l'erreur de prédictor du sous système  $j$  satisfait :

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| (\|\tilde{x}_{j-1}(t)\| + \|r_j(t)\|) + \beta(L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_j(s)\|ds \\
 &\leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\|\mu_{j-1} \left(1 + 2\frac{m}{\tau(\bar{a} - \alpha_1)}\right) e^{-\alpha_{j-1}t} + \beta(L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_j(s)\|ds
 \end{aligned}$$

De la même façon, en utilisant les résultats du lemme 5.1 et les suppositions du théorème 5.1, nous pouvons conclure aisément qu'il existe un couple de réels positifs  $(\mu_j, \alpha_j)$  avec  $0 < \alpha_j < \bar{a}$  telle que

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \mu_j e^{-\alpha_j t} \tag{III.121}$$

où  $\mu_j = \frac{e^{\alpha_j \frac{\tau}{m}}}{1-c_j} \left( \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\|\mu_{j-1} \left(1 + 2\frac{m}{\tau(\bar{a}-\alpha_1)}\right) + \gamma \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(\nu)\|d\nu \right)$  avec  $c_j = \frac{\gamma}{\alpha_j}(e^{\alpha_j \frac{\tau}{m}} - 1) < 1$

En posant  $j = m$ , le développement ci-dessus prouve qu'il existe un couple de réels positifs  $\mu_m$  et  $\alpha_m$  telle que

$$\|\tilde{x}_m(t)\| \leq \mu_m e^{-\alpha_m t}$$

De ce fait, le paramètre  $\alpha$  du théorème 5.1 est égal  $\alpha_m$ . Pour ce qui reste de la preuve, nous fournissons un développement technique qui permet de calculer le deuxième paramètre  $\mu$ .

Cependant, nous pouvons vérifier que la fonction :

$$\alpha \mapsto \frac{e^{\alpha\delta} - 1}{\alpha\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\tau}{m}$$

est monotone et elle croît de 1 à  $\infty$  pour  $\alpha$  variant de 0 à  $\infty$ . Avec cette propriété, nous pouvons majorer  $c_j$  :

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{\gamma}{\alpha_j} (e^{\alpha_j\delta} - 1) = \gamma\delta \frac{e^{\alpha_j\delta} - 1}{\alpha_j\delta} \leq \gamma\delta \frac{e^{\alpha_1\delta} - 1}{\alpha_1\delta} \\ &\leq \gamma\delta \frac{e^{\bar{\alpha}_1\delta} - 1}{\bar{\alpha}_1\delta} = c_1 < 1 \end{aligned} \quad (\text{III.122})$$

où la constante  $c_1$  est définie en III.119. De la même façon, en combinant les équations III.122 et III.111 sachant que  $\alpha_j < \bar{\alpha}$ , nous pouvons écrire :

$$\mu_j \leq \frac{\beta}{1 - c_1} \left( 1 + 2 \frac{m}{\tau(\bar{\alpha} - \alpha_1)} \right) \mu_{j-1} + \gamma \frac{e^{\bar{\alpha}\frac{\tau}{m}}}{1 - c_1} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(\nu)\| d\nu \quad (\text{III.123})$$

Définissons maintenant la variable  $\rho$  telle que  $\rho = \frac{\beta}{1 - c_1} \left( 1 + 2 \frac{m}{\tau(\bar{\alpha} - \alpha_1)} \right)$ , l'équation III.123 peut s'écrire pour  $j = m$

$$\mu_m \leq \rho^{m-1} \mu_1 + \sum_{j=0}^{m-2} \rho^j \gamma \frac{e^{\bar{\alpha}\frac{\tau}{m}}}{1 - c_1} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_{m-j}(\nu)\| d\nu$$

Enfin, en remplaçant successivement  $\mu_1$  et  $\mu_0$  par leur propre expression donnée respectivement en ?? et III.115, nous obtenons le paramètre  $\mu$  du théorème 5.1

$$\mu_m \leq \mu \triangleq \theta^n \eta(\theta) \|KC\| \frac{\beta \rho^{m-1}}{1 - c_1} \left( 1 + \frac{\beta}{\lambda(\theta) - \bar{\alpha}} \right) e^{-\lambda(\theta)t} \tilde{x}_0(0) + \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j \gamma \frac{e^{\bar{\alpha}\frac{\tau}{m}}}{1 - c_1} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_{m-j}(\nu)\| d\nu$$

Ceci met fin à la démonstration.

**Remarque 5.1 :**

Dans l'approche proposée, la matrice  $\bar{A}$  est un paramètre de synthèse et elle doit être choisie de telle sorte que la condition III.113 du théorème 5.1 soit satisfaite. La considération d'une telle matrice  $\bar{A}$  Hurwitz est motivée par l'obtention d'une expression de  $r_j(t)$  indépendante du gain du prédicteur et exponentiellement convergente vers zéro (cf. III.108). Aussi, elle a permis d'obtenir une même structure de gain pour tous les prédicteurs. Ceci constitue alors une diffé-

rence fondamentale avec l'approche de conception proposée dans [Germani et al. 02] et facilite la flexibilité de l'implémentation sur les procédés avec une amélioration des performances.

**Remarque 5.2 :**

La vitesse de convergence vers zéro de l'erreur d'estimation du premier sous -système de la cascade  $\tilde{x}_0(t)$  est déterminée par les paramètres de synthèse  $\theta$  et  $K$ . Pour les prédicteurs, leur convergence est étroitement gérée par le paramètre  $\bar{A}$  et le nombre de sous-système de la cascade.

## 5.4 Exemple de simulation

### 5.4.1 Exemple du bioréacteur

Dans cette partie, nous illustrons la théorie développée dans la partie ci-dessus à travers un modèle de bioréacteur académique. Ce modèle est déjà étudié dans l'exemple de simulation de la *section 3* ou nous avons considéré que les deux composants, les micro-organismes et le substrat, sont présents en faible concentration afin de réaliser l'hypothèse de volume constant.

Nous considérons donc une culture microbienne simple qui constitue uniquement une seule croissance en biomasse  $x_1$  et un seul nutriment en substrat  $x_2$ . Le processus est continu avec un taux de dilution  $u(t)$  et une alimentation en substrat  $S_{in}(t)$ . Le taux de croissance spécifique est supposé suivre le modèle de Contois [Bailey et Ollis 86]. Le modèle mathématique de la dynamique du procédé est décrit par les équations d'équilibre des deux masses associées respectivement à  $x_1(t)$  et à  $x_2(t)$ , suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \frac{\mu^* x_1(t) x_2(t)}{K_c x_1(t) + x_2(t)} - u(t) x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{-k \mu^* x_1(t) x_2(t)}{K_c x_1(t) + x_2(t)} + u(t) (s_{in}(t) - x_2(t)) \\ y_\tau(t) &= h(x(t - \tau)) = x_1(t - \tau) \end{cases} \quad (\text{III.124})$$

$x_1(t)$  et  $x_2(t)$  représentent respectivement les concentrations en biomasse et en substrat,  $\mu^*$  et  $K_c$  sont les paramètres suivants la loi de Contois tandis que  $k$  est un coefficient de rendement. Les mesures de la concentration en biomasse sont, ici, supposées être disponible avec un retard non négligeable  $\tau$ . L'objectif consiste donc à reconstruire les trajectoires des concentrations à l'instant  $t$  à partir des mesures retardées.

### Chapitre III. Observateurs pour les systèmes non linéaires

---

Comme nous l'avons fait dans l'exemple de la section 3, définissons la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \Phi(X) \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \Phi(X) = \begin{pmatrix} \Phi_1(X) = x_1 \\ \Phi_2(X) = \frac{\mu^* x_1 x_2}{K_C x_1 + x_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

difféomorphe de  $X$  vers son image (cf. [Gauthier et al. 92]). En utilisant les nouvelles coordonnées  $z$ , Le système III.124 peut s'écrire sous la forme uniformément observable suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) - u(t)z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) = \frac{\partial \Phi_2(X)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial \Phi_2(X)}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) \\ y_\tau(t) = z_1(t - \tau) \end{cases}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \varphi(u(t), z(t)) \\ y_\tau(t_k) = Cz(t - \tau) \end{cases} \quad (\text{III.125})$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \varphi(u(t), z(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t)z_1(t) \\ \frac{\partial \Phi_2(X)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial \Phi_2(X)}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $\varphi_2(u(t), z(t)) = \frac{\mu^* x_1}{(K_C x_1 + x_2)^2} (u(t) (K_C x_1 (s_{in} - x_2) - x_2^2) + \frac{\mu^* x_2 (x_2^2 - k K_C x_1^2)}{K_C x_1 + x_2})$

Avec cette description, le système III.124 est sous la forme canonique uniformément observable de Brunovski pour laquelle la cascade d'observateur suivante est synthétisée

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_j(t) = A\hat{z}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{z}_j(t)) - G_j(t) & ; \text{ avec} \\ G_0(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K C (\hat{x}_0(t) - y_\tau(t)) & \text{ et pour } j = \{1, \dots, m\}; \\ G_j(t) = e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \left( (A - \bar{A}) (\hat{x}_j(t - \frac{\tau}{m}) - \hat{x}_{j-1}(t)) + \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_j(t - \frac{\tau}{m})) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \right) \end{cases}$$

$$\text{où } \hat{z}_j(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,j} \\ \frac{\mu^* \hat{x}_{1,j} x_{2,j}}{K_C \hat{x}_{1,j} + \hat{x}_{2,j}} \end{pmatrix};$$

la matrice  $K$  est choisie de sorte que les pôles de  $A - KC$  soient situés en  $-\theta$  :  $K = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}$$

$\theta$  et  $\bar{A}$  sont des paramètres de synthèse.

**Remarque 5.3 :**

Le système III.125 est une transformation du système III.124 par le biais de la fonction différentiable  $z = \Phi(x)$ . Pour réécrire l'observateur sous la forme initiale III.124, on applique la transformation inverse :  $\implies x = \Phi^{-1}(z)$ .

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_j(t) = f(\hat{X}_j(t)) + G(\hat{X}_j(t)) u_j(t) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_j}(\hat{X}_j(t)) \right)^{-1} G_j(t) & ; \text{avec} \\ G_0(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K C (\hat{X}_0(t) - y_\tau(t)) & \text{et pour } j = \{1, \dots, m\}; \\ G_j(t) = e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \left( (A - \bar{A}) (\hat{X}_j(t - \frac{\tau}{m}) - \hat{X}_{j-1}(t)) + \varphi(u_{j-1}(t), \hat{X}_j(t - \frac{\tau}{m})) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{X}_{j-1}(t)) \right) \end{cases}$$

$$\text{où } \hat{X}_j = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,j} \\ \hat{x}_{2,j} \end{pmatrix}, \quad f(\hat{X}_j(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\mu^* \hat{x}_{1,j}(t) \hat{x}_{2,j}(t)}{K_c \hat{x}_{1,j}(t) - \hat{x}_{2,j}(t)} & \frac{-\mu^* k \hat{x}_{1,j}(t) \hat{x}_{2,j}(t)}{K_c \hat{x}_{1,j}(t) - \hat{x}_{2,j}(t)} \end{pmatrix}^T$$

$$\text{et } g(\hat{X}_j(t)) = \begin{pmatrix} -\hat{x}_{1,j}(t) \\ (S_{in} t - \hat{x}_{2,j}(t)) \end{pmatrix}$$

Des simulations ont été réalisées sous l'environnement *Matlab – Simulink* en supposant un retard constant  $\tau = 5$  secondes. Les valeurs suivantes sont adressées aux paramètres du modèle :

$$\mu^* = 1(\text{min}^{-1}) \quad ; \quad K_c = 1 \quad ; \quad k = 1 \quad ; \quad S_{in} = 0.1(\text{kg.m}^{-3}) \text{ et}$$

$$u(t) = \frac{0.08}{60} (1 + \sin(0.2t)) (s^{-1})$$

Notons que le point d'équilibre du système III.124 est obtenu en  $(x_{1,0}, x_{2,0}) = (0.092, 0.008)$ . Les tests de l'observateur ont été effectués à l'aide des pseudo-mesures émises par la simulation du système III.124 avec le point d'équilibre comme condition initiale. L'état initial de l'observateur est tel que celui-ci correspond à la concentration en substrat perturbée de 50% de sa valeur à l'état stationnaire. Les paramètres de synthèse ont été choisis  $\theta = 5$  et  $\bar{A} = A - I_2$ . Rappelons que les choix de  $\theta$  et de  $\bar{A}$  doivent satisfaire la condition III.113 du théorème 5.1. Les résultats de simulations sont présentés dans les figures III.6 et III.7.

Les mesures réelles de la concentration en biomasse  $x_1(t)$  sont présentées sur la figure III.6. Elles sont comparées avec leurs estimations délivrées par l'observateur III.126. De même que

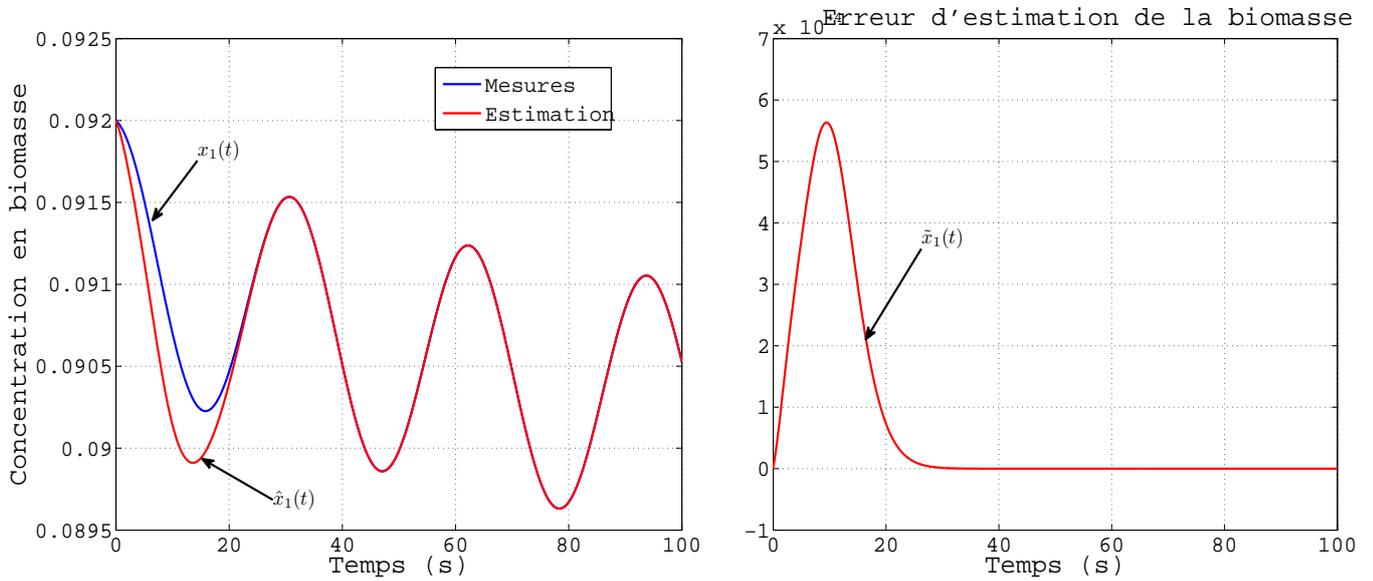


Figure III.6 – Estimation des mesures de la biomasse pour  $n_c = m + 1 = 5$

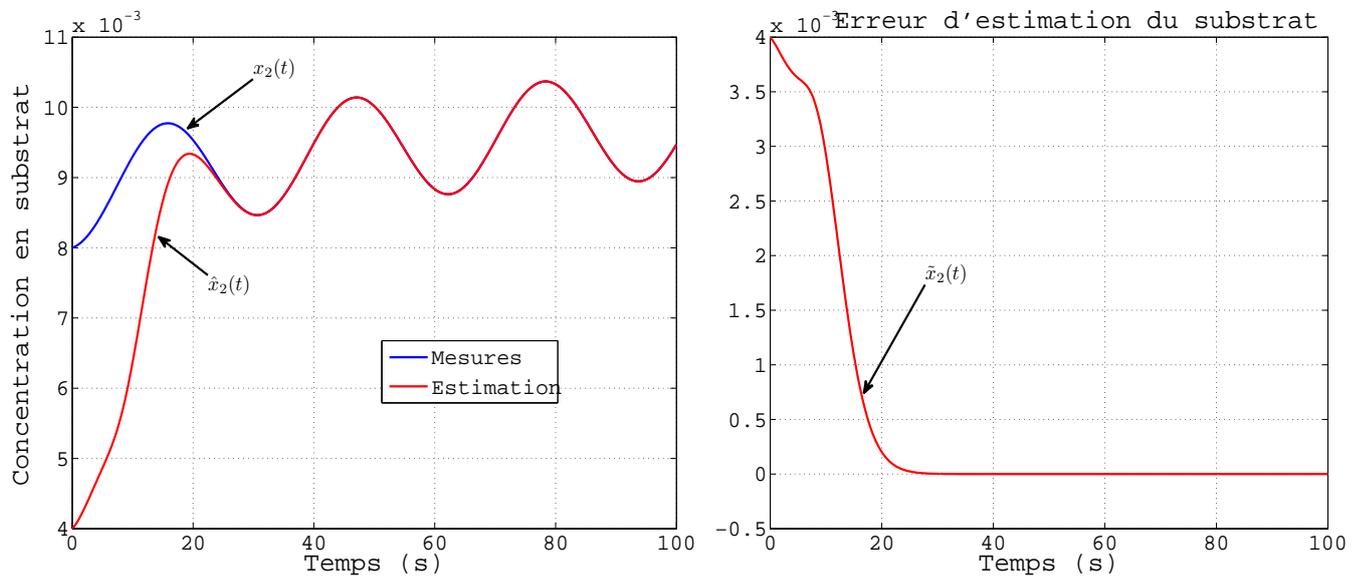


Figure III.7 – Estimation continue des mesures du substrat pour  $n_c = m + 1 = 5$

la trajectoire inconnue du substrat  $x_2(t)$  fournie par le modèle est présentée sur la figure III.7. Sur les figures à droite, nous remarquons une convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'estimation entre l'état réel du système non retardé et l'état du dernier prédicteur de la cascade, confirmant ainsi les résultats théoriques. Sur la figure III.8, la trajectoire de l'erreur

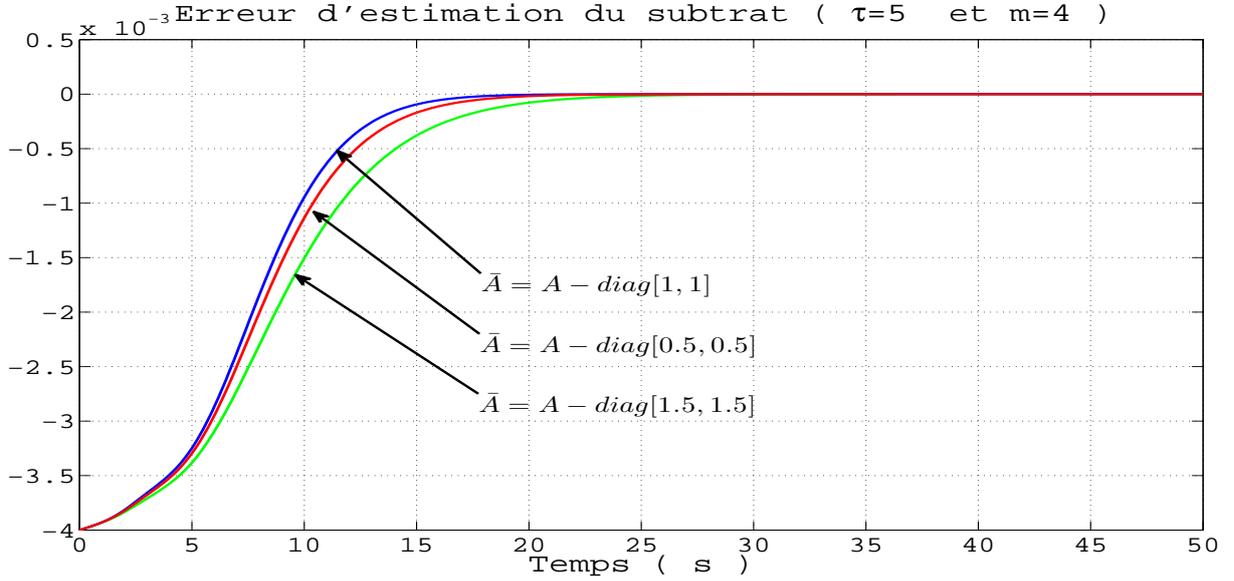


Figure III.8 – Trajectoire de l'erreur  $\tilde{x}_2$  pour plusieurs valeurs de  $\bar{A}$

d'estimation du substrat avec plusieurs valeurs de  $\bar{A}$ . Ainsi, nous pouvons constater clairement que la valeur  $\bar{A}$  a un rôle important sur la dynamique de l'observateur.

#### 5.4.2 Comparaison des résultats

Dans le but de comparer l'efficacité de notre observateur avec celui de [Germani et al. 02], nous allons illustrer les performances des deux observateurs à travers le même système : le bioréacteur académique décrit en III.124.

Nous avons montré dans l'exemple précédent qu'en effectuant le changement de variable qui définit la fonction difféomorphique  $\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{\mu^* x_1 x_2}{K_C x_1 + x_2} \end{pmatrix}$ , le système III.124 s'écrit sous la forme canonique uniformément observable, (cf. III.125).

Pour la classe de système considérée, l'observateur composé de la cascade de prédicteur proposé par [Germani et al. 02] s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0(t) &= f(\hat{x}_0(t)) + g(\hat{x}_0(t)) u_0(t) + Q^{-1}(\hat{x}_0(t)) K [y_\tau - \hat{x}_0(t)] \\ \dot{\hat{x}}_j(t) &= f(\hat{x}_j(t)) + g(\hat{x}_j(t)) u_j(t) + Q^{-1}(\hat{x}_j(t)) \left\{ e^{A_2 \frac{\tau}{m} j} K [y_\tau - \hat{x}_0(t)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{j-1} e^{A_2 \frac{\tau}{m} (j-i)} [H(\hat{x}_i(t), u_i(t)) - H(\hat{x}_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}), u_i(t))] \right\} \end{cases}$$

où  $H(\hat{x}_j(t), u_j(t)) = B_2 L_f^2 h(\hat{x}_j) + Q(\hat{x}_j) g(\hat{x}_j) u_j(t)$ , avec  $L_f^2 h(x)$  est la dérivé de Lie d'ordre

2 de  $h(x)$  par rapport à  $f(x)$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad g(\hat{x}_j(t)) = \begin{pmatrix} -\hat{x}_{1,j}(t) \\ (S_{int} - \hat{x}_{2,j}(t)) \end{pmatrix}$$

$$f(\hat{x}_j(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\mu^* \hat{x}_{1,j}(t) \hat{x}_{2,j}(t)}{K_c \hat{x}_{1,j}(t) - \hat{x}_{2,j}(t)} & \frac{-k\mu^* \hat{x}_{1,j}(t) \hat{x}_{2,j}(t)}{K_c \hat{x}_{1,j}(t) - \hat{x}_{2,j}(t)} \end{pmatrix}^T$$

$$Q(\hat{x}_j) = \frac{\partial \Phi(\hat{x}_j)}{\partial \hat{x}_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mu^* (\hat{x}_{1,j}(t))^2}{(K_c \hat{x}_{1,j}(t) - \hat{x}_{2,j}(t))^2} & \frac{\mu^* K_c (\hat{x}_{2,j}(t))^2}{(K_c \hat{x}_{1,j}(t) - \hat{x}_{2,j}(t))^2} \end{pmatrix}$$

$$L_f^2 h(\hat{x}_j) = \frac{(\mu^*)^2 \hat{x}_{1,j}(t) \hat{x}_{2,j}(t)}{(K_c \hat{x}_{1,j}(t) - \hat{x}_{2,j}(t))^3} \left[ (\hat{x}_{2,j}(t))^2 - k K_c (\hat{x}_{1,j}(t))^2 \right]$$

Pour des raisons de simplicité, nous nous référons dans la suite comme suit :

- **Observateur 1** désigne l'observateur proposé par [Germani et al. 02].
- **Observateur 2** désigne l'observateur proposé en III.110

Les paramètres du système restent inchangés par rapport à l'exemple précédent. Les conditions initiales pour le système et pour les deux observateur sont choisies identiques :  $x(0) = [1 \ -1]^T$  ;  $\hat{x}(0) = [0.092 \ 0.004]^T$  et  $\hat{x}(t) = [0 \ 0]^T$  pour  $\forall t < \tau$ .

De même, les gains des deux observateurs ont été choisis identiques :  $K = \begin{pmatrix} 2\theta \\ \theta^2 \end{pmatrix}$ . Il est important de signaler que l'observateur 1 diverge pour des valeur de  $\theta > 2$  alors que l'observateur 2 reste stable pour des valeurs beaucoup plus élevées.

Pour la suite, nous allons comparer les résultats obtenus en simulation avec les deux observateurs pour plusieurs nombres de sous-système en cascade. Afin d'éviter la redondance des résultats, nous étudions uniquement les trajectoires des erreurs de prédiction sur  $x_2(t)$ , car celles obtenues sur  $x_1(t)$  sont quasi similaires. Les simulations sont effectuées avec les fonctions *Matlab* résolvant les équations différentielles avec retard constant, à savoir *dde23*.

Nous résumons la comparaison avec les résultats du tableau III.1 sur lequel la première ligne indique le nombre de prédicteur dans la cascade. Ce dernier est appelé  $n_c$  et il est égal à  $m + 1$  pour les deux observateurs. Les lignes restantes fournissent la valeur maximale du retard admissible pour chacun des deux observateurs. Une valeur du retard est dite admissible si la condition suivante est satisfaite : L'erreur de prédiction est située dans une boule dont le rayon est inférieur à  $10^{-5}$  pour  $\forall t > 20 \text{ sec}$ . La simulation commence à  $t = 0$  et se termine

### III.5 Observateur pour les systèmes non linéaires à sortie retardée

à  $t = 100$  sec. Toutefois, le critère de 20 sec est choisi arbitrairement. Nous aurions pu le fixer à une autre valeur sans pour autant modifier la conclusion sur la comparaison des deux observateurs.

Observer \ $n_c$	2	3	5	6	10
Observateur de Germani	1.3	2.5	3.9	4.6	6.5
Observateur proposé	2.6	4.2	6.5	8	12.5

**Tableau III.1** – Valeur maximale du retard admissible pour les deux observateurs composés d'une cascade de  $n_c = m + 1$  sous-systèmes

Un examen rapide du tableau permet de conclure que :

- Pour toutes les valeurs de  $n_c$ , la valeur maximale du retard admissible pour l'observateur 1 est toujours inférieur à celle requit pour l'observateur 2 et la différence s'accroît plus autour des grandes valeurs de  $n_c$

Il est important de préciser qu'au de-là des valeur du retard indiquées dans le tableau III.1, l'observateur 2 reste convergent. Ce qui n'est pas toujours le cas pour l'observateur 1. En outre, en présence de bruit de mesure, les estimations de l'observateur 1 explosent très vite tandis que celles de l'observateur 2 restent satisfaisantes.

## 5.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons étudié l'observation pour les systèmes non linéaires retardés qui peuvent s'écrire sous la forme canonique uniformément observable. Dans la première partie, nous avons défini la propriété principale de notre observateur qui consiste en une cascade de  $(m + 1)$  sous-systèmes dont le premier sous-système est un observateur grand gain continu qui estime l'état retardé du système et les  $m$  autres restants sont des prédicteurs. Chaque prédicteur estime l'état du sous-système précédent avec un horizon de  $\frac{\tau}{m}$  afin que le dernier de la cascade reconstruise l'état réel du système à l'instant  $t$ . L'observateur est présenté avec une structure générale identique pour tous les prédicteurs et facile à implémenter. Cette structure est obtenue grâce à l'incorporation d'une matrice Hurwitz permettant d'accéder à la dérivée d'une expression simple et celle-ci conduit systématiquement à un terme de gain avec une forme similaire pour chaque prédicteur. La convergence exponentielle de l'observateur est démontrée en utilisant une méthode récursive et elle est obtenue avec une contrainte liant la valeur du retard au nombre de prédicteur dans la cascade, à la matrice Hurwitz introduite et aux autres paramètres du système. Les performances de l'observateur ont été illustrées en simulation et les résultats obtenus sont satisfaisants.

Une étude comparative des performances de notre observateur avec celles proposées par [Germani et al. 02] est illustrée à travers le modèle du bioréacteur académique. Celle-ci a permis de constater que notre cascade de prédicteur est plus performante en terme de stabilité et de rapidité en considérant le même retard et le même nombre de prédicteur en cascade. Et en présence de bruit de mesure, l'observateur de [Germani et al. 02] perd très vite ses propriétés de stabilité tandis que le nôtre reste toujours convergent.

## 6 Conclusion

Ce troisième chapitre est consacré à l'étude d'observateurs pour la classe des systèmes non linéaires uniformément observables qui comporte des complexités majeures comme la discrétisation des mesures avec incertitude de modélisation où le retard sur la sortie. Pour chacune des difficultés énumérées, nous avons traité dans une section à part un observateur avec toutes les conditions nécessaires pour garantissant la convergence.

- Dans la deuxième section, nous avons synthétisé l'observateur grand gain continu et la preuve de convergence exponentielle de l'observateur dans le cas nominal est détaillée. Sachant que cet observateur présente des limites lors des mises en œuvre numérique, nous avons voulu étendre ses propriétés afin de fournir des réponses aux exigences liées aux incertitudes de modélisation ou à la discrétisation des mesures ou encore au retard sur les sorties.
- Dans la troisième section, nous avons résolu le problème de l'observateur pour la même classe de système avec sortie discrétisée. Deux stratégies de synthèse différentes basées sur l'approche grand gain ont été développées pour obtenir deux structures d'observateur différentes. Le premier observateur est proposé avec une seule équation dynamique qui s'écrit avec la même structure que l'observateur grand gain traditionnel. Le terme correctif fait intervenir une fonction matricielle exponentielle permettant de compenser les erreurs d'estimations évaluées uniquement aux instants d'échantillonnage. Le deuxième observateur est proposé sous une forme hybride. Il incorpore une variable de prédiction qui reconstruit la trajectoire de la sortie en utilisant les états de l'observateur afin de calculer l'erreur d'estimation en continu. Le réglage de ces deux observateurs est assuré par un seul paramètre de synthèse. La preuve de la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation vers zéro est détaillée. Cette dernière est obtenue avec une contrainte suffisante reliant la période d'échantillonnage maximal admissible et le paramètre de synthèse.
- Dans la quatrième section, nous avons étudié l'observateur pour la même classe de système

à sortie échantillonnée comprenant des incertitudes de modélisation. Nous avons montré que l'observateur impulsif continu-discret proposé le chapitre 3 peut fournir de bonnes estimations malgré la présence des incertitudes. De plus, l'erreur d'estimation converge exponentiellement dans une boule centrée à l'origine avec un diamètre relié à la borne supérieure des incertitudes. Cette borne est aussi dépendante d'une fonction croissante en  $\tau_M$  (période d'échantillonnage maximal admissible) et du paramètre de synthèse  $\theta$ . Ainsi une condition suffisante reliant  $\tau_M$  et  $\theta$  est établie et elle doit être satisfaite lors du réglage de l'observateur.

- La cinquième section est consacrée à la synthèse d'observateur pour la même classe de système non linéaire avec sortie retardé. Nous avons proposé un observateur constitué d'une chaîne de prédicteur en cascade. Tous les prédicteurs ont une même structure constituée d'une copie du système plus un terme de correction obtenue suite à l'incorporation d'une fonction dérivable exponentiellement convergente. Et contrairement aux autres cascades de prédicteur fréquemment dans la littérature où leur expression du gain devient de plus en plus complexe avec l'augmentation du rang du prédicteur, le gain de chacun de nos prédicteur dépend uniquement de l'état retardé du prédicteur impliqué et de l'état du prédicteur précédent. La preuve de la convergence exponentielle de l'observateur est détaillée et elle est obtenue avec une contrainte reliant la valeur du retard et le nombre de prédicteur dans la cascade



---

## Références Bibliographiques

- [Andrieu et Praly 06] V. ANDRIEU, L. PRALY : On the existence of a kazantzis–kravaris/luenberger observer. SIAM J. Control Optim., 45(2):432–456, février 2006. [74](#)
- [Bailey et Ollis 86] J. BAILEY, D. OLLIS : Biochemical Engineering Fundamentals. McGraw-Hill, New York, 1986. [69](#), [101](#)
- [Barbot et al. 96] J.-P. BARBOT, T. BOUKHOBZA, M. DJEMAI : Sliding mode observer for triangular input form. In Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on, volume 2, pages 1489–1490 vol.2, Dec 1996. [49](#)
- [Bastin et Gevers 88] G. BASTIN, M. GEVERS : Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 33(7):650–658, Jul 1988. [49](#)
- [Bornard et Hammouri 91] G. BORNARD, H. HAMMOURI : A high gain observer for a class of uniformly observable systems. pages 1494–1496, 1991. [49](#)
- [Bouraoui et al. 14] I. BOURAOUI, M. FARZA, T. MENARD, R. BEN ABDENNOUR, M. M’SAAD : Sampled output observer design for a class of nonlinear systems. In Control Conference (ECC), 2014 European, pages 312–317, June 2014. [73](#), [78](#), [81](#)
- [Busawon et al. 98] K. BUSAWON, M. FARZA, H. HAMMOURI : A simple observer for a class of nonlinear systems. Applied Mathematics Letters, 11(3):27–31, 1998. [49](#)
- [Fall et al. 13] M. FALL, M. FARZA, M. M’SAAD, E. PIGEON, O. GEHAN : Cascade observer for a class of nonlinear systems with output delays. In Control Conference (ECC), 2013 European, pages 2140–2145, July 2013. [89](#), [96](#)

## Références Bibliographiques

---

- [Farza et al. 98] M. FARZA, K. BUSAWON, H. HAMMOURI : Simple Nonlinear Observers for On-line Estimation of Kinetic Rates in Bioreactors. Automatica, 34(3):301–318, 1998. [84](#)
- [Farza et al. 04] M. FARZA, M. M'SAAD, L. ROSSIGNOL : Observer design for a class of mimo nonlinear systems. Automatica, 40(1):135–143, jan 2004. [52](#), [53](#), [54](#), [64](#), [75](#), [76](#)
- [Farza et al. 08] M. FARZA, M. M'SAAD, T. MAATOUG, M. KAMOUN : Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. Automatica, 45(10):2292–2299, 2008. [74](#)
- [Farza et al. 13] M. FARZA, M. M'SAAD, M. FALL, E. PIGEON, O. GEHAN, R. MOSRATI : Continuous-discrete time observers for a class of mimo nonlinear systems. In Control Conference (ECC), 2013 European, pages 2146–2151, July 2013. [63](#), [66](#)
- [Fridman et al. 08] L. FRIDMAN, Y. SHTESEL, C. EDWARDS, X.-G. YAN : Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 18(4-5):399–412, 2008. [49](#)
- [Gauthier et al. 92] J. GAUTHIER, H. HAMMOURI, S. OTHMAN : A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. Automatic Control, IEEE Transactions on, 37(6):875–880, Jun 1992. [50](#), [69](#), [84](#), [102](#)
- [Gauthier et Bornard 80] J. GAUTHIER, G. BORNARD : Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. pages 910–915, Dec 1980. [49](#)
- [Germani et al. 02] A. GERMANI, C. MANES, P. PEPE : A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. 47(1):96–101, 2002. [89](#), [90](#), [93](#), [95](#), [101](#), [105](#), [106](#), [108](#)
- [Hammouri et Farza 03] H. HAMMOURI, M. FARZA : Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. ESAIM J. on Control, Optimisation and Calculus of Variations, 9:353–370, 2003. [54](#), [64](#), [74](#), [76](#)
- [Kalman 59] R. KALMAN : On the general theory of control systems. Automatic Control, IRE Transactions on, 4(3):110–110, Dec 1959. [51](#)
- [Kalman 60] R. E. KALMAN : A new approach to linear filtering and prediction problems. Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, vol.82(Series D):pp.35–45, 1960. [49](#)
- [Karafyllis et Kravaris 09] I. KARAFYLLIS, C. KRAVARIS : From continuous-time design to sampled-data design of observers. IEEE Transactions on Automatic Control, 54(9):2169–2174, 2009. [55](#)

- [Kazantzis et Wright 05] N. KAZANTZIS, R. A. WRIGHT : Nonlinear observer design in the presence of delayed output measurements. *54(9):877–886*, 2005. [89](#), [95](#)
- [Khalil 03] H. K. KHALIL : Nonlinear systems. Printice Hall, third edition, New Jersey, 2003. [95](#)
- [Krener et Isidori 83] J. KRENER, Arthur, A. ISIDORI : Linearization by output injection and nonlinear observers. Systems and Control letters, 3(1):47–52, 1983. [49](#)
- [Luenberger 71] G. LUENBERGER, David : An introduction to observers. IEEE Transactions on Automatic and Control, AC-16:pp.596–602, 1971. [49](#)
- [Marino et al. 93] R. MARINO, S. PERESADA, P. VALIGI : Adaptive input-output linearizing control of induction motors. Automatic Control, IEEE Transactions on, 38(2):208–221, Feb 1993. [49](#)
- [Mazenc et Niculescu 01] F. MAZENC, S. NICULESCU : Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems. *42:245–251*, 2001. [88](#)
- [Naghshtabrizi et al. 08] P. NAGHSHTABRIZI, J. HESPANHA, A. TEEL : Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. Systems & Control Letters, 57:378–385, 2008. [51](#), [56](#)
- [Raff et al. 08] T. RAFF, M. KÖGEL, F. ALLGÖWER : Observer with sample-and-hold updating for Lipschitz nonlinear systems with nonuniformly sampled measurements. In Proc. of the American Control Conference, Washington, USA, 2008. [55](#)
- [Seuret 06] A. SEURET : Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications. Thèse de doctorat, 2006. Thèse de doctorat dirigée par Richard, Jean-Pierre et Dambrine, Michel Informatique industrielle et automatique Ecole Centrale de Lille 2006. [88](#)
- [Shim et al. 01] H. SHIM, Y. I. SON, J. H. SEO : Semi-global observer for multi-output nonlinear systems. Systems and Control Letters, 42:233–244, 2001. [74](#)
- [Trinh et al. ] H. TRINH, M. ALDEEN, S. NAHAVANDI : An observer design procedure for a class of nonlinear time-delay systems, year = 2004, journal = Computers and electrical engineering, pages = 61-71, volume = 30,. [88](#)

## Références Bibliographiques

---

---

---

# Chapitre IV

---

## Loi de Commande Non-linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur

### 1 Introduction

Lors d'une fermentation, le milieu de culture doit avoir une composition très précise pour optimiser la bioréaction. Ce dernier doit pouvoir subvenir à tout instant aux besoins en nutriments et en oxygène sans pour autant les placer en situation de débordement ou de déficit. Les systèmes de commande mis en place doivent satisfaire les exigences de quantité et de qualité, sécuriser le fonctionnement vis-à-vis des personnes et des installations. Pour cela, ils doivent assurer la stabilité du processus et minimiser l'influence des perturbations sur les variables physiques comme la température, la pression, la concentration de certains composants. La concentration en oxygène dissout est un paramètre essentiel puisqu'elle régit le métabolisme du substrat et la vitesse de reproduction des cellules. La maîtrise de cette concentration permet en outre de minimiser le temps de fermentation et de maximiser le rendement de la production de biomasse. Sa plage optimale admissible est très étroite. En dehors de cette plage, l'oxygène a un effet toxique ou inhibiteur pour la réaction. Dans ce chapitre, nous présentons deux approches de lois de commande non linéaires pour réguler la concentration en oxygène dissout au voisinage d'une valeur critique, appelée consigne, avec une précision de  $\pm 2\%$ . Les lois de commande du type grand gain et backstepping.

## 2 Formulation du problème

Dans cette section, nous présentons la classe des systèmes non linéaires pour laquelle les lois de commande ont été développées. Une action intégrale est associée au système afin d'assurer un rejet des perturbations de type échelon. Le système de commande complet est écrit sous la forme canonique commandable de Brunovski. Cette formulation permet donc, à partir d'un modèle de référence, d'exprimer la dynamique de l'erreur de poursuite entre la trajectoire du système et celle de la référence.

### 2.1 Classe des systèmes uniformément commandable

La commande non-linéaire a été développée pour les systèmes commandables que l'on peut décrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bb(x)u(t) + \varphi(x(t)) \\ y(t) = Cx(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \varphi_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad C = (1, 0, \dots, 0) \quad (\text{IV.2})$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  désigne le vecteur d'état du système,  $u(t) \in \mathbb{R}$  désigne l'entrée du système et  $b(x) \in \mathbb{R}$  et  $\varphi(x(t))$  désignent respectivement la non-linéarité liée à l'entrée et celle du système.  $y(t)$  est la sortie du système et elle est supposée mesurable.

**Propriété 2** *Pour un système de commande, la propriété essentielle à remplir pour assurer une poursuite asymptotiquement parfaite de la sortie vers la référence est :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0 \quad (\text{IV.3})$$

où  $y_r(t)$  désigne la trajectoire de sortie désirée dont on suppose que les dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  sont disponibles.

Ce problème de commande est bien posé à la condition que les fonctions  $b$  et  $\varphi$  vérifient les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 2.1 :**

La fonction  $b$  est Lipschitzienne sur  $\Omega$  (ensemble compact dans  $\mathbb{R}$ ) et il existe deux scalaires positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\forall x \in \Omega \quad , \quad \text{on a} \quad \alpha^2 \leq b(x)b^T(x) \leq \beta^2$$

**Hypothèse 2.2 :**

Les fonctions  $\varphi^i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont Lipschitziennes par rapport à  $x$  si et seulement si

$$\forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \quad \|\varphi_i(x) - \varphi_i(\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\| \quad (\text{IV.4})$$

où  $L > 0$  est la constante de Lipschitz associée à  $\varphi^i$

Pour la classe des systèmes considérés IV.1, le modèle de référence peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = Ax_r(t) + Bb(x_r)u_r(t) + \varphi(x_r(t)) \\ y_r(t) = Cx_r(t) \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

où  $u_r(t) \in \mathbb{R}$  et  $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$  désignent respectivement la séquence d'entrée et la trajectoire d'état du système correspondant à la trajectoire de sortie définie par  $y_r(t) \in \mathbb{R}$ .

Le problème de poursuite parfaite en sortie (cf. IV.3) peut alors être étendu au problème de poursuite de trajectoire d'état défini par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_r(t)) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Et la condition IV.6 peut être interprétée comme un problème de régulation pour le système d'erreur ( $e(t) = x(t) - x_r(t)$ ) obtenu à partir des équations du système IV.1 et du modèle de référence IV.5.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B(b(x)u - b(x_r)u_r) + \varphi(x(t)) - \varphi(x_r(t)) \quad (\text{IV.7})$$

## 2.2 Modèle de commande associé à l'oxygène

Lors une culture aérobie, nous agissons sur l'hydro-dynamique de la solution pour faciliter le transfert de l'oxygène de l'état gazeux à l'état liquide. L'objectif consiste à accroître la turbulence (ou l'agitation) afin de diminuer la couche limitante de l'échange. Dans le modèle dynamique décrivant l'évolution du taux d'oxygène dissout, le terme qui exprime la quantité d'oxygène transférée par unité de temps est noté  $OTR$  (Oxygène Transfert Rate) et son expression est

$$OTR(t) = K_l a (O_2^* - O_2(t))$$

Le terme  $(O_2^* - O_2)$  ne dépend pas de l'agitation, mais plutôt de la nature du milieu, de la température et de la pression partielle du constituant à dissoudre. Il est généralement admis que le  $K_l a$  fait intervenir la puissance mécanique dissipée dans le milieu et le type de mobile utilisé pour assurer à la fois une forte agitation (liée à l'énergie dissipée) et une dispersion convenable du gaz sous forme de bulles. Il dépend donc de manière intrinsèque de la vitesse d'agitation appliquée par le moteur et du débit d'air injecté dans la culture. Ainsi le  $K_l a$  est considéré comme le paramètre de commande  $u(t) = K_l a$  du modèle.

$$\begin{cases} \frac{dO_2(t)}{dt} = u(t) (O_2^* - O_2(t)) - r_{O_2}(t) - \frac{D(t)}{V(t)} O_2(t) \\ y_r(t) = O_2(t) \end{cases}$$

Le modèle de référence associé au modèle décrit ci-dessus peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dO_{2,ref}(t)}{dt} = u_{ref}(t) (O_2^* - O_{2,ref}(t)) - \frac{D(t)}{V(t)} O_{2,ref}(t) \\ y_r(t) = O_{2,ref}(t) \end{cases} \quad (IV.8)$$

Pour la synthèse de ce modèle de référence, nous avons fait l'hypothèse que nous n'avons aucune connaissance a priori sur le terme exprimant la vitesse de réaction  $r_{O_2}$ . Dans la littérature, cette vitesse de réaction est généralement modélisée de manière empirique et sera en conséquence considérée comme une perturbation pour le système de commande. En tout état de cause, sachant que dans le cadre de cette thèse,  $O_{2,ref}$  est constante, le problème d'erreur de modélisation engendré par ce terme absent dans le modèle de référence n'interviendra pas dans la loi de commande. Par conséquent, la dynamique de l'erreur s'écrit comme suit

$$\dot{\tilde{O}}_2(t) = \dot{O}_2(t) - \dot{O}_{2,ref}(t) = \dot{O}_2(t)$$

$$\dot{\tilde{O}}_2(t) = u(t) (O_2^* - O_2(t)) - r_{O_2}(t) - \frac{D(t)}{V(t)} O_2(t) \quad (\text{IV.9})$$

Si nous incorporons l'action intégrale à la sortie du système d'erreur, le modèle de commande utilisant la dynamique de l'erreur et la définition de l'*OTR* s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = \tilde{O}_2(t) \\ \dot{\tilde{O}}_2(t) = u(t) b(\tilde{O}_2) - r_{O_2}(t) - \frac{D(t)}{V(t)} O_2(t) \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

avec  $b(\tilde{O}_2) = (O_2^* - \tilde{O}_2 - O_{2,ref})$ . Si nous définissons  $e(t)$  comme étant le vecteur d'état

$$e(t) = \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ \tilde{O}_2(t) \end{pmatrix}$$

le système [IV.10](#) peut se mettre alors sous la forme canonique commandable de Brunovski [IV.1](#)

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B(b(e)u(t) - r_{O_2}(t) - \frac{D(t)}{V(t)}O_2(t)) \quad (\text{IV.11})$$

où  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ;  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 3 Commande Grand Gain

### 3.1 Synthèse

Dans cette section, nous nous intéressons à la synthèse d'un premier système de commande non linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout en exploitant les mesures échantillonnées délivrées par les capteurs. L'objectif consiste dans un premier temps à synthétiser une loi de commande non-linéaire par retour d'état de type grand gain afin d'assurer le maintien du taux d'oxygène dissout au voisinage de la référence souhaitée. D'un point de vue pratique, la mesure du taux d'oxygène dissout n'étant pas disponible en ligne, nous utilisons l'observateur impulsif continu discret proposé dans le chapitre précédent pour reconstruire une estimation continue de la sortie du système et des paramètres clés de la réaction intervenant dans la loi de commande. Les analyses de la stabilité du système de commande proposé restent actuellement un problème ouvert. Les performances commande sont cependant évaluées dans un premier temps en simulation avant l'expérimentation. Pour le modèle de commande utilisé pour la synthèse, la

## Chapitre IV. Loi de Commande Non-linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur

---

loi de commande grand gain par retour de sortie est celle proposée par [Sekher et al. 07] :

$$\begin{cases} u(t) = b^+(e) \left( r_{O_2}(t) + \frac{D(t)}{V(t)} O_2(t) + \nu(e) \right) \\ \text{avec } \nu(e) = -\lambda B^T \Delta_\lambda^{-1} K_c (\bar{S} \Delta_\lambda e) \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

où  $b^+(e)$  est l'inverse à gauche de la fonction  $b(e)$  et son existence est assurée sous l'hypothèse 2.1.  $\Delta_\lambda$  est la matrice diagonale suivante.

$$\Delta_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$\lambda > 0$  est le paramètre de synthèse.

$\bar{S}$  est l'unique solution définie positive de l'équation de Lyapunov suivante :

$$\bar{S} + A^T \bar{S} + \bar{S} A = \bar{S} B B^T \bar{S} \quad (\text{IV.13})$$

$K_c : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  est une fonction bornée satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall \zeta \in \Omega \quad , \quad \zeta^T B B^T K_c(\zeta) \geq \frac{1}{2} \zeta^T B B^T \zeta \quad (\text{IV.14})$$

Le gain de commande dépend donc d'une fonction de synthèse  $K_c$  bornée et satisfaisant la propriété IV.14. Quelques fonctions éligibles sont proposées dans [Bedoui et al. 08] et celles-ci permettent de retrouver les meilleures performances de la loi de commande. On distingue :

- les fonctions de synthèse de type grand gain données par

$$K_c(\zeta) = k_c \zeta$$

où  $k_c$  est une constante positive :  $k_c \geq \frac{1}{2}$ .

- les fonctions de synthèse de type mode glissant données par

$$K_c(\zeta) = k_c \text{sign}(\zeta)$$

où  $k_c$  est un scalaire positif et  $\text{sign}$  est la fonction signe usuelle.

- les fonctions de synthèse communément utilisées dans la pratique à modes glissants pour s'affranchir du phénomène de chattering

$$K_c(\zeta) = k_c \tanh(k_0 \zeta)$$

où  $\tanh$  est la fonction tangente hyperbolique et  $k_c$  et  $k_0$  sont deux scalaires positifs.

Le choix de la fonction  $K_c$  ne se limite pas forcément aux trois fonctions proposées ci-dessus. D'autres expressions valables demeurent exploitables notamment l'inverse de la fonction tan-

gente ou la somme des fonctions de type grand gain avec celles de type mode glissant etc. Le choix de  $K_c$  doit satisfaire en permanence la condition IV.14.

En pratique, les mesures de l'état et des variables clés de la réaction ne sont pas toujours disponibles. Nous proposons une commande avec retour d'état conçue à partir du principe de séparation comme dans le cas des systèmes linéaires [Mahmoud et Khalil 96]. Nous remplaçons les variables non disponibles par leurs estimations délivrées par l'observateur impulsif continu discret proposé dans le chapitre précédent.

La loi de commande proposée par [Sekher et al. 07] utilisant les états estimés s'écrit comme suit

$$\begin{cases} u(t) = b^+(\hat{e}) \left( \hat{r}_{O_2}(t) + \frac{D(t)}{V(t)} \hat{O}_2(t) + \nu(\hat{e}) \right) \\ \text{avec } \nu(\hat{e}) = -\lambda B^T \Delta_\lambda^{-1} K_c (\bar{S} \Delta_\lambda \hat{e}) \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

où les paramètres  $b^+(\hat{e})$ ,  $\Delta_\lambda$ ,  $\lambda$  et  $K_c$  sont déjà définis dans le cas nominal

et  $\hat{e}(t)$  est le nouveau vecteur d'état :  $\hat{e}(t) = \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ \tilde{O}_2(t) \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{O}_2(t) = \hat{O}_2(t) - O_{2,ref}$ ,

La preuve de la convergence de l'association de la commande et de l'observateur dans le cas où les mesures sont continues est détaillée dans [Hajji 09] et en particulier dans [Fall et al. 12] où l'auteur considère un système avec incertitude de modélisation. Dans notre cas, en présence d'incertitude, l'observateur impulsif proposé converge exponentiellement dans une boule. Cependant, la preuve de convergence de l'association de la commande et de l'observateur reste un problème ouvert.

### 3.2 Résultats en simulation

Considérons un bioréacteur académique à double parois au sein duquel se déroule une culture de bactéries *Pseudomonas putida* alimentée en glycérol et opérée en mode fedbatch. Une telle fermentation est réalisée en introduisant à l'instant initial une concentration  $X_0$  de biomasse et une concentration  $S_0$  de glycerol. Au cours du processus, la biomasse consomme le glycérol et de l'oxygène qui est apporté en permanence par injection d'air. Contrairement aux autres bactéries qui synthétisent un deuxième produit spécifique lors de leur fermentation, le *Pseudomonas putida* produit uniquement du gaz carbonique  $CO_2$ . La culture se déroule donc en deux étapes. La première est menée en mode continu (ou batch). La biomasse consomme le glycérol initialement présent dans la cuve. Lorsque la concentration du glycérol atteint un niveau critique, on déclenche une alimentation et la fermentation se déroule par la suite en mode semi-continu (ou fed-batch).

## Chapitre IV. Loi de Commande Non-linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur

---

Le modèle mathématique d'un tel système est obtenu à partir d'une formulation des bilans de matière entre les différents constituants présents dans la cuve. Ce dernier est proposé en II.1. Le volume maximal du réacteur est égal à 2 litres. L'alimentation en glycérol est coupée dès que la cuve est remplie. La concentration critique du substrat est égale à  $S_{crit} = 0.1$  (g/l). La concentration de l'alimentation en glycérol est  $S_{in} = 200$  g/l et le débit  $D(t)$  suit une trajectoire optimale définie dans [Valentinotti et al. 03]. Des modèles empiriques suivant la loi de Monod sont utilisés pour décrire les paramètres de l'oxygène en particulier le coefficient de transfert ( $K_1a$ ) et la vitesse de consommation ( $r_{O_2}$ ). Ces derniers sont présentés respectivement en II.12 et II.14.

L'objectif de la commande consiste à maintenir la concentration en oxygène dissout à une valeur constante  $O_{2,ref} = 15\%$  avec une précision de  $\pm 2\%$ . Sachant que les mesures du taux d'oxygène dissout sont échantillonnées avec une période de 5 secondes et la vitesse de consommation  $r_{O_2}$  n'est pas mesurable. La loi de commande utilisée est décrite par IV.15, elle est constituée de l'association d'une commande de type grand gain et de l'observateur impulsif continu-discret pour la reconstruction du taux d'oxygène dissout entre deux mesures disponibles et l'estimation de la vitesse de consommation.

Les paramètres de la réaction sont définis comme suit

$$\begin{aligned} \mu = \mu_{max} \frac{S}{K_s + S} & \quad \text{avec} & \quad \mu_{max} = 0.45 \text{ (h}^{-1}\text{)} & \quad ; & \quad K_s = 0.65 \text{ (g de S/l)} \\ & \quad \text{et} & \quad Y_{x/s} = 0.35 \text{ (g de X/g de S)} \end{aligned}$$

Les conditions initiales sont fixées ainsi :

$$X_0 = 1 \text{ g/l} \quad , \quad S_0 = 75 \text{ g/l} \quad \text{et} \quad V_0 = 1.5 \text{ l}$$

Et les paramètres de synthèse de l'observateur et de la commande sont choisis comme suit :

$$\begin{aligned} K &= [0.03; 0.02] & ; & \quad \theta = 10 \\ k_c &= \frac{1}{2} & ; & \quad B^T \bar{S} = [0.0038; 1.125] & ; & \quad \lambda = 2. \end{aligned}$$

Les mesures sont entachées d'un bruit de moyenne nulle et de variance 0.01. Les résultats de simulation sont présentés sur les figures IV.1, IV.2, IV.3.

Sur le tracé de l'oxygène, nous pouvons distinguer deux phases. La première est réalisée en boucle ouverte, phase durant laquelle le taux d'oxygène subit une chute jusqu'à la valeur de référence  $O_{2,ref}$ . La deuxième est la phase de régulation où la concentration en oxygène est maintenue autour de 15% avec une précision de  $\pm 0.5\%$ . Une perturbation de type échelon d'amplitude 5% intervient autour de 7h (cf. figure IV.1 à droite) et elle est parfaitement

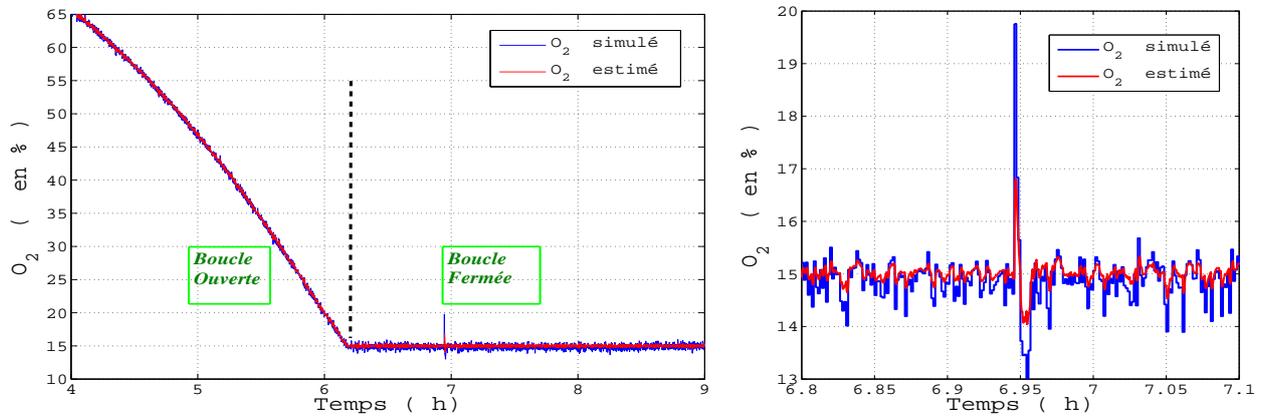


Figure IV.1 – Tracé de la régulation de la concentration en oxygène dissout

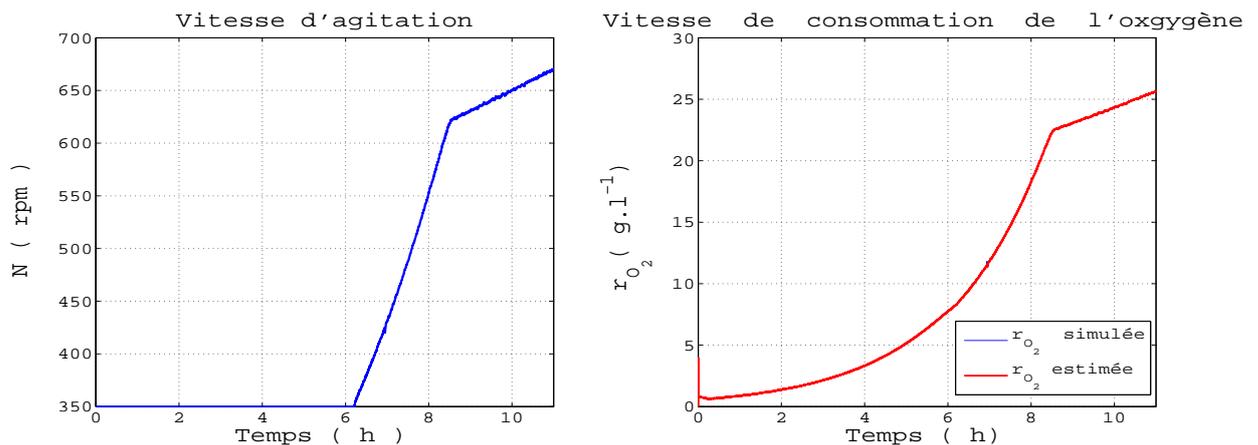


Figure IV.2 – Tracé de l'agitation du moteur et de la vitesse de consommation

rejetée par le correcteur. La commande réelle appliquée est la vitesse d'agitation  $N$  (cf. figure IV.2). Elle est obtenue en inversant le modèle identifié du  $K_L a$  présenté en II.13 (i.e.  $K_L a = 3.42 \cdot 10^{-7} N^{1.75}$ ). L'agitation reste donc constante à 350 rpm pendant toute la boucle ouverte. Ensuite, elle augmente de manière exponentielle en boucle fermée, due à la forte croissance des micro-organismes. La vitesse de consommation  $r_{O_2}$  croît tout au long du processus. La figure IV.3 présente la trajectoire du substrat.

**Remarque 3.1** *Le choix des paramètres de synthèse  $\lambda$  et  $k_c$  à des valeurs assez élevées peut générer une commande très importante et cela risque de dégrader les actionneurs. En outre, dans la loi de commande proposée IV.15, le terme  $r_{O_2}$  est prépondérante. Elle domine fortement le terme de correction et impose une trajectoire à la commande. Pour contourner ce*

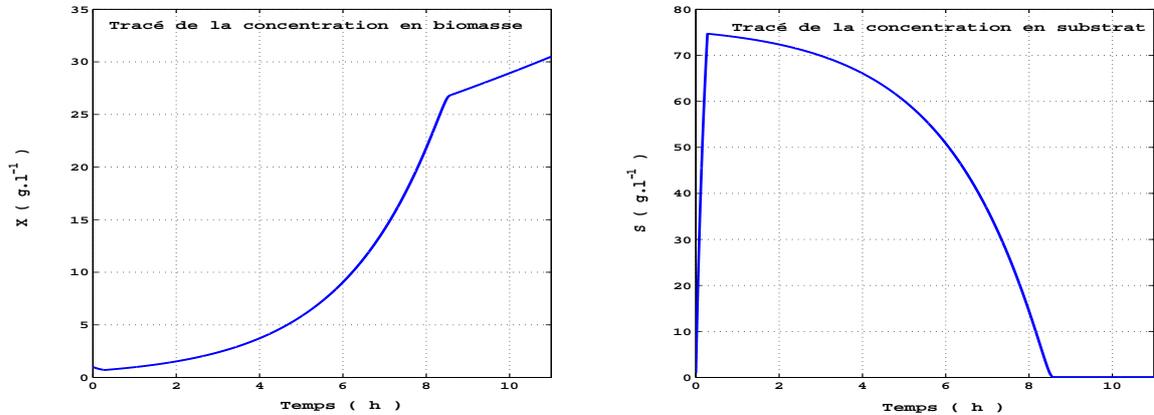


Figure IV.3 – Tracé des concentrations en biomasse et en substrat

problème, nous proposons dans la suite une seconde loi de commande basée sur une approche de type Backstepping afin de considérer la  $r_{O_2}$  comme une perturbation et laisser le correcteur la compenser.

**Remarque 3.2** Dans les simulations, le paramètre  $B^T \bar{S}$  n'est pas choisi de sorte à situer les pôles de la commande en  $-\lambda$ . En effet la dynamique du bioréacteur est très lente et la contrainte de synthèse  $\lambda > 1$  impose une dynamique beaucoup trop rapide pour le système de commande.

## 4 Commande Backstepping

Cette section concerne plus spécifiquement l'application de la commande backstepping sur le modèle de l'oxygène dissout dans un réacteur chimique afin de le maintenir à un niveau de référence. Dans un premier temps, nous allons établir le principe de la synthèse, ensuite nous l'appliquons sur le procédé afin de visualiser ses performances.

**Historique** : Au cours de ces dernières décennies, la théorie des systèmes à vu naître plusieurs techniques de commande. Celle par backstepping a été développée vers les années 1990 par [Kanellakopoulos et al. 91] pour la conception des contrôleurs de stabilisation pour une classe particulière de systèmes non-linéaires. Cette technique est inspirée dans les travaux de [Kokotovic et Sussmann 89], [Feuer et Morse 78] et elle a été poursuivie par [Kokotovic 92], [Lozano et Brogliato 92]... La procédure backstepping offre une méthode de synthèse récursive et assez flexible à chaque étape de la conception. Elle adopte le principe de Lyapunov qui consiste à calculer une commande tout en assurant l'existence d'une fonction définie positive

ayant une dérivée toujours négative. Toutefois les algorithmes backstepping sont appliqués à des systèmes non-linéaires qui peuvent se mettre sous une forme triangulaire.

#### 4.1 Synthèse de la commande backstepping avec incorporation d'une action intégrale

Pour illustrer le principe de la commande de type backstepping, nous considérons le modèle dynamique commandable et uniformément observable incorporant une action intégrale appliquée en entrée et décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) + \varphi(x_1) \\ \dot{u}(t) = \mu(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

Où  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  est le vecteur d'état,  $\varphi(x)$  est une fonction lipschitzienne vérifiant l'hypothèse 2.1,  $y(t)$  est la sortie. Une action intégrale a été explicitement introduite dans ce modèle de commande afin de rejeter toutes les perturbations de type échelon et de moyenne non nulle.  $\mu(t)$  est ainsi une commande virtuelle correspondant à l'entrée de ce modèle de synthèse IV.16 tandis que  $u(t)$  est la variable physique de commande associée au système à commander dont le comportement est décrit par la première équation. L'objectif de la commande consiste à déterminer la commande virtuelle  $\mu(t)$  permettant de faire suivre de façon asymptotique à la sortie  $y(t)$  une trajectoire de référence que l'on notera  $\bar{y}(t) \in \mathbb{R}$ . La commande réelle  $u(t)$  sera alors obtenue par intégration de  $\mu(t)$ . La loi de commande devra satisfaire la propriété IV.17 suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \bar{y}(t)) = 0 \quad (\text{IV.17})$$

On supposera que les dérivées de la séquence de référence jusqu'à l'ordre 2 sont disponibles et qu'à chaque séquence  $\bar{y}(t)$  lui correspond une trajectoire d'état du système qui sera notée  $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ . Compte tenu de la classe des systèmes considérés IV.16, la trajectoire  $\bar{y}(t)$  est obtenue à partir du modèle dynamique suivant (c.f [Oueder 12]) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \bar{u}(t) + \varphi(x_1(t)) + c_1(x_1(t) - \bar{x}_1(t)) \\ \dot{\hat{u}}(t) = \mu(t) + c_2(u(t) - \bar{u}(t)) + (x_1(t) - \bar{x}_1(t)) \\ \bar{y}(t) = \bar{x}_1(t) \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

## Chapitre IV. Loi de Commande Non-linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur

---

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes strictement positives. Pour alléger les écritures, nous allons omettre le temps dans les équation.

Les variables d'état  $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{u}(t) \end{pmatrix}$  et  $\mu(t)$  sont données par :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{y} \\ \bar{u} = \dot{\bar{x}}_1 - \varphi(x_1) - c_1(x_1 - \bar{x}_1) \\ \mu = \dot{\bar{u}} - c_2(u - \bar{u}) - (x_1 - \bar{x}_1) \end{cases}$$

Ces équations peuvent être déterminées de manière récursive à partir de la séquence de référence  $\bar{y}$  et de ses dérivées successives. Notons que :

$$\begin{aligned} x_1 - \bar{x}_1 &= x_1 - \bar{y} \\ u - \bar{u} &= \dot{x}_1 - \dot{\bar{x}}_1 + c_1(x_1 - \bar{x}_1) \\ &= \dot{x}_1 - \dot{\bar{y}} + c_1(x_1 - \bar{y}) \end{aligned}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{y} \\ \bar{u} = \dot{\bar{y}} - \varphi(x_1) - c_1(x_1 - \bar{y}) \\ \mu(t) = \ddot{\bar{y}} - \frac{d\varphi(x_1)}{dt} - c_1(\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}) - c_2[\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}} + c_1(x_1 - \bar{y})] - (x_1 - \bar{x}_1) \\ \quad = \ddot{\bar{y}} - \frac{d\varphi(x_1)}{dt} - (c_1 + c_2)(\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}) - (1 + c_1 c_2)(x_1 - \bar{y}) \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Le problème de poursuite asymptotique de la sortie  $y$  vers la trajectoire désirée  $\bar{y}$  peut être étendu au problème de poursuite de trajectoire d'état défini par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x - \bar{x}) = 0$$

En combinant les équations du système [IV.16](#) et du modèle [IV.18](#), le système d'erreur s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - \dot{\bar{x}}_1 = (u - \bar{u}) - c_1(x_1 - \bar{x}_1) \\ \dot{u} - \dot{\bar{u}} = -c_2(u - \bar{u}) - (x_1 - \bar{x}_1) \end{cases}$$

Ceci revient à écrire

$$\dot{e}(t) = Ae(t) \quad (\text{IV.20})$$

$$\text{où } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ u - \bar{u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{pmatrix}$$

Montrons maintenant que ce système d'erreur converge exponentiellement vers zéro en utilisant l'approche de Lyapunov.

**Preuve 8** *Considérons la fonction quadratique suivante  $V(t) = \frac{1}{2}e^T e$ . Sa dérivée s'écrit :*

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \dot{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \\ &= e_1 (e_2 - c_1 e_1) + e_2 (-c_2 e_2 - e_1) \\ &= -c_1 e_1^2 - c_2 e_2^2 \end{aligned} \tag{IV.21}$$

$\dot{V}(t)$  est négative. L'équation IV.21 justifie alors la convergence exponentielle du système d'erreur IV.20 vers zéro ; d'où la convergence des états réels vers les états de référence.

La commande réelle  $u(t)$  du système sans intégrateur est donc

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t \mu(s) ds \\ &= \dot{\bar{y}} - \varphi(x_1) - (c_1 + c_2)(x_1 - \bar{y}) - (1 + c_1 c_2) \int_0^t (x_1(s) - \bar{y}(s)) ds \end{aligned} \tag{IV.22}$$

Nous constatons que la loi de commande IV.22 présente une structure de type *PID* et que la dynamique de l'erreur de poursuite est obtenue en remplaçant  $\varphi(x_1)$  par son expression :  $\varphi(x_1) = \dot{x}_1 - u$

$$(\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}) + (c_1 + c_2)(x_1 - \bar{y}) + (1 + c_1 c_2) \int_0^t (x_1(s) - \bar{y}(s)) ds = 0 \tag{IV.23}$$

Le polynôme caractéristique associé est donné par

$$p^2 + (c_1 + c_2)p + (1 + c_1 c_2)$$

La recherche des racines de ce polynôme permet de constater qu'il existe une condition nécessaire à remplir sur le choix des paramètres de synthèse  $c_1$  et  $c_2$  afin d'éviter des régimes oscillatoires. En effet, le discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta &= (c_1 + c_2)^2 - 4(1 + c_1 c_2) = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 - 4c_1 c_2 - 4 \\ &= (c_1 - c_2)^2 - 4 \end{aligned}$$

## Chapitre IV. Loi de Commande Non-linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur

---

Le polynôme caractéristique admet des solutions réelles si et seulement si  $(c_1 - c_2)^2 \geq 4 \Rightarrow |c_1 - c_2| \geq 2$ .

Compte tenu de la dynamique très lente du bioréacteur, les modules des pôles du système de commande doivent être relativement petits. Ce qui fait qu'en adoptant cette approche de Backstepping, la condition imposée sur les choix de  $c_1$  et de  $c_2$  pour éviter les régimes oscillatoires est irréalisable. Pour contourner ce problème, nous proposons de synthétiser une autre structure de commande backstepping dont le modèle de référence est décrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{u} + \varphi(x_1) + c_1(x_1 - \bar{x}_1) \\ \dot{\bar{u}} = \mu(t) + c_2(u - \bar{u}) \\ \bar{y}(t) = \bar{x}_1 \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont toujours des constantes strictement positives. De la même façon, les états et la commande du système de référence sont donnés par

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{y}(t) \\ \bar{u} = \dot{\bar{x}}_1 - \varphi(x_1) - c_1(x_1 - \bar{x}_1) \\ \mu(t) = \dot{\bar{u}} - c_2(u - \bar{u}) \end{cases}$$

Cela revient à écrire :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{y}(t) \\ \bar{u} = \dot{\bar{y}}(t) - \varphi(x_1) - c_1(x_1 - \bar{y}(t)) \\ \mu(t) = \ddot{\bar{y}}(t) - \frac{d\varphi(x_1)}{dt} - c_1(\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}(t)) - c_2[\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}(t) + c_1(x_1 - \bar{y}(t))] \\ \quad = \ddot{\bar{y}}(t) - \frac{d\varphi(x_1)}{dt} - (c_1 + c_2)(\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}(t)) - c_1c_2(x_1 - \bar{y}(t)) \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

La commande virtuelle  $\mu(t)$  est alors donnée par l'équation IV.25. En combinant les équations du système IV.16 et du modèle de référence IV.24, le système d'erreur s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - \dot{\bar{x}}_1 = (u - \bar{u}) - c_1(x_1 - \bar{x}_1) \\ \dot{u} - \dot{\bar{u}} = -c_2(u - \bar{u}) \end{cases}$$

où

$$\dot{e}(t) = Ae(t) \quad (\text{IV.26})$$

$$\text{où } e(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ u - \bar{u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -c_1 & 1 \\ 0 & -c_2 \end{pmatrix}$$

Montrons maintenant que le nouveau système d'erreur IV.26 converge exponentiellement vers zéro en utilisant l'approche de Lyapunov.

**Preuve 9** : La matrice  $A$  étant de type Hurwitz, il existe une matrice  $P$  symétrique et définie positive telle que  $PA + A^T P = -\mu I_n$ . Montrons donc que la fonction  $V(e) = e^T P e$  est une fonction de Lyapunov associée à l'équation IV.26.

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} = e^T A^T P e + e^T P A e \\ &= e^T (A^T P + P A) e = -\mu e^T e = -\mu \|e\|^2 \\ &\leq -\frac{\mu}{\lambda_m} V(e)\end{aligned}$$

où  $\lambda_m$  est la plus petite valeur propre de la matrice  $P$ .  $\dot{V}(e)$  est strictement négative alors la convergence exponentielle du système d'erreur IV.26 vers 0 et la convergence de l'état vers celui du modèle de référence est toujours garantie.

La commande réelle est donc

$$\begin{aligned}u(t) &= \int_0^t \mu(t) dt \\ &= \dot{y}(t) - \varphi(x_1) - (c_1 + c_2)(x_1 - \bar{y}) - c_1 c_2 \int_0^t (x_1(s) - \bar{y}(s)) ds\end{aligned}\quad (\text{IV.27})$$

et la dynamique de l'erreur de poursuite associée obtenue en remplaçant  $\varphi(x_1) = \dot{x}_1 - u$ , est

$$(\dot{x}_1 - \dot{y}) + (c_1 + c_2)(x_1 - \bar{y}) + c_1 c_2 \int_0^t (x_1(s) - \bar{y}(s)) ds = 0\quad (\text{IV.28})$$

Le polynôme caractéristique associé est donné par

$$p^2 + (c_1 + c_2)p + c_1 c_2$$

Il est clair maintenant que les racines de ce polynôme sont respectivement  $-c_1$  et  $-c_2$ . Il n'existe plus aucune contrainte sur le choix des valeurs des paramètres de synthèse à l'exception du fait qu'elles doivent être strictement positives.

## 4.2 Application au modèle de l'oxygène

Le modèle de la dynamique de l'oxygène dissout est donné par

$$\begin{cases} \frac{dO_2}{dt} = K_l a (O_2^* - O_2) - r_{O_2} - \frac{D}{V} O_2 \\ y = O_2 \end{cases}$$

Pour écrire le modèle ci-dessus sous la forme du système IV.16 pour lequel nous avons synthétisé la commande backstepping, nous posons dans un premier temps que la variable de commande dans la synthèse est  $x_2 = K_l a (O_2^* - O_2)$ . Ensuite, pour obtenir le  $K_l a$ , il suffira d'inverser cette expression  $K_l a = \frac{x_2}{(O_2^* - O_2)}$ .

Définissons donc le vecteur d'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_2 \\ K_l a (O_2^* - O_2) \end{pmatrix}$  où  $x_1$  correspond à l'état réel et  $x_2$  est la commande. En incorporant une action intégrale à l'entrée du système, le modèle de commande complet s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varphi(x_1) \\ \dot{x}_2 = \mu \\ y(t) = x_1 \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

avec  $\varphi(x_1) = -r_{O_2} - \frac{D}{V} O_2$ .

En adoptant la même méthode décrite dans les équations IV.24 , IV.25 et IV.27, nous pouvons déduire aisément la commande l'expression de la virtuelle  $x_2$  :

$$x_2 = \dot{\bar{y}} - \varphi(x_1) - (c_1 + c_2)(x_1 - \bar{y}) - c_1 c_2 \int_0^t (x_1 - \bar{y}) ds$$

Enfin, la commande réelle qui stabilise le bioréacteur en boucle fermée s'obtient en inversant la relation entre  $x_2$  et  $K_l a$  :

$$K_l a = \frac{1}{(O_2^* - O_2)} \left[ \dot{\bar{y}} + \frac{D}{V} O_2 - (c_1 + c_2)(O_2 - \bar{y}) - c_1 c_2 \int_0^t (O_2(s) - \bar{y}(s)) ds \right] \quad (\text{IV.30})$$

Il est important de préciser que la  $r_{O_2}$  est modélisée de manière empirique pour les simulations et qu'elle n'est injectée dans la loi de commande. Elle est considérée comme une perturbation de type échelon qui sera rejetée asymptotiquement par la commande.

### 4.3 Simulation

Pour illustrer les performances de la commande backstepping sur le bioréacteur, nous considérons la même culture que dans l'exemple de la section précédente avec les bactéries *Pseudomonas putida* alimentée en glycérol et opérée en mode fedbatch. Les paramètres de la réaction et les conditions culturelles sont prises identiques que dans l'exemple de la section précédente.

L'objectif de la commande consiste toujours à réguler la concentration en oxygène dissout autour d'une valeur de référence  $O_{2,ref}$  constante. La loi de commande qui garantie la régulation du taux d'oxygène dissout est définie par IV.30. Dans la pratique, la mesure de ce taux n'est disponible qu'avec une période d'échantillonnage de 5 secondes. La loi de commande simulée IV.31 utilise donc une estimation du taux d'oxygène dissout obtenue à l'aide de l'observateur impulsif continu-discret proposé au chapitre précédent. Les réalisations des preuves de stabilité et de convergence de l'erreur de poursuite du système de commande intégrant cet observateur restent des problèmes ouverts notamment en présence d'erreurs de modélisation. La loi de commande appliquée s'écrit donc :

$$K_l a = u(t) = \frac{1}{(O_2^* - \hat{O}_2)} \left[ \dot{O}_{2,ref} + \frac{D}{V} \hat{O}_2 - (c_1 + c_2)(\hat{O}_2 - O_{2,ref}) - c_1 c_2 \int_0^t (\hat{O}_2 - O_{2,ref}) dt \right] \quad (IV.31)$$

Toutefois, la commande réelle appliquée est la vitesse d'agitation. Elle est intrinsèquement reliée au  $K_l a$  par la relation donnée en II.13. Cette vitesse est donc obtenue en inversant ce modèle (ie  $K_l a = 3.42 \cdot 10^{-7} N^{1.75}$ ).

Lors des simulations, les paramètres de synthèse de l'observateur sont maintenus à des valeurs identiques à celles de l'exemple précédent (  $K = [0.03; 0.02]$  ;  $\theta = 10$  ) et les paramètres de synthèse de la loi commande ont été choisis ainsi : (  $c_1 = c_2 = 0.1$  ). Les résultats de simulation sont représentés sur les figures suivantes avec des mesures entachées d'un bruit blanc de moyenne nulle et de variance 0.1% par rapport à la mesure de l'oxygène.

L'évolution du taux d'oxygène dissout durant la fermentation est présentée sur la figure IV.4. Elle est composée de deux phases. La première est réalisée en boucle ouverte et la concentration en oxygène subit une forte chute vers la valeur de référence  $O_{2,ref}$ %. Durant la deuxième phase, le taux d'oxygène est régulé à 15% avec une précision de  $\pm 1\%$ . Une perturbation de type échelon d'amplitude 5% est appliquée aux alentours de 7h sur les mesures de la sortie et la perturbation est parfaitement rejetée par le correcteur. La figure IV.5 montre les évolutions de la vitesse du moteur d'agitation (variable physique de commande) et de la vitesse de consommation de

## Chapitre IV. Loi de Commande Non-linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur

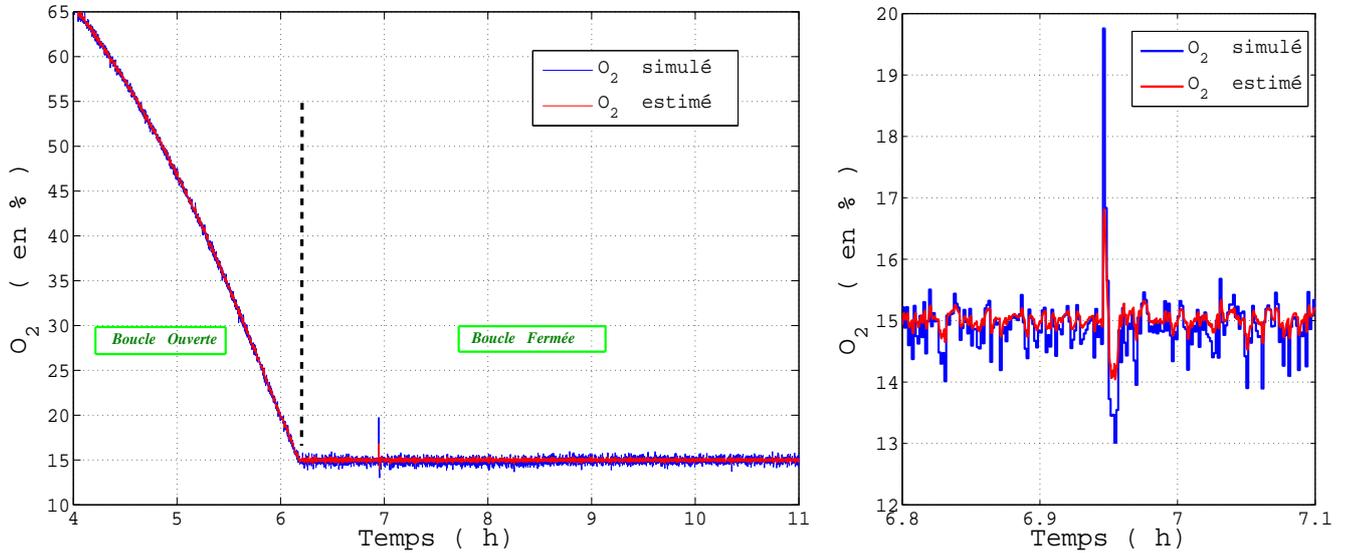


Figure IV.4 – Tracé de la régulation de la concentration en oxygène dissout

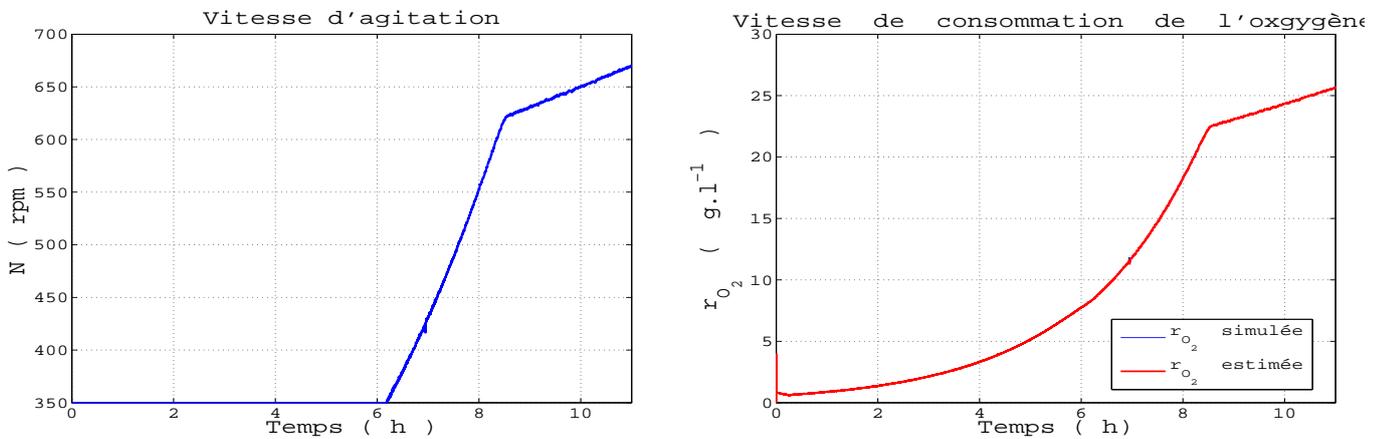


Figure IV.5 – Tracé de l'agitation et de la vitesse de consommation

l'oxygène  $r_{O_2}$ . La commande est maintenue constante à 350 *tr/min* durant la phase en boucle ouverte. Ensuite, elle augmente de manière exponentielle dans un premier temps en raison de la forte croissance de la biomasse. La pente diminue par la suite à cause de la faible présence de substrat dans le réacteur (cf. *figure IV.6*).

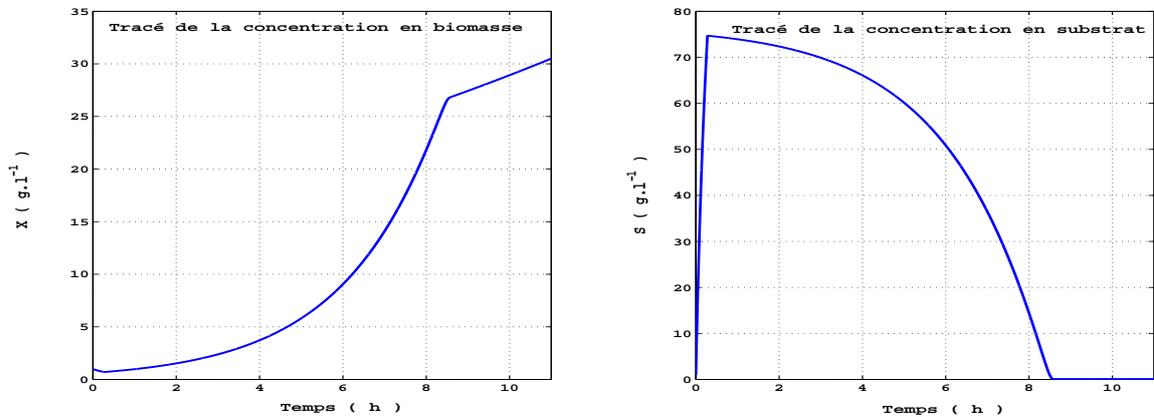


Figure IV.6 – Tracé des concentrations en biomasse et en substrat

## 5 Conclusion

Dans ce quatrième chapitre, nous avons développé deux stratégies de commande basée sur la théorie des systèmes non-linéaires pour piloter le bioréacteur. En effet leurs synthèses sont réalisées à partir du modèle du bioprocédé établi dans les chapitres précédents. L'objectif de la commande consiste dans les deux cas à asservir la concentration en oxygène dissout autour d'une valeur de référence constante.

Par ailleurs, les lois de commande utilisent des estimations continues délivrées par notre observateur impulsif continu-discret pour substituer les mesures discrètes et les paramètres physiquement non-mesurables. De plus, elles sont associées avec une action intégrale pour assurer le rejet de toutes les perturbations de type échelon. La commande backstepping a été développée en première lieu avec la synthèse proposée dans la littérature et imposant des limites sur le choix des valeurs des paramètres de réglage. Elle a ensuite été proposée avec une autre approche quasi semblable qui n'impose aucune contrainte sur les paramètres. Enfin, les deux stratégies proposées ont données des résultants convenables en simulation.

## Chapitre IV. Loi de Commande Non-linéaire pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans un bioréacteur

---

---

## Références Bibliographiques

- [Bedoui et al. 08] A. BEDOUI, a. M. M. FARZA, Mondher, M. KSOURI : Robust nonlinear controllers for bioprocesses. In IFAC World Congress, volume 17, July, 11 2008. [120](#)
- [Fall et al. 12] M. FALL, O. GEHAN, E. PIGEON, M. POULIQUEN, M. FARZA, M. MSAAD : Nonlinear state-feedback with disturbances estimation for dc-dc buck converter. In 2nd International Symposium on Environment-Friendly Energies and Applications, Newcastle, 2012. [121](#)
- [Feuer et Morse 78] A. FEUER, A. MORSE : Adaptive control of single-input, single-output linear systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 23(4):557–569, Aug 1978. [124](#)
- [Hajji 09] S. HAJJI : Modélisation, observation et commande de la machine asynchrone. Thèse de doctorat, 2009. Thèse de doctorat dirigée par M'Saad, Mohammed et Kamoun, Mohamed Automatique et robotique Caen 2009. [121](#)
- [Kanellakopoulos et al. 91] I. KANELLAKOPOULOS, P. KOKOTOVIC, A. MORSE : Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. pages 649–654, June 1991. [124](#)
- [Kokotovic 92] P. KOKOTOVIC : The joy of feedback : nonlinear and adaptive. Control Systems, IEEE, 12(3):7–17, June 1992. [124](#)
- [Kokotovic et Sussmann 89] V. KOKOTOVIC, P., J. SUSSMANN, H. : A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. System Control Letter, 13(2):125–133, August 1989. [124](#)

## Références Bibliographiques

---

- [Lozano et Brogliato 92] R. LOZANO, B. BROGLIATO : Adaptive control of robot manipulators with flexible joints. Automatic Control, IEEE Transactions on, 37(2):174–181, Feb 1992. [124](#)
- [Mahmoud et Khalil 96] N. MAHMOUD, H. KHALIL : Asymptotic regulation of minimum phase nonlinear systems using output feedback. Automatic Control, IEEE Transactions on, 41(10):1402–1412, Oct 1996. [121](#)
- [Oueder 12] M. OUEDER : Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Thèse de doctorat, 2012. Thèse de doctorat dirigée par Farza, Mondher Automatique, productive Caen 2012. [125](#)
- [Sekher et al. 07] M. SEKHER, M. FARZA, M. M'SAAD : Commande avec retour d'état d'un réacteur chimique. In JDMACS (Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS), 2007. [120](#), [121](#)
- [Valentinotti et al. 03] S. VALENTINOTTI, B. SRINIVASAN, U. HOLMBERG, D. BONVIN, C. CANNIZZARO, M. RHIEL, U. von STOCKAR : Optimal operation of fed-batch fermentations via adaptive control of overflow metabolite. Control Engineering Practice, 11(6):665 – 674, 2003. [122](#)

---

---

# Chapitre V

---

## Étude Expérimentale

### 1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus lors des évaluations des algorithmes de commande implementés sur le système bioréacteur. Un algorithme de commande concerne plus précisément à l'association d'un observateur et une commande particulière développés dans les chapitres précédents. L'implémentation de ces algorithmes est effectuée sur un ordinateur numérique permettant de réaliser une commande en temps réel. Les résultats obtenus sont analysés afin d'évaluer les performances de stabilité et de robustesse vis-à-vis des perturbations et des bruits de mesure d'une part et d'autre part de mettre en évidence les différences entre les résultats de simulation et ceux acquis expérimentalement.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première partie, nous présentons les différents éléments qui constituent le système bioréacteur. Ensuite, nous présentons dans la deuxième partie les différents composants du montage en détaillant leurs caractéristiques et le rôle de chacun dans la maquette. Ceci permet d'évaluer les contraintes des algorithmes de commande afin de mesurer les limites. La troisième partie est consacrée aux résultats expérimentaux obtenus et à une analyse critique des performances des systèmes de commande élaborés. Enfin, nous finissons par une conclusion.

### 2 Présentation du procédé expérimental

Dans cette section, nous présentons le procédé pilote de fermentation constitué d'un bioréacteur aéré et infiniment mélangé. Les différents éléments du montage expérimental sont particulièrement décrits.

Sur la figure [V.1](#), nous pouvons apercevoir une culture se réalisant dans une cuve à double paroi, le bioréacteur. Nous pouvons également apercevoir l'amplificateur de puissance (*ADI. 1032*)



**Figure V.1** – Photo d'un bioréacteur en cours de manipulation

qui permet le contrôle le moteur à courant continu pilotant l'agitateur, le régulateur de température (*ADI. 1018*) qui règle le débit de circulation d'eau entre les deux parois du réacteur, la pompe à perfusion qui apporte les nutriments dans le milieu culturel. Enfin, le biocontrôleur (*ADI. 1030*) réalise l'acquisition des différentes données délivrées par les capteurs (température, pH, oxygène...). Sur la figure [V.2](#), le système global d'acquisition supportant la communication entre les différents composants précédents est représenté. Cette maquette décrit la façon dont les éléments du système sont inter-reliés et les quelques détails importants concernant la nature de leur communication.

Les capteurs et l'actionneur (moteur d'agitation) sont reliés au biocontrôleur par liaison série

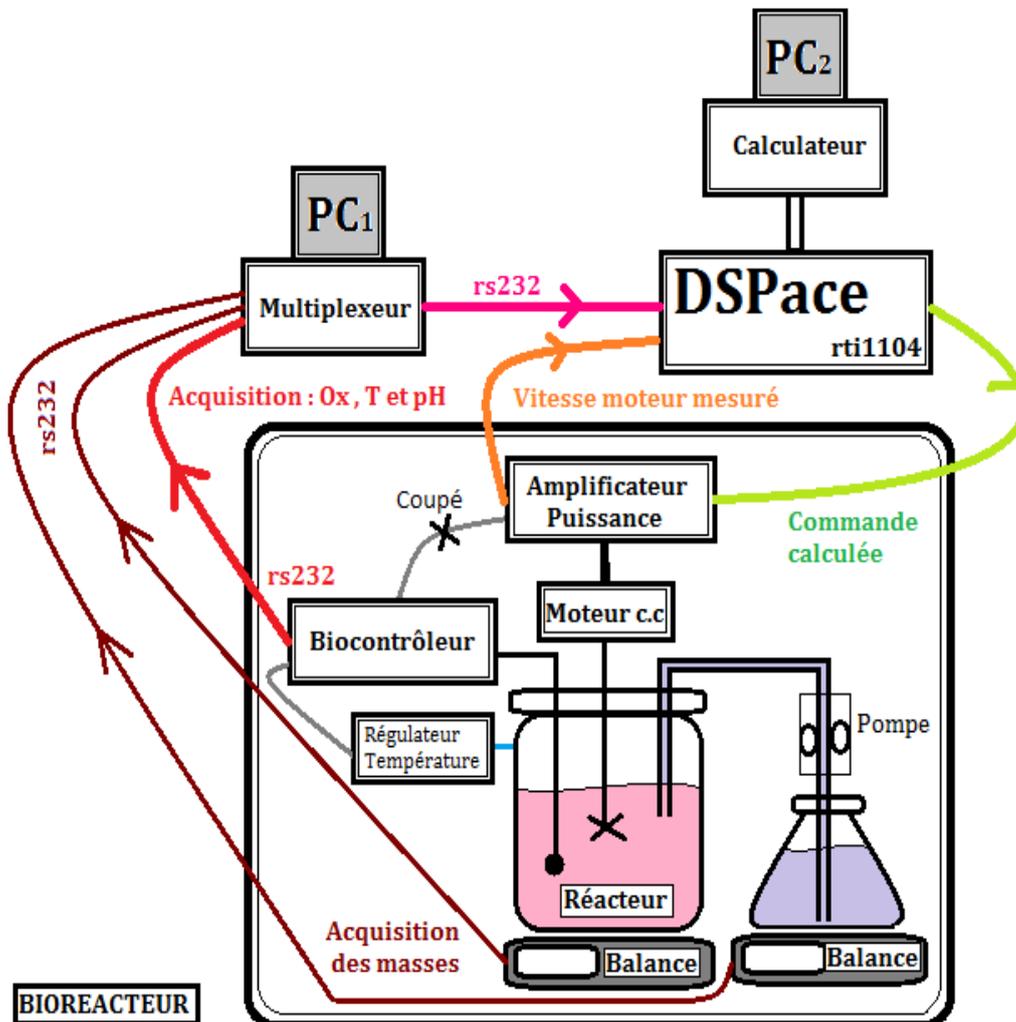


Figure V.2 – Maquette expérimentale

(RS232) avec une période d'acquisition des mesures de 5 secondes. Le biocontrôleur constitue le cerveau du procédé, il délivre les mesures de la température, du  $pH$ , du taux d'oxygène dissout et de gaz carbonique. De même, il génère les commandes à appliquer sur les différents actionneurs des boucles de régulation de ces 4 paramètres. L'amplificateur de puissance applique la tension sur le moteur d'agitation et délivre les mesures de la vitesse d'agitation  $N$  et du couple moteur sous forme analogique. La vitesse d'agitation est utilisée comme variable de commande intrinsèque, elle est reliée au  $k_{La}$  qui constitue une variable de commande virtuelle des algorithmes proposés. Le couple moteur n'est pas exploité dans ce projet, mais il aurait pu servir à mesurer la viscosité de la réaction. Deux balances communiquant par liaison série sont

aussi utilisées pour pouvoir déterminer à chaque instant le débit d'alimentation en substrat et le volume de la culture. Deux unités de calcul ( $PC_1$  et  $PC_2$ ) incluant des cartes d'acquisition et de commande sont reliées au système en guise de multiplexeur et de calculateur respectivement. Le  $PC_1$  contient une carte *PCI – Express* et le logiciel *CVI/Labwindows*. Il est utilisé pour l'acquisition et la numérisation des mesures. Il rassemble de ces données dans une trame unique et les envoie au  $PC_2$ . C'est en ce sens que son rôle est assimilable à celui d'un multiplexeur. Le  $PC_2$  contient les logiciels *Matlab* et *ControlDesk* et une carte *DSPace – rti1104* sur laquelle sont implémentés les différents algorithmes de commande et d'observation testés.

### 3 Caractéristiques des différents éléments

L'implémentation des lois de commande développées durant cette thèse a été réalisée au laboratoire *ABTE* de l'université de Caen Basse-Normandie. Pour se familiariser avec l'environnement expérimental, plusieurs tests ont été effectués et ceux-ci ont permis d'appréhender le rôle de chacun des composants du procédé pilote. Dans cette section, nous donnons une description condensée et explicite des différents éléments du montage.

1. **Bioréacteur** : Par définition, ce réacteur est une enceinte thermostatée apte à la réa-



**Figure V.3** – Réacteur à double paroi

lisation et à l'optimisation des réactions chimiques. Elle est généralement utilisée pour la transformation des matières en génie des procédés. Le but recherché avec ce type de réacteur est d'assurer une homogénéité de la masse réactionnelle du point de vue de la température et du mélange des réactifs.

### V.3 Caractéristiques des différents éléments

Ce réacteur à double paroi est conçu en verre borosilicaté 3.3 permettant la circulation de l'eau pour réguler la température interne. Son volume est de 2 l. Il est fermé par un couvercle métallique disposant de nombreuses entrées prévues pour l'alimentation et pour l'instrumentation nécessaire aux mesures des grandeurs comme la température, le  $pH$ , l'oxygène et à l'outil d'agitation. Elle dispose également d'une sortie prévue pour la récupération (voire l'image).

2. **Bio-contrôleur** : Le biocontrôleur, *ADI – 1030*, est un régulateur capable à la fois de



**Figure V.4** – Biocontrôleur ADI-1030

recueillir des données capteurs et de réguler certains paramètres physiques. Il intègre un microprocesseur 8 bits, chargé avec un software qui peut réguler simultanément un maximum de quatre grandeurs et via onze sorties (9 digitales et 2 analogues). Ces sorties sont aussi utilisées pour envoyer des informations sur les enregistreurs. Concernant la régulation, le correcteur intégré est de structure *PID*.

L'*ADI – 1030* possède quatre emplacements pour les entrées analogiques sur la carte de commande principale. Il utilise deux alimentations électriques séparées ; l'une pour le microprocesseur et l'autre pour le module de commande des organes de régulation. Son interface homme/machine est constituée d'un écran alpha numérique (4 lignes, 40

caractères) et d'un clavier divisé en 3 parties (touches fonctions, touches spéciales et touches numériques).

La communication du biocontrôleur avec une unité centrale est réalisée à l'aide d'un protocole de communication propriétaire appelé *ADI – protocole*. Le mode de fonctionnement du biocontrôleur peut être prédéfini à l'aide de plusieurs commandes externes. Le protocole de communication permet également de récupérer sur l'unité centrale les mesures délivrées par les capteurs et d'envoyer au biocontrôleur la valeur de la commande du moteur d'agitation générée par l'algorithme de commande.

3. **Amplificateur de puissance** : L'*ADI – 1032* est un l'organe de pilotage du moteur



**Figure V.5** – Amplificateur de puissance *ADI – 1032*

d'agitation. Il génère une tension comprise entre 0 et 10 V et l'applique à l'entrée du moteur à courant continu pour imposer une vitesse d'agitation. Deux modes de fonctionnement sont possibles. Il peut être utilisé comme contrôleur local de la vitesse d'agitation en association avec le biocontrôleur *ADI – 1030* qui incorpore un correcteur *PID*. Dans ce cas, la consigne de vitesse est appliquée à partir de l'interface homme/machine. Ce mode de fonctionnement local peut être remplacé par un mode externe, solution retenue dans le cadre de notre travail. Dans ce cas, la commande générée par l'algorithme de commande implémenté sur la carte *DSPACE* est directement appliquée à l'entrée de cet amplificateur afin de contrôler la vitesse d'agitation.

L'interface est composée d'un bouton *On/Off*, d'une *LED* signifiant sa mise en marche, d'un écran numérique affichant la conversion de la tension de sortie en vitesse de rotation (*tr/min*), d'un switch permettant de choisir le mode de fonctionnement (*local/remote*) et d'un bouton de contrôle permettant de faire varier la consigne locale.

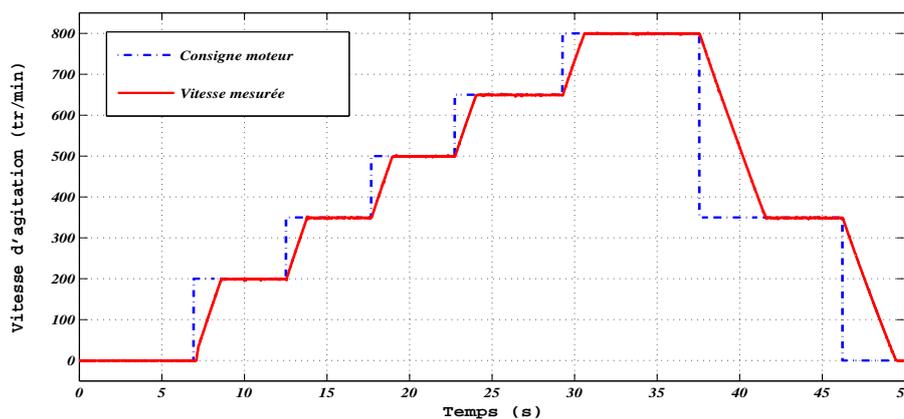
4. **Moteur à courant continu MCC** : Le moteur à courant continu et l'agitateur associé



**Figure V.6** – Moteur à courant continu (m.c.c)

constituent l'actionneur du procédé. Pour étudier son comportement, nous avons testé son fonctionnement à l'aide d'une application programmée sous l'environnement *ControlDesk* qui permet de le piloter via l'amplificateur *ADI – 1032* (cf. annexe 1).

Dans un premier temps, nous avons constaté que le moteur présente une zone morte de l'ordre de 2 V. Ensuite, les caractéristiques dynamiques de l'actionneur ont été évaluées à l'aide d'un signal d'excitation constitué d'une série d'échelons de tension. Nous avons constaté que le couple moteur est fortement limité par une saturation interne à l'*ADI – 1032*. La bande passante du signal issu de cette limitation en couple est inférieure à celle du moteur. La réponse en vitesse de ce dernier présente ainsi une pente constante directement liée à cette saturation en couple.



**Figure V.7** – Tracé du coefficient de transfert d'oxygène en fonction de la vitesse d'agitation

Les valeurs des tensions en entrée et en sortie correspondantes aux différentes vitesses d'agitation présentes sur la figure V.7 ont été prélevées sur le tableau V.1.

Vitesse (en tr/min)	0	200	350	500	650	800
$V_{in}(V)$	1.91	2.6863	3.2702	3.8540	4.4379	5.0218
$V_{out}(V)$	0.02	1.0545	1.8248	2.5951	3.3654	4.1357

**Tableau V.1** – Table de correspondance vitesse d’agitation et tension d’entrée et de sortie

$V_{in}$  et  $V_{out}$  correspondent respectivement aux tensions prélevées à l’entrée et à la sortie du moteur. Ces tensions sont converties par la suite en vitesse de rotation (*rpm*) suivant le modèle décrit en [V.2](#).

Toutes ces informations nous ont permis d’établir un modèle mathématique pour l’association du moteur et de l’agitateur. Leur dynamique est régie par le modèle expérimental suivant :

$$Mcc(p) = k \left( \frac{1}{\tau p + 1} - z_m \right) \quad (V.1)$$

où  $p$  est la variable de Laplace.  $k$  est le gain statique du système et il est identifié  $k = 1.3$ .  $\tau$  est la vraie constante de temps du moteur qui n’apparaît pas à la figure [V.7](#) suite à la limitation sécuritaire imposée par l’amplificateur de puissance. Elle a été identifiée  $\tau = 0.85$ .  $z_m$  est la zone morte et elle est mesurée à  $z_m = 1.925 \text{ Volt}$ . Si on applique une tension en dessous de cette valeur, le moteur reste immobile.  $Mcc(p)$  est la fonction de transfert entre la tension d’entrée et la tension de sortie (en Volte) du système moteur et agitateur.

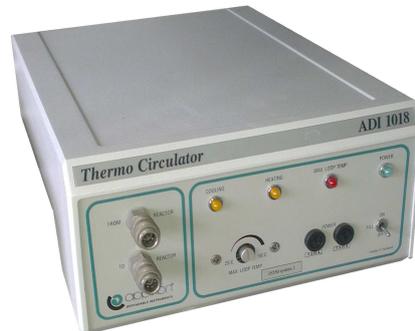
Pour le bon fonctionnement de l’association de l’amplificateur de puissance et du moteur à courant continu, nous avons besoin d’établir un modèle de conversion de la vitesse de rotation à la tension appliquée au moteur. Le modèle suivant a été identifié expérimentalement :

$$W = \frac{V + 495.92}{257.53} \quad (V.2)$$

où  $W$  est la vitesse de rotation exprimée en *rpm* et  $V$  est la tension appliquée au moteur exprimée en *Volt*.

- Régulateur de température** : Le thermocirculateur *ADI – 1018* est un régulateur de température pouvant être associé au biocontrôleur *ADI – 1030* et à des fermenteurs autoclavables de 1 à 20 *litres*. Le régulateur est capable d’activer le chauffage ou le refroidissement et la température maximale dans la boucle d’asservissement peut être ajustée jusqu’à une consigne de 95 *degré Celsius*. Sa façade est composée d’une interface avec le

### V.3 Caractéristiques des différents éléments



**Figure V.8** – Thermo-Circulateur

réacteur (raccordements vers le réacteur), des indicateurs de fonctionnement (chauffage, refroidissement et température maximale de la boucle) et d'un interrupteur à 3 positions (Marche/Remplissage du circuit/Arret).

6. **Balances** : Ces balances de laboratoire offrent une capacité de mesure relativement pré-



**Figure V.9** – Balances

cise sur une gamme comprise entre 1 *mg* et 34 *kg*. Elles peuvent communiquer avec l'unité centrale à l'aide d'une liaison série via un protocole *ISO* ou *GLP*.

7. **Pompe à injection ISM 871** : Le Midi-Vario est une pompe péristaltique compacte conçue pour une utilisation industrielle afin de répondre facilement aux exigences de nombreuses applications de pompage. Elle a été élaborée avec une tête de pompage à 4 canaux pour les emplacements des cordons d'alimentations. Elle peut assurer un débit variant de 0.003 à 85 *ml/min*.
8. **Capteur d'oxygène** : Ces capteurs sont des doubles analyseurs de gaz équipés d'un détecteur d'oxygène électrochimique avec une espérance de vie de 5 *ans*. Ils sont capables



Figure V.10 – Pompe Peristaltic



Figure V.11 – Capteur de pression d'oxygène

de fournir une analyse précise de l'oxygène dans l'air sur une plage de 0 à 100% par rapport à la saturation avec un pas relativement petit, ainsi que la concentration de  $CO_2$  des *ppm* jusqu'à 100%. Ils délivrent les analyses en ligne de manière continue avec un temps de réponse typique de 20 *seconde* pour une variation de 90% de la composition en oxygène et de 10 *seconde* pour une variation de 90% du  $CO_2$ . Le flux de gaz entrant peut être ajusté par la valve débitmètre/aiguille sur la face avant de l'analyseur.

## 4 Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'implémentation sur le bioréacteur des différentes stratégies de commande présentées dans le chapitre précédent et aux résultats expérimentaux obtenus. Dans les chapitres précédents, nous avons synthétisé deux algorithmes de commande nonlinéaire afin de réguler la concentration en oxygène dissout dans une culture microbienne à un niveau stratégique. Nous rappelons que le pilotage de la réaction n'entre pas

dans le cadre de ces travaux et que les expérimentations ont été réalisées en utilisant une stratégie de commande qui consiste à imposer un profil d'alimentation optimal en substrat. Les lois de commandes ont été synthétisées à l'aide d'un modèle de connaissance décrivant le comportement dynamique du taux d'oxygène dissout durant toute la fermentation. Leurs performances ont été ensuite validées en simulation.

Le modèle de connaissance utilisé pour la synthèse de la commande présente des incertitudes de modélisation portant en particulier sur les expressions du  $K_L a$  et de la  $r_{O_2}$ . La trajectoire de la  $r_{O_2}$  (vitesse de consommation de l'oxygène) étant mal connue ainsi elle est considérée pendant les manipulations comme une perturbation qui doit être gérée par le système de commande. En outre, le système de commande est soumis à des bruits de mesure issus du capteur d'oxygène pouvant fortement affecter les actionneurs. Dans ces conditions, les propriétés de robustesse en stabilité et en performances des systèmes de commande testés sont essentielles. La robustesse de l'observateur par rapport à une erreur de modélisation sur la vitesse de réaction a déjà été étudiée théoriquement et nous avons montré que l'erreur d'observation converge dans une boule dont la taille dépend de la borne supérieure de l'incertitude. Cependant, la stabilité des systèmes de commande associant l'observateur continu discret et les lois de commande présentées au chapitre 4 n'a pas encore été démontrée. Il s'agit d'un problème ouvert. Il en est de même pour l'analyse de robustesse en stabilité et en performances de ces systèmes de commande non linéaires.

Pour tenter de donner quelques réponses à ces questions ouvertes, cette section est consacrée à une analyse expérimentale de stabilité et de performances de la structure de commande proposée. Une première partie présente une validation de l'observateur continu discret en utilisant des mesures expérimentales. La seconde partie présente les résultats de la régulation du taux d'oxygène dissout obtenus à l'aide des deux lois de commande lors d'une fermentation de bactéries de type *Pseudomonas putida* alimentée en glycérol.

### 4.1 Analyse des performances de l'observateur

Pour valider l'observateur continu discret, nous avons utilisé des données expérimentales provenant d'une fermentation de levure alimentée en glucose. Ces données sont constituées des mesures respectives de la concentration en oxygène dissout ( $O_2$ ) échantillonnées à la cadence de 5 secondes et de la reconstruction du coefficient de transfert de l'oxygène ( $k_L a$ ). Les mesures ont été extraites durant la phase expérimentale en boucle ouverte où l'oxygène est consommé par la biomasse et subit une chute vers la valeur de référence choisie. La synthèse de l'observateur est réalisée à l'aide du modèle de connaissance II.8. Ce dernier vérifie en effet toutes les hypothèses

nécessaires à la synthèse de l'observateur continu discret III.41. Les paramètres de l'observateur ont été fixés de sorte que la trajectoire des états estimés converge exponentiellement vers celle des états du système. Leurs choix résultent d'une part de la contrainte imposée par rapport à la période d'échantillonnage maximal admissible et d'autre part d'un compromis entre la vitesse de convergence et la sensibilité aux bruits de mesure. Cette sensibilité est particulièrement critique dans un contexte de boucle fermée où la commande est une fonction des états estimés délivrés par cet observateur.

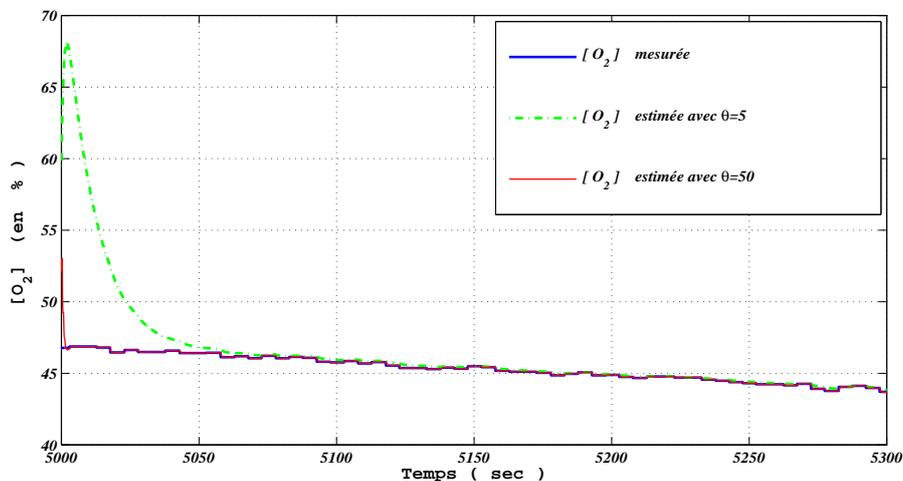


Figure V.12 – Pompe Peristaltic

La figure V.12 montre des résultats de reconstruction du taux d'oxygène dissout à l'aide de l'observateur continu discret sous *Matlab* en utilisant les données expérimentales échantillonnées. La matrice de gain est choisie telle que  $K = [0.13; 0.005]$ . Pour cette valeur, la matrice ( $\bar{A} = A - KC$ ) est de type Hurwitz et l'erreur d'observation converge exponentielle vers une boule dont le diamètre dépend du choix de  $\theta$ . Deux valeurs différentes de  $\theta$  sont comparées sur la figure V.12, respectivement  $\theta = 5$  et  $\theta = 50$ . Les trajectoires correspondantes ont été représentées en pointillés et comparées à la mesure. Pour  $\theta = 50$ , la dynamique de l'observateur est trop rapide et celui-ci recopie en conséquence tout le bruit provenant du capteur et de la communication. Ce réglage ne peut être retenu dans un contexte de commande où il est impératif de désensibiliser la commande par rapport aux bruits de mesure. Pour  $\theta = 5$ , l'observateur est moins rapide, mais le compromis rapidité/ sensibilité au bruit est nettement plus acceptable que pour  $\theta = 50$ .

## 4.2 Performances en régulation

Afin de valider les performances des lois de commande proposées, plusieurs campagnes expérimentales ont été conduites sur le bioréacteur. La robustesse des systèmes de commande a préalablement été testée en simulation en introduisant des perturbations de sortie et des bruits de mesure sur l'état. Les résultats obtenus ont été suffisamment satisfaisants pour s'engager sur la voie de la validation expérimentale.

Nous allons présenter dans un premier temps les résultats obtenus avec la commande de type grand gain lors d'une fermentation de levure alimentée en glucose et opérée en mode batch. Ces résultats ont permis de valider la loi de commande et d'élargir la manipulation en opération fed-batch. Nous présentons par la suite les résultats obtenus avec le même type de commande sur une fermentation de bactéries *Pseudomonas putida* TM alimentée en glycérol et opérée en fed-batch. Enfin, nous présentons les résultats obtenus avec la commande de type backstepping sur la même fermentation avant de tirer des conclusions sur la robustesse et les performances des deux systèmes de commande.

### 4.2.1 Performances de la commande Grand gain

Rappelons que ce contrôleur fait partie de l'ensemble des techniques de commande non linéaire développées pour répondre aux exigences grandissantes du monde industriel en terme de performances dans les boucles d'asservissement. La synthèse s'appuie sur un modèle de connaissance soumis à certaines conditions structurelles. Il a été démontré que dans le cas nominal, la commande grand gain garantit en temps fini une convergence exponentielle vers zéro de l'erreur de poursuite. Rappelons également que l'application qui nous intéresse concerne un problème de régulation sans suivi de trajectoire.

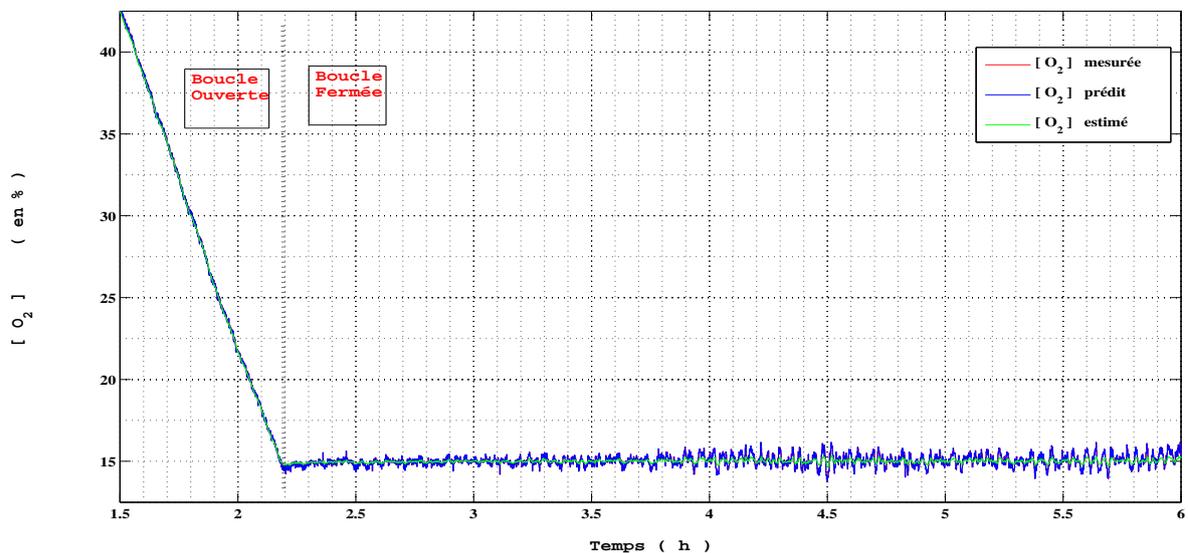
Nous avons implémenté l'algorithme de commande à l'aide du logiciel *Matlab/Simulink* sur la carte de commande *DSPACE - rti - 1104*. L'objectif consiste à réguler la concentration en oxygène dissout à une valeur de référence stratégique  $O_{2,ref} = 15\%$  tout en forçant le débit d'alimentation à suivre une trajectoire désirée  $D$ .

**Résultats en mode batch sur la levure :** Une première validation expérimentale a été réalisée sur une fermentation de levure alimentée en glucose et opérée en mode batch ( $D(t) = 0$ ). A l'instant initial, nous avons introduit une concentration  $X_0 = 0.1 \text{ g/l}$  de levure, une concentration  $S_0 = 6 \text{ g.l}^{-1}$  de glucose et de l'eau afin de remplir la cuve à un volume égal  $V = 1.5 \text{ l}$ . Le réacteur est ensuite fermé pour démarrer la réaction. Les mesures des différents paramètres (température, ph, oxygène et dioxyde de carbone)

## Chapitre V. Étude Expérimentale

sont prélevées à l'aide du biocontrôleur *ADI 1030* et sont disponibles avec une période d'échantillonnage de 5 *secondes*.

Les paramètres de synthèse de l'observateur prédictif III.49 ont été fixés aux valeurs suivantes  $K = [0.02; 0.005]$  et  $\theta = 10$ . Les performances en régulation sont reportées sur les figures suivantes indiquant les évolutions respectives de la concentration en oxygène dissout mesurée, de son estimée et de l'estimée de la vitesse de consommation en oxygène. Les évolutions du  $k_L a$  calculé et reconstruit à partir de la vitesse d'agitation mesurée en utilisant le modèle II.13 sont également reportée.



**Figure V.13** – Tracé de la concentration en oxygène dissout dans la réaction

Sur la *figure V.13*, nous pouvons distinguer à nouveau, comme lors des essais en simulation, les phases de boucle ouverte et de boucle fermée sur la dynamique de l'oxygène.

La phase en boucle ouverte débute avec un taux d'oxygène dissout quasi saturé (de l'ordre de 100%). Ensuite, les cellules consomment de l'oxygène pour leur croissance et le taux d'oxygène dissout chute jusqu'à la valeur de référence  $O_{2,ref} = 15\%$ . Cette valeur est atteinte à l'instant  $t_{bf} = 2.2 h$  qui marque la fin de la phase de boucle ouverte. Pendant cette période, le  $k_L a$  est maintenu constant à  $0.009 s^{-1}$  (cf. *figure V.14*) correspondant à une vitesse d'agitation de  $N = 350 tr/min$ . Cette valeur de vitesse est fixée de manière stratégique, car elle permet de garantir une homogénéité de la solution dans tous les compartiments du réacteur

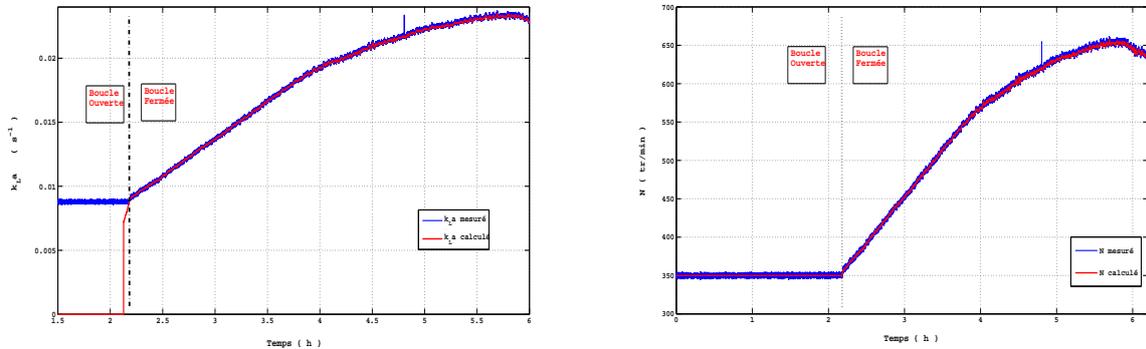


Figure V.14 – Tracé du coefficient de transfert de l'oxygène et de la vitesse d'agitation

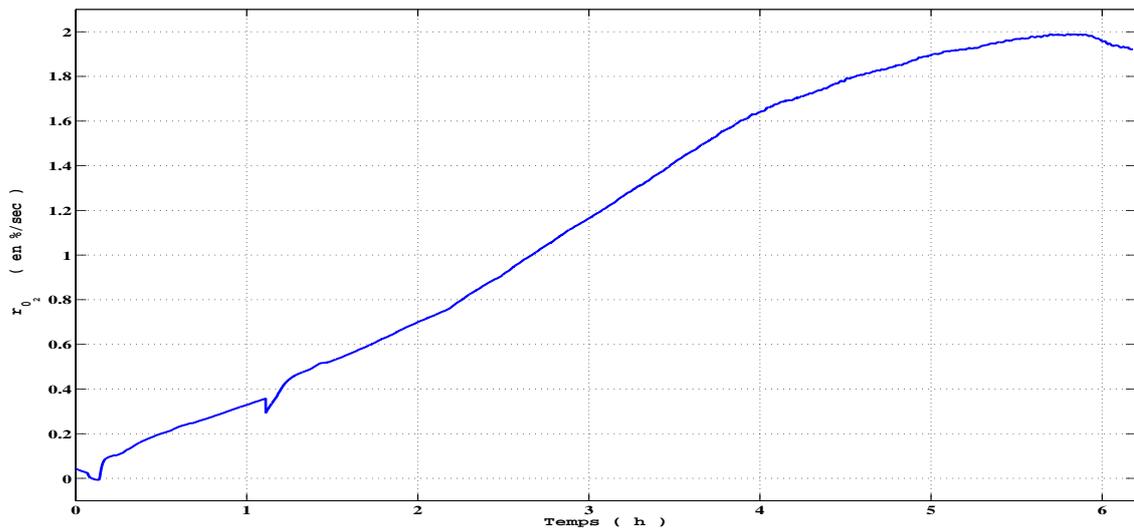
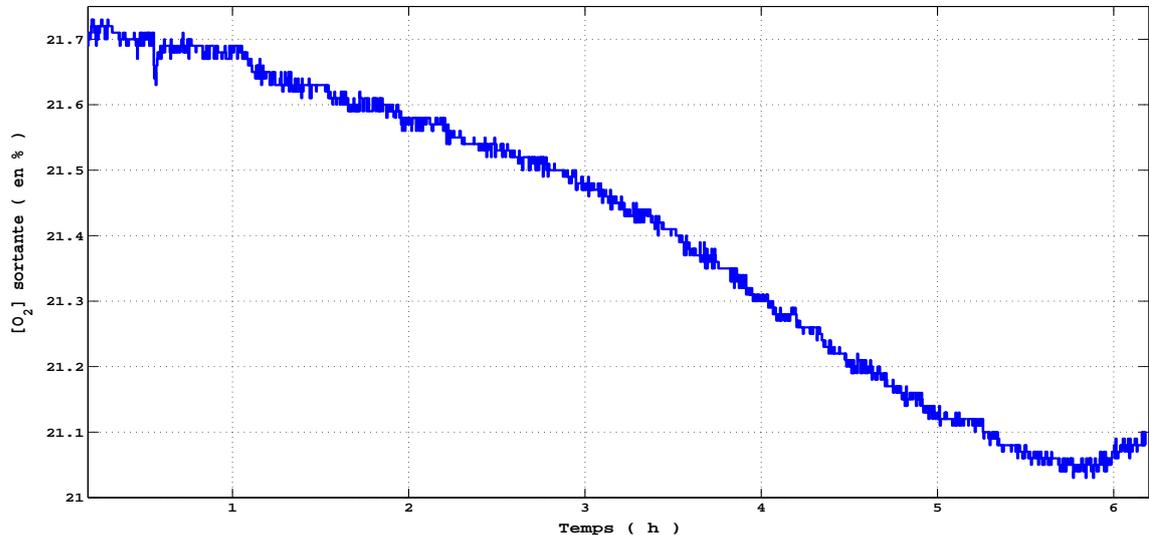


Figure V.15 – Tracé de la vitesse de consommation de l'oxygène

Ensuite débute la phase en boucle fermée où le taux d'oxygène dissout est régulé à 15% avec une précision de  $\pm 1\%$ . Durant cette phase, la croissance de la biomasse entraîne une augmentation de la vitesse de consommation de l'oxygène dissout ( $r_{O_2}$ ) ce qui est conforme aux prévisions de la loi de Monod et nettement visible sur la *figure V.15*. Une simple étude du modèle de connaissance de l'oxygène dissout permet de constater que pour maintenir le taux d'oxygène à un niveau constant, le  $K_{La}$  doit compenser les variations de la vitesse de consommation. L'expression de la loi de commande traduit d'ailleurs explicitement ce phénomène. C'est ce que nous constatons expérimentalement et la variable de commande, en l'occurrence la vitesse d'agitation, croit donc également.



**Figure V.16** – Tracé de la concentration en oxygène non consommée

Sur la *figure V.13*, nous pouvons constater que les mesures sont violemment perturbées et fortement bruitées. La commande reste cependant tout à fait acceptable et notamment relativement peu sensible aux bruits de mesure. Nous pouvons également étudier l'évolution des performances du système de commande sur la durée de la fermentation. La précision obtenue lors du passage en boucle fermée est de l'ordre de 0.5%. Ensuite, cette précision se dégrade durant la fermentation tout en restant à un niveau acceptable. Nous émettons l'hypothèse que cette dégradation de performances est liée à une erreur de modélisation du  $k_La$  pour de grandes vitesses d'agitation. Rappelons en effet que la détermination de la commande du moteur d'agitation nécessite l'inversion en temps réel de la relation entre cette grandeur et le  $kla$  qui représente la variable de commande virtuelle synthétisée par les algorithmes de commande. La modélisation expérimentale décrite au chapitre 2 a conduit à une relation parabolique pour décrire ce modèle. D'autres modèles probablement plus réalistes ont été proposés dans la littérature.

Sur la *figure V.16*, nous avons reporté les mesures de la concentration en oxygène sortant de la culture ( $O_{2,ev}$ ) avec le capteur de gaz. Ce paramètre correspond à l'oxygène non consommé par les cellules. Il permet de déterminer la quantité d'oxygène consommée par unité d'heure (équivalent à la  $r_{O_2}$ ) à partir d'une simple équation de bilan puisque la quantité d'oxygène injectée à la culture est prédéfini et par conséquent connue. Cette

stratégie peut nous permettre d'améliorer le modèle du  $k_La$  ou d'accéder à une modélisation en ligne (cf. *Chapitre II* sur l'identification du  $k_La$ ).

### Résultats en mode fed-batch lors de la fermentation de la bactérie *putida* TM : Après

la validation expérimentale de la commande de type grand gain sur la levure, nous avons procédé à une deuxième fermentation de bactéries de type *Pseudomonas putida* alimentée en glycérol et opérée en mode fed-batch. Au démarrage, le mode opératoire reste identique au mode batch. On introduit une concentration  $X_0 = 0.2 \text{ g/l}$  de bactéries, une concentration  $S_0 = 15 \text{ g/l}$  de glycérol et de l'eau pour remplir la cuve à un volume un peu inférieur  $V = 1.5 \text{ l}$ . Le réacteur est ensuite fermé pour lancer la culture. Lorsque le substrat initialement présent dans la cuve a été suffisamment consommée et que sa concentration ait atteint un niveau critique, une source d'alimentation en glycérol est apportée à l'aide de la pompe *ISM 871*. La concentration en substrat de cette solution et le débit d'alimentation sont respectivement fixés à  $S_{in} = 166 \text{ g/l}$  et  $D = 0.0046 \text{ l/h}$ . Ce débit est choisi de manière à maintenir à un niveau constant la concentration en substrat dans la solution. Ceci permet d'éviter l'effet inhibiteur de la dilution sur la croissance des cellules. Finalement, l'alimentation sera coupée dès lors que la cuve sera remplie.

La reconstruction du taux d'oxygène dissout entre deux instants de mesure et l'estimation de la vitesse de consommation sont réalisées à l'aide de l'observateur continu discret III.41 et les paramètres de synthèse ont été choisis comme suit :  $K = [0.02; 0.005]$  ;  $\theta = 10$ . Les paramètres de synthèse de la commande sont fixés comme suit :  $K = [0.005; 0.0055]$  ;  $\lambda = 10$ . Les résultats expérimentaux sont reportés sur les figures suivantes.

Sur le tracé de l'évolution du taux d'oxygène dissout figure V.17, nous pouvons distinguer trois phases. Comme lors de l'expérience précédente, la première est une étape en boucle ouverte où la concentration en oxygène subit une forte chute. Au démarrage, l'oxygène est présent avec un taux de 90% puis il est consommé par les bactéries jusqu'à la valeur de référence  $O_{2,ref} = 15\%$  atteinte à l'instant  $t_{bf} = 4h30min$ . Durant cette période, la vitesse d'agitation  $N$  est fixée à  $350 \text{ tr/min}$  pour assurer une homogénéité de la solution. La boucle fermée est ensuite enclenchée. Deux étapes peuvent être distinguées :

**Un mode batch** utilisé jusqu'à  $9h$ , où la concentration en oxygène est régulée à 15% avec une précision de  $\pm 1\%$ . Le  $k_La$  croit alors relativement vite en raison de la forte demande en oxygène des cellules.

**Un mode fed-batch** utilisé ensuite et jusqu'à la fin de la fermentation, où la concentration en oxygène est parfaitement régulée à 15% avec une précision de  $\pm 1\%$ . Cette

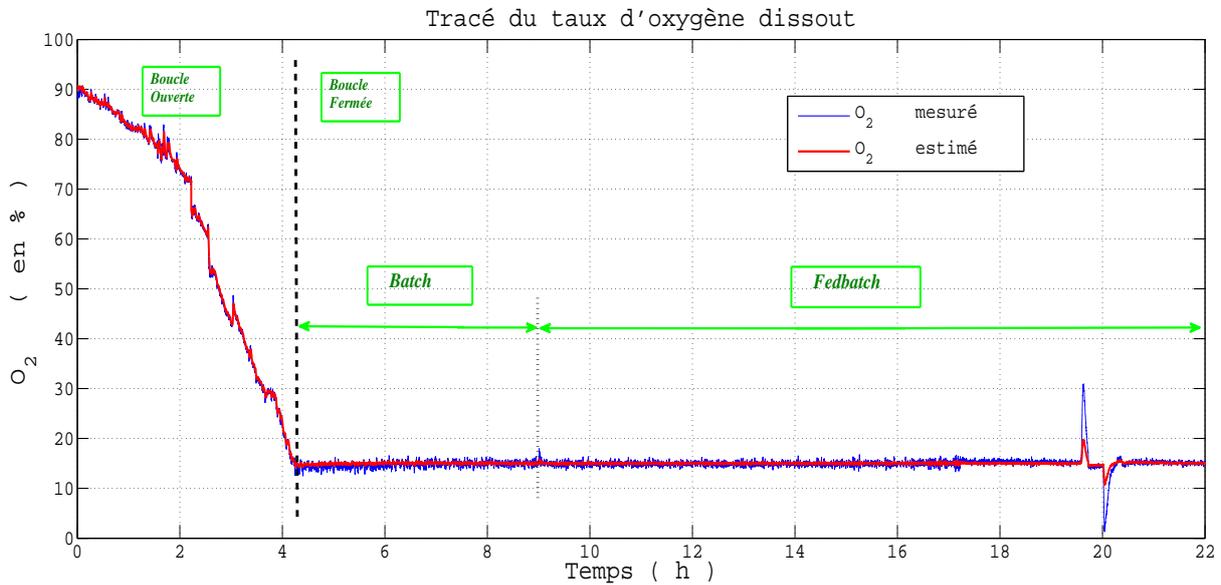


Figure V.17 – Tracé de la concentration en oxygène dissout dans la réaction

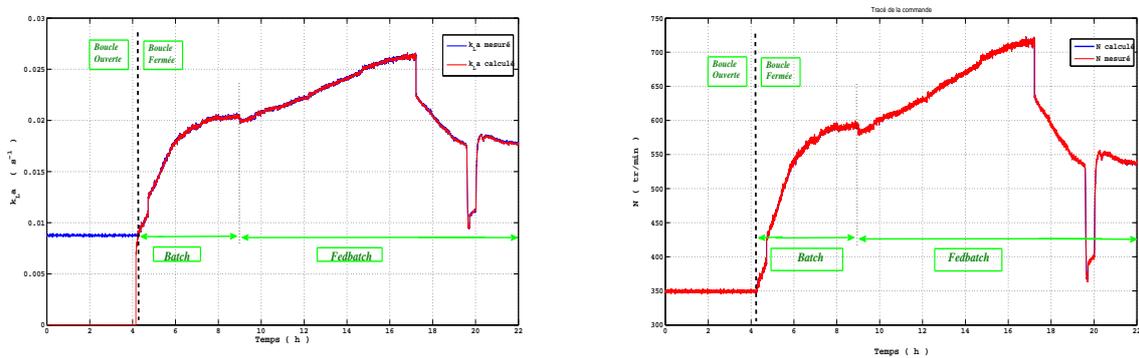


Figure V.18 – Tracé du coefficient de transfert de l'oxygène et de la vitesse d'agitation

phase est également marquée par une forte augmentation de la vitesse d'agitation et du  $K_L a$ . Sur le relevé de l'évolution du taux d'oxygène dissout, deux phénomènes assimilables à des perturbations d'amplitude égales à 14% peuvent être remarqués durant cette période. Le premier est dû à l'ajout d'une solution anti-mousse et le second à une coupure de l'alimentation en substrat. Ces perturbations sont correctement rejetées par le système de commande.

La vitesse de consommation en oxygène  $r_{O_2}$  augmente de manière exponentielle sur toute la durée de la fermentation avec des constantes de temps légèrement différentes selon les phases(cf. *figure V.19*). L'augmentation est due à la multiplication des micro-organismes

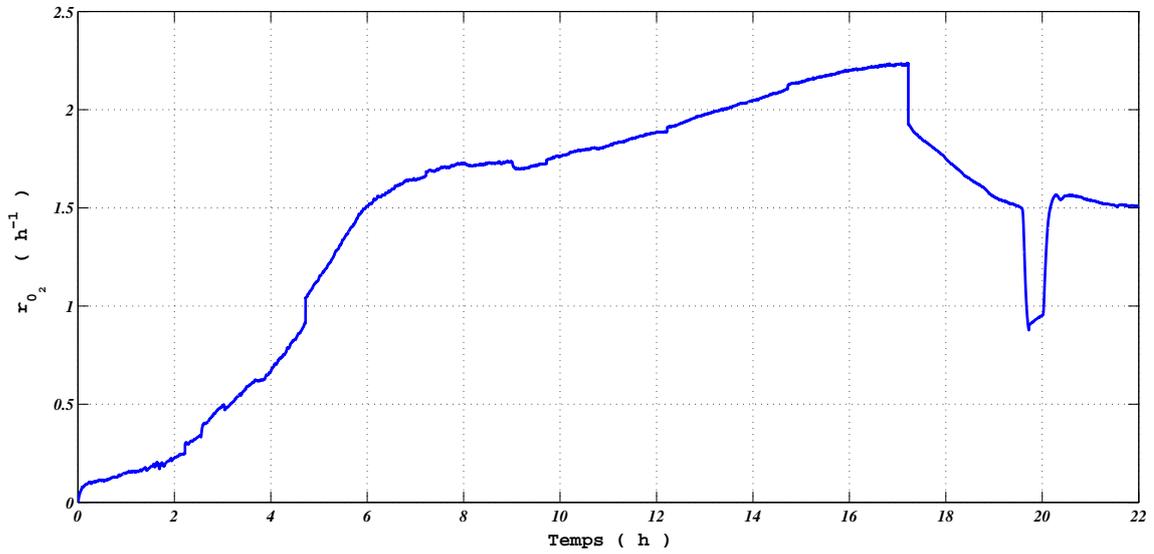


Figure V.19 – Tracé de la vitesse de consommation de l'oxygène

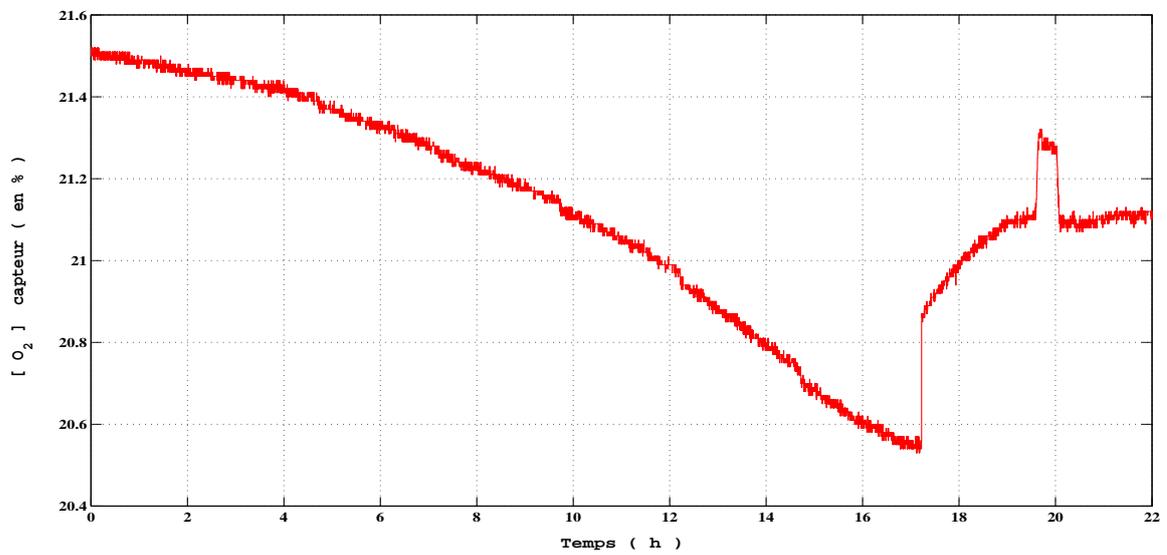


Figure V.20 – Tracé de la concentration en oxygène et du gaz carbonique non consommée

sans la solution. Nous avons également prélevé la concentration en oxygène sortant de la culture pour une éventuelle identification du  $k_L a$ .

Lors de cette expérimentation, nous pouvons remarquer que les performances du système de commande ne sont pas dégradées au fur et à mesure de l'avancement de la réaction

(cf. *figure V.17*). La précision de la régulation reste inférieure à  $\pm 1\%$ . Ceci est dû à une meilleure modélisation du  $k_L a$ , d'où l'intérêt de la première expérimentation.

### 4.2.2 Avec la commande Backstepping

Nous allons présenter dans cette partie de nouveaux résultats expérimentaux que nous avons obtenus en implémentant la commande backstepping sur le bioréacteur.

Rappelons que le backstepping est une stratégie de commande non linéaire utilisant l'approche systématique de Lyapunov pour synthétiser des algorithmes de contrôle qui stabilisent les systèmes non linéaires ayant une structure triangulaire inférieure. Pour les systèmes ayant une incertitude ou un manque d'information sur certains paramètres du modèle, la commande par backstepping est la plus adéquate pour garantir les performances de stabilité et de robustesse.

Lors de l'expérimentation, les stratégies mises en oeuvre consistent dans un premier temps à considérer la  $r_{O_2}$  comme étant un paramètre inconnu et ne pas l'introduire dans l'algorithme de commande. Ceci oblige cependant le correcteur à fournir davantage d'efforts et les paramètres de synthèse seront choisis un peu plus élevés afin de compenser toutes les incertitudes. Ensuite, on introduit un intégrateur dans la conception de la commande pour rejeter toutes les perturbations de charges de type échelon et réduire l'influence des bruits sur la commande.

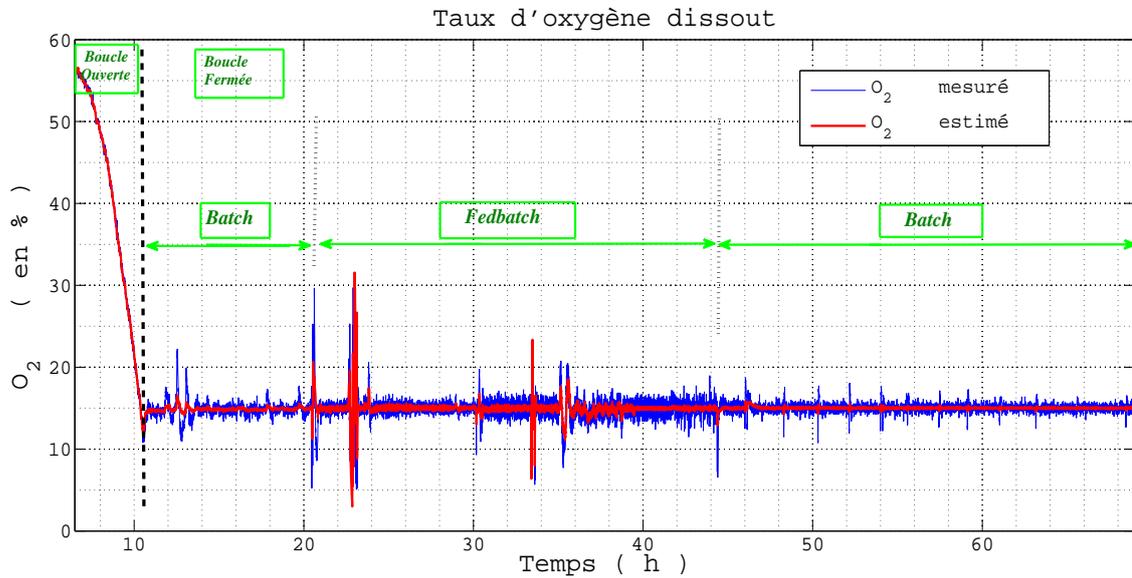
Le principe de l'implémentation reste identique à celui avec la commande grand gain. Nous avons développé notre algorithme sur *matlab/simulink* avant de le charger sur la carte *DSPACE rti 1104*. L'objectif de la commande consiste à réguler la concentration en oxygène dissoute dans la réaction à une valeur de référence  $O_{2,ref} = 15\%$  (avec une précision de  $\pm 2\%$ ) tout en forçant le débit d'alimentation à suivre une trajectoire optimale  $D$ . Dans ce qui suit, nous cherchons essentiellement à illustrer les performances du backstepping dans une configuration globale, à savoir que la communication est fortement bruitée et que des perturbations de type échelon peuvent intervenir à chaque instant sur les capteurs.

Pour tester la commande, nous avons lancé de la même manière que précédemment une fermentation de bactéries *Pseudomonas putida* alimentée en glycérol et opérée en mode fed-batch. Au début de la culture, nous avons introduit une concentration  $X_0 = 0.2 \text{ g/l}$  de bactéries, une concentration  $S_0 = 15 \text{ g/l}$  de glycérol et de l'eau afin de remplir le réacteur à un volume un peu inférieur à  $1.5 \text{ l}$ . Le réacteur est ensuite fermé pour démarrer la culture en batch.

Une fois que le substrat initialement présent est consommé jusqu'à une concentration critique, nous déclenchons une alimentation en glycérol, à travers la pompe *ISM 871*, à la concentration  $S_{in} = 166 \text{ g/l}$  et avec un débit  $D = 0.0046 \text{ l/h}$ . Ce débit doit coïncider avec la capacité

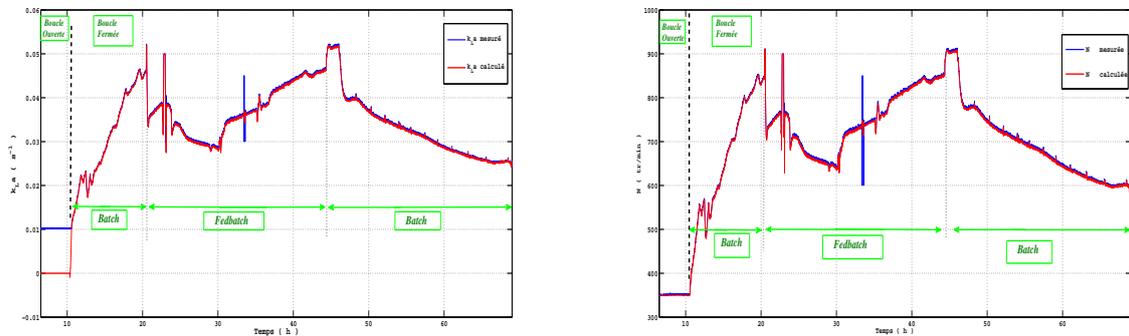
oxydative des cellules pour éviter la production des éléments inhibiteurs et assurer une condition de croissance favorable aux cellules. L'alimentation sera coupée quand la cuve sera remplie.

Par ailleurs, nous utilisons l'observateur impulsif continu discret III.41 pour reconstruire les mesures de l'oxygène entre les instants d'échantillonnage. Ses paramètres de synthèse sont choisis de façon identique que dans la manipulation précédente :  $K = [0.02; 0.005]$  ;  $\theta = 10$ . Les paramètres de synthèse de la commande sont fixés comme suit :  $c_1 = 0.01$  ;  $c_2 = 0.009$ . Les résultats de l'expérimentation sont affichés dans les figures suivantes. Elles exposent cependant notre contribution sur la régulation de l'oxygène et les évolutions du coefficient de transfert  $K_La$ , de la vitesse d'agitation  $N$  et de la vitesse de consommation  $r_{O_2}$ .

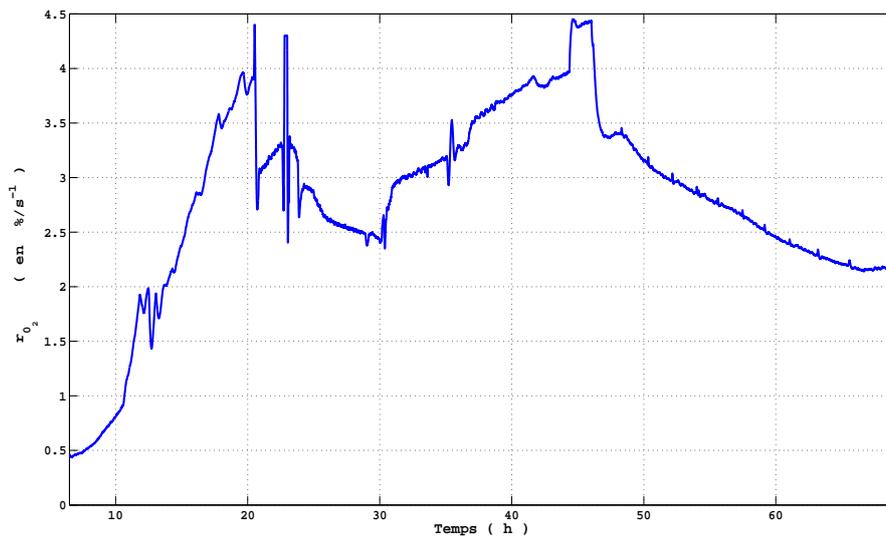


**Figure V.21** – Tracé de la concentration en oxygène dissout dans la réaction

La première remarque que nous pouvons faire sur cette manipulation est qu'elle est plus longue que les précédentes et qu'elle dure pratiquement 3 jours. Sur les mesures de l'oxygène (cf. figure V.21), nous pouvons distinguer 4 phases. La première est la boucle ouverte où la concentration en oxygène subit une forte chute. Cette concentration était initialement à 100%, puis les bactéries ont consommé l'oxygène jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur de référence  $O_{2,ref} = 15\%$ . Pendant la boucle ouverte, le  $K_La$  appliqué (cf. figure V.18) est constant ( $K_La = 0.009 h^{-1}$ ). Ce paramètre est intrinsèquement lié avec la vitesse d'agitation  $N$  par la relation II.13. La vitesse d'agitation est aussi constante ( $N = 350 tr/min$ ), vitesse suffisante pour assurer une homogénéité de la solution. La boucle fermée est déclenchée lorsque la concentration en oxygène a atteint la valeur de référence et nous distinguons 3 phases dans cette boucle :

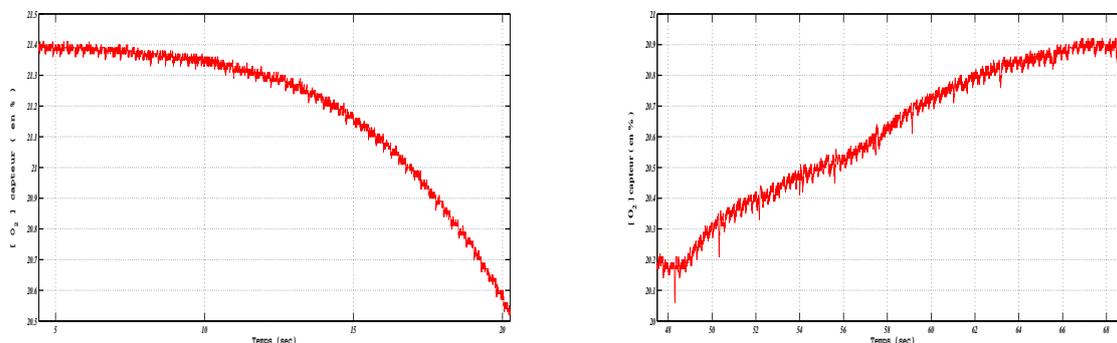


**Figure V.22** – Tracé du coefficient de transfert de l’oxygène et de la vitesse d’agitation



**Figure V.23** – Tracé de la vitesse de consommation de l’oxygène

- La première est une opération batch. L’oxygène est régulé à 15% avec une précision de  $\pm 2\%$ . Le  $K_L a$  croit exponentiellement ainsi que la vitesse d’agitation. Cela est du à la forte demande des cellules en oxygène. De nombreuses perturbations sont intervenues sur les mesures de l’oxygène et elles ont toutes été rejetées.
- La deuxième phase est une opération fed-batch où nous avons déclenché une alimentation en glycérol. Cette phase est très perturbée due aux nombreuses manipulations (concernant les prélèvements et les ajouts des produits anti-mousses) que nous avons effectués et la bande de régulation est un peu élargie. Au vu de l’asservissement, ces manipulations sont



**Figure V.24** – Tracé de la concentration en oxygène et du gaz carbonique non consommée

considérées comme des perturbations de charge et nous constatons qu’elles ont toutes été rejetées par le correcteur.

- La troisième phase est un retour en batch suite au remplissage de la cuve. L’oxygène est toujours régulé à 15% avec une précision de  $\pm 2\%$ . La commande reste adaptée à la situation et elle corrige toutes les imperfections sur la poursuite. Par contre pendant cette phase, nous constatons un écart qui se crée entre le  $K_{l}a$  livré par le correcteur et celui reconstruit avec les mesures. Cela est dû à un modèle de transfert d’oxygène qui devient de plus en plus fausse. Car, le  $K_{l}a$  était modélisé uniquement en fonction de la vitesse d’agitation (cf. II.13) et nous avons considéré les variations des autres paramètres notamment la densité et la viscosité comme négligeables. Hors à ce stade de la culture, la réaction devient condensée et la considération de ces paramètres dans le modèle de transfert d’oxygène devient imminente.

Sur la figure V.23, nous avons présenté la reconstruction de la vitesse de consommation de l’oxygène  $r_{O_2}$  et sur la figure V.24, les mesures de la concentration en oxygène non-consommée ou sortante pendant les opérations batch. Ces mesures seront utilisées par la suite pour remodeliser le  $K_{l}a$  sur une plus grande plage de fonctionnement.

## 5 Conclusion

Dans ce cinquième chapitre concernant la réalisation expérimentale, nous avons détailler une validation expérimentale des algorithmes de commande non linéaires développés dans ce mémoire. La démarche adoptée nous a autorisés à proposer dans un premier temps une maquette expérimentale permettant d’exposer le système d’acquisition supportant la communication entre les différents composants du bioréacteur et de définir leurs caractéristiques. Ensuite,

## Chapitre V. Étude Expérimentale

---

nous avons confirmé la validité de l'observateur en le simulant avec les mesures réelles d'une vraie fermentation avec du levure. Par la suite, nous avons présenté de manière exhaustive tous les résultats obtenus avec la commande grand gain et avec la commande backstepping. Toutefois, la réalisation de ces derniers est devenue possible grâce à l'utilisation des logiciels *matlab/simulink* et *ControlDesk* et des cartes *Dspace rti 1104* et *PCI express*.

Les résultats réalisés en phase de régulation ont été très satisfaisants malgré toutes les contraintes de fonctionnement du bioréacteur, notamment les perturbations de charge et les bruits de mesure. Ces résultats sont donc très encourageants et ils restent accessibles pour une mise en oeuvre de quelque pratique sur les bioréacteurs.

---

# Conclusion générale et perspectives

## 5.1 Conclusion

Dans ce mémoire de thèse, nous avons étudié successivement les différentes étapes permettant l'élaboration d'un système de commande non linéaire pour le pilotage d'un bioréacteur.

Dans le premier chapitre, nous avons proposé une revue bibliographique de différents domaines de l'automatique et de leurs applications dans le domaine des biotechnologies, ceci nous a conduits à orienter cette étude vers deux axes de recherche. Le premier axe concerne l'automatique et nous avons ainsi proposé un état de l'art des différentes approches actuellement disponibles dans les domaines de l'observation et de la commande des systèmes dynamiques. Concernant l'observation, nous avons parcouru chronologiquement les approches linéaires puis non linéaires en citant les différentes techniques novatrices proposées depuis les premiers travaux de Kalman jusqu'aux approches plus récentes portant notamment sur l'observateur de type grand gain et ses variantes. Ensuite, nous avons étudié les extensions de ces approches disponibles dans la littérature afin de situer notre problématique qui concerne la prise en compte des incertitudes de modélisation, la discrétisation des mesures ou la présence de retard pur. Pour la commande, nous avons exposé plusieurs techniques avant de préciser les deux approches que nous avons choisi d'implémenter sur le bioréacteur (la commande grand gain et la commande backstepping). Le deuxième axe concerne les applications de la théorie de l'automatique au génie des bioprocédés, nous y avons fait, dans un premier temps, un résumé des différentes méthodes proposées pour le pilotage des réactions bio(chimiques). Ensuite, nous avons détaillé les différentes stratégies disponibles pour l'asservissement du taux d'oxygène dissout dans un milieu de culture.

Le deuxième chapitre détaille l'établissement du modèle de simulation du bioréacteur étudié. Les différents modes de fonctionnement d'un bioréacteur sont présentés. Un modèle mathématique inspiré des travaux de Bastin et Dochain est établi à partir d'une combinaison des

équations cinétiques et des équations de bilan. Ces équations permettent de décrire le comportement dynamique des concentrations des différents composants contenus dans un bioréacteur. La dynamique de l'oxygène dissout est également modélisée en exploitant les relations exprimant la quantité d'oxygène transférée dans le milieu de culture par unité de temps et la vitesse de consommation de l'oxygène par la bioréaction. Ce modèle de l'oxygène utilisé lors des simulations pour valider les algorithmes d'observation et de commande possède des paramètres qui ont été déterminés par des relations tirées de la littérature et sont donc soumis à de fortes incertitudes. Nous présentons la campagne d'identification expérimentale qui a été réalisée afin d'affiner la connaissance du coefficient de transfert de l'oxygène  $K_L a$  qui est un des paramètres le plus influant sur les performances des observateurs utilisés lors des expérimentations.

Dans le troisième chapitre, le problème de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires à sortie échantillonnée et à sortie retardée est résolu pour une classe de systèmes uniformément observables. La méthode de conception adoptée a conduit à présenter dans un premier temps un bref rappel de la synthèse de l'observateur grand gain continu. Les grandes lignes de la preuve de convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'estimation dans le cas nominal y sont aussi présentées. Les propriétés de l'observateur grand gain continu sont par la suite étendues afin de pouvoir proposer des observateurs capables de s'appliquer à des systèmes ayant des sorties échantillonnées ou retardées.

Concernant les observateurs continus-discrets, nous avons proposé une structure novatrice permettant de représenter différents observateurs déjà détaillé dans la littérature et ceci grâce à l'introduction d'une matrice de pondération  $F(t)$ . Le choix de cette matrice détermine en partie la dynamique de l'observateur ainsi que la valeur maximale de période d'échantillonnage admissible. Plusieurs choix ont été explorés et nous avons donc choisi celui qui maximise la valeur de la période d'échantillonnage admissible. A des fins de comparaison, nous avons détaillé le cas historique où  $F(t)$  est la matrice identité et montré que ce cas conduit à une valeur maximale inférieure aux autres cas. Une condition sur la valeur maximale admissible de la période d'échantillonnage est donnée et cette condition est une fonction d'un des paramètres de synthèse de l'observateur. Notre observateur possède un gain variable en fonction du temps ce qui lui confère une forme particulièrement adaptée à une implémentation temps réel. Nous montrons aussi que cet observateur peut aussi se réécrire sous la forme d'un couple observateur-prédicteur souvent présenté dans la littérature et nous avons démontré que sa convergence est exponentielle si la contrainte sur la période d'échantillonnage est satisfaite. Enfin, nous avons détaillé le cas incertain où la convergence de l'erreur d'observation se fait dans une boule dont le diamètre est relié aux paramètres de synthèse. À noter que la simplification du lien entre la précision de l'estimation et le paramètre de synthèse peut-être un objectif pour une étude

ultérieure.

Concernant les observateurs pour les systèmes à sortie retardée, nous avons proposé une structure composée de  $(m + 1)$  sous-système en cascade. Le premier sous-système est un observateur grand gain continu estimant l'état retardé alors que les  $m$  autres restants sont des prédicteurs. Chaque prédicteur estime l'état du sous-système précédent avancé de  $\frac{\tau}{m}$  secondes. Le prédicteur de rang  $m$  reconstruit ainsi l'état non retardé. La particularité de notre observateur est l'uniformité de la structure des prédicteur et la simplicité du terme de gain, en effet ceux présentés dans la littérature ont une complexité croissante avec la position prédicteur. Notre structure dépend uniquement de l'état du prédicteur retardé et de celui du prédicteur précédent. Le nombre de prédicteurs  $m$  dans la cascade assurant la convergence exponentielle de l'observateur dépend de la valeur du retard et de la constante de Lipschitz majorant les non-linéarités du système à observer.

Dans le quatrième chapitre, nous avons développé deux lois de commande non linéaire pour l'asservissement du taux d'oxygène dissout dans une culture microbienne. La première est une commande du type grand gain et la seconde du type backstepping. L'objectif de commande consiste à maintenir le taux d'oxygène dissout à niveau de référence constant. Chaque loi de commande proposée utilise de manière différente les estimations des paramètres non mesurables ou indisponibles à chaque instant fournies par l'observateur continu-discret. Nous n'avons pas présenté la preuve de convergence du retour de sortie utilisant l'association de l'observateur et de la loi de commande, mais celle-ci sera un de nos objectifs pour nos futurs travaux. L'efficacité de ces lois de commande est montrée en simulation et ensuite confirmée expérimentalement.

Concernant la commande grand gain, elle a été testée expérimentalement et nous avons constaté que la variable de commande est fortement conditionnée par les variations de l'estimation de la vitesse de consommation de l'oxygène. La valeur de cette estimation est nettement supérieure au terme de correction et impose une contrainte de rapidité sur la bande passante de l'observateur. Cette contrainte est néfaste à la qualité de reconstruction. Pour contourner ce problème, la commande de type backstepping a été développée sans introduire de compensation de la vitesse de consommation dans l'expression de loi de commande. La vitesse de consommation est ainsi considérée comme une perturbation qui doit être rejetée par le correcteur. Des simulations ont été effectuées pour illustrer les performances des deux stratégies de commande et les résultats obtenus ont été très prometteurs.

Le cinquième chapitre est consacré à la mise en oeuvre des systèmes de commande et à leur évaluation expérimentale. Nous y détaillons les différentes parties de la chaîne d'acquisition des données du bioréacteur. Le système de pilotage est basé sur les technologies *DSPACE rti1104* et *PCI – Express*. Le protocole utilisé pour la communication entre ces deux cartes est indi-

qué. Nous présentons ensuite les résultats expérimentaux des différentes lois de commande. Ces résultats confirment ceux obtenus en simulation. Il est intéressant de noter qu'à notre connaissance, le niveau de précision obtenu en régulation lors des différentes fermentations n'a jamais été présenté dans la littérature.

Notre principale contribution à travers ce mémoire concerne principalement la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires uniformément observables à sortie échantillonnée et à sortie retardée. Nous avons montré que l'état de ces systèmes peut être estimé avec un observateur de type grand gain ayant un gain variable dans le temps. Nous avons prouvé la convergence de cet observateur dans le cas nominal et dans le cas incertain. Des relations reliant la dynamique de l'observateur et les paramètres de synthèse ont été données. Les résultats obtenus nécessitent que le système remplisse certaines conditions structurelles assez restrictives qu'il serait intéressant de relâcher.

## 5.2 Perspectives

Plusieurs perspectives sont envisageables car de nombreuses pistes restent encore à explorer ou à améliorer. Tout d'abord concernant l'observateur continu discret, nous avons montré que pour les systèmes incertains l'erreur d'observation converge dans une boule dont le diamètre dépend de la période d'échantillonnage maximale admissible ( $\tau_M$ ) et du paramètre de réglage ( $\theta$ ). Cette dépendance est traduite par une expression jugée très complexe et qu'il serait intéressant d'un point de vue mise en œuvre de simplifier. En outre, les deux lois de commande présentées utilisent l'estimée du taux d'oxygène dissout (et dans un cas de la vitesse de réaction) délivrée par l'observateur continu-discret. La preuve de convergence de cette association n'a pas encore été effectuée mais elle fait l'objet de nos efforts actuels. En ce qui concerne le problème d'observation pour les systèmes à retard, nous nous sommes intéressés au cas particulier où le retard est constant mais le cas où le retard est variable doit être étudié de manière approfondie. Nos prochaines études s'orientent dans cette direction.

D'un point de vue expérimental, sur la manipulation actuelle nous envisageons d'implémenter l'observateur proposé pour les systèmes à retard afin de prendre en compte les retards provenant de la dynamique de certains capteurs. L'identification du  $K_L a$  est aussi une piste à explorer, car cette dernière a été effectuée en utilisant une méthode statique exploitant uniquement la vitesse d'agitation sans tenir compte des autres paramètres notamment la densité et la viscosité de la culture. Avec les données expérimentales, nous pouvons ajuster ce modèle afin de réduire les incertitudes. Avec un horizon un peu plus lointain, le pilotage de la culture représente également une perspective majeure dès lors que l'ensemble des conditions requises

pour sa réalisation sont remplies. L'objectif étant de créer un capteur logiciel (observateur) de biomasse sans mesure de celle-ci. En effet, cette mesure suit un processus très longue et surtout nécessite un capteur très onéreux. La mise en place d'un tel capteur serait pour le domaine du génie des procédés un réel progrès.





Dans cette thèse, nous présentons tout d'abord un procédé pilote d'un bioéacteur où l'on s'intéresse à la régulation du taux d'oxygène dissout consommé par une biomasse. Ce réacteur est utilisé pour la validation des observateurs et des lois de commande qui sont proposés dans la thèse.

Dans l'optique de synthèse d'observateurs, nous considérons une classe de systèmes observables pour toute entrée. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au cas où les mesures sont échantillonnées. Un observateur continu-discret est proposé et il est montré que l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro tant que le maximum de la période d'échantillonnage reste inférieur à un certain seuil. Ensuite, nous avons traité le cas où la sortie du système est retardée avec un retard arbitrairement grand et nous avons proposé un observateur en cascade permettant l'estimation de l'état actuel du système. La convergence exponentielle de l'erreur est garantie pourvu que le nombre de sous-systèmes dans la cascade soit choisi de sorte à satisfaire une certaine condition. Deux lois de commande non linéaire de type grand gain et backstepping ont été proposées pour la régulation du taux d'oxygène dissout dans le bioréacteur. Comme ces lois de commande requièrent la connaissance de la vitesse de réaction qui est non mesurable, cette variable a été fournie par l'observateur continu-discret. Des résultats de simulation ont montré les bonnes performances de deux lois de commande utilisant l'observateur qui est proposée. Ces lois ont été implémentées sur le procédé pilote permettant ainsi une validation expérimentale des résultats obtenus.

Mots clés : Bioréacteur, biotechnologie, micro-organisme, biomasse, substrat, coefficient de transfert de l'oxygène, vitesse de consommation de l'oxygène, observateur grand gain, observateur impulsif continu-discret, prédicteur, commande non linéaire, commande grand gain, commande backstepping.

In this thesis, we first present a pilot process of a bioreactor where one is interested in the regulation of dissolved oxygen levels consumed by biomass. This reactor is used for the validation of observers and control laws proposed.

In the context of observer synthesis, we consider a class of observable systems for any input. Firstly, we were interested in the case of system with discret measurements. A continuous-discret time observer is proposed and it is shown that the observation error exponentially converges to zero since the maximum sampling period remains in a ball where the diameter is lower than a certain threshold. Secondly, we treated the case of system with an arbitrarily large output delay and we proposed a cascade observer to estimate the current state of the system. Exponential convergence of the error is guaranteed if the number of subsystems in the cascade is selected with satisfaction to a certain condition. Two nonlinear control law particularly a high gain type and a backstepping one have been proposed to control the dissolved oxygen levels in the bioreactor. As the control laws require knowledge of the reaction rate which is not measurable, this variable was provided by the continuous-discret time observer. Simulation results show the good performances of those control laws using the proposed observer. Those laws have been implemented on the pilot process allowing then a experimental validation of obtained results.

Keywords : Bioreactor, biotechnology, microorganism, biomass, substrate, coefficient of oxygen transfer, oxygen consumption rate, high gain observer, continuous-discrete time observer, predictor, nonlinear control, high gain control, backstepping